САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЭШНИЁЗОВ АБДУМАЛИК ИСКАНДАР ЎҒЛИ

КВАДРАТИК СТОХАСТИК ОПЕРАТОРЛАРНИНГ ТУЗИЛИШИ ВА УЛАРНИНГ ПОПУЛЯЦИОН ГЕНЕТИКА МОДЕЛЛАРИНИ ЎРГАНИШДАГИ ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – математик анализ

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд - 2022

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Эшниёзов Абдумалик Искандар ўғли
Квадратик стохастик операторларнинг тузилиши ва уларнинг популяцион генетика моделларини ўрганишдаги татбиқлари 3

Эшниязов Абдумалик Искандар угли
Структура квадратичных стохастических операторов и ее приложения к изучению моделей популяционной генетики..... 19

Eshniyozov Abdumalik Iskandar o'g'li
The structure of quadratic stochastic operators and its applications to the study of population genetics models 35

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works 37

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЭШНИЁЗОВ АБДУМАЛИК ИСКАНДАР ЎҒЛИ

КВАДРАТИК СТОХАСТИК ОПЕРАТОРЛАРНИНГ ТУЗИЛИШИ ВА УЛАРНИНГ ПОПУЛЯЦИОН ГЕНЕТИКА МОДЕЛЛАРИНИ ЎРГАНИШДАГИ ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – математик анализ

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Самарқанд - 2022

Фалсафа доктори (PhD) диссертация мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM213 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Гулистон давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгашнинг веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Ғанихўжаев Расул Набиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Абдуллаев Жониқул Ибрагимович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Эшмаматова Дилфуза Бахрамовна физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Наманган давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866)231–06–32, факс: (+99866) 235–19–38, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231–06–32, , факс: (+99866) 235–19–38.)

Диссертация автореферати 2022 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2022 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

С.Н.Лакаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, физика-математика фанлари доктори, академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳонда ночизиқли динамик системалар, хусусан квадратик стохастик операторларнинг татбиқлари масалаларига алоҳида аҳамият берилмоқда. Ҳозирги кунда динамик системалар назарияси математиканинг энг ривожланаётган соҳаларидан бири бўлиб, математик таҳлил, дифференциал тенгламалар, топология, эҳтимоллар назарияси, популяцион биология каби турли соҳалардаги кўплаб жараёнларни моделлаштириш замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан бири ҳисобланади. Шу билан бирга чекли ўлчовли симплексда аниқланган квадратик акслантиришларнинг қўзғалмас нуқталарини тўлиқ аниқлаш, тавсифлаш ва қўзғалмас нуқталарнинг хусусиятларини, квадратик стохастик операторлар траекторияларининг асимптотик ҳолатларини тадқиқ қилишга алоҳида эътибор қаратилмоқда.

Жаҳонда динамик системаларнинг математик моделларини такомиллаштиришга қаратилган илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда. Динамик системаларнинг биринчи гуруҳи узлуксиз динамик системалар бўлиб, унда топологик фазода аниқланган вектор майдоннинг интеграл чизиқлари, лимитик нуқталар мавжудлик муаммолари, турғунлик, ечимларнинг бифуркациялари, катастрофлар назарияси каби масалалар, иккинчи гуруҳи эса дискрет динамик системалар ёки каскадлар деб аталади ва унда траекторияларнинг асимптотик ҳолатлари, даврий орбиталарнинг мавжудлик масалаларига оид муаммоларни ҳал этиш бўйича тадқиқотлар устивор ҳисобланмоқда. Шу билан бирга, чекли ўлчовли симплексда аниқланган квадратик стохастик операторларнинг траекторияларини дискрет ва узлуксиз бўлган ҳолларда асимптотик ҳолатларини ўрганишга оид тадқиқотларни ривожлантириш долзарб вазифалардан ҳисобланмоқда.

Республикамизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқларига эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди, хусусан, мамлакатимиз олимлари томонидан динамик системаларни тадқиқ этиш юзасидан кенг кўламли чора-тадбирлар амалга оширилмоқда. Кейинги йилларда мамлакатимиз олимлари бу йўналишда салмоқли натижаларга эришдилар. “Функционал анализ, математик таҳлил, дифференциал тенгламалар ва уларнинг қўлланилиши, ночизиқли системаларни математик моделлаштириш, динамик системалар ва уларнинг қўлланилиши, стохастик анализ, биотиббиёт информатика, ҳисоблаш математика[1]” фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-кувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги қарори.

фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Ушбу вазифаларни амалга оширишда, жумладан, дискрет ва узлуксиз динамик системаларда квадратик акслантиришлар масалалари бўйича тадқиқотларни ривожлантириш ва амалиётга кенг жорий этиш йўналишидаги илмий-тадқиқот ишларини бажариш муҳим ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида» Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Сўнгги йилларда квадратик стохастик операторларни соф математик жиҳатдан ўрганиш бўйича бир қатор таниқли хорижий олимлар катта ҳисса қўшганлар, жумладан G.H. Hardy, S.N. Bernstein, G. Kesten, S.S. Wallander ва бошқалар. Шу билан бирга, ушбу йўналишда Ўзбекистоннинг таниқли олимлари академик Т.А. Саримсақов, Р.Н. Ғанихўжаев, Н.Н. Ғанихўжаев ва бошқаларнинг ишларидан бошлаб бир қатор илмий тадқиқотлар ишлари олиб борилган. Икки ўлчовли симплексдаги квадратик стохастик операторларнинг траекторияларининг тартибсиз ҳаракатларига доир дастлабки мисоллар M.T. Menzel, P.R. Stein va S.M. Ulam (1955) томонидан кўриб чиқилган, сўнгра G. Kesten (1970) ва S.S. Wallander (1972) томонидан исбот қилинган. М.И. Захаревич S.M.Ulam мисолига нисбатан Cesaro бўйича ўртача қийматларининг лимити мавжуд эмаслигини исботлади (1982). Динамик системаларни таснифлаш уларнинг ҳолатларини кўрсатиш, эволюцион оператор хусусиятларини тавсифлаш, вақтга боғлиқлик ва шунга ўхшаш усулларга асосланади. Дифференциал тенгламалар назариясининг сифат назариясида юзага келган узлуксиз динамик системалар, асосан дифференциал тенгламалар ечимлари ҳолатининг кўпхилликлардаги глобал топологик ҳолатини ўрганади. Бу йўналиш бўйича A.Poincare, J.Birkhoff, А.Андронов, А.Н.Колмогоров ва бошқалар шуғулланганлар.

1980-йиллардан бошлаб академик Т.А. Саримсаков раҳбарлигидаги Тошкент математиклари бу тадқиқотларга қўшилдилар. S^2 да аниқланган квадратик стохастик операторлар А.Т. Саримсаков (1981) томонидан, S^3 и

S^4 да аниқланган Вольтерра типидаги квадратик стохастик операторларнинг траекторияларининг ҳаракати эса К.А. Курганов (1984) томонидан ўрганилган. Икки ўлчовли симплексда аниқланган икки Вольтерра акслантиришларининг композицияси траекторияларининг асимптотик ҳаракатлари Д.Б. Эшмаматова (2004), S^4 симплексдаги квадратик гомеоморфизмларнинг динамик хоссалари М.А. Таджиева (2022) томонидан ўрганилган масалаларда салмоқли натажаларга эришилди. Шу билан бир қаторда, ихтиёрий ўлчамдаги симплексда аниқланган квадратик стохастик операторлар учун олинган натижаларни умумлаштириш масаласи етарли даражада ўрганилмаган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим ёки илмий-тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф4-31 рақамли «Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар» мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади популяцион генетикада Вольтерра моделларини ва квадратик стохастик операторлар назарияси билан боғлиқ Вольтерра популяциялари траекторияларининг асимптотик ҳаракатларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

турнирлар назарияси, графлар назарияси ёрдамида чекли ўлчамли симплекснинг ички нуқталари траекторияларининг динамикасини тўлиқ тавсифлаш;

чекли ўлчамдаги ҳоллар учун симплексда аниқланган Вольтерра популяцияларининг мувозанат ҳолатлари карталарини тўлиқ тавсифлаш;

чекли ўлчамдаги ҳоллар учун симплексда аниқланган қўзғалмас нуқталар картаси ёрдамида Вольтерра популяцияларининг мувозанат ҳолатларининг динамикаси аниқлаш;

чекли ўлчовли симплексда аниқланган квадратик стохастик операторларнинг бистохастик бўлиши шарти асосида, унинг эктремал нуқталари сонини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти популяцион генетикада Вольтерра типидаги квадратик стохастик операторлар ва Вольтерра акслантиришлари траекторияларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети чекли ўлчовли симплексда Вольтерра типидаги квадратик стохастик операторларнинг узлуксиз акслантиришлари ташкил қилади.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик таҳлил усуллари, функционал таҳлилнинг умумий усуллари, ассоциатив бўлмаган алгебралар назарияси, кўп ўлчовли матрицалар назарияси, дифференциал тенгламалар, динамик системалар назарияси, математик физика, эҳтимоллар назарияси, комбинаторика ва графлар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

турнирлар назарияси, графлар назарияси ёрдамида чекли ўлчамли симплекснинг ички нуқталари траекторияларининг динамикаси кўрсатилган;

чекли ўлчамдаги ҳоллар учун симплексда аниқланган Вольтерра популяцияларининг мувозанат ҳолатлари карталарини тўлиқ тавсифи кўрсатилган;

чекли ўлчамдаги ҳоллар учун симплексда аниқланган қўзғалмас нуқталар картаси ёрдамида Вольтерра популяцияларининг мувозанат ҳолатларининг динамикаси аниқланган;

чекли ўлчовли симплексда аниқланган квадратик стохастик операторларнинг бистохастик бўлиши шарти асосида, унинг эктремал нуқталари сони аниқланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

чекли ўлчовли симплексда аниқланган квадратик акслантиришлар траекторияларининг қўзғалмас нуқталарини аниқ топилган;

квадратик акслантиришларларнинг қўзғалмас нуқталари картасидан, узлуксиз акслантиришлар траекторияларининг қўзғалмас нуқталарини топишда фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, эҳтимоллар назарияси, динамик системалар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда қатъий математик мулоҳазаларни қўллаш орқали, математик исботлашлар билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалар квадратик стохастик операторлар назариясида, чекли ўлчовли симплексда квадратик акслантиришлар траекторияларининг ҳаракатлари билан боғлиқ масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти уларни дискрет ва узлуксиз динамик системалар назарияси бўйича махсус семинарларда, шунингдек математик биологияда қўллаш имконияти билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Квадратик стохастик операторларнинг тузилиши ва уларни популяцион генетика моделларини ўрганишдаги татбиқларига оид олинган натижалар асосида:

квадратик стохастик операторларнинг тузилиши ва уларни популяцион генетика моделларини ўрганишдаги татбиқларидан Гулистон давлат университети “Биология” кафедрасида 2012-2016 йилларда бажарилган Ф-5-17- рақамли “Ўзбекистон ва унга туташ ҳудудларда тарқалган қуруқлик моллюскалардаги ўзгарувчанлик қонуниятлари ва тур ҳосил бўлиш жараёни” мавзусидаги лойиҳада фойдаланилган (Гулистон давлат университетининг 2022 йил 10 январдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши Ўзбекистон ва туташ ҳудудларда тарқалган қуруқлик моллюскалардаги ўзгарувчанлик қонуниятлари ва тур ҳосил бўлиш жараёнини Вольтерра типидаги квадратик стохастик операторлар ёрдамида ҳосил қилинган популяция моделлари учун мувозанат ҳолатлари, мувозанат ҳолатининг турғунлиги ва эволюцион динамикасини қўллаган ҳолда, назарий асослаб бериш имконини берган;

квадратик стохастик операторларнинг тузилиши ва уларни популяцион генетика моделларини ўрганишдаги татбиқларидан Ф-4-32-«Сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун Трикоми масаласи, аралаш масала ва Бицадзе-Самарский масалаларининг шартларини ўзида бирлаштирган масалаларнинг корректлигини ўрганиш» (2012-2016) илмий-тадқиқот лойиҳасида фойдаланилган (Термиз давлат университетининг 2022 йил 21 июндаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ночизиқли икки ўлчовли икки параметрга боғлиқ айирмали тенгламалар системаси учун турғун ва даври иккига тенг бўлган ечимлари тўла тавсифидан грант доирасида Геллерстедт тенгламаси учун Трикоми масаласининг айирмали кўринишларини таснифлашда ва сонли ечишда фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши Геллерстедт тенгламаси учун Трикоми масаласи сонли натижаларни визуаллаштириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 36 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 9 та халқаро ва 27 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 42 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестацияси комиссиясининг диссертациялар асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, диссертациянинг ҳажми 90 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **«Бошланғич маълумотлар»,** деб номланувчи бобида диссертациянинг асосий натижаларини тақдим этиш учун зарур бўлган дастлабки маьлумотлар келтирилган.

В. Вольтерранинг "Мавжудлик учун курашнинг математик назарияси" номли монографияси мутахассисларда катта қизиқиш уйғотди ва биологияда математик усуллар бўйича тадқиқотлар олиб боришга кенг йўл очиб берди. С. Улам, М. Менцел, П. Стейн ЭҲМ ёрдамида учта биологик турга эга бўлган популяция учун, мумкин бўлган барча эволюцион операторларнинг траекторияларининг ҳаракатларини батафсил ўрганиб чиқдилар.

$S^2=\left\{ (x,y,z)\in R^3:\ x,y,z\geq 0,\quad x+y+z=1\right\}$ бўлсин. Қуйидаги динамик системани қараймиз:

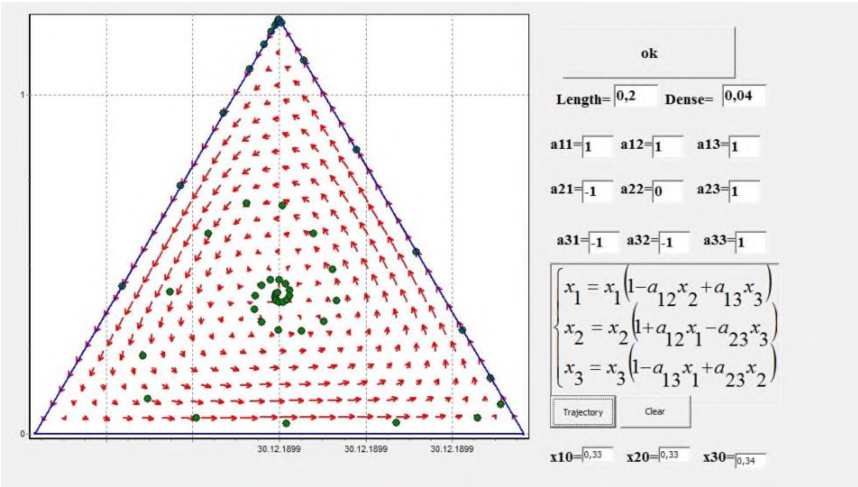
$$\begin{cases} x_1'=x^2+2xy, \\ x_2'=y^2+2yz, \\ x_3'=z^2+2zx. \end{cases}$$

Равшанки, $V:\ S^2\to S^2$, яъни $x_i\geq 0$

$$x_1'+x_2'+x_3'=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2=1.$$

Геометрик нуқтаи назардан S^2 икки ўлчовли симплекс - бу учлари $(1;\ 0;\ 0)$; $(0;\ 1;\ 0)$; $(0;\ 0;\ 1)$ ва маркази $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ бўлган учбурчакни англатади, нуқталар эса V эволюцион операторнинг қўзғалмас нуқталари (мувозанат ҳолатлари) эканлигини текшириш қийинчилик туғдирмайди.

Ҳар қандай қўзғалмас нуқталаридан бошқа (мувозанатсиз) нуқталарнинг траекторияси симплексда спиралсимон ҳаракатланиб, унинг чегарасига яқинлашади, бироқ ҳеч қандай траектория яқинлашмайди (1-расмга қаранг.)



1-расм

С. Улам юқоридаги системагага нисбатан ҳар қандай траекторияси Чезаро бўйича ўртача қийматлари яқинлашади, яъни қуйидаги лимит мавжуд, деган тахминни қилади, яъни

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}V^k x\,.$$

Бироқ, 1978 йилда М.И. Захаревич бу тахминни рад этиб, яъни юқоридаги лимит ҳар қандай траектория учун мавжуд эмаслигини исботлади.

Р.Н.Ғанихўжаев Вольтерра популяциялари траекторияларининг асимптотик ҳаракатларини ўрганишда графлар назарияси усулларини самарали фойдаланди.

Динамик системалар назариясида акслантириш ва кўпхилликларнинг трансверсаллиги тушунчаси муҳим ўрин тутади.

Хусусий ҳолларни ҳисобга олмаслик мақсадида, Р.Н Ғанихўжаев Вольтерра типидаги квадратик операторлар трансверсаллик синфини ажратиб кўрсатди. Маълум бўлишича, трансверсаллик шарти ирсият коэффициентлари тилида осон талқин қилинади ва энг муҳими, трансверсал операторлар тўплами барча Вольтерра типидаги операторлар тўпламида массив қисм тўпламни (очиқ ва ҳамма жойда зич) ташкил қилади.

1-таъриф. Агар барча жуфт тартибли бош минорлари нолдан фарқли кососимметрик матрицаси $A=(a_{ki})$ трансверсаль дейилади.

Трансверсалликнинг биологик маъноси шуни иборатки, ҳар қандай икки турдаги популяция (генлар) да бирининг бошқасидан устунлиги, яъни доминантлик қилишини англатади.

Популяцияни кўпайишга нисбатан организмларнинг ёпиқ жамоа сифатида тавсифланади. Популяцияда авлодлар кетма-кетлиги билан фарқ қилинади. Турли авлодлар ўртасида чатишишлар рўй бермайди, деб тахмин қилинади.

Теорема (Р.Н.Ғанихўжаев). Агар Вольтерра популяциясининг $V:\ S^{m-1}\to S^{m-1}$ – эволюцион оператори ва V трансверсал бўлса, у ҳолда популяциянинг мувозанат ҳолатлари тўплами ҳар доим чекли бўлади.

Популяция m та турлардан иборат деб фараз қилайлик: $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ дастлабки моментда унинг ҳолати $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ тўплам билан берилади, бу ерда $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0, \dots, x_m \ge 0$ ва $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Барча мумкин бўлган ҳолатлар тўпламини

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1; x_2; ...; x_m): \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_m \ge 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

орқали белгилаймиз.

Шундай қилиб, популяциянинг ихтиёрий ҳолатини S^{m-1} нинг элементи сифатида қараш мумкин. Математикада S^{m-1} симплексни $m-1$ ўлчовли стандарт симплекс деб аталади. Равшанки, симплекс R^m Эвклид фазосида қавариқ, чегараланган, ёпиқ ва унинг қисм тўплами ҳисобланади. $e_1 = (1;\ 0; ...; 0)$, $e_2 = (0;\ 1;\ 0; ...; 0)$, $\dots$, $e_m = (0;\ 0; ...; 1)$ нуқталар симплекснинг учлари дейилади.

$I = \{ 1,\ 2,\ ...,\ m \}$ ва α шу I тўпламнинг ихтиёрий бўш бўлмаган қисм тўплами бўлсин . $\Gamma_\alpha = co\{ e_i : \ i \in \alpha \}$ ($co-$ қавариқ қобиғи) S^{m-1} симплекснинг ($|\alpha|-1$)-ўлчовли ёқи дейилади . Қуйидаги

$$\operatorname{int} S^{m-1} = \{ x = (x_1; x_2; ...; x_m) \in S^{m-1} : x_1 > 0,\ x_2 > 0, ..., x_m > 0 \}$$

$$\partial S^{m-1} = \{ x = (x_1; x_2; ...; x_m) \in S^{m-1} : \ \exists\, i \in I : \ x_i = 0 \}$$

мос равишда, симплекснинг нисбий ичи ва нисбий чегараси дейилади.

Шундай қилиб, S^{m-1}да популяциянинг 1, 2, …, m ҳолатлари тўплами ва $\{P_{ij,k}\}$; $i, j, k = \overline{1,\ m}$ ирсиятлик коэффициентлари тўплами ($P_{ij,k}$ бу ерда i ва j турларнинг чатишишидан k турнинг пайдо бўлиш эҳтимоллигини англатади).

Тўла эҳтимоллик формуласидан фойдаланиб, эволюцион оператори учун қўйидаги тенгликлар ўринли:

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j, \ \ k = \overline{1,\ m}\,, \ \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1. \tag{1}$$

Шундай қилиб, (1) да биз тасодифий чатишишларни, яъни *панмиксия* моделини кўриб чиқамиз. Шунингдек, ирсият коэффициентларининг дастлабки иккита индексига нисбатан симметрик деб фараз қиламиз:

$$P_{ij,k} = P_{ji,k}. \tag{2}$$

2-таъриф. Агар ирсият коэффициентлари қуйидаги шартни қоаноатлантирса:

$$P_{ij,k} = 0, \text{ ихтиёрий } k \notin \{ i,\ j \} \text{ учун. } (3)$$

у ҳолда Вольтерра типидаги эволюцион оператори дейилади.

(3) шартнинг биологик маъноси шундан иборатки, насл фақат ота-она туринининг бирини мерос қилиб олиши мумкин, яъни иккала турни чатишишидан фақат i ёки j тур пайдо бўлиши мумкин.

Теорема(Р.Н.Ганихўжаве**)**. Агар V – воьтерра популяциясининг эволюцион оператори бўлса, у ҳолда

- $V:\ \mathrm{int}(S^{m-1}) \to \mathrm{int}(S^{m-1})$;
- $V:\ \partial S^{m-1} \to \partial S^{m-1}$;
- $V:\ \varGamma_\alpha \to \varGamma_\alpha$;
- $V:\ \mathrm{int}(\varGamma_\alpha) \to \mathrm{int}(\varGamma_\alpha)$;
- $V:\ \partial\varGamma_\alpha \to \partial\varGamma_\alpha$.

бўлади.

Юқоридаги теореманинг биологик маъноси: агар популяциянинг дастлабки ҳолатида бирор бир тур мавжуд бўлса, у ҳолда у мавжуд (йўқ бўлиб кета олмайди) бўлиб, эволюциянинг барча кейинги авлодларида иштирок этади; агар популяциянинг дастлабки ҳолатида бирор бир тур мавжуд бўлмаса, у кейинги авлодда пайдо бўлмайди.

Популяцииoн генетиканинг масалаларида вақт ўтиши билан биологик система эволюциясини ўрганиш зарурати туғилади. Кўпгина ҳолларда системанинг эволюцияси симплекснинг квадратик карталари билан ўзига хос тарзда тасвирланади. Биологик нуқтаи назардан эволюцион операторнинг гомеоморфизми ҳозирги вақтда системанинг маълум ҳолатига кўра биологик системанинг тарихини тиклаш имкониини беради.

Чекли ўлчовли симплексда берилган Вольтерра операторининг квадратик акслантириш натижаси сифатида қандайдир турнирни аниқлайди, унинг хоссалари ёрдамида траекторияларининг асимптотик ҳаракатларини ўрганишга имконини беради.

Трансверсаллик $a_{ki} \neq 0$, ҳамда $k \neq i$ шартида, берилган Вольтерра популяцияси учун учун турнирни қуйидагича қуриш мумкин: текисликда m нуқталарни оламиз ва барча мумкин бўлган нуқталарни жуфт- жуфт қилиб сегментлар билан бирлаштирамиз, агар $a_{ki} < 0$ бўлса, k нуқтадан i нуқтага йўналтирилган кесмани, агар $a_{ki} > 0$ бўлса йўналишни аксинча қўямиз. Ҳосил қилинган йўналтирилган граф Вольтерра популяцияси эволюцион операторининг турнири дейилади (T_m билан белгиланади).

3-таъриф. Йўналиш бўйича ихтиёрий учидан, бошқа ҳар қандай учига бориш мумкин бўлса, бундай турнир кучли турнир дейилади.

Бирорта ҳам қисмтурнири кучли бўлмаган турнир, транзитив дейилади.

4-таъриф. Ихтиёрий қисмтурнири кучли ёки транзитив бўлса, бундай турнир биржинсли дейилади.

Р.Н. Ғанихўжаевнинг ишларида қуйидаги тасдиқларни исботланган.

1. Трансверсаль Вольтерра популяциясида фақат тоқ сонли турлар мувозанат ҳолатида бўлиши мумкин.

2. Агар V Вольтерра акслантиришиган мос келадиган T_m турнир транзитив бўлса, у ҳолда фақат S^{m-1} нинг учлари мувозанат нуқталари бўлади.

3. Кучли T_m турнирда камида $m-2$ та циклик учлик мавжуд.

4. $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$ акслантиришнинг ҳар қандай қўзғалмас нуқтаси фақат ноль бўлмаган координаталарининг тоқ сонидан иборат бўлади.

Диссертациянинг "**Популяцион генетиканинг Вольтерра модели**" номли иккинчи бобида Вольтерраа операторининг қўзғалмас нуқталари картаси тушунчаси киритилган. Бир хил аниқланган икки популяциянинг эволюцияси тасвири траекторияларнинг асимптотик ҳаракати бир-биридан сезиларли даражада бир-биридан фарқ қилиши мумкин. Эволюцияни тасвирлаш мақсадида популяциянинг мувозанат ҳолатлари картаси тушунчаси билан киритилган.

$X=\{x(\alpha)\}$ Вольтерра квадратик стохастик оператор $V:\ S^{m-1}\to S^{m-1}$нинг барча қўзғалмас нуқталари тўплами бўлсин. X нинг элементлари текисликдаги нуқталар сифатида ифодалаймиз. Агар шундай $\gamma\subset\{1,\ 2,...,\ m\}$ мультииндекс мавжуд бўлса, $x(\alpha)$ нуқтадан йўналтирилган ёй билан $x(\beta)$ нуқта билан туташтирамиз:

$$i)\ \ x(\alpha),\ \ x(\beta)\in\Gamma_\gamma$$

$$ii)\ A_\gamma x(\alpha)\geq 0,\ \ A_\gamma x(\beta)\leq 0.$$

Бошқача қилиб айтганда, $x(\alpha)$, $x(\beta)$ қўзғалмас нуқталар V_γ операторнинг $\gamma\subset\{1,\ 2,...,\ m\}$ баъзиларида $(p,\ q)$ жуфтлик ҳосил қилиши керак. Ҳосил қилинган йўналтирилган граф операторнинг мувозанат нуқталари картаси деб аталади ва G_V билан белгиланади

1-теорема. Қўзғалмас нуқталар картаси ягона осилган учга эга бўлади.

Олдинги параграфда кўриб чиқилган S^4да Вольтерра типидаги дискрет динамик системаларнинг узлуксиз аналоги қуйидаги дифференциал тенгламалар системаидан иборат:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)\cdot(a_{11}\cdot x_1(t)+a_{12}\cdot x_2(t)+a_{13}\cdot x_3(t)+a_{14}\cdot x_4(t)+a_{15}\cdot x_5(t)),\\ \dot{x}_2(t)=x_2(t)\cdot(a_{21}\cdot x_1(t)+a_{22}\cdot x_2(t)+a_{23}\cdot x_3(t)+a_{24}\cdot x_4(t)+a_{25}\cdot x_5(t)),\\ \dot{x}_3(t)=x_3(t)\cdot(a_{31}\cdot x_1(t)+a_{32}\cdot x_2(t)+a_{33}\cdot x_3(t)+a_{34}\cdot x_4(t)+a_{35}\cdot x_5(t)),\\ \dot{x}_4(t)=x_4(t)\cdot(a_{41}\cdot x_1(t)+a_{42}\cdot x_2(t)+a_{43}\cdot x_3(t)+a_{44}\cdot x_4(t)+a_{45}\cdot x_5(t)),\\ \dot{x}_5(t)=x_5(t)\cdot(a_{51}\cdot x_1(t)+a_{52}\cdot x_2(t)+a_{53}\cdot x_3(t)+a_{54}\cdot x_4(t)+a_{55}\cdot x_5(t)),\end{cases}\tag{4}$$

бунда $\left\{a_{ij}\right\}$ ўзгармас коэффициентлар қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$a_{ij}=-a_{ji}\ \text{ и }\ |a_{ij}|\leq 1.$$

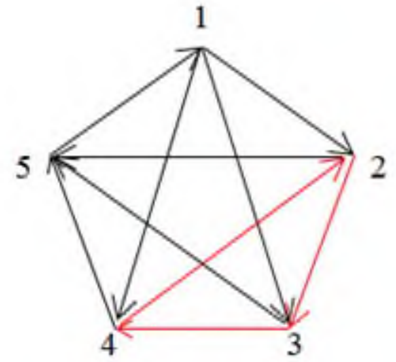
Агар бошланғич нуқта $(x_1(t_0),x_2(t_0),x_3(t_0),x_4(t_0),x_5(t_0))$ симплексга тегишли бўлса, унда (4) учун Коши масаласининг интеграл эгри чизиғи бутунлай S^4 ичида ётади.

Ҳисоблашларни соддалиги учун $a_{ki}=\pm1$ бунда, $k\neq i$ ва $a_{kk}=0$ деб ҳисоблаймиз. Ушбу шартнинг биологик маъноси шундаки, ота-она жуфтларини чатишишидан авлод фақат ота-оналардан бирини 1 эҳтимоллик билан, иккинчисининг 0 эҳтимоллик билан белгисини мерос қилиб олади.

Бундай ҳолда, 5-тартибли олтита кучли турнирларнинг учларини ўрин алмаштириш аниқлиги билан фақат биттаси (4) дифференциал тенгламалар системасига мос келиши мумкин.

Ушбу бобнинг асосий натижалари 5-тартибли олтита кучли турнирлар бўлиб, ҳар бири учун натижалар олинган. Улардан фақат биттасини кўриш билан кифояланамиз.

T_5 кучли турнир ва дифференциал тенгламалар системаси қуйидаги кўринишда бўлсин:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot (-x_2 - x_3 - x_4 + x_5), \\ \dot{x}_2 = x_2 \cdot (x_1 - x_3 + x_4 - x_5), \\ \dot{x}_3 = x_3 \cdot (x_1 + x_2 - x_4 - x_5), \\ \dot{x}_4 = x_4 \cdot (x_1 - x_2 + x_3 - x_5), \\ \dot{x}_5 = x_5 \cdot (-x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \end{cases} \tag{5}$$

ёзувни қисқартириш мақсадида t аргумент тушириб қолдирилган.

2-теорема. Агар $x^0 \in \operatorname{int} S^4$, яъни бошланғич нуқта симплекс ичида бўлса, у ҳолда (5) учун бошланғич $x(t_0) = x^0$ шартлар билан Коши масаласининг ечими

$$M = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S^4 : \quad x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 0\}.$$

ёпиқ қавариқ сиртида бўлади.

Диссертациянинг "**Бистохастик квадратик операторлар ёрдамида аниқланадиган моделлар**" номли учинчи боби барча бистохастик квадратик операторлар тўпламининг тўлиқ тавсифига бағишланган .

$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, ..., x_n) : \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ x_i \geq 0 \right\} - R^m$ да стандарт симплекс бўлсин. $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, ..., x_{[m]})$, бунда $x_{[1]} \geq ... \geq x_{[m]}$ – $x \in S^{m-1}$ нуқталарининг координаталари, ўсмайдиган тартибда тартибланган.

Агар $x, y \in S^{m-1}$ ва $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}$, $k = \overline{1, m}$ тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда y x ни мажаронтаси дейилади ва $x \prec y$ кўринишда ёзилади.

Бистохастиклик атамасини ихтиёрий узлуксиз (умуман айтганда, ночизиқли) $V: \ S^{m-1} \to S^{m-1}$ операторлар, ҳамда барча $x \in S^{m-1}$ учун қуйидаги шарт бажарилса

$$Vx \prec x \tag{6}$$

Хусусан, $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ квадратик стохастик оператор қуйидаги тенглик билан аниқланади

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j \ , \ k = \overline{1, m}, \tag{7}$$

бунда $P_{ij,k}=P_{ji,k}\geq 0$ ва $\sum_{k=1}^{m}P_{ij,k}=1,$ (6) бажарилганда бистохастик квадратик оператор дейилади, $\mathbb{B}$ билан белгиланади.

Асосий натижалар қуйидагилардан иборат:

3-теорема. Агар $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$ – бистохастик квадратик оператор бўлса, $P_{ij,k}$ коэффициентлари қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$\text{а) } \sum_{i,j=1}^{m}P_{ij,k}=m\,, \qquad \forall\ k=\overline{1,m}, \tag{8}$$

$$\text{б) } \sum_{j=1}^{m}P_{ij,k}\geq \frac{1}{2}\,, \qquad \forall\ i,k=\overline{1,m}, \tag{9}$$

$$\text{в) } \sum_{i,j\in I_t}P_{ij,k}\leq t\,, \qquad \forall\ t,k=\overline{1,m}, \tag{10}$$

бунда $I_t=\{i_1,i_2,...,i_t\}$ $-t$ элементни ўз ичига олган $I=\{1,\ 2,...,m\}$тўпламнинг қисм тўплами.

Белгилаш киритамиз:

$$\mathfrak{I}_k=\left\{T=(t_{ij}),\ i,j=\overline{1,n}:\ 0\leq t_{ij}\leq 1,\ \sum_{j=1}^{m}t_{ij}=k\right\},\quad 1\leq k\leq m$$

$$\mathbb{U}_k=\left\{A=(a_{ij}):\ a_{ij}=a_{ji},\ A=\frac{1}{2}(T+T'),\ T\in\mathfrak{I}_k\right\},\quad 1\leq k\leq m$$

$\mathbb{U}_k$ ни $\mathfrak{I}_k$ нинг симметризацияси деб атаймиз.

4-теорема. Қуйидаги тасдиқлар ўринли:

i) $A\in\mathbb{U}_k\Leftrightarrow E-A\in\mathbb{U}_{m-k}$, $k=\overline{1,m-1}$;

ii) $\mathbb{U}_k\cap\mathbb{U}_l=\varnothing$, $k\neq l$ да;

iii) $\mathbb{U}_k=\{E\}$;

iv) $A\in\mathbb{U}_k\Rightarrow\frac{p}{k}\cdot A\in\mathbb{U}_p$, $1\leq p\leq k$;

v) $\mathbb{U}_k+\mathbb{U}_l\supset\mathbb{U}_{k+l}$, $k+l\leq n$;

vi) $\mathbb{U}_k$ – кўпёқ.

5-теорема. Агар $A_1\in\mathbb{U}_1$ бўлса, у ҳолда $A_2,...,A_n\in\mathbb{U}_1$танлаш мумкинки, $V=(A_1|...|A_n)\in\mathbb{B}$ бўлади.

6-теорема. Агар $A=\left(a_{ij}\right)\in extr\mathbb{U}_1$ бўлса, у ҳолда $a_{ii}=0\vee 1$ $i\neq j$ да, $a_{ij}=0\vee 0{,}5\vee 1.$

7-теорема. Агар $V\in\mathbb{B}$ ва $\{V^n x\}$ – x нуқтадан бошланувчи траектория, $\omega(x)$ – шу нуқтанинг траекторияларининг лимит нуқталари тўплами бўлса, у ҳолда:

1) $\omega(x)$–чекли тўплам;

2) траекториялар ўртача арифметигининг лимити, яъни $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}V^k x$ мавжуд.

ХУЛОСА

Диссертация Вольтерра оператори системаларининг динамикасини тўлиқ тавсифлаш ва бир жинсли бешинчи тартибли турнирларнинг узлуксиз ҳолини ўрганишга бағишланган, бистохастик квадратик операторлар томонидан аниқланадиган моделларни ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Вольтерра типидаги эволюцион операторига мос турнир кучли бўлса, популяция камида $2(m-1)$ та мувозанат ҳолатларига эга эканлиги исботланган.
2. Агар Вольтерра популяциясининг дастлабки ҳолатида бирор бир тур мавжуд бўлса, у ҳолда у мавжуд (йўқ бўлиб кета олмайди) ва эволюциянинг барча кейинги авлодларида; агар популяциянинг дастлабки ҳолатида бирор бир тур мавжуд бўлмаса, у кейинги авлодда пайдо бўлмаслиги исботланган.
3. Вақт ўтиши билан баъзи белгилар йўқолиш арафасида бўлиб, бундай биологик системаларнинг "келажаги" беқарор: "капалак эффекти" деб аталадиган нарса уларга хосдир. Бироқ, келажакда уларнинг баъзилари яна кўпайиши мумкин. Албатта, бир вақтнинг ўзида бир нечта бошқа турлаар йўқ бўлиб кетиш арафасида бўлишлиги кўрсатилган.
4. Агар биологик система мувозанат ҳолатида бўлса, унда у фақат тоқ сонли хусусиятларга эга эканлиги исботланган.
5. Барча бистохастик квадратик матрицалар тўплами қаварик кўпёқни ҳосил қилиши исботланган.
6. S^4да 6 та кучли турнирнинг ҳар бирида қўзғалмас нуқталарнинг траекторияларининг асимптотик ҳаракати $\dot{x}_k(t) = x_k(t)\cdot\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i(t)$ системаси интеграл чизиқларини топиш учун $x(t_0) = x^0$бошланғич шартлар билан узлуксиз ҳолатда исботланган.
7. Бистохастик матрицалар тўпламининг экстремал нуқталари ҳақидаги Биргофф теоремасининг аналоги исботланган.
8. $V \in \mathbb{B}$ и $\{V^n x\}$ – x нуқтадан бошланувчи траектория, $\omega(x)$– траекториянинг лимит нуқталари тўплами бўлса, $\omega(x)$–чекли тўплам ва $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} V^k x$ мавжуд.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

ГУЛИСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭШНИЯЗОВ АБДУМАЛИК ИСКАНДАР УГЛИ

СТРУКТУРА КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ГЕНЕТИКИ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Самарканд – 2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2018.2.PhD/FM213

Диссертация выполнена в Гулистанском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Абдуллаев Жаникул Ибрагимович** доктор физико-математических наук, профессор
	Эшмаматова Дилфуза Бахрамовна кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Наманганский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» ____________2022 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» ______________2022 года.
(протокол рассылки №_____ от «____» ______________2022 года).

А.С. Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Халхужаев
Учёный секретарь научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук

С.Н.Лакаев
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность диссертации. В мире особое значение придается вопросам применения нелинейных динамических сис в частности квадратичных стохастических операторов, при изуче популяционных генетических моделей. Теория динамических систем является одной из наиболее развивающихся областей математики, а моделирование многих процессов в различных областях, таких как математический анализ, дифференциальные уравнения, топология, теория вероятностей, популяционная биология, является одним из актуальных направлений современной математики. При этом особое внимание уделяется полной идентификации, описанию и изучению характеристик неподвижных точек, асимптотических поведений траекторий квадратичных стохастических операторов, определенных в конечномерном симплексе.

На сегодняшний день по всему миру проводятся многочисленные научные исследования, направленные на изучение динамических систем. К первой группе этого направления относятся непрерывные динамические системы, здесь изучаются интегральные линии векторного поля, определённые в топологическом пространстве, проблемы существования предельных точек, устойчивости и бифуркаций решений. Вторая группа – дискретные динамические системы – здесь приоритетными считаются асимптотические состояния траекторий, исследования по решению задач, связанных с существованием периодических орбит. По этой причине развитие исследований по изучению асимптотического поведения траекторий квадратичных стохастических операторов, определённых в конечномерном симплексе, в дискретном и непрерывном случаях считается актуальной задачей.

В Республике уделяется особое внимание к соответствующим областям научного и практического применения фундаментальных наук, в частности, учеными нашей страны предпринимаются масштабные меры по изучению динамических систем. В последнее время учёными нашей страны в этом направлении получены весомые результаты. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Функциональный анализ, математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения, математическое моделирование нелинейных систем, динамические системы и их приложений, стохастический анализ, медико-биологическая информатика и вычислительная математика» установлено основной задачей и направлением деятельности исследователей[1]. Для осуществления данных задач, важным

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии Наук Республики Узбекистан».

является проведение научных исследований по направлению совершенствования и широкого внедрения в практику, в частности в дискретных и непрерывных динамических системах, развитие исследований по вопросам квадратичных отражений является одной из важных задач.

Исследования настоящей диссертации в определённой степени служат решению задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», в Постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Изучению квадратичных стохастических операторов в чисто математическом плане посвящён целый ряд исследований, начиная с работ G.H. Hardy, S.N. Bernstein, G. Kesten, S.S. Wallander и другие. В то же время известными учеными Узбекистана в этом направлении являются академик Т.А. Саримсаков, Р.Н. Ганихожаев, Н.Н. Был проведен ряд научных исследований, начиная с работ Ганихожаева и других. Среди квадратичных операторов хорошо изучены так называемые вольтерровы отображения, которые были введены на основе одной из задач S.M.Ulama и разработаны в работах Р.Н. Ганиходжаева. Впервые нерегулярное поведение траекторий квадратичных стохастических операторов в двумерном симплексе рассмотрены M.T. Menzel, P.R. Stein va S.M. Ulamом (1955 г.), а затем доказаны G. Kestenом (1970 г.) и S.S. Wallanderом (1972 г.). М.И. Захаревич, тщательно изучив пример S.M.Ulama, доказал, что средние по Cesaro траекторий не имеют предела (1982 г.). Классификация динамических систем основана на способе задания их состояний, методах описания оператора эволюции и его свойствах, способе зависимости от времени и т.д. Непрерывные динамические системы, возникшие из качественной теории дифференциальных уравнений, в основном изучают глобальную топологическую картину поведения решений дифференциальных уравнений на многообразиях. Основоположниками этого направления являются A.Poincare, J.Birkhoff, А.Андронов, А.Н.Колмогоров и другие.

Начиная с 1980-х годов, к этим исследованиям подключились ташкентские математики под руководством академика Т.А. Сарымсакова. Квадратичные стохастические операторы, действующие в S^2, изучены А.Т. Сарымсаковым (1981 г.), а поведение траекторий квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа, действующих в S^3 и S^4, исследовано К.А. Кургановым (1984 г.). Асимптотическое поведение траекторий композиции двух отображений Вольтерра, действующих в двумерном симплексе, изучено Д.Б. Эшмаматовой (2004), а динамические свойства квадратичных гомеоморфизмов симплекса S^4 изучены М.А. Таджиевой (2022). В то же время, проблемы обобщения результатов, полученных для квадратичных стохастических операторов, идентифицированных в симплексе произвольного размера, недостаточно изучены.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация.

Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научного проекта ОТ-Ф4-31 «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексах» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017-2020 гг.).

Целью исследования является исследование вольтерровских моделей в популяционной генетике и асимптотического поведения траекторий вольтерровских популяций, связанных с теорией квадратичных стохастических операторов.

Задачи исследования состоят в следующем:

полностью описать динамику траекторий внутренних точек конечномерного симплекса с использованием теории турниров, теории графов;

выявить карты равновесных состояний вольтерровских популяций, действующих в конечномерном симплексе;

определить динамику равновесных состояний вольтерровских популяций с использованием карты равновесных точек, определенных в конечномерном симплексе;

определить число экстремальных точек при условии, что квадратичные стохастические операторы, идентифицированные в конечномерном симплексе, являются бистохастическими.

Объектом исследования являются квадратичные стохастические операторы вольтерровского типа в популяционной генетике и асимптотическое поведение траекторий вольтерровских отображений.

Предметом исследования являются непрерывные отображения квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа на конечномерном симплексе.

Методы исследований. В процессе исследования применены методы математического анализа, общие методы функционального анализа, теории неассоциативных алгебр, теории многомерных матриц, дифференциальных уравнений, теории динамических систем, математической физики, теории вероятностей, теории графов и комбинаторики.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

полностью описана динамика траекторий внутренних точек конечномерного симплекса с использованием теории турниров, теории графов;

дано полное описание карт равновесных состояний вольтерровских популяций, действующих в конечномерном симплексе;

определена динамики равновесных состояний вольтерровских популяций с использованием карты равновесных точек, определенных в конечномерном симплексе;

определено число экстремальных точек при условии, что квадратичные стохастические операторы, идентифицированные в конечномерном симплексе, являются бистохастическими.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

найдены неподвижные точки траекторий квадратичных отражений, определённых в конечномерном симплексе;

из карты неподвижных точек квадратичных отражений непрерывных отражения использовались для нахождения неподвижных точек их траекторий.

Достоверность результатов исследования обоснована строгих математических рассуждений и доказательств с использованием методов функционального анализа, теория вероятностей, теория динамических систем.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы в теории квадратичных стохастических операторов, при изучении предельного поведение траекторий квадратичных отображений на конечномерном симплексе.

Практическая значимость полученных результатов исследования подтверждается возможностью их применения в спецсеминарах по теории дискретных и непрерывных динамических систем, а также в математической биологии.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных результатов по теории квадратичных стохастических операторов и их применению при изучении моделей популяционной генетики:

структура квадратичных стохастических операторов и их применение при изучении моделей популяционной генетики использовались в проекте Ф-5-17 «Закономерности изменчивости распространения наземных моллюсков в Узбекистане и прилегающих регионах и процесс видообразования» выполненного в 2012-2016 годах на кафедре «Биология»

Гулистанского государственного университета. Применение научных результатов позволило теоретически обосновать закономерности изменчивости и процесс видообразования у наземных моллюсков, распространенных в Узбекистане и сопредельных регионах, с использованием равновесных состояний, устойчивости равновесного состояния и эволюционной динамики для популяционных моделей, созданных с использованием квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа;

структура квадратичных стохастических операторов и их применение при изучении моделей популяционной генетики были использованы в научно-исследовательском проекте Ф-4-32- «Исследование корректности задач, сочетающих условия задачи Трикоми, смешанной задачи и задачи Бицадзе-Самарского для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом» (2012-2016). Применение научных результатов по полной классификации стационарных решений с периодом, равным двум, системы нелинейных двумерных двухпараметрических разностных уравнений было использовано в рамках гранта при классификации и численном решении различных форм задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта. Применение научных результатов дало возможность визуализировать численные результаты по задаче Трикоми для уравнения Геллерстедта.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 36 научно-практических конференциях, в том числе на 9 международных и 27 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 42 научных работ в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций доктора философии, в том числе 2 из них опубликованы в зарубежных журналах и 5 в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 90 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения»**, приведены предварительные сведения, которые используются при дальнейшем изложении основных результатов диссертационной работы.

Основополагающая работа В. Вольтерра «Математическая теория борьбы за существование» вызвала большой интерес среди специалистов и открыла путь потоку исследований по математическим методам в биологии. С. Улам, М. Менцель, П. Стейн при помощи ЭВМ детально изучили поведение траекторий всех возможных эволюционных операторов для популяции с тремя биологическими видами.

Пусть $S^2 = \left\{ (x,y,z)\in R^3:\ x,y,z\geq 0,\quad x+y+z=1\right\}$. Рассмотрим динамическую систему:

$$\begin{cases} x_1' = x^2 + 2xy, \\ x_2' = y^2 + 2yz, \\ x_3' = z^2 + 2zx. \end{cases}$$

Очевидно, $V:\ S^2 \to S^2$, так как $x_i \geq 0$ и

$$x_1' + x_2' + x_3' = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x+y+z)^2 = 1.$$

Геометрически двумерный симплекс S^2 представляет собой треугольник с вершинами $(1;\ 0;\ 0)$; $(0;\ 1;\ 0)$;$(0;\ 0;\ 1)$ и с центром $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Легко заметить, что эти точки являются неподвижными точками (равновесными состояниями) эволюционного оператора V.

Оказалось, что траектория любой другой (неравновесной) точки, развертываясь по спирали, приближается к границе симплекса S^2, причем никакая траектория не сходится (см. рис. 1).

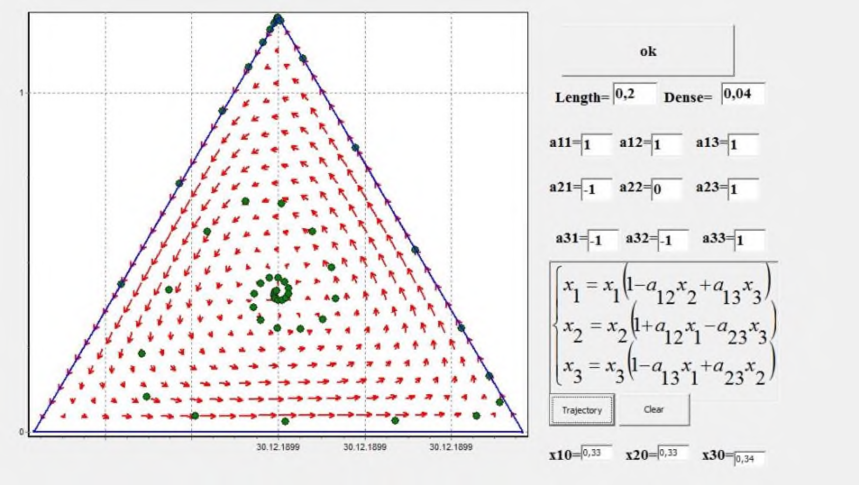


рис. 1

С. Улам относительно этого примера высказал предположение, что средние по Чезаро любой траектории сходятся, т.е. существует

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}V^k x.$$

Однако, в 1978 году М.И. Захаревич опроверг это предположение, а именно, доказал, что для любой траектории вышеуказанный предел не существует.

Р.Н. Ганиходжаев успешно применил методы теории графов к исследованию асимптотического поведения траекторий вольтерровской популяции.

Понятие трансверсальности отображения и многообразия играет важную роль в теории динамических систем.

Во избежание рассмотрения несущественных частных случаев Р.Н. Ганиходжаев выделил класс трансверсальных квадратичных операторов вольтерровского типа. Оказалось, что условие трансверсальности легко описывается на языке коэффициентов наследственности и, что очень важно, множество трансверсальных операторов образует массивное подмножество (открытое и всюду плотное) в множестве всех операторов вольтеровской типа.

Определение 1. Кососимметрическая матрица $A=(a_{ki})$ называется трансверсальной, если все ее главные миноры четного порядка отличны от нуля.

Биологический смысл трансверсальности означает, что в популяции из любых двух видов (генов) один доминирует над другим.

Популяция определяется как замкнутое относительно размножения сообщества организмов. В популяции различаются последовательные поколения. Предполагается, что между особями различных поколений не происходит скрещиваний.

Теорема (Р.Н. Ганиходжаев**).** Если $V:\ S^{m-1}\to S^{m-1}$ – эволюционный оператор вольтеровской популяции и V трансверсален, то множество равновесных популяции всегда конечно.

Допустим, что популяция состоит из m видов: $x=(x_1,x_2,...,x_m)$, и в начальный момент ее состояние задаётся набором $x=(x_1,x_2,...,x_m)$, где $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0,\dots,x_m \ge 0$ и $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Множество всевозможных состояний обозначим через

$$S^{m-1} = \left\{ x=(x_1;x_2;...;x_m):\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,..., x_m \ge 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}.$$

Таким образом, любое состояние популяции можно представить в виде элемента S^{m-1}. В математике S^{m-1} называется *стандартным симплексом* размерности $m-1$. Ясно, что симплекс является выпуклым, ограниченным, замкнутым подмножеством евклидова пространства R^m. Точки $e_1=(1;\ 0;...;0)$, $e_2=(0;\ 1;\ 0;...;0)$, …, $e_m=(0;\ 0;...;1)$ называются *вершинами* симплекса.

Пусть $I=\{\ 1,\ 2,\ ...,\ m\}$ и α – произвольное непустое подмножество множества I. Тогда $\Gamma_\alpha = co\{e_i:\ i\in\alpha\}$ (co означает выпуклую оболочку), называется $(|\alpha|-1)$-*мерной гранью* симплекса S^{m-1}. Множества

$$\operatorname{int} S^{m-1} = \left\{\ x=(x_1;x_2;...;x_m)\in S^{m-1}: x_1>0,\ x_2>0,...,x_m>0\ \right\}$$

$$\partial S^{m-1} = \left\{\ x=(x_1;x_2;...;x_m)\in S^{m-1}:\ \exists\, i\in I:\ x_i=0\ \right\}$$

называются, соответственно, *относительной внутренностью* и *относительной границей* симплекса S^{m-1}.

Итак, заданы популяция 1, 2, …, m, множество состояний популяции S^{m-1} и набор $\{P_{ij,k}\}$; $i,j,k=\overline{1,\ m}$ коэффициентов наследственности ($P_{ij,k}$ означает вероятность появления k-го вида при скрещивании двух индивидуумов из i-го и j-го видов).

Используя формулу полной вероятности, для оператора эволюции получаем

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k}x_ix_j,\ \ k=\overline{1,\ m},\ \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k}=1. \tag{1}$$

Таким образом, в (1) мы рассматриваем *случайное скрещивание,* т.е. модель *панмиксии.* Предположим также, что коэффициенты наследственности симметричны относительно первых двух индексов:

$$P_{ij,k}=P_{ji,k}. \tag{2}$$

Определение 2. Оператор эволюции $V:\ S^{m-1}\to S^{m-1}$ называется *вольтерровским*, если коэффициенты наследственности $P_{ij,k}$ удовлетворяют условию

$$P_{ij,k}=0 \ \textit{для любых}\ k\notin\{\ i,\ j\ \}. \tag{3}$$

Биологический смысл условия (3) состоит в том , что потомство может наследовать только лишь вид родителей, т.е. при скрещивании i-го и j-го видов может появиться только i-й, либо j-й вид.

Теорема (Р.Н.Ганиходжаев**).** Если V – оператор эволюции вольтерровской популяции, то

- $V:\ \operatorname{int}(S^{m-1}) \to \operatorname{int}(S^{m-1})$;
- $V:\ \partial S^{m-1} \to \partial S^{m-1}$;
- $V:\ \Gamma_\alpha \to \Gamma_\alpha$;
- $V:\ \operatorname{int}(\Gamma_\alpha) \to \operatorname{int}(\Gamma_\alpha)$;
- $V:\ \partial\Gamma_\alpha \to \partial\Gamma_\alpha$.

Приведенная теорема имеет следующий биологический смысл: если какой-либо вид присутствует в начальном состоянии популяции, то он присутствует (не может исчезнуть) и во всех последующих поколениях эволюции; если какой-либо вид отсутствует в начальном состоянии популяции, то он не может появиться ни в каком последующем поколении.

В задачах популяционной генетики появляется необходимость изучения эволюции биологической системы во времени. Во многих случаях эволюция системы описывается квадратичными отображениями симплекса в себя. С биологической точки зрения гомеоморфизм оператора эволюции означает возможность восстановления предыстории биологической системы по известному состоянию системы в данный момент.

Квадратичное отображение оператора Вольтерра, заданное на конечномерном симплексе, определяет некий турнир, свойства которого позволяют изучить асимптотическое поведение траекторий этого отображения.

В случае трансверсальности $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$ и турнир для данной вольтерровской популяции можно построить следующим образом: возьмем m точек на плоскости, соединим отрезками всевозможные пары точек и на каждом отрезке, соединяющем k-ю точку с i-й точкой, зададим направление от k-й точке к i-й, если $a_{ki} < 0$, и обратное направление, если $a_{ki} > 0$. Полученный ориентированный граф называется *турниром эволюционного оператора вольтерровской популяции* (обозначим этот турнир через T_m).

Определение 3. Турнир называется *сильным*, из любой его вершины, следуя ориентации, можно попасть в любую другую вершину.

Турнир, не имеющий ни одного сильного подтурнира, называется *транзитивным.*

Определение 4. Турнир называется однородным, если его любой подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.

В работах Р.Н. Ганиходжаева доказаны следующие утверждения:

1. В трансверсальной вольтерровской популяции только лишь нечетное число видов может находиться в равновесном состоянии.

2. Если турнир T_m, соответствующий отображению Вольтерра V, является транзитивным, тогда неподвижными точками V будут только лишь вершины S^{m-1}.

3. Сильный турнир T_m содержит не менее $m-2$ циклических троек.

4. Любая неподвижная точка отображения $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$ имеет только лишь нечетное число ненулевых координат.

Во второй главе диссертации, названной **«Вольтерровская модель в популяционной генетике»**, вводится понятие карты неподвижных точек отображения оператора Вольтерра. Асимптотическое поведение траекторий в картине эволюции двух популяций с одним и тем же турниром, могут существенно отличаться друг от друга. По сравнению с турниром, более тонкой характеристикой картины эволюции является карта равновесных состояний популяции.

Пусть $X = \{x(\alpha)\}$ – множество всех неподвижных точек вольтеровского квадратического стохастического оператора V: $S^{m-1} \to S^{m-1}$. Элементы X изобразим в виде точек на плоскости. Затем точку, изображающую $x(\alpha)$, соединим с точкой, изображающей $x(\beta)$, дугой, направленной от $x(\alpha)$ к $x(\beta)$, если существует мультииндекс $\gamma \subset \{1,\ 2,\ldots,\ m\}$ такой, что:

$$i)\ \ x(\alpha),\ \ x(\beta) \in \Gamma_\gamma$$

$$ii)\ \ A_\gamma x(\alpha) \geq 0,\ \ A_\gamma x(\beta) \leq 0.$$

Другими словами, неподвижные точки $x(\alpha)$, $x(\beta)$ должны образовать $(p,\ q)$ пару для оператора V_γ при некотором $\gamma \subset \{1,\ 2,\ldots,\ m\}$. Полученный ориентированный граф назовём картой неподвижных точек оператора V и обозначим G_V.

Теорема 1. Карта неподвижных точек имеет единственную висячую вершину.

Непрерывным аналогом рассмотренных в предыдущем параграфе дискретных динамических систем вольтеровского типа, действующих в S^4, является следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)\cdot(a_{11}\cdot x_1(t) + a_{12}\cdot x_2(t) + a_{13}\cdot x_3(t) + a_{14}\cdot x_4(t) + a_{15}\cdot x_5(t)), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)\cdot(a_{21}\cdot x_1(t) + a_{22}\cdot x_2(t) + a_{23}\cdot x_3(t) + a_{24}\cdot x_4(t) + a_{25}\cdot x_5(t)), \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t)\cdot(a_{31}\cdot x_1(t) + a_{32}\cdot x_2(t) + a_{33}\cdot x_3(t) + a_{34}\cdot x_4(t) + a_{35}\cdot x_5(t)), \\ \dot{x}_4(t) = x_4(t)\cdot(a_{41}\cdot x_1(t) + a_{42}\cdot x_2(t) + a_{43}\cdot x_3(t) + a_{44}\cdot x_4(t) + a_{45}\cdot x_5(t)), \\ \dot{x}_5(t) = x_5(t)\cdot(a_{51}\cdot x_1(t) + a_{52}\cdot x_2(t) + a_{53}\cdot x_3(t) + a_{54}\cdot x_4(t) + a_{55}\cdot x_5(t)), \end{cases} \quad (4)$$

где постоянные коэффициенты $\{a_{ij}\}$ удовлетворяют условиям

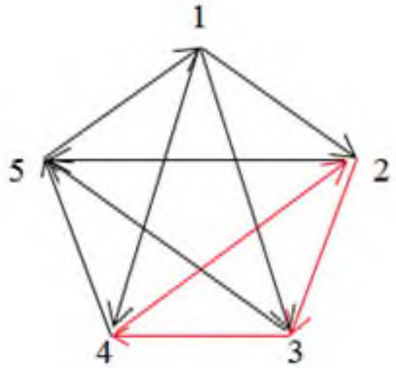
$$a_{ij} = -a_{ji} \text{ и } |a_{ij}| \leq 1.$$

Если начальная точка $(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), x_4(t_0), x_5(t_0))$ принадлежит симплексу S^4, то интегральная кривая задачи Коши для (4) целиком лежит на S^4.

Для простоты вычислений будем считать, что $a_{ki} = \pm 1$ при $k \neq i$ и $a_{kk} = 0$. Биологический смысл этого условия состоит в том, что при скрещивании родительских пар потомок наследует только лишь признак одного из родителей с вероятностью 1 и другого с вероятностью 0.

В этом случае системе дифференциальных уравнений (4) с точностью до перестановки вершин может соответствовать лишь один из шести сильных турниров 5-го порядка.

Основными результатами этой главы являются шесть сильных турниров 5-го порядка, по каждому из которых были получены результаты отдельно. Здесь мы ограничимся рассмотрением только одного из них.



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot (-x_2 - x_3 - x_4 + x_5), \\ \dot{x}_2 = x_2 \cdot (x_1 - x_3 + x_4 - x_5), \\ \dot{x}_3 = x_3 \cdot (x_1 + x_2 - x_4 - x_5), \\ \dot{x}_4 = x_4 \cdot (x_1 - x_2 + x_3 - x_5), \\ \dot{x}_5 = x_5 \cdot (-x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. Если $x^0 \in \operatorname{int} S^4$, т.е. начальная точка находится внутри симплекса, то решение задачи Коши для (5) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ находится на замкнутой выпуклой поверхности

$$M = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S^4 : \quad x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 0\}.$$

Третья глава диссертации, названная **«Модели, описываемые бистохастическими квадратичными операторами»**, посвящена полному описанию множества всех бистохастических квадратичных операторов, действующих в S^{m-1}.

Пусть $S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) : \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ x_i \geq 0 \right\}$ – стандартный симплекс в $\boldsymbol{R}^m$. Положим $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, \dots, x_{[m]})$, где $x_{[1]} \geq \dots \geq x_{[m]}$ – координаты точки $x \in S^{m-1}$, упорядоченные по невозрастанию.

Если $x, y \in S^{m-1}$, и выполнены неравенства $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}$, $k = \overline{1, m}$, то говорят, что y мажорирует x и пишут $x \prec y$.

Мы сохраним термин бистохастичность за произвольным непрерывным (вообще говоря, нелинейным) оператором $V: \ S^{m-1} \to S^{m-1}$, удовлетворяющим условию

$$Vx \prec x \tag{6}$$

для всех $x \in S^{m-1}$.

В частности, квадратичный стохастический оператор $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$, определямый равенством

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j \ , \ k = \overline{1,m}, \tag{7}$$

где $P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1,$ при выполнении условия (6) называется бистохастическим (далее б.к.о.), мы его обозначим через $\mathbb{B}$.

Оснавными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 3. Если $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$ – б.к.о., то коэффициенты $P_{ij,k}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{а)} \ \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} = m \ , \qquad \forall \ k = \overline{1,m}, \tag{8}$$

$$\text{б)} \ \sum_{j=1}^{m} P_{ij,k} \geq \frac{1}{2} \ , \qquad \forall \ i, k = \overline{1,m}, \tag{9}$$

$$\text{в)} \ \sum_{i,j \in I_t} P_{ij,k} \leq t \ , \qquad \forall \ t, k = \overline{1,m}, \tag{10}$$

где $I_t = \{i_1, i_2, ..., i_t\}$ – произвольное подмножество множества $I = \{1, \ 2, ..., \ m\}$, содержащее t элементов.

Введем обозначения:

$$\mathfrak{I}_k = \left\{ T = (t_{ij}), \ i, j = \overline{1,n}: \ 0 \leq t_{ij} \leq 1, \ \sum_{j=1}^{m} t_{ij} = k \right\}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$\mathbb{U}_k = \left\{ A = (a_{ij}): \ a_{ij} = a_{ji}, \ A = \frac{1}{2}(T + T'), \ T \in \mathfrak{I}_k \right\}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Далее $\mathbb{U}_k$ будем называть симметризацией $\mathfrak{I}_k$.

Теорема 4. Верны следующие утверждения:

i) $A \in \mathbb{U}_k \Leftrightarrow E - A \in \mathbb{U}_{m-k}$, $k = \overline{1, m-1}$;

ii) $\mathbb{U}_k \cap \mathbb{U}_l = \varnothing$, при $k \neq l$;

iii) $\mathbb{U}_k = \{E\}$;

iv) $A \in \mathbb{U}_k \Rightarrow \dfrac{p}{k} \cdot A \in \mathbb{U}_p, \ 1 \leq p \leq k$;

v) $\mathbb{U}_k + \mathbb{U}_l \supset \mathbb{U}_{k+l}$, $k + l \leq n$;

vi) $\mathbb{U}_k$ – многогранник.

Теорема 5. Если $A_1 \in \mathbb{U}_1$, то можно подобрать $A_2, ..., A_n \in \mathbb{U}_1$ так, что $V = (A_1 | ... | A_n) \in \mathbb{B}$.

Теорема 6. Если $A = \left(a_{ij}\right) \in extr\mathbb{U}_1,$ то $a_{ii} = 0 \vee 1,$ при $i \neq j,$ $a_{ij} = 0 \vee 0{,}5 \vee 1.$

Теорема 7. Пусть $V \in \mathbb{B}$ и $\{V^n x\}$ – траектория, начинающаяся из точки x, а $\omega(x)$ – множество предельных точек этой траектории. Тогда:

1) $\omega(x)$ – конечное множество;

2) предел среднеарифметических траекторий, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}V^k x$ существует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена полному описанию и изучению динамики систем оператора Вольтерра с пятью вершинами в непрерывном случае для однородных турниров, и моделям, описываемым бистохастическими квадратичными операторами.

Основными результатами исследований являются следующие:

1. Доказано что, если турнир, соответствующий оператору эволюции вольтерровского типа, является сильным, то популяция имеет не менее $2(m-1)$ равновесных состояний.

2. Доказано что, если какой–либо вид присутствует в начальном состоянии вольтерровской популяции, то он присутствует (не может исчезнуть) и во всех последующих поколениях эволюции; если какой–либо вид отсутствует в начальном состоянии популяции, то он не может появиться ни в каком последующем поколении.

3. Показано что, с течением времени некоторые признаки находятся на грани исчезновения. «Будущее» таких биологических систем неустойчиво: характерным для них является так называемый эффект бабочки. Однако, в дальнейшем возможно, что часть из них снова будет возрастать. Разумеется, при этом несколько другие разновидностей окажутся на грани исчезновения.

4. Доказано что, если биологическая система находится в равновесном состоянии, то она обладает только лишь нечётным числом признаков.

5. Доказано что, совокупность всех бистохастических квадратичных матриц образует выпуклый многогранник.

6. Установлено асимптотическое поведение траекторий неподвижных точек в S^4 для каждого из 6 сильных турниров в непрерывном случае с начальным условием $x(t_0)=x^0$ и найдены интегральные линии системы $\dot{x}_k(t)=x_k(t)\cdot\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i(t)$.

7. Доказан аналог теоремы Биркгофа о крайних точках множества бистохастических матриц.

8. Доказано, что если $V\in\mathbb{B}$ и $\{V^n x\}$ – траектория, начинающаяся из точки x, а $\omega(x)$ – множество предельных точек этой траектории, тогда: $\omega(x)$ – конечное множество и $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}V^k x$ существует.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

GULISTAN STATE UNIVERSITY

ESHNIYOZOV ABDUMALIK ISKANDAR O'G'LI

THE STRUCTURE OF QUADRATIC STOCHASTIC OPERATORS AND ITS APPLICATIONS TO THE STUDY OF POPULATION GENETICS MODELS

01.01.01-mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION
for the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

Samarkand – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM213

Dissertation has been prepared at Gulistan State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Ganikhodzhaev Rasul Nabievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Abdullaev Joniqul Ibragimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Eshmamatova Dilfuza Bakhramovna Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Dotsent
Leading organization:	**Namangan State University**

Defense will take place «____» _____________2022 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered №______) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2022 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2022 year)

A. S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

A.M. Khalkhuzhaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

S.N. Lakaev
Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is a full description of the classification of Voltaire operators; with the help of fixed point maps, the equilibrium states of Voltaire populations are revealed for cases of small dimensions there are given; a complete description of the asymptotic behavior of trajectories and the dynamics of evolution of Voltaire populations for small dimensions; necessary and sufficient conditions for bistochastic quadratic operators also proved.

The object of the researchwork is the study of Voltaire models in population genetics and the asymptotic behavior of the trajectories of Voltaire populations.

Scientific novelty of the research work are as follows:

used the application of tournament theory, a complete description of the classification of Voltaire operators there are given;

with the help of fixed point maps, the equilibrium states of Voltaire populations are revealed for cases of small dimensions;

a complete description is given of the asymptotic behavior of trajectories and the dynamics of evolution of Voltaire populations for small dimensions;

necessary and sufficient conditions for bistochastic quadratic operators there are proved.

Implementation of the research results. The obtained results were used in the following research projects: in the study of the research of quadratic stochastic operators, it was used in the grant number OT-F4-31 “Noncommutative modules, Leibniz algebras and polynomial cascades on simplices” of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (2017-2020).

the results obtained in the dissertation on the construction of asymptotic behavior of trajectories and dynamics of evolution of Voltaire populations were applied in a research project in the grant number F-4-32 “Studying the correctness of problems related to the Trichomi problem, the mixed problem and the conditions of the Bitsadze-Samarsky problems for the Gellerstedt equation with singular coefficients” of the Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan (2012-2016).

the results obtained in the dissertation on the construction of asymptotic behavior of trajectories and dynamics of evolution of Volterra populations were applied in a research project in grant number F-5-17 on the topic "Patterns of variability in the distribution of terrestrial mollusks in Uzbekistan and adjacent regions and the process of speciation", carried out at the Department of Biology of Gulistan State University in 2012-2016

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and list of used literature. The total volume of the thesis is 90 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. А.А.Имомов., А.И.Эшниязов. Бесконечномерные бистохастические квадратичные операторы в пространстве l_1. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 76. 2022. С. 20-31. (№3, Scopus, IF=0.9).
2. Eshniyozov A.I., S.I.Masharipov. Systems of differential square equation of Volter’s model on simplex. // The American of Interdisciplinary Innovation and Research. America 2020. P.102-107. (№3, Scopus, IF=0.498)
3. Эшниёзов А.И. Бесконечномерные бистохастические квадратичные операторы. «Ilm sarchashmalari». № 4. Urganch-2021. С.7-17.(01.00.00; №12)
4. Эшниёзов А.И. Об описаниях крайних точек множества бистохастических квадратичных операторов. «Ilm sarchashmalari». № 4. Urganch-2022. С.13-17. (01.00.00; №12)
5. Нишонов С.Н., Эшниязов А.И. Карта неподвижных точек для динамических систем, порожденных квадратичными стохастическими операторами // Uzbek Mathematical Journal. - Tashkent, 1999, № 4. – С. 46–50. (01.00.00; № 06)
6. Ганиходжаев Р.Н., Эшниязов А.И. Бистохастические квадратичные операторы // Uzbek Mathematical Journal. - Tashkent, 2004, № 3. – С. 29–34. (01.00.00; № 06)
7. Ганиходжаев Р.Н., Эшниязов А.И. Нелинейные автономные системы дифференциальных уравнений вольтерровского типа на симплексах // Uzbek Mathematical Journal. - Tashkent, 2012, № 2. – С. 37–43. (01.00.00; № 06)

II бўлим (II часть; II part)

8. Эшниязов А.И. Крайние точки множества квадратичных бистохастических операторов. «Современные проблемы математической физики и математического моделирования». Халқаро илмий-амалий анжуман материаллари тўплами. 3-4 декабрь, Қарши-2021.С.377-380.
9. Eshniyazov A.I., Seytov Sh.J., Nishonov S.N. Dynamics of the populations depend on previous two steps. // «Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021» of the VII International Scientific Conference. 15-17 November, Fergana, Uzbekistan. P. 62-63.
10. Muminov U.R., Eshniyozov A.I., Bobonazarova D.B. Mazorization by Hardy-Littlewood-Poya mulridimensional matries. // «Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021» of the VII International Scientific Conference/ 15-17 November , Fergana, Uzbekistan. P. 89-90.

11.Seytov Sh.J., Nishonov S.N., Eshniyazov A.I. Chaotic method of text and image encryption based on two dimensional case of logistic mapping with open key. // of the International Online Conference «Frontier in mathematics and computer science» 12-15 October, 2020. Tashkent, Uzbekistan. P. 138.
12. Эшниязов А.И. Системы квадратичных дифференциальных уравнений вольтерровского типа // Материалы международной конференции посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию ученых математиков А.Мухсинова,А.Б.Назимова, С.Байзаева, Д.Осимовой, К.Тухлиева Хучанд -2014. С.279-282.
13. Эшниязов А.И., Норбоев Ф. Квадратичные стохастические операторы вольтерровского типа // Материалы международной конференции посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию ученых математиков А.Мухсинова,А.Б.Назимова, С.Байзаева, Д.Осимовой, К.Тухлиева Хучанд -2014. С.282-285.
14. Эшниязов А.И. Дискретный аналог модели Вольтера // Сборник тезисов меж. конф. молодых ученых посв. 1000 летию академии Маъмуна Харезма., Хива, 2006. – С.57–58.
15. Эшниёзов А.И. Динимическая система и ее математическая модель // International conference on educational innovations and applied sciences. International Scientific Conference. Uzbekistan, Tashkent, 15 Aprel-2022/1. P. 180-185.
16. A.I. Eshniyozov, T.A.Iskandarova. Models described by bistochastic quadratic operators // “Raqamli hayot va ijtimoiy fanlarning barkamol avlodni voyaga etkazishdagi o’rni va ahamiyati” Xalqaro ilmiy-amaliy anjumani. Andijon mashinasozlik instituti 2022 yil 12 апрель. С. 465-469.
17. Эшниязов А.И. Системы квадратичных дифференциальных уравнений вольтерровского типа на симплексе // Вестник ГулГУ, № 1. 2012.С.3–7.
18. Эшниязов А.И. Асимптотическое поведение траекторий квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа // Вестник ГулГУ, № 4.–2011.–С.13–20.
19. Эшниязов А.И. Фракталы и системы счисления. // Вестник ГулГУ № 2. 2015. С.8-13
20. Эшниязов А.И. Равновесие по Нэшу. Существование равновесия для конечных игр нормальной форме. // Вестник ГулГУ 2017 г. №1. С. 3-7.
21. Эшниязов А.И. О предельных множествах траектории квадратичных операторов определенных на двумерном симплексе.// Вестник ГулГУ 2018 г. №1. С.3-5.
22. Ганиходжаев Р.Н., Эшниязов А.И. Бистохастические квадратичные операторы // Респуб. Научн. Конф.,Нукус., 2004. – С.17–19
23. Эшниязов А.И. Классы бистохастических квадратичных операторов // Респ. науч. конф. молодых ученых–математиков, посв. 125–летию академика В.И.Романовского. 9–10 декабря 2004 г. – С. 130–133.

24. Эшниязов А.И. О моделировании эволюции биологических систем. // Респ.научн. конф. «Сираждиновские чтения» по теор. вероят., мат. стат. и их прил., посв. Акад. С.Х.Сираждинова 8–мая 2006 г. – С. 139–142.
25. Ганиходжаев Р.Н., Эшниязов А.И. Турниры и генетические системы, вольтеровского типа.//«Ёш математикларнинг янги теоремалари – 2006» Респ. илмий анж. материаллари 15–16 ноябрь 2006 й. Б.10–12.
26. Ганиходжаев Р.Н., Эшниязов А.И. Вольтеровская модель в популяционной генетике // «Ёш математикларнинг янги теоремалари – 2006» Респ. илмий анж. материаллари 15–16 ноябрь 2006 й. Б.12–14.
27. Эшниязов А.И. Бистохастические квадартичные операторы и их приложения в популяционной генетике // «Ёш математикларнинг янги теоремалари – 2006» Респ. илмий анж. материаллари 15–16 ноябрь 2006 й. Б. 46–47.
28. Эшниязов А.И. Турниры и генетические системы вольтеровского типа. // Респ. научн. конф. посв. 90–летнему юбилею НУУз. 8–мая 2008 г. – С. 272–275.
29. Эшниязов А.И. Модели описываемые, квадратичными стохастическими операторами вольтеровского типа. // Респ. научн. конф. посв. 75–летнему со дня рождения профессора М.И.Исраилова. 27–30 апреля 2009 г. – С.113-114.
30. Эшниязов А.И. Курганов К.К. Динамика одного семейства квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ. Ташкент 2013 г. С–342–343.
31. Курганов К.А., Ганиходжаев Р.Н., Эшниязов А.И. Квадратичные диффеоморфизмы конечного симплекса // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» Ташкент, 23-25 октябрь, 2014 г. С 235-237.
32. Эшниязов А.И. О предельных множествах траектории квадратичных операторов определенных на двумерном симплексе.// Республиканская научная конференция «Новые результаты математики и их придложения» Самарканд, 14-15 мая, 2018 г. С.150-151.
33. Эшниязов А.И. О предельных множествах траектории квадратичных операторов определенных на двумерном симплексе // Республиканская научная конференция «Новые теоремы молодых математиков-2018» Наманган, 18-19 октября 2018 г. С.188-190.
34. Ganikhodjaev R.N., Seytov Sh.J., Shodiyev O.N., Eshniyazov A.I., Nishonov S.N., Obidjonov L.N. Coexistence chaotic behavior and Sharkovsky order bifurcations on three dimensional quadratic mappings. // «Современные методы математической физики и их применение» Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 17-18 ноября, Тошкент-2020. С.84-87.
35. Seytov Sh.J., Eshniyozov A.I. The method of graphical analysis for some two dimensional dynamical systems. //Abstacts of communications of the conference

«Modern stochastic models and problems of actuarial mathematics». September 25, 2020. Karshi, Uzbekistan. P. 52-53.
36. Seytov Sh.J., Nishonov S.N., Eshniyazov A.I. The investigation of the evolutions of the populations in the connected two islands. // «Математика ва амалий математиканинг замонавий муаммолари». Республика миқёсидаги ёш олимлар илмий онлайн конференцияси. Тошкент -2020. 21 май. С. 278-280.
37. Eshniyazov A.I., Seytov Sh.J., Nishonov S.N. Some properties of the cubic mapping depend on previous three steps. // «Замонавий таълимда математика, физика ва рақамли технологияларнинг долзарб муаммолари ва ютуқлари». Тошкент давлат Чирчиқ давлат педагогика институти-2021. С. 554-555.
38. Эшниязов А.И., Мингнаров Х.Э. Динамические системы генерируемые квадратичными стохастическими операторов вольтерровского типа и функции Ляпунова. // «Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари». Республика илмий-амалий анжумани материаллари тўплами. 1-2 июнь. Тошкент-2021.С. 421-424.
39. Seytov Sh.J., Eshniyozov A.I., Khidirova Sh.B. Chaos by three dimensional quadratic mapping. // «Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари». Республика илмий-амалий анжумани материаллари тўплами. 1-2 июнь. Тошкент-2021.С. 456-460.
40. Ганиходжаев Р.Н., Эшниязов А.И., Сейтов Ш.Ж., Нишонов С.Н. Связь между симметричными и стохастическими матрицами. «Актуальные проблемы стохастического анализа». Республика илмий-амалий анжумани материаллари тўплами. 20-21 февраль. 2021 йил. Тошкент. С. 464-466.
41. Эшниязов А.И., Бобомуродов Н., Муминов У.Р. О различнқх определениях бистохастических квадратичных операторов. «Актуальные проблемы стохастического анализа». Республика илмий-амалий анжумани материаллари тўплами. 20-21 февраль. 2021 йил. Тошкент. С. 739-740.
42. Эшниязов А.И. О крайних точек множества бистохастических квадратичных операторов. “Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari” Respublika ilmiy-amaliy anjumani. Andijon davlat universiteti 2022 yil 28 mart. C. 151-155.

Автореферат «Самарқанд давлат университети таҳририй-нашриёт бўлими» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди ва ўзбек, рус. инглиз (резюме) тиллардаги матнлари мослиги текширилди (25.08.2022 й.)