В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ЮЛДАШЕВА АСАЛ ВИКТОРОВНА

ПЕРИДИНАМИК МОДЕЛЛАР БИЛАН БОҒЛИҚ БЎЛГАН СИНГУЛЯР ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ЕЧИЛИШИ ҲАҚИДА

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ - 2022

УДК 517. 956

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Content of the of Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ЮЛДАШЕВА АСАЛ ВИКТОРОВНА

ПЕРИДИНАМИК МОДЕЛЛАР БИЛАН БОҒЛИҚ БЎЛГАН СИНГУЛЯР ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ЕЧИЛИШИ ҲАҚИДА

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ - 2022

Фан доктори (DSc) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.1.DSc/FM187 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Алимов Шавкат Арифжанович** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Дурдиев Дурдимурод Қаландарович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Рахимов Абдумалик Абдумажидович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Ўринов Ахмаджон Кушакович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	Хожа Аҳмад Ясавий номидаги халқаро қозоқ-турк университети (Қозоғистон)

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил « 1 » ноябр соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz.)

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (145-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Диссертация автореферати 2022 йил « 14 » октябр куни тарқатилди.

(2022 йил « 14 » октябрдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А. Розиков
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш котиби, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

А. Азамов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда механика хусусан, туташ муҳитлар механикаси моделларини тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Ташқи таъсир остида материаллар ва иншоотларнинг деформация реакциясини аниқлаш учун атомистик тузилмалар ҳисобга олинмаган классик туташ муҳитлар механикаси жорий этилди. Туташ муҳитлар механикаси кўплаб мураккаб масалаларни ҳал қилиш учун муваффақиятли ҳисобланади. Лекин, унинг асосий тенгламаси қисман дифференциал тенгламалар билан тавсифланади ва структурада узилишлар ёки ёриқлар мавжуд бўлганда қўлланилмайди, чунки бундай муҳитда фазовий хусусий ҳосилалар аниқланмаган. Ушбу масалаларни бартараф этиш учун Силлинг структурада узилишлар мавжуд ёки йўқлигидан қатъий назар, унинг асосий тенгламаси ҳар доим тўғри бўлади деган фараз билан туташ муҳитлар механикаси ва перидинамикага янги ёндашувни киритди.

Перидинамик моделлар фазовий ўзгарувчиларда ҳосилаларсиз интегро-дифференциал тенгламалар билан тавсифланади, шунинг учун узилиш пайдо бўлганда, математик структура бузилмайди. Бунинг ўрнига синиш ҳаракат тенгламаси ва аниқловчи моделга мувофиқ юзага келадиган деформациянинг табиий натижаси сифатида қаралади. Шунинг учун перидинамик моделда ёриқ ўсишини моделлаштириш анъанавий синиш механикасида ёриқнинг келиб чиқишини аниқлаш учун талаб қилинадиган қўшимча маълумотлар ва тенгламаларни талаб қилмайди: тезлик ўсиши, йўналиш, тўхташ, тарқалиш ва бошқа хусусиятлар. Бундан ташқари, перидинамикани молекуляр динамиканинг доимий версияси деб ҳисоблаш мумкин, бу эса ушбу янги ёндашувни материалларни кенг кўламли таҳлил қилишни тақазо этади. Перидинамик ёндашувни иссиқлик, намлик ва бошқа параметрларга ҳам қўллаш мумкин. Ва бу унинг материалларни кўп физик хоссаларини таҳлил қилиш учун ягона платформа сифатида ишлатишга имкон беради.

Ҳозирги кунга келиб мамлакатимизда фундаментал фанлар ва уларнинг амалий татбиқига эга бўлган йўналишларга эътибор кучайтирилди. Шу сабабли математиканинг устувор йўналишлари ҳисобланган «дифференциал тенгламалар, математик-физика тенгламалари, динамик системалар назарияси, алгебра ва функционал таҳлил, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, амалий математика ва математик моделлаштириш» соҳаларида илмий тадқиқот ишлари олиб бориш Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси қошидаги В.И.Романовский номидаги математика институтининг асосий масалаларидан бири ҳисобланади[1].

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги 292-сон қарори

сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича ҳалқаро илмий-тадқиқотлар шарҳи. Сингуляр интегро-дифференциал тенгламалар ва уларнинг татбиқлари бўйича дунёнинг етакчи илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Sandia National Laboratories, University of Strathclyde, Los Alamos National Laboratories, Micromechanics & Composites LLC, Columbia University, Washington State University, University of Nebraska-Lincoln, Oak Ridge National Laboratory, University of Texas, University of California, Kansas State University, University of New Mexico (АҚШ), Berlin Technical University, Bauhaus-University Weimar, Leibniz University, German Aerospace Center (Германия), Peking University, Hohai University, Beihang University, China University of Petroleum, Shanghai Jiao Tong University, Zhengzhou University (Хитой), University of Padova (Италия), University of Strathclyde, University of Derby, Imperial College (Буюк Британия), Sabanci University, TOBB University (Турция), Hiroshima University (Япония), Korea Advanced Institute of science and Technology, Seoul National University, Kunsan National University (Корея) каби илмий лабораторияларда илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда.

Охирги йилларда интегро-дифференциал тенгламалар қўллаш бўйича олиб борилган тадқиқотлар натижасида бир қатор долзарб масалалар ечилган. Жумладан, Калтофф-Винклер тажрибаларида пўлат пластинкани кесмалар билан йўқ қилиш масаласини перидинамик моделлар ёрдамида ўрганилган (University of Nebraska-Lincoln); қалин пластинкада ёриқларнинг ўсиши ва Герц ёриқлари ўрганилган (University of New Mexico); мембраналарнинг шикастланиши, ёрилиши ва узилиши, шарларнинг ёрилиши ва узоқ таъсирли кучлар туфайли толалар ва толалар тармоқларининг деформацияси кўриб чикилган (Sandia National Laboratories); чексиз стержен динамикасини, фаза чегаралари ҳаракатини (Institut für Mathematik , Technische Universität Berlin), сакраш шартларини ёки чизиқли бўлмаган дисперсия муносабатларини перидинамик моделлар орқали ёритилганини кўрилган (Technical University of Munich); Фурье алмашишидан фойдаланиб, ўз-ўзини мувозанатли юк тақсимотига учраган чексиз стержен деформацияси (Massachusetts Institute of Technology, Cambridge) ўрганилди; перидинамик назария (Technical University of Munich) доирасида ёриқлар ўсиши учун энергия баланси олинган. Чизиқли бўлмаган эластиклик ҳолатидаги вазият янада мураккаб бўлиб, ҳозирда бизга кам натижалар маълум (классик чизиқли бўлмаган эластодинамикада вазият янада мураккаб).

Бугунги кунда дунёда сингуляр интегро- дифференциал тенгламалар учун бир қатор изланишлар, шу жумладан, бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш ва олинган ечимларни татбиқ этиш; чизиқли бўлмаган перидинамик жараёнлар билан боғлиқ тенгламалар учун бошланғич масалаларни ечимини топиш; гиперсингуляр ядроли интегро-дифференциал тенгламаларнинг ечимларини ўрганиш ва бошқа шу каби устувор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Туташ муҳитлар механикасида нолокал назарияларни қуришга уринишлар 1970-йилларда Е.Крон, А. Эринген ва уларнинг ҳаммуаллифлари мақолалари билан бошланган. 1982-1983 йилларда И.А. Кунинннинг китоблари нашр этилди. Аммо бу ёндашувлар умумий бўлмаган ва шунинг учун бугунги кунда нолокал масалалар яна долзарб бўлиб қолди. Қаттиқ зарралар орасидаги мавжуд, эҳтимол чизиқли бўлмаган кучларни тавсифлаш учун фазовий-дифференциал операторлар ўрнига, жой алмашиш майдонидаги фарқлар бўйича интегралланиш қўлланилади. Фазовий ҳосилалар йўқлиги сабабли, интеграл-дифференциал тенглама учун чегаравий шартлар умуман керак эмас (гарчи бу интеграл ядро ва функционал-аналитик ўрнатишнинг ягона ҳаракатларига боғлиқ бўлса ҳам). Шунга қарамай, нол бўлмаган ҳажм бўйича ечимни чеклайдиган чегара бўйлаб қийматларни белгилаш орқали "чегара" шартларини қўллаш мумкин.

Жуфти билан кучли функциясини линеаризация қилиш орқали биз кўплаб муаллифлар томонидан ўрганилган линеаризацияланган пиродинамик моделни оламиз. Э. Эммрих ва О. Вагнер бир ўлчовли фазовий ўзгарувчига эга чизиқли динамик моделни кўриб чиқдилар, масалани ечимнинг мавжудлиги, ягоналиги ва турғунлигини исботладилар ва материалнинг турига қараб ўрганилаётган функциянинг турларини келтиришган. Кичик деформацияларга нисбатан қўлланиладиган аэродинамик ҳолат назариясининг линеаризацияланган версияси С. Силлинг томонидан ишлаб чиқилган ва соддалаштириш орқали масала иккинчи турдаги Фредголмнинг чизиқли интеграл тенгламасига келтирилди.

Ш.Алимов, Ю.Цао ва О.А.Ильхан ишларида махсус ядрога эга бўлган динамик моделдаги корректлилик ва регулярлик ўрганилиб, уни Волтерра интеграл тенгламасига келтирилади. Шундай қилиб, ўша пайтда маълум бўлган натижалар яхшиланган. Ш. Алимов ва Ш. Шералиевларнинг ишларида сингуляр ядроли чизиқли перидинамик модели кўп ўлчовли фазода кўриб чиқилган. Муаллифлар логарифмик Гилберт фазосида масаланинг ечимини топишга имкон берадиган ядро турини топишга муваффақ бўлишди. Эътибор беринг, ушбу ишдаги натижалар уч ёки ундан ортиқ ўзгарувчига эга бўлган ҳолатлар учун олинган. Уларда олинган формулалар икки ўлчовли сохада перидинамик моделлар учун қўлланилмайди. Анизотропик жисмлар ва эластикликнинг чизиқли бўлмаган хусусиятларига эга жисмларда деформация жараёнларини ўрганиш чизиқли бўлмаган перодинамик тенгламаларга олиб келади. Ушбу тенгламаларни ўрганиш билан боғлиқ бир қатор натижалар маълум. Асосан, муаллифлар фақат локал ечилишини исботлашга муваффақ бўлишди. Интегро-дифференциал тенгламаларни ўрганиш амалий нуқтаи назардан интегро-дифференциал тенгламаларнинг умумий назариясини ривожлантириш ҳамда, турли перидинамик жараёнларни математик моделлаштиришда долзарб ва муҳим ўрин тутади.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий ўқув муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқотлари В.И.Романовский номли Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги ОТ-Ф4-88 рақамли «Иккинчи ва юқори тартибли аралаш типдаги тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларнинг татбиқлари» ва Ф-ФА-2021-424 «Бутун сонли ва каср тартибли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечилиши» мавзусидаги фундаментал лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади перидинамик моделлар билан боғлиқ сингуляр ядролар интегро-дифференциал тенгламалар ва чизиқли бўлмаган интегро-дифференциал тенгламалар учун бошланғич масалаларни ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

қаралаётган икки ўлчовли даврий соҳада махсуслиги 2 бўлган сингуляр интегро-дифференциал тенглама ядросининг янги кўринишини олиш ва уларни Волтерра операторли тенгламаларига келтириш;

икки ўлчовли соҳада чизиқли бўлмаган эластикликнинг перидинамик моделлари билан боғлиқ бўлган тенгламанинг берилган функцияларга шартларини ва тенгламани ечилиши синфини топиш;

Соболев синфидаги функциялар учун янги баҳоларни исботлаш;

ихтиёрий соҳада қаралган сингуляр интегро-дифференциал тенгламани регуляр тенгламага келтириш методологиясини ишлаб чиқиш;

икки ўлчовли даврий соҳада қаралган гиперсингуляр интегро-дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги синфини топиш, унинг хусусиятларини ўрганиш;

чизиқли бўлмаган перидинамик тенгламанинг глобал ва локал ечиш шартларини аниқлаш;

Буссинеск типидаги интегро-дифференциал тенгламанинг ечиш шартларини топиш ва олинган ечимларнинг хусусиятларини ўрганиш.

Тадқиқотнинг объекти. Сингуляр интегро-дифференциал тенгламалар ва чизиқли бўлмаган интегро-дифференциал тенгламалар.

Тадқиқотнинг предмети. Перидинамика, сингуляр интегро-дифференциал тенгламалар ва чизиқли бўлмаган интегро-дифференциал тенгламалар назарияси, математик физика тенгламалари назарияси, интеграл ва операторли тенгламалар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Масалаларни ўрганишда ўзгарувчиларни ажратиш усули, интеграл тенгламалар усули, оддий дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари, функционал таҳлил усуллари, дифференциал операторлар назариясидан фойдаланилди.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

икки ўлчовли соҳада интегро-дифференциал тенгламаларнинг сингуляр ядроларининг бошқа кўриниши топилган, бу эса масаланинг регуляр ядроли тенгламаларга келтириш имконини берган;

ихтиёрий икки ўлчовли ва кўп ўлчовли соҳаларда перидинамик тенгламалар учун дастлабки маълумотлар билан масалаларни ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремалари исботланган;

турли ночизиқли перидинамик тенгламаларнинг глобал ва локал ечилишининг шартлари топилган;

Соболев синфларининг баъзи функциялари учун янги баҳолар исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси турли материаллар деформациясининг чизиқли ва ночизиқли хоссаларини ўрганишда фойдаланиш мумкин. Шунингдек, перидинамик жараёнларнинг математик моделларини қуриш учун асос бўлиб ҳизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги диссертацияда математик физика, дифференциал тенгламалар, функционал ва математик анализ усулларидан қатъий фойдаланилганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Ишнинг илмий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалар сингуляр ядроли интегро-дифференциал тенгламалар назариясини ишлаб чиқилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти улардан турли материалларнинг перидинамик хусусиятларини таҳлил қилишда, шунингдек турли перидинамик жараёнларнинг математик моделларининг сонли ечимларини қуришда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Перидинамик моделлар билан боғлиқ бўлган сингуляр интегро-дифференциал тенгламалар бўйича олинган натижалар асосида:

ихтиёрий икки ўлчовли ва кўп ўлчовли соҳаларда перидинамик тенгламалар учун дастлабки маълумотлар билан масалаларни ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремаларидан АААА-А19-119072290002-9 рақамли «Камчатка табиий офатлари-зилзилалар ва вулқон отилиши» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида ночизиқли ёрилган муҳитни таҳлил қилишда фойдаланилган (Камчатка давлат университетининг 2022 йил 31 майдаги 17/2-12-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланилиши перидинамиканинг гиперсингуляр интегро-дифференциал тенгламасига асосланган математик моделнинг сонли ечимининг самарали алгоритмларини ишлаб чиқиш имконини берган;

икки ўлчовли соҳада интегро-дифференциал тенгламаларнинг сингуляр ядроларини регуляр ядроли тенгламаларига келтириш усулидан «Эластик ва пластик муҳитларнинг чизиқли бўлмаган моделларини ишлаб чиқиш, статик ва динамик юкларнинг таъсири остида изотропик ва анизотропик жисмларнинг чизиқли бўлмаган деформацияси» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида эластик муҳитларнинг чизиқли бўлмаган моделларини ишлаб чиқишда фойдаланилган (Механика ва иншоотлар сейсмик мустаҳкамлиги институтининг 2022 йил 20 июндаги 437-3-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши эгилувчанлик масалалар ечимларини сонли усулларини олиш имконини берган;

жуфт тартибли квазичизиқли тенгламалар учун ва перидинамиканинг чизиқли бўлмаган тенгламаларининг ишлаб чиқилган усуллари MRU-OT-1/2017 рақамли «Нокласcик ва операторли дифференциал тенгламалар учун нолокал ва тескари масалалар» мавзусидаги фундаментал лойиҳада иккинчи тартибли аралаш типдаги чизиқли ва квазичизиқли тенгламалар учун нолокал масалалар ечишда фойдаланилган (Ўзбекистон миллий университетининг 2022 йил 23 июндаги 01/11-3672-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши асосий қисмдаги иссиқлик ўтказувчанлик оператори бўлган тоқ тартибли тенгламалар учун нолокал масалалар ечимларининг мавжудлиги ва ягоналигини кўрсатиш имконини берган;

турли ночизиқли перидинамик тенгламаларнинг глобал ва локал ечилишининг топилган шартларидан 18-51-41002 рақамли «Ўзаро таъсирлар билан икки фазали муҳитларнинг термодинамик келишилган математик моделини диссипатив ёндашувда математик моделлаштириш» мавзусидаги фундаментал лойиҳада тенгламалар системаси учун чегаравий масалаларини ечишда фойдаланилган (Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институти Сибирь филиалининг 2022 йил 10 июндаги 15301-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланилиши диссипатив яқинлашишда магнит-кучланиш тенгламалар системаси учун чегаравий масалаларини умумлашган ечимнинг мавжудлиги ва ягоналигини кўрсатиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 7 та халқаро ва 2 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 22 та илмий ишлар чоп етилган бўлиб, шундан 11 та мақола Ўзбекистон Республикаси олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертацияларининг асосий илмий натижаларини чоп этиш учун тавсия этилган илмий нашрларда чоп этилган, 5 таси республика ва 6 таси Scopus маълумотлар базаларида индексланган журналларда.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 136 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи ва муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертациянинг тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **биринчи бобида** даврий тузилишга эга бўлган доимий перидинамик моделларга бағишланган, улар жой алмашиш майдонини бирлаштиришни ўз ичига олади.

Ушбу бобнинг **биринчи параграфида** перидинамик тенгламаларнинг пайдо бўлиши сабаблари ва тарихи, улардаги мавжуд бўлган асосий фарқлар келтирилган.

Иккинчи параграфида даврий икки ўлчовли сохада перидинамик тенгламаси учун Коши масаласи ўрганилган. Берилган барча функциялар фазовий ўзгарувчилар бўйича даврий функциялар деб ҳисоблаймиз.

$t>0$ бўлганда $D=\left[-\pi,\pi\right]^2$ соҳада чизиқли перидинамик моделни қуйидаги интегро-дифференциал тенглама билан тавсифлаш мумкин:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\int\limits_D K(x,y)\left[u(x,t)-u(y,t)\right]dy=f(x,t), \tag{1}$$

бошланғич шартлар

$$u(x,0)=\varphi\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right)=\psi\left(x\right). \tag{2}$$

Бу ерда $\varphi: D\to\mathbb{R}^2, \psi: D\to\mathbb{R}^2$ - бошланғич маълумотлар, $f: D\times\left[0,T\right]\to\mathbb{R}^2$ - ташқи куч ва ядро K эса 2×2 ўлчовли матрица функцияси

$$K(x,y)=P(x-y), x\in D, y\in D, \tag{3}$$

бу ерда *P(x)* даврий функция бўлиб ва у қуйидаги кўринишга эга

$$P(x)=\frac{\left(x\otimes x\right)}{|x|^4}\chi\left(|x|\right). \tag{4}$$

Бунда $\otimes$ белги тензор кўпайтма ва $\chi\left(r\right)\in C^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ функция айрим фиксирланган $\rho,\ 0<\rho<\frac{\pi}{2}$ лар учун қуйидаги шартни қанотлантиради

$$\chi\left(r\right)=\begin{cases}1,\ r\le\rho,\\0,\ r\ge2\rho,\end{cases} \tag{5}$$

ва $0\le\chi\left(r\right)\le1,\ r\in\mathbb{R}$.

Биз (1)-(2) масалани ечимини $t\ge0$ бўлганда $L_2\left(D\right)$ дан олинган $u\left(x,t\right)$ функцияни тушунамиз, бу функция $t>0$ да икки марта t бўйича узлуксиз ҳосилага эга бўлиб, (1) тенгламани ва (2) шартларни қанотлантиради.

Қуйидагини аниқлаймиз

$$\left(\nabla \otimes \nabla\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} \text{ ва } I\Delta=\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

бу ерда Δ - Лаплас оператори ва I - бирлик матрица.

1-тасдиқ. (4) *функцияни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин*

$$P(y)=\frac{\chi\left(|y|\right)}{2}\left[\left(\nabla \otimes \nabla\right)\ln\frac{1}{|y|}+I\Delta\left(\frac{\ln^2|y|}{2}\right)\right],\ y\in D.$$

Кўриб чиқилаётган масала учун қуйидаги натижалар исботланган.

1-теорема. *(1) - (2) масалани ечими ягона.*

2-теорема. *Айтайлик* $\varphi\left(x\right)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{\alpha}(D), \alpha>3,\ \psi\left(x\right)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{\beta}(D), \beta>2$ *ва* $f\left(x,t\right)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{3}(D)$ *функция* $t\geq 0$ *бўйича узлуксиз бўлсин. У ҳолда (1) - (2) масала ечимга эга.*

Биринчи бобнинг **учинчи параграфида** $D=\left[-\pi,\pi\right]^2$ соҳада қуйидаги тенглама

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\int\limits_D K(x,y)\left[u(x,t)-u(y,t)\right]dy=f(x,t),\ x\in D,\qquad t>0 \qquad (6)$$

$$u(x,0)=\varphi\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right)=\psi\left(x\right) \qquad (7)$$

бошланғич шартлар билан ўрганилган.

Бу ерда $u:D\times\left[0,T\right]\to\mathbb{R}^n$ - номаълум функция, $K-$ ядро $n\times n$ ўлчамли $D\times D$ соҳада берилган матрица функцияси, $\varphi:D\to\mathbb{R}^n$ ва $\psi:D\to\mathbb{R}^n$ - бошланғич маълумотлар, $f:D\times\left[0,T\right]\to\mathbb{R}^n$ - ташқи куч.

Биз ушбу параграфда $n\geq 2$ бўлсин деб олиб ва ядрони эса қуйидаги кўринишда оламиз

$$K\left(x,y\right)=P\left(x-y\right),\ x\in D, y\in D,$$

бу ерда $P(x)$ даврий функция бўлиб, $x\in D$ да қуйидаги кўринишга эга

$$P(x)=\frac{\left(x\otimes x\right)}{|x|^{n+2}}\chi\left(|x|\right).$$

$\chi\left(r\right)\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ функция (5) билан аниқланади.

Иккита фазовий ўзгарувчи бўлганда қуйидаги натижа олинди.

3-теорема. *Берилган функциялар* $\varphi\left(x\right)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{1}\left(D\right),\ \psi\left(x\right)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{1}\left(D\right)$, $f\left(x,t\right)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{3}(D)$ *функция* $t\geq 0$ *бўйича узлуксиз ва* $\alpha>0$ *бўлсин. У ҳолда (6)-(7) Коши масаласи ягона ечимга эга.*

Агар масала n-ўлчовли соҳада қаралса, қуйидаги интеграл операторни киритамиз

$$Bv(x)=\int_D P(x-y)\left[v(y)-v(x)\right]dy,$$

ва (6) – (7) масалани қуйидаги тенгламага олиб келамиз

$$u(x,t)+2\alpha\int_0^t u(x\ s)ds-\int_0^t (t-s)Bu(x,s)ds=F(x,t),\ x\in D, t>0, \qquad (8)$$

бу ерда

$$F(x,t)=(2\alpha t+1)\varphi(x)+t\psi(x)+\int_0^t (t-s)f(x,s)ds.$$

Қуйидаги операторни киритамиз

$$Av(x)=-2\alpha\int_0^t v(s)ds+\int_0^t (t-s)Bv(s)ds\ .$$

Ушбу белгилашни ҳисобга олган ҳолда, (8) тенглама қуйидагича кўринишни олади

$$u(t)=Au(t)+F(t).$$

Кетма-кет яқинлашиш усули билан олинган кетма-кетликни аниқлаймиз

$$v_0(t)=F(t), v_{k+1}(t)=Av_k(t)=A^kF(t).$$

Энди Нейман қаторининг яқинлашишини

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t), \qquad (9)$$

ва бу қаторнинг йиғиндиси (8) тенгламанинг ечими эканлигини кўрсатамиз.

(9) қаторни якинлашишини исботлаш учун A операторнинг ихтиёрий натурал даражасини баҳолаймиз. Бунинг учун логарифмик Гильберт фазосини киритамиз:

$$H_m=\{v|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\hat{v}_k\right|^2\ln^{2m}\sqrt{e^2+|k|^2}<\infty\}, m=1,2,...$$

Агар қуйидаги норма чекли бўлса, у ҳолда ихтиёрий $v\in L_2(D)$ функция $W_2^{\mu}(D)$ Соболев синфига тегишли бўлади

$$\|v\|^2_{W_2^{\mu}(D)}=(2\pi)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\ \hat{v}_k\ |^2\ (1+|k|^2)^{\mu}\ .$$

$C\left[\mathbb{R}^+\to H\right]$ орқали t бўйича узлуксиз $f:\mathbb{R}^+\to H$ функциялар синфини белгилаймиз ва унинг нормаси

$$\|f\|_{H,t}=\sup_{0\le s\le t}\|f(s)\|_H\ .$$

Агар $H=H_m$ бўлса, қуйидаги белгилашдан фойдаланамиз

$$\|f\|_{m,t}=\sup_{0\le s\le t}\|f(s)\|_m.$$

1-лемма. *Агар барча натурал* m *сонлар учун* $F \in C\left[\mathbb{R}^{+} \to H_{m}\right]$ *бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $k \in \mathbb{N}$ *ва айрим* $M > 0$ *лар учун қуйидаги баҳолаш ўринли бўлади*

$$\| A^{k} F \|_{m,t} \le \frac{(k+m)!}{\mu^{k+m}} e^{\mu-1} \| F \|_{W_2^{\mu},t} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \, |\alpha|^{k-i} \, M^i \, \frac{t^{k+i}}{(k+i)!}.$$

2-лемма. *Айтайлик* $\mu > 0$ *ва* $0 \le T \le \sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{K}}}$ *ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $F \in C\,[\mathbb{R}^{+} \to W_2^{\mu}(D)]$ *функция ва* m *натурал учун (9) Нейман қатори* H_m *Гилберт фазони нормасида* $0 \le t \le T$ *текис яқинлашади ва унинг йиғиндиси қуйидаги баҳолашни канотлантиради*

$$\| u \|_{m} \le D_m(\mu) \frac{(m+1)!}{\left(1 - \frac{\mathrm{K} t^2}{\mu}\right)^{(m+2)}},$$

бу ерда $D_m(\mu) = e^{\mu-1} \frac{(m+1)!}{\mu^m}.$

4-теорема. *Агар* $\mu > 0$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in W_2^{\mu}(D)$ *ва* $f(x,t) \in W_2^{\mu}(D)$ *функция* t *бўйича узлуксиз бўлса, (6)-(7) масаланинг ечими мавжуд ва ягона*.

Диссертациянинг **иккинчи бобида** «Бўлакли силлиқ чегарали ихтиёрий соҳада деформациянинг перидинамик формулировкаси» деб номланган бўлиб, Коши масаласининг чизиқли перидинамик модел билан боғланган сингуляр ядроли интегро-дифференциал тенгламанинг ечимини ўрганишга бағишланган.

Бу бобнинг **биринчи параграфида** интегро-дифференциал тенглама билан тавсифланган перидинамик моделнинг қуйидаги математик ифодаси берилган:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \int_D K(x,y)\left[u(x,t) - u(y,t)\right]dy = f(x,t), \;\; x \in \Omega, t > 0 \qquad (10)$$

ва қуйидаги бошланғич шартлар

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), x \in \Omega, \qquad (11)$$

бу ерда $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ бўлакли силлиқ чегарали соҳа, $n \ge 3$.

Ушбу параграфда соддалаштирилган модел кўриб чиқилган бўлиб $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ - номаълум функция, $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ ядро ва $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ ташқи куч функциялари скаляр функциялар деб қаралган.

(10) тенгламанинг интеграл оператори махсус кучли сингулар ядрога эга ва у $x = y$ диагонал яқинида унинг кўриниши қуйидагича бўлсин

$$K(x,y) = \frac{c}{|x-y|^n} + \gamma(x,y),$$

бу ерда $\gamma(x,y)$ интегралланувчи функция ва қуйидаги чегаравий шартни қанотлантиради

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} K(x,y)=0, x\in\partial\Omega, y\in\Omega.$$

Бу ерда $\nu(x)$ эса $x\in\partial\Omega$ нуқтадаги $\partial\Omega$ чегарага ташқи нормал.

Тегишли интеграл оператор

$$Au(x)=\int_{\Omega} K(x,y)\left[u(x)-u(y)\right]dy \tag{12}$$

классик функционал фазоларда гиперсингуляр ва $L_p(\Omega)$ да ёки $W_p^l(\Omega)$ Соболев фазоларида чегараланмаган.

Нейман чегара шартлари натижасида ҳосил бўлган Δ Лаплас операторининг ўз-ўзига қўшма кенгайишини кўриб чиқамиз. Бу кенгайиш спектри $\{\lambda_k\}$ хос сонлардан иборат ва $\{\upsilon_k\}$ хос функциялар қуйидаги тенгликни қанотлантиради:

$$-\Delta\upsilon_k(x)=\lambda_k\upsilon_k(x),\ x\in\Omega,\ \frac{\partial\upsilon_k(s)}{\partial\nu}=0, s\in\partial\Omega, k=0,1,2,... \tag{13}$$

Бу спектрал масала ечимини $W_2^1(\Omega)$ маъносида тушинамиз.

Ихтиёрий $\beta\geq 0$ учун

$$\|u\|_{\beta}^2=\sum_{k=0}^{\infty}(1+\lambda_k)^{\beta}\left|(u,\upsilon_k)\right|^2$$

норма билан $H^{\beta}(\Omega)=D((\mathrm{I}-\Delta)^{\beta/2})$ Гильберт фазосини киритамиз.

$\alpha>0$ бўлганда $W_2^{\alpha}(\Omega)$ орқали α (каср) тартибли классик Соболев фазолар белгиланган.

Ихтиёрий $T>0$, $m=0,1,...$ ва ихтиёрий B банах фазо учун, $[0,T]$ ни B га m марта узлуксиз дифференциаланувчи акслантиришлар фазосини $C^m\{[0,T]\to B\}$ орқали белгилаймиз.

(10) - (11) масалани $H^{\beta}(\Omega)$ синфдаги ечими деб (10) тенгламани ва (11) бошланғич шартларини қанотлантирувчи $u\in C^m\left\{[0,T]\to H^{\beta}(\Omega)\right\}$ функция айтамиз.

Ушбу бобнинг **иккинчи параграфида** Соболев синфидаги функциялар учун янги баҳолар олинган, бу биринчи параграфдаги масалани ечиш учун жуда муҳимдир.

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ бўлакли силлик чегарали соҳа бўлсин ва Ω_h орқали ихтиерий $h>0$ да қуйидаги соҳани белгилаймиз

$$\Omega_h = \{x\in\Omega\ :\ dis(x,\partial\Omega)>h\}.$$

Агарда қуйидаги шарт

$$\left|\Omega\setminus\Omega_h\right|\leq const\, h^{\tau}, 0<h<1.$$

бажарилса, у ҳолда Ω майдон $0 < \tau \le 1$ да B^{τ} синфига тегишли бўлади. Бундан ташқари, f функция $W_p^{\alpha}(\Omega)$ синфга тегишли бўлиши учун у билан бир хил белгиланадиган $W_p^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ даги баъзи функцияларнинг изи бўлиши керак.

Ихтиёрий $h > 0$ да Ω_h тўпламнинг характеристик функциясини χ_h орқали белгилаймиз.

Қуйидаги функцияларни киритамиз

$$P(x,h) = f(x)\chi_{3h}(x), \quad Q(x,h) = f(x)\left[\chi(x) - \chi_{3h}(x)\right].$$

Бундан эса $P(x,h)$ функцияни ташувчиси Ω_{3h} да ва $Q(x,h)$ функцияни ташувчиси $\Omega \setminus \Omega_{3h}$ да аниқланганлиги келиб чиқади.

Маълумки, қуйидаги тенглик бажарилади

$$f(x) = P(x,h) + Q(x,h), \quad x \in \Omega.$$

3-лемма. *Ихтиёрий $u \in \mathbb{R}^n, |u| < h$ вектор учун қуйидаги баҳо ўринли*

$$\int_{R^n} |P(x+u,h) - P(x,h)|^2 dx \le \mathrm{const} \cdot h^{2\alpha\tau/n}.$$

4-лемма. *Ихтиёрий $h > 0$ да қуйидаги баҳо ўринли*

$$\int_{\Omega} |Q(x,h)|^2 dx \le \mathrm{const}\, h^{2\alpha\tau/n}.$$

Бундан кейин $0 < \tau \le 1$ да $\Omega \in B^{\tau}$ деб қараймиз.

5-лемма. *Айтайлик, $f \in W_2^{\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$. У ҳолда ихтиёрий $h > 0$ учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h)|^2 [\phi(h\sqrt{\lambda_k}) - 1]^2 \le const \cdot h^{(2\alpha\tau/n)}.$$

6-лемма. $f \in W_2^{\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, *бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $h > 0$ учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k(h)|^2 \left[\phi\left(h\sqrt{\lambda_k}\right) - 1\right]^2 \le \mathrm{const}\, h^{2\alpha\tau/n}.$$

7-лемма. *Айтайлик, $\Omega \in B^{\tau}$, $0 < \tau \le 1$ ва $f \in W_2^{\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\mu \ge 1$ учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\sum_{\mu \le \sqrt{\lambda_k} \le 2\mu} |f_k|^2 \le \mathrm{const}\, \mu^{-2\alpha\tau/n}.$$

8-лемма. *Айтайлик, $\Omega \in B^{\tau}$, $0 < \tau \le 1$ ва $f \in W_2^{\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $0 < \beta < \alpha\tau/n$ учун куйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \lambda_k^{\beta} < \infty.$$

5-теорема. *Ихтиёрий $0 < \alpha < 1$ ва $0 < \beta < \alpha / n$ сонлар учун айниятли оператор доимий равишда $W_2^{\alpha}(\Omega)$ дан $H^{\beta}(\Omega)$ га узлуксиз таъсир қилади, яъни*

$$\|u\|_\beta \le const\|u\|_{W_2^\alpha(\Omega)}.$$

Иккинчи бобнинг **учинчи параграфи** (10) - (11) масала ечилишига бағишланган. Қуйидаги функцияни киритамиз (эслатиб ўтамиз, $n \ge 3$):

$$L_0(x,y) = \alpha\, |x-y|^{2-n} \ln\frac{1}{|x-y|}\cdot \chi\left(\frac{|x-y|}{R}\right), \quad x\in\Omega, \quad y\in\Omega, \qquad (14)$$

бу ерда $\alpha = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{n/2}}$ ва $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ўсмайдиган функция

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, \text{ агар } r \le 1/2, \\ 0, \text{ агар } r \ge 1. \end{cases}$$

9-лемма. *(14) функцияни (13) масаланинг хос функциялари бўйича Фурье қатори қуйидаги кўринишга эга*

$$L_0(x,y) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}v_k(x)v_k(y) + \gamma\sum_{\lambda_k>0}\frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{\infty}c_k(x)v_k(x)v_k(y),$$

бу ерда $c_k(x)$ *коэффициентлар ҳар бир N натурал сон учун қуйидаги шартни қанотлантиради*

$$|c_k(x)| \le \frac{C_N(x)}{(1+\lambda_k)^N}, \qquad (15)$$

ва $C_N(x)$ *қийматлари x буйича* Ω *нинг ихтиёрий компакт қисм тўпламида чегараланган.*

Биз *G(x,y)* орқали (13) масаланинг Грин функцияни белгилаймиз:

$$G(x,y) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k}.$$

Ва қуйидагини киритамиз

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}c_k(x)v_k(x)v_k(y).$$

(15) баҳолашдан $R(x,y)$ функция $\Omega\times\Omega$ соҳасида чексиз дифференциалланувчи эканлиги келиб чиқади.

Қуйидаги функцияни киритамиз

$$L(x,y) = L_0(x,y) - \gamma G(x,y) - R(x,y). \qquad (16)$$

10-лемма. *(16) тенглик билан аниқланган* $L(x,y)$ *функциянинг Фурье қатори куйидаги кўринишга эга*

$$L(x,y) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}v_k(x)v_k(y).$$

$L(x,y)$ *функция x = y диагоналидан ташқарида чексиз дифференциалланувчи ва ҳар бир* $K \subset \Omega$ *компактида текис. Бундан ташқари, унинг ҳосилалари қуйидаги шартни қанотлантиришади*

$$\left|D^{\alpha} L(x,y)\right| \le const \frac{|\ln|x-y||}{|x-y|^{n-2+\alpha}}, \quad x\in\Omega, \quad y\in\Omega.$$

Эслатиб ўтамиз

$$K(x,y) = \left(-\Delta_y\right) L(x,y),\ x\in\Omega, y\in\Omega. \qquad (17)$$

11-лемма. *Ихтиёрий $u\in C_0^{\infty}(\Omega)$ функция учун қуйидаги тенглик ўринли*

$$\| Au(x)\|_{\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} |\left(u, v_k\right)|^2 \cdot \lambda_k^{\beta} \ln^2 \lambda_k.$$

6-теорема. *Ихтиёрий $0<\alpha<1$ ва мусбат β < α/n ларда сингуляр интеграл оператор A узлуксиз $W_2^{\alpha}(\Omega)$ ни $H^{\beta}(\Omega)$ га ўтказади ва*

$$\|Au\|_{\beta} \le const \|u\|_{W_2^{\alpha}(\Omega)}.$$

(10) тенгламанинг ечими (13) чегаравий масалани хос функциялари орқали ёйилган қатор кўринишда қидирилади. Ушбу параграфнинг асосий натижаси қуйидагича.

7-теорема. *Айтайлик, $\alpha\in(0,1)$ ва $0<\beta<\alpha/n$ бўлсин. Агар ихтиёрий $T>0$, $\varphi(x)\in W_2^{\alpha}(\Omega)$, $\psi(x)\in W_2^{\alpha}(\Omega)$ ва $f(x,t)\in C\left\{[0,T]\to W_2^{\alpha}(\Omega)\right\}$ лар учун (10)-(11) масалани ечими мавжуд, ягона ва $C^2\left\{[0,T]\to H^{\beta}(\Omega)\right\}$ синфга тегишли.*

Иккинчи бобнинг **тўртинчи параграфи** (10)-(11) масалани икки ўлчовли бўлакли силлиқ чегарали соҳада ўрганилган.

Бундай соҳаларда (17) тенглик қуйидаги ҳолларда амалга оширилади

$$L(x,y) = \frac{1}{2}\ln^2|x-y| + \eta(x,y). \qquad (18)$$

Ушбу функция олдинги параграфдаги каби аниқланади, аммо

$$L_0(x,y) = \frac{1}{2}\ln^2|x-y| \cdot \chi\left(\frac{|x-y|}{R}\right), \qquad (19)$$

бўлади.

13-лемма. *Икки ўлчовли соҳада (19) функцияни (13) масаланинг хос функциялари бўйича Фурье қатори қуйидаги кўринишга эга*

$$L_0(x,y) = \pi \sum_{\lambda_k>0} \frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k} \upsilon_k(x)\upsilon_k(y) + \gamma \sum_{\lambda_k>0} \frac{\upsilon_k(x)\upsilon_k(y)}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(x)\upsilon_k(x)\upsilon_k(y),$$

бу ерда $d_k(x)$ коэффицентлар ҳар бир N натурал сон учун қуйидаги шартни қанотлантиради

$$\left|d_k(x)\right| \le \frac{D_N(x)}{\left(1+\lambda_k\right)^N},$$

ва $D_N(x)$ қийматлари x буйича Ω нинг ҳар бир компакт қисм тўпламида чегараланган.

(12) сингуляр интеграл оператор учун 13-леммага кўра қуйидаги ўринли.

14-лемма. *Ихтиёрий* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *функция учун қуйидаги тенглик ўринли*

$$Au(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \lambda_k (u, \upsilon_k) \upsilon_k(x), \; x \in \Omega.$$

Икки ўлчовли соҳада (10) - (11) масала учун қуйидаги теорема ўринли.

8-теорема. *Айтайлик,* $n = 2,\; \alpha \in (0,1)$ *ва* $0 < \beta < \alpha / 2$ *бўлсин. Ихтиёрий* $T > 0$, $\varphi(x) \in W_2^\alpha(\Omega)$, $\psi(x) \in W_2^\alpha(\Omega)$ *ва* $f(x,t) \in C\{[0,T] \to W_2^\alpha(\Omega)\}$ *лар учун (10)-(11) масалани ечими мавжуд, ягона ва* $C^2\{[0,T] \to H^\beta(\Omega)\}$ *синфга тегишли.*

Учинчи боб икки ўлчовли даврий структурада чизиқли перидинамик моделни ўрганишга бағишланган.

Ушбу бобнинг **биринчи параграфида** қуйидаги интегро-дифференциал тенгламага кўриб чиқилади

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \int_{\mathbb{T}^2} K(x,y)\left[u(x,t) - u(y,t)\right]dy = f(x,t), \quad x \in \mathbb{T}^2, \quad t > 0, \tag{20}$$

$$u(x,0) = \phi(x),\; u_t(x,0) = \psi(x),\; x \in \mathbb{T}^2. \tag{21}$$

Бу ерда $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Барча функциялар ҳар бир $x_k,\, k = 1,2,$ ўзгарувчи бўйича 2π даврга эга ҳисобланади.

(20) тенглама ва (21) шартларида $u : \mathbb{T}^2 \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$ - номаълум функция, K – ядро $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ соҳада берилган 2×2 ўлчамли матрица функцияси, $\phi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\psi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ - бошланғич маълумотлар ва $f : \mathbb{T}^2 \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$ – ташқи куч.

Тенгламада қуйидагича ядро қаралади

$$K(x,y) = K_\tau(x-y), \quad x \in \mathbb{T}^2,\; y \in \mathbb{T}^2,$$

бу ерда $K_\tau(x)$ – даврий функция бўлиб қуйидаги кўринишга эга

$$K_\tau(x) = \frac{(x \otimes x)}{|x|^{4+\tau}} \chi(|x|), \quad \tau > 0, \quad x \in \mathbb{T}^2. \tag{22}$$

Айрим $\rho > 0$ ва фиксирланган $0 < \beta < 1$ лар учун қуйидаги шартни қаноатлантирадиган $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ функцияни киритамиз

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & , \quad r \le (1-\beta)\rho, \\ 0 & , \quad r \ge \rho, \end{cases}$$

ва $0 \le \chi(r) \le 1,\; r \in \mathbb{R}$.

Одатда ρ горизонт параметр жуда кичик, β параметрнинг қиймати чегара қатламининг қалинлиги билан белгиланади, унда атрофдаги зарраларнинг таъсири нолга чиқади.

$K_\tau(x)$ ядронинг жуфтлигидан фойдаланиб, (20) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин

$$u_{tt}(x,t)-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2}K_\tau(y)\big[u(x+y,t)-2u(x,t)+u(x-y,t)\big]dy=f(x,t). \quad (23)$$

Биз бундан кейин

$$0<\tau<2 \quad (24)$$

деб қабул қиламиз.

Ихтиёрий $\alpha>0$ учун $L_2^\alpha(\mathbb{T}^2)$ Соболев фазони $f\in L_2(\mathbb{T}^2)$ вектор функциялари майдони сифатида аниқлаймиз, улар учун норма чекланган

$$\| f \|_{L_2^\alpha}^2 = 4\pi^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}| f_k|^2(1+|k|^2)^\alpha .$$

Бу ерда f_k - f функциянинг Фурье коэффициентлари.

$\alpha>0$ бутун сон бўлганда $L_2^\alpha(\mathbb{T}^2)$ фазоси $W_2^\alpha(\mathbb{T}^2)$ Соболевнинг одатий фазосига тўғри келади.

Қуйидаги операторни киритамиз

$$Bv(x)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2}K_\tau(y)\big[v(x+y)-2v(x)+v(x-y)\big]dy\,. \quad (25)$$

Шундай қилиб, (21) бошланғич шартлар билан қуйидаги Коши масаласига келдик.

$$u_{tt}(x,t)-Bu(x,t)=f(x,t),\quad x\in\mathbb{T}^2,\quad t>0. \quad (26)$$

(26), (21) Коши масаланинг ечими $u(x,t)$ ни ҳар бири $L_2^\tau(\mathbb{T}^2)$ га тегишли функция сифатида аниқлаймиз, у $L_2(\mathbb{T}^2)$ фазонинг нормаси бўйича $t\geq 0$ ёпиқ ярим текисликда t бўйича узлуксиз, $t>0$ очиқ ярим текисликда t бўйича икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлиб, (26) тенглама ва (21) бошланғич шартни қанотлантиради.

(24) шартни қўллаш орқали биз фазовий ўзгарувчиларда узилишга эга ечимларнинг мавжудлигини кўришимиз мумкин.

Иккинчи параграфида гиперсингуляр оператор мунтазам интеграл-дифференциал операторга айланади. Асосий босқичларни берамиз.

Ҳар қандай $u\in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ функциянинг Фурье коеффициентлари $v=(\nabla\otimes\nabla)u$ функцияни Фурье коэффициентлари билан қуйидаги тенглик орқали боғланади

$$v_k=(ik\otimes ik)u_k.$$

Қуйидаги дифференциал операторни киритамиз:

$$A_\tau(\nabla)=\frac{1}{\tau(\tau+2)}\left[(\nabla\otimes\nabla)+\frac{1}{\tau}I\Delta\right]. \quad (27)$$

Агар $f(x)$ ихтиёрий силлиқ функция бўлса, у ҳолда $A_\tau(\nabla)f(x)$ белги $A_\tau(\nabla)$ ва $f(x)I$ матрицаларнинг кўпайтмасига тенг

$$A_\tau(\nabla)f(x)=A_\tau(\nabla)\big[f(x)I\big].$$

2-тасдиқ. *Ихтиерий $\tau>0$ учун қуйидаги тенглик ўринли*

$$A_\tau(\nabla)\frac{1}{|x-y|^\tau} = \frac{(x-y)\otimes(x-y)}{|x-y|^{\tau+4}}.$$

1-натижа. Умумийликка зиён келтирмаган ҳолда (26) ядро қуйидаги кўринишда деб олиш мумкин

$$K_\tau(x) = A_\tau(\nabla)\frac{\chi(|x|)}{|x|^\tau} + W(x), \quad \tau>0, \quad x\in\mathbb{T}^2,$$

бу ерда элементлари $w^{(ij)}\in C_0^\infty(\mathbb{T}^2)$ бўлган $W(x)$матрица функцияси.

15-лемма. *Ихтиёрий* $v\in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ *функция учун қуйидаги тенглик тўғри*

$$Bv(x) = \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\chi(|y|)}{|y|^\tau}A_\tau(\nabla_y)v(x-y)dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2}\left[W(y)+W(-y)\right]v(x+y)dy - \left(\int_{\mathbb{T}^2}W(y)dy\right)v(x).$$

Учинчи бобнинг **учинчи параграфида** $0<\tau<2$ учун қуйидаги ядро қаралган

$$L(x) = \frac{\chi(|x|)}{|x|^\tau}, \quad x\in\mathbb{T}^2,$$

бундан ташқари, ушбу функциянинг Фурье коеффициентлари қуйидаги тенгликни қаноатлантиради

$$L_k = \frac{C_\tau}{|k|^{2-\tau}} + O\left(|k|^{-N}\right), k\neq 0,$$

бу ерда C_τ фақат τ га боғлиқ.

Ихтиёрий 2×2 ўлчамли $G=\left(g^{(ij)}\right)$ матрица учун қуйидаги нормани киритамиз

$$|G| = \left(\sum_{i,j=1}^{2}|\, g^{(ij)}\,|^2\right)^{1/2}.$$

Куйидаги белгилашни киритамиз

$$\Lambda(k) = (2\pi)^2\left[L_k A_\tau(k) - W_k - W_{-k} + W_0\right], \quad k\in\mathbb{Z}^2. \tag{28}$$

Ҳар бир натурал N лар учун қуйидаги муносабат ўринли

$$\Lambda(k) = (2\pi)^2 C_\tau A_\tau(k)|k|^{\tau-2} + W_0 + O(|k|^{-N}), \ k\in\mathbb{Z}^2,$$

шундай қилиб, қуйидаги баҳолаш ўринли

$$\left|\Lambda(k)\right| \le C(1+|k|^2)^{\tau/2}, \ k\in\mathbb{Z}^2.$$

Бундан ташқари, шундай $b>a>0$ ва $R>0$ сонлар мавжудки, ҳар бир $|\xi|=1$ да $\xi\in R^2$, $\Lambda(k)$ матрица қуйидаги тенгсизликни қанотлантиради

$$a|k|^\tau \le \left(\Lambda(k)\xi,\xi\right) \le b|k|^\tau, \quad k\in\mathbb{Z}^2, \quad |k|\ge R.$$

16-лемма. *Айталик* $0<\tau<2$ *бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $v\in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ *функция учун қуйидаги баҳо ўринли*

$$\| Bv\|_{L_2\left(\mathbb{T}^2\right)} \le C\| v\|_{L_2^\tau\left(\mathbb{T}^2\right)}.$$

Охирги леммадан $B: C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)\to L_2\left(\mathbb{T}^2\right)$ гиперсингуляр оператор $B: L_2^\tau\left(\mathbb{T}^2\right)\to L_2\left(\mathbb{T}^2\right)$ узлуксиз оператордек кенгайтирилиш мумкинлиги келиб чиқади.

Учинчи бобнинг **тўртинчи параграфида** (21) бошланғич шартлар билан (26) дифференциал тенглама кўриб чиқилган. Фурье коеффициентларига ўтиш орқали қуйидаги Коши масаласини оламиз:

$$\frac{d^2u_k(t)}{dt^2} + \Lambda(k)u_k(t) = f_k(t), \quad k\in\mathbb{Z}^2, \quad t>0, \tag{29}$$

$$u_k(0) = \phi_k, \quad \frac{du_k}{dt}(0) = \psi_k. \tag{30}$$

(29)-(30) масалани ечиш учун t параметрга боғлиқ иккита матрица-функцияларни киритамиз:

$$P(t,\Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}\Lambda^m, \qquad Q(t,\Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{t^{2m}}{(2m)!}\Lambda^m. \tag{31}$$

Эслатиб ўтамиз, $\Lambda=\Lambda(k)>0$ ва ихтиёрий $t\ge 0$ ларда қуйидаги тенгликсизлар ўринли:

$$\| Q(t,\Lambda)\| \le 1, \qquad \| P(t,\Lambda)\| \le \frac{1}{\sqrt{\mu(\Lambda)}}.$$

Ихтиёрий $T>0$ да шундай $C_T>0$ ўзгармас мавжудки, ҳар бир $0\le t\le T$ учун (31) функциялар қуйидаги тенгликсизларни қанотлантиради

$$\| Q(t,\Lambda(k))\|\le C_T, \quad \| P(t,\Lambda(k))\|\le \frac{C_T}{(1+|k|^2)^{\tau/4}}, \quad k\in\mathbb{Z}^2.$$

(31) функциялар ёрдамида ушбу масаланинг ечими мавжудлигини исботлаймиз.

17-лемма. *Ушбу функциялар*

$$u_k(t) = Q(t,\Lambda(k))\phi_k + P(t,\Lambda(k))\psi_k + \int_0^t P(t-s,\Lambda(k))\, f_k(s)ds \tag{32}$$

(29)-(30) Коши масаласини ечими бўлади.

18-лемма. *Айтайлик $\phi(x)$ ва $\psi(x)$ функиялар $L_2(\mathbb{T}^2)$ га тегишли, $f(x,t)$ функция $L_2(\mathbb{T}^2)$ нормада $t\ge 0$ бўйича узлуксиз бўлсин. У ҳолда (32) функциялар қандайдир $u(x,t)$ функциянинг Фурье коэффициентлари кетма-кетлигидир ва бу $u(x,t)$ функция $L_2(\mathbb{T}^2)$ фазонинг нормасида $t\ge 0$ узлуксиз боғлиқ.*

19-лемма. *Айтайлик $\alpha\ge\tau$, $\phi(x)\in L_2^\alpha(\mathbb{T}^2)$ ва $\psi(x)\in L_2^{\alpha-\tau/2}(\mathbb{T}^2)$, $f(x,t)$ функция $L_2^{\alpha-\tau/2}(\mathbb{T}^2)$ нормада $t\ge 0$ бўйича узлуксиз бўлсин. У ҳолда*

$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} u_k(t)e^{ikx}$ *функция* $t \geq 0$ *да* t *бўйича узлуксиз ва* x *бўйича* $L_2^{\alpha}(\mathbb{T}^2)$ *га тегишли, ҳамда* $t > 0$ *да* t *бўйича икки марта дифференциаланувчи бўлиб* $L_2^{\alpha-\tau}(\mathbb{T}^2)$ *га тегишли бўлади. Бу ерда* $u_k(t)$ *коэффициентлари (32) билан аниқланган.*

Олинган барча натижаларни ҳисобга олган ҳолда қуйидаги натижани келтирамиз.

9-теорема. *Айтайлик* $\alpha \geq \tau$ *да* $\phi(x)$ *ва* $\psi(x)$ *функциялар* $L_2^{\alpha}(\mathbb{T}^2)$ *и* $L_2^{\alpha-\tau/2}(\mathbb{T}^2)$ *Соболев фазоларга мос равишда тегишли бўлиб,* $f(x,t)$ *функция* $L_2^{\alpha-\tau/2}(\mathbb{T}^2)$ *нормада* $t \geq 0$ *бўйича узлуксиз боғлиқ бўлсин. У ҳолда (20)-(21) Коши масаласини ечими мавжуд, ягона ва* $L_2^{\alpha}(\mathbb{T}^2)$ *тегишли .*

«Перидинамик моделлар билан боғлиқ чизиқли бўлмаган интегро-дифференциал тенгламаларнинг ечилиши тўғрисида» деб номланган т**ўртинчи бобда**, аниқловчи характерлар чизиқли бўлмаган тенгламалар синфи томонидан тасвирланган ҳолатлар кўриб чиқилган.

Ушбу бобнинг **биринчи параграфида** чизиқли бўлмаган ва нолокал эластик хусусиятларга эга бўлган муҳитда перидинамик модел ўрганилиб, бу масала интегро-дифференциал тенгламаси учун қуйидаги Коши масаласига олиб келади

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int_{\Omega} F(u(x,t) - u(y,t), x-y)dy = f(x,t),\ x \in \Omega, t > 0, \tag{33}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in \Omega, \tag{34}$$

бу ерда $\Omega \subset \mathbb{R}^n -$ чегараси бўлакли силлиқ бўлган соҳа.

Демак, $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ - номаълум функция, $F : (\Omega \times [0,T]) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ ядро ва $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ ташқи куч вектор функциялар.

Ушбу параграфда F вектор функцияси қуйидаги кўринишга эга деб фараз қиламиз:

$$F(u,x) = P(u)Q(x), \tag{35}$$

бу ерда $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n -$ узлуксиз вектор-функция ва $P(0) = 0$, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n -$ матрица-функция нолда махсусликка эга бўлиши мумкин, аммо маълум даражада интегралланиши керак.

Перидинамиканинг асосий вазифаси ечимлардаги кучли узилишларни тавсифлашдир, шунинг учун (33) - (34) масала ечимини $L_p(\Omega)$ синфларда қидирамиз.

Айтайлик

$$B[u](x) = \int_{\Omega} Q(x-y)P(u(x,t) - u(y,t))dy. \tag{36}$$

(33) ни t бўйича икки марта интеграллаб, қуйидагини топамиз

$$u(x,t) = \int_0^t (t-s)B\left[u(x,s)\right]ds + \Phi(x,t), \tag{37}$$

бу ерда

$$\Phi(x,t) = \varphi(x) + t\psi(x) + \int_0^t (t-s)\, f(x,s)ds\,.$$

Қуйидаги оператор киритамиз

$$A[u](x,t) = \int_0^t (t-s)B\left[u(x,s)\right]ds + \Phi(x,t)\,. \tag{38}$$

(33) - (34) масаланинг ечилишида A ва B операторлари муҳим рол ўйнайди, шунинг учун биз уларнинг хоссаларини ўрганамиз.

20-лемма. *P функция қуйидагича бўлсин*

$$\left|P(u) - P(v)\right| \le L|u-v|,$$

ва айрим $q > 1$ *учун*

$$\int_\Omega |\, Q(y)|^q\, dy \le const.$$

У ҳолда $p = \dfrac{q}{q-1}$ *учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\| B[u] - B[v] \|_{L_p} \le C\, \| u - v \|_{L_p}\,.$$

Бу ерда L, C лар мусбат доимийлар.

H – Банах фазоси бўлсин. $z : [0,\ T] \to H$ учун қуйидагини киритамиз

$$\|z\|_t = \sup_{0\le s\le t} \| z(s) \|.$$

21-лемма. *20- лемма шартлари бажарилсин. У ҳолда қуйидаги*

$$\left\|A[u] - A[v]\right\|_t^2 \le \frac{C^2 t^3}{3} \int_0^t \| u - v \|^2\, ds$$

тенгсизлик ўринли.

22-лемма. *20- лемма шартларида қуйидагилар ўринли*

$$\| A^m[z](\cdot,t) - A^m[w](\cdot,t) \|^2 \le \frac{C^{2m} t^{4m-1}}{3^m\, 4^{m-1}(m-1)!} \int_0^t \| z(\cdot,s) - w(\cdot,s) \|^2\, ds\,.$$

2-хулоса. Ҳар бир $T > 0$ учун шундай $m \in \mathbb{N}$ мавжуд бўлиб, $A^m : C\left(\left[0,T\right] \to L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \to C\left(\left[0,T\right] \to L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ қисқариш акслантириш бўлади.

Олинган баҳолардан фойдаланиб, ўрганилаётган масаланинг ечими бўйича қуйидаги натижа исботланган.

10-теорема. *Ихтиерий* $T > 0$ *учун* $\phi(x), \psi(x) \in L_2(\Omega)$, $f(x,t) \in L_2\left(\Omega \times [0,T]\right)$ *бўлсин. У ҳолда (33)-(34) масала* $C^2([0,T] \to L_2(\Omega))$ *синфда ягона ечимига эга.*

Тўртинчи бобнинг **иккинчи параграфида** 10-теорема шартларининг муҳимлигини кўрсатадиган мисол келтирилган.

Ушбу бобнинг **учинчи параграфида** Кошининг қуйидаги масаласини ўрганишга бағишланган

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\int_\Omega F(u(x,t)-u(y,t),x-y)dy=f(x,t),\ x\in\Omega,t>0, \qquad (39)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in\Omega, \qquad (40)$$

бу ерда $\Omega\subset\mathbb{R}^n-$ чегараси бўлакли силлиқ бўлган соҳа.

F вектор-функция (35) кўринишга эга ва $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $P(0)=0$ шартни қаноатлантирадиган абсолют узлуксиз вектор функция ва $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n-$ матрица-функция нолда махсусликка эга бўлиши мумкин, аммо маълум даражада интегралланиши керак.

$\rho(x)$ ни $\rho(x)\geq\rho_0>0$ шартни қаноатлантирадиган ўлчовли зичлик функцияси деб фараз қиламиз.

Бундан ташқари, $P\in L_p(\Omega)$ функцияси ва унинг Якобиани $J(u)=\dfrac{\partial P(u)}{\partial u}$ қуйидаги шартни қанотлантиради

$$\left|\frac{\partial P(u)}{\partial u}\right|\leq\Phi(|u|),$$

бу ерда $\Phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ қандайдир ўсувчи функция.

(39) тенгламани t бўйича икки марта интегралланса, Коши масалани ечими $u=A[u]$тенгламани қанотлантиради. Бу ерда

$$A[u](x,t)=\int_0^t(t-s)B[u(x,s)]ds+\Psi(x,t), \qquad (41)$$

ва

$$B[u](x,t)=\frac{1}{\rho(x)}\int_\Omega Q(x-y)P(u(x,t)-u(y,t))dy,\ x\in\Omega,t>0 \qquad (42)$$

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{\rho(x)}\big(\varphi(x)+t\psi(x)\big)+\frac{1}{\rho(x)}\int_0^t(t-s)\,f(x,s)ds.$$

Қуйида баъзи керакли баҳоларни келтирамиз

23-лемма. *Айтайлик* $|u|\leq L$ *ва* $|v|\leq L$ *бўлиб, баъзи* $q>1$ *учун* $\int_\Omega|Q(y)|^q dy\leq const$ *бўлсин. У ҳолда* $p=q/(q-1)$ *учун қуйидаги баҳо ўринли*

$$\|B[u]-B[v]\|_{L_p(\Omega)}\leq\frac{2\Phi(L)}{\rho_0}\|Q\|_{L_q(\Omega)}\|u-v\|_{L_p(\Omega)}.$$

3-натижа. Агар $P(0)=0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\|B[u]\|_{L_p(\Omega)}\leq\frac{2\Phi(L)}{\rho_0}\|Q\|_{L_q(\Omega)}\|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

A операторни қисқартириб акслантириш эканлигини кўрсатамиз.

24-лемма. *Айтайлик* $|u| \le L$ *ва* $Q \in L_q(\Omega)$, $q > 1$ *бўлсин. У ҳолда* $\varphi, \psi \in L_p(\Omega)$ *ва* $f \in L_p(\Omega \times [0,T])$ *бўлганда, қуйидаги баҳолашлар ўринли*

$$\|A[u] - \varphi\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{2p}{\rho_0}(t^2 \Phi(L)\|Q\|_{L_q(\Omega)}\|u\|_{L_p(\Omega)} + t\|\psi\|_{L_p(\Omega)} + \frac{t^2}{2}\|f\|_{L_p(\Omega)}),$$

$$\|A[u] - A[v]\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{2p}{\rho_0} t^2 \Phi(L)\|Q\|_{L_q(\Omega)}\|u - v\|_{L_p(\Omega)}$$

бу ерда $p = \dfrac{q}{q-1}$.

11-теорема. *Айтайлик баъзи* $q > 1$ *учун* $Q(x) \in L_q(\Omega)$ *бўлсин. У ҳолда* $\varphi, \psi \in L_p(\Omega)$ *ва* $f \in L_p(\Omega \times [0,T])$ *функция учун шундай* $T > 0$ *мавжудки, (39)-(40) масала* $p = \dfrac{q}{q-1}$ *да* $C^2([0,T], L_p(\Omega))$ *синфга тегишли ягона ечимга эга.*

Тўртинчи бобнинг **тўртинчи параграфида** маълум натижаларни умумлаштирувчи қуйидаги масалаларга бағишланган:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta\left[\beta * \left(u + g(u,x,t)\right)\right], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{43}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{44}$$

$u = u(x,t)$ - номаълум функция, g - чизикли бўлмаган u, x, t ларга боғлиқ функция, * белгиси бутун фазода йиғишни англатади, β - берилган функция.

Кейинчалик, биз Фурье алмаштиришидан фойдаланамиз ва $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ эса қуйидагича нормали $\mathbb{R}^n$ даги L_2 Соболев фазосини англатади

$$\| u \|_s^2 = \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Қуйидаги белгилашни киритамиз

$$G(x,t) = g(u(x,t), x, t)$$

ва

$$\hat{G}(\xi,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} g(u(x,t), x, t) e^{-ix\xi} \, dx.$$

Айтайлик

$$B[\hat{u}](\xi,t) = \hat{G}(\xi,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} g(u(x,t), x, t) e^{-ix\xi} \, dx,$$

бу ерда

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \hat{u}(\xi,t) e^{ix\xi} \, d\xi.$$

$g \in Lip(\mathbb{R}^n)$ бўлса, қуйидаги баҳолаш ўринли

$$\| B[\hat{u}] - B[\hat{v}] \| \le L \| \hat{u} - \hat{v} \|.$$

Агар $g(0,x,t) = 0$, бунда $\| B[\hat{u}] \| \le L \| \hat{u} \|$.

Яна битта белгилаш киритамиз

$$A[\hat{u}](\xi,t)=\omega(\xi)\int_0^t \sin\omega(\xi)\,(t-\tau)\,B[\hat{u}](\xi,\tau)d\tau.$$

ва $z:[0,T]\to B$ учун қуйидаги баҳони аниқлаймиз

$$\|z\|_t=\max_{0\le s\le t}\|z(s)\|.$$

У ҳолда, маълумки агар $g\in Lip(\mathbb{R}^n)$ ва $\omega(\xi)$ чегараланган $|\omega(\xi)|\le C$ бўлса, қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\|A[\hat{u}]-A[\hat{v}]\|_t^2\le\frac{L^2C^4t^3}{3}\int_0^t\|\hat{u}-\hat{v}\|^2d\tau.$$

Энди куйидаги тенгламани ўрганамиз

$$z=Az+\Phi. \tag{45}$$

Лемма 25. *Қуйидаги баҳолаш ўринли*

$$\|A^m[z](\cdot,t)-A^m[w](\cdot,t)\|^2\le\frac{C^4L^{2m}t^{4m-1}}{3^m4^{m-1}(m-1)!}\int_0^t\|z(\cdot,\tau)-w(\cdot,\tau)\|^2d\tau.$$

Шундай қилиб, ихтиёрий $T>0$ учун шундай $m\in\mathbb{N}$ мавжудки, $A^m:C([0,T]\to L_2(\mathbb{R}^n))\to C([0,T]\to L_2(\mathbb{R}^n))$ - қисқартириб акслантириш. Шунинг учун $A:C([0,T]\to L_2(\mathbb{R}^n))\to C([0,T]\to L_2(\mathbb{R}^n))$ опертор ягона қўзғалмас нуқтага ва (45) тенглама ягона ечимга эга.

Теорема 12. *Шундай $T>0$ мавжудки, (43)-(44) Коши масаласи $\phi(x),\psi(x)\in L_2(\mathbb{R}^n)$ учун $C^2([0,T],L_2(\mathbb{R}^n))$ синфда ягона ечимга эга.*

Теорема 13. *Айтайлик $s>0$ ва $0<\alpha<s$ бўлсин. У ҳолда шундай $T>0$ мавжудки, (43)-(44) Коши масаласи $\phi\in H^s(\mathbb{R}^n)$ ва $\psi\in H^s(\mathbb{R}^n)$ бошланғич берилганлар учун $C^2([0,T],H^s(\mathbb{R}^n))$ синфида ягона ечимга эга.*

ХУЛОСА

Диссертацияда тадқиқотлар давомида қуйидаги натижалар олинди:

1. перидинамик сингулар интегро-дифференциал тенгламалар учун масалалар Вольтерранинг оператор интеграл тенгламаларига келтирилди ва бир қийматли ечилиши кўрсатилди;
2. берилган функциялар учун шартлар топилган ва икки ўлчовли даврий структурадаги чизиқли бўлмаган эластикликнинг перидинамик моделлари билан боғлиқ тенгламани ечилиш синфлари топилган;
3. Соболев синфидаги функциялар учун янги баҳолар олинган;
4. ихтиёрий соҳасида қаралган сингуляр интегро-дифференциал тенгламани регуляр тенгламага ўтказиш методологияси ишлаб чиқилган;
5. ихтиёрий $n-$ўлчовли соҳада қаралган сингуляр интегро-дифференциал тенгламанинг $n(n \geq 3)$ тартибли махсуслика эга ядросининг янги кўриниши топилган;
6. икки ўлчовли даврий соҳада қаралган гиперсингуляр интегро-дифференциал тенглама ечимининг мавжудлик синфи топилган ва унинг хоссалари ўрганилган;
7. чизиқли бўлмаган перидинамик тенгламанинг глобал ва локал ечиш шартлари аниқланган;
8. Буссинеск типидаги интегро-дифференциал тенгламанинг ечиш шартлари олинган;
9. олинган ечимларнинг хоссалари ўрганилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЮЛДАШЕВА АСАЛ ВИКТОРОВНА

О РАЗРЕШИМОСТИ СИГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПЕРИДИНАМИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ (DSc) ДИССЕРТАЦИИ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ - 2022

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.1.DSc/FM187.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Алимов Шавкат Арифджанович** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
	Рахимов Абдумалик Абдумажидович доктор физико-математических наук, профессор
	Уринов Ахмаджон Кушакович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Международный казахско-турецкий имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан)

Защита диссертации состоится « 1 » ноября 2022 г. в 16:00 часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz.)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирован за № 145). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 14 » октября 2022 г.
(протокол рассылки № 2 от « 14 » октября 2022 г.).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.Азамов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.м.н., профессор, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во всем мире многие научные и практические исследования, проводимые в различных областях математики, в большинстве случаев сводятся к исследованию моделей задач механики, в частности моделей механики сплошных сред. Для определения деформационного отклика материалов и конструкций, находящихся в условиях внешнего воздействия, была введена классическая механика сплошной среды, в которой не учитывались атомистические структуры. Механика сплошных сред успешно применяется для решения множества сложных задач. Однако, ее основное уравнение описывается уравнениями в частных производных, и поэтому не применимо, когда в структуре есть какие-либо разрывы или трещины, поскольку пространственные частные производные не определены в такой среде. Описание процесса в среде с произвольным распределением трещин, возможно сливающихся или разветвляющихся, представляет собой сложную задачу. Для того, чтобы преодолеть эту проблему, С. Силлингом был введен новый подход к механике сплошной среды - перидинамика, с таким намерением, чтобы ее основное уравнение всегда было верным, независимо от того, есть ли в структуре какие-либо разрывы или нет.

Перидинамические модели описываются интегро-диффернциальными уравнениями без производных по пространственным переменным, поэтому, когда происходит разрыв, математическая структура не разрушается. Разрушение рассматривается как естественный результат деформации, возникающей в соответствии с уравнением движения и определяющей модели. Следовательно, моделирование роста трещины в перидинамической модели не требует дополнительных данных и уравнений, которые в традиционной механике разрушения потребовались бы для определения зарождения трещины: рост скорости, направление, остановка, разветвления и другие характеристики. Более того, перидинамику можно рассматривать как континуальную версию молекулярной динамики, что делает этот новый подход подходящим кандидатом для масштабного анализа материалов. Кроме того, перидинамическую формулировку можно также распространить на другие области, такие как тепловые, влажностные и т. д. И это дает возможность использовать ее в качестве единой платформы для мультифизического анализа материалов.

В Узбекистане уделяется большое внимание актуальным аспектам фундаментальных наук, имеющим прикладное значение. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук, а именно по дифференциальным уравнениям и математической физике, включая теорию динамических систем, алгебре и функциональному анализу, теории вероятностей и математической статистике, прикладной математике и математическому моделированию, являются основными задачами и направлениями деятельности Института математики имени

В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан[1].

Тема и объект исследования настоящей диссертации соответствуют задачам, обозначенным в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундамен-тальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан: «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации. Научные исследования сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и их применение ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в таких как: Национальные лаборатории Сандия, Университет Стратклайда, Лос-Аламосская национальная лаборатория, ООО Микромеханика и Композиты, Университет Колумбия, Университет штата Вашингтон, Университет Небраски в Линкольне, Ок-Риджская национальная лаборатория, Техасский университет, Калифорнийский университет, Университет штата Канзас, Университет Нью-Мексико (США), Берлинский технический университет, Веймарский Университет-Баухаус, Ганноверский университет имени Г. В. Лейбница, Немецкий центр авиации и космонавтики (Германия), Пекинский университет, Университет Хохая, Пекинский университет авиации и космонавтики, Нефтяной институт Восточного Китая, шанхайский университет транспорта, Чжэнчжоуский Университет (Китайская народная республика), Университе Падуи (Италия), Университет Стратклайда, Университет Дерби, Имперский колледж Лондона (Великобритания), Университет сабаджи, Турецкий университет кономики и технологий (Турецкая республика), Университет Хиросимы (Япония), Корейский институт передовых технологий, Сеульский национальный университет, Национальный университет Кенсана (Республика Корея).

В последние годы в результате научно-исследовательских работ, проведенных по интегро-дифференциальным уравнениям, в мировом масштабе решен целый ряд актуальных задач, в том числе получены следующие научные результаты: перидинамическое моделирование было применено для изучения эксперимента Калтоффа-Винклера по разрушению стальной пластины с надрезами (Университет Небраски в Линкольне); изучен рост трещин толстой пластины с начальной внутренней трещиной, трещинами Герца (Университет

---

[1] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

Нью-Мексико); исследованы повреждение, растрескивание и разрыв мембран, лопание воздушных шаров, и деформация волокон и сетей волокон из-за дальнодействующих сил (Национальные лаборатории Сандия); получены результаты перидинамического моделирования динамики бесконечного стержня (Институт математики имени Макса Планка, Берлинский технический университет), движения границ фаз, условия скачка и нелинейные дисперсионные соотношения (Мюнхенский технический университет); с помощью преобразования Фурье изучена деформация бесконечного стержня, подвергнутого самоуравновешенному распределению нагрузки (Массачусетский технологический институт, Кембриджкий университет); получен баланс энергии для роста трещины в рамках перидинамической теории (Мюнхенский технический университет). В случае нелинейной упругости ситуация более сложная, и в настоящее время известно мало результатов (еще сложнее дело обстоит в классической нелинейной эластодинамике).

В настоящее время в мире также осуществляется ряд научных исследований по таким приоритетным направлениям, как решение начально-краевых задач для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений; решение задач с начальными данными для уравнений, связанных с нелинейными перидинамическими процессами; исследование решений интегро-дифференциальных уравнений с гиперсингулярными ядрами на различных структурах и т.д.

Степень изученности проблемы. Попытки построения нелокальных теорий в механике сплошной среды начались еще в 1970 - х гг. со статьи Е. Кронера, А. Эрингена и их соавторов. В 1982-1983 годах вышли книги И. Кунина. Но эти подходы не были универсальны, и поэтому в последнее время вопросы нелокальности вновь стали актуальными, что привело к появлению новой нелокальной теории так называемой перидинамической теории, предложенной С. Силлингом, где вместо пространственно-дифференциальных операторов для описания существующих, возможно нелинейных сил, между частицами твердого тела используется интегрирование по разностям поля перемещений. Поскольку пространственных производных нет, граничные условия для интегро-дифференциального уравнения, вообще говоря, не нужны (хотя это зависит от сингулярного поведения интегрального ядра и функционально-аналитической установки). Тем не менее, можно наложить «краевые» условия, задавая значения в полосе вдоль границы, ограничивающей решение по ненулевому объему.

Путем линеаризации попарной силовой функции мы получим линеаризованную перидинамическую модель, исследованную многими авторами. Так, Э. Эммрих и О. Векнер рассмотрели линейную перидинамическую модель с одномерной пространственной переменной, доказали существование, единственность и устойчивость решения задачи и представили различные виды для рассматриваемой функции в зависимости от рода материала. Линеаризованная версия теории перидинамического состояния, примененная к малым деформациям, была рассмотрена С. Силлингом, и путем упрощений, задача была сведена к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

В работе Ш. Алимова, Ю. Цао и О.А. Ильхан исследуются корректность и регулярность перидинамической модели со специальным ядром, сведением ее к интегральному уравнению Вольтерра, тем самым улучшая уже известные к тому моменту результаты. Линейная перидинамическая модель с сингулярным ядром в многомерном пространстве была рассмотрена Ш. Алимовым, Ш. Шералиевым. Авторам удалось найти вид ядра, позволивший найти решение задачи в логарифмическом гильбертовом пространстве. Отметим, что результаты в этих работах получены для случаев с тремя и более пространственными переменными и не применимы при рассмотрении перидинамической модели в двумерной области. Изучение процессов дефформации в анизотропных телах и телах с нелинейными свойствами эластики приводит к нелинейному перидинамическому уравнению. Известен лишь ряд результатов, связанных с изучением этого уравнения. В основном авторам удавалось доказать лишь локальную разрешимость. Дальнейшие исследования интегро-дифференциальных уравнений представляются актуальными и важными, как с точки зрения развития общей теории интегро-дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений в математическом моделировании различных перидинамических процессов.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательских работ ОТ-Ф4-88 «Исследование прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков», Ф-ФА-2021-424 «Решение краевых задач для дифференциальных уравнений с целыми и дробными порядками».

Целью исследования является построение решений задач с начальными данными для интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, связанных с перидинамическими моделями.

Задачи исследования:

получить новый вид ядра с особенностью порядка 2 сингулярного интегро-дифференциального уравнения, рассматриваемого на двумерной периодической структуре, и свести это уравнение к операторным интегральным уравнениям Вольтерра;

найти условия на заданные функции и классы разрешимости уравнений, связанных с перидинамическими моделями нелинейной эластики в двумерной периодической структуре;

доказать новые оценки для функций из класса Соболева;

разработать методику сведения сингулярного интегро-дифференциального уравнения, рассматриваемого в произвольной области, к регулярному уравнению;

доказать разрешимость гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения, рассматриваемого на двумерной периодической структуре, найти класс существования решения, изучить его свойства;

определить условия глобальной и локальной разрешимости нелинейного перидинамического уравнения;

найти условия разрешимости интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска и изучить свойства полученных решений.

Объект исследования. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и нелинейные интегро-дифференциальные уравнения.

Предмет исследования. Перидинамика, теория сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, теория уравнений математической физики, теория интегральных и операторных уравнений.

Методы исследования. При исследовании задач использовался метод разделения переменных, метод интегральных уравнений, методы решений обыкновенных дифференциальных уравнений, методы функционального анализа, теория дифференциальных операторов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

найдены представления сингулярных ядер интегро-дифференциальных уравнений на двумерной периодической структуре, позволяющие свести задачи к уравнениям с регулярным ядром;

доказаны теоремы существования и единственности решений задач с начальными данными для перидинамических уравнений в произвольных двумерных и многомерных областях;

найдены условия глобальной и локальной разрешимостей различных нелинейных перидинамических уравнений;

доказаны новые оценки для некоторых функций из классов Соболева.

Практические результаты исследования. Исследования являются фундаментальными. Результаты исследования могут быть использованы при изучении линейных и нелинейных свойств деформации различных материалов. А также служить основой для построения математических моделей перидинамических процессов.

Достоверность результатов исследования подтверждается строгим использованием методов математического анализа, математической физики, теории операторных и интегральных уравнений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость работы выражается в том, что полученные результаты развивают теорию интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами.

Практическая значимость исследований диссертационной работы состоит в возможности их использования при анализе перидинамических свойств различных материалов, а также при построении численных решений математических моделей различных перидинамических процессов.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с линейными и нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями, были внедрены в практику следующих исследовательских работ:

теоремы существования и единственности решения задач с начальными данными для перидинамических уравнений в произвольных двумерных и многомерных областях были использованы при исследовании нелинейной трещиноватой среды в проекте иностранного гранта на тему «Природные катастрофы Камчатки – землетрясения и извержение вулканов» № АААА-А19-119072290002-9 (справка Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга» за номером 17/2-12 от 31 мая 2022 г., Россия). Применение научного результата позволило разработать эффективные алгоритмы для численного решения математической модели, основанной на гиперсингулярном интегро-дифференциальном уравнении перидинамики;

метод сведения интегро-дифференциальных уравнений с сингулярным ядром к уравнениям с регулярным ядром на двумерной периодической структуре использовался в грантовом проекте на тему «Разработка нелинейных моделей упругих и пластичных сред и исследовние нелинейного деформирования изотропных и анизотропных тел под действием статических и динамических нагрузок» при разработке нелинейных моделей упругих сред (справка Института механики и сейсмостойкости сооружений АНРУз за номером 437-3 от 20 июня 2022). В частности, удалось реализовать численные методы решения задач пластичности;

методы, разработанные для квазилинейных уранений четного порядка и нелинейных уравнений перидинамики были использованы в МРУ-ОТ-1/2017 «Нелокальные краевые и обратные задачи для неклассических дифференциальных и операторно-дифференциальных уравнений» для решения нелокальных задач для линейных и квазилинейных уравнений смешанного типа (справка Национального университета Узбекистана от 23 июня 2022 года за номером 01/11-3672). Применение научных результатов диссертации в рамках этого проекта дало возможность доказать существование и единственность решений нелокальных задач для уравнений нечетного порядка с оператором теплопроводности в главной части;

результаты по нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям, связанные с перидинамическими моделями, были использованы в рамках научных исследований по гранту 18-51-41002 «Математическое моделирование термодинамически согласованной математической модели двухфазных сред в диссипативном приближении с перекрестными эффектами» для решения краевой задачи для системы уравнений (справка Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН за номером 15301 от 10 июня 2022 года, Россия). Применение научных результатов позволило показать существование и единственность обобщенного решения краевых задач для системы уравнений магнитопористости в диссипативном приближении.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 7 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. Всего по теме диссертации опубликовано 22 научные работы, из них в научных изданиях, рекомендованных для издания основных научных результатов докторских диссертаций Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан, издано 13 статей, из них 5 были изданы в республиканских и 8 - в зарубежных журналах, в том числе 6 - в журналах, индексируемых в базах СКОПУС

Структура и объем диссертации. Содержание диссертации состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 136 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, проведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации посвящена непрерывным перидинамическим моделям с периодической структурой, которые включают интегрирование по полю смещения.

В первом параграфе этой главы приведены причины и история возникновения перидинамических уравнений, их основные отличия от уже имеющихся.

Второй параграф посвящен изучению задачи Коши для перидинамического уравнения в двумерной области в периодическом случае. Т.е. мы считаем, что все заданные функцию являются периодическими функциями по пространственным переменным.

Линеаризованная перидинамическая модель в области $D=[-\pi,\pi]^2$ при $t>0$ может быть описана следующим интегро-дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\int\limits_D K(x,y)\left[u(x,t)-u(y,t)\right]dy=f(x,t), \tag{1}$$

с начальными данными

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x). \tag{2}$$

Здесь функции $\varphi: D\to\mathbb{R}^2, \psi: D\to\mathbb{R}^2$ - начальные данные, $f: D\times[0,T]\to\mathbb{R}^2$ - внешняя сила, а ядро K матричная функция 2×2 вида

$$K(x,y)=P(x-y), x\in D, y\in D, \tag{3}$$

где функция $P(x)$ периодическая и имеет вид

$$P(x)=\frac{(x\otimes x)}{|x|^4}\chi(|x|). \tag{4}$$

Здесь и далее $\otimes$ означает тензорное произведение, а функция

$\chi(r) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ для некоторого фиксированного $\rho,\ 0<\rho<\dfrac{\pi}{2}$ удовлетворяет следующему условию

$$\chi(r)=\begin{cases}1, & r \le \rho,\\ 0, & r \ge 2\rho,\end{cases} \tag{5}$$

и $0 \le \chi(r) \le 1,\ r \in \mathbb{R}$.

Под решением задачи (1) - (2) будем понимать функцию *u(x,t)* из пространства L_2 *(D)* для каждого $t \ge 0$, непрерывную по *t* по норме этого пространства при $t \ge 0$, дважды непрерывно дифференцируемую при *t>0,* и удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2).

Определим

$$(\nabla \otimes \nabla)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} \text{ и } I\Delta=\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

где Δ - оператор Лапласа, а I - единичная матрица.

Утверждение 1. *Функция (4) может быть представлена в виде*

$$P(y)=\frac{\chi(|y|)}{2}\left[(\nabla \otimes \nabla)\ln\frac{1}{|y|}+I\Delta\left(\frac{\ln^2|y|}{2}\right)\right],\ y \in D.$$

Для рассматриваемой задачи доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (2) единственно.*

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{\alpha}(D), \alpha>3,\ \psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{\beta}(D), \beta>2$ *и* $f(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{3}(D)$ *непрерывна по* $t \ge 0$. *Тогда задача (1) - (2) разрешима в целом.*

В третьем параграфе первой главы в области $D=[-\pi,\pi]^2$ изучено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\int_D K(x,y)[u(x,t)-u(y,t)]dy=f(x,t),\ x \in D, t>0 \tag{6}$$

с начальными данными

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x). \tag{7}$$

Здесь $u: D \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ - неизвестная функция, ядро K – матричная функция размерности $n \times n$ с областью определения $D \times D$, $\varphi: D \to \mathbb{R}^n$ и $\psi: D \to \mathbb{R}^n$ - начальные данные, а $f: D \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ - внешняя сила .

В этом параграфе мы предполагаем, что $n \ge 2$.

Мы рассматриваем ядро вида

$$K(x,y)=P(x-y),\ x \in D, y \in D,$$

где функция $P(x)$ - периодическая функция и при $x \in D$ имеет вид

$$P(x) = \frac{(x \otimes x)}{|x|^{n+2}} \chi(|x|).$$

Функция $\chi(r) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ определена формулой (5).

В случае двух пространственных переменных, удалось получить следующий результат

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 0$, $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $\psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *и* $f(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(D)$ *непрерывна по* $t \geq 0$. *Тогда задача Коши (6)-(7) разрешима в целом, и это решение единственное.*

Если же задача рассматривается в $n-$ мерной области, то вводя интегральный оператор

$$Bv(x) = \int_D P(x-y)\left[v(y) - v(x)\right]dy,$$

мы сводим задачу (6) – (7) к уравнению

$$u(x,t) + 2\alpha\int_0^t u(x\ s)ds - \int_0^t (t-s)Bu(x,s)ds = F(x,t),\ x \in D, t > 0, \tag{8}$$

где

$$F(x,t) = (2\alpha t + 1)\varphi(x) + t\psi(x) + \int_0^t (t-s)\,f(x,s)ds.$$

Введем следующий оператор

$$Av(x) = -2\alpha\int_0^t v(s)ds + \int_0^t (t-s)Bv(s)ds$$

Учитывая обозначение, уравнение (8) примет вид

$$u(t) = Au(t) + F(t).$$

Определим последовательность, полученную методом последовательных приближений

$$v_0(t) = F(t), v_{k+1}(t) = Av_k(t) = A^k F(t).$$

Цель состоит в том, чтобы установить сходимость ряда Неймана

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t), \tag{9}$$

и доказать, что сумма этого ряда является решением уравнения (8).

Для доказательства сходимости ряда (9), получим оценку для произвольной натуральной степени оператора A.

Введем логарифмическое гильбертово пространство:

$$H_m = \{v| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{v}_k|^2 \ln^{2m}\sqrt{e^2 + |k|^2} < \infty\}, m = 1,2,...$$

Напомним , что любая функция $v \in L_2(D)$ принадлежит классу Соболева

$W_2^\mu(D)$, если ограничена норма

$$\| v\|^2_{W_2^\mu(D)} = (2\pi)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} | v_k |^2 (1+|k|^2)^\mu .$$

Обозначим как $C\left[\mathbb{R}^+ \to H\right]$ класс функций $f:\mathbb{R}^+ \to H$, которые непрерывно зависят от и их норма

$$\left\| f\right\|_{H,t} = \sup_{0\le s\le t}\left\| f\left(s\right)\right\|_H .$$

В случае, когда $H = H_m$ будем использовать следующее обозначение

$$\left\| f\right\|_{m,t} = \sup_{0\le s\le t}\left\| f\left(s\right)\right\|_m .$$

Лемма 1. *Если* $F \in C\left[\mathbb{R}^+ \to H_m\right]$ *для всех натуральных* m *, тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и некоторого* $M > 0$ *верна следующая оценка*

$$\| A^k F \|_{m,t} \le \frac{\left(k+m\right)!}{\mu^{k+m}} e^{\mu-1} \| F \|_{W_2^\mu,t} \sum_{i=0}^{k} C_k^i |\alpha|^{k-i} M^i \frac{t^{k+i}}{\left(k+i\right)!}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\mu > 0$ *и* $0 \le T \le \sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{K}}}$ *. Тогда для любой функции* $F \in C[\mathbb{R}^+ \to W_2^\mu(D)]$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *ряд Неймана (9) сходится по норме гильбертова пространства* H_m *равномерно на интервале* $0 \le t \le T$ *, и его сумма удовлетворяет оценке*

$$\| u \|_m \le D_m\left(\mu\right) \frac{\left(m+1\right)!}{(1-\frac{\mathrm{K}t^2}{\mu})^{(m+2)}},$$

где $D_m\left(\mu\right) = e^{\mu-1} \frac{\left(m+1\right)!}{\mu^m}.$

Теорема 4. *Пусть* $\mu > 0,\ \varphi(x),\ \psi(x) \in W_2^\mu(D)$ *и* $f(x,t) \in W_2^\mu(D)$ *непрерывна по t. Тогда решение задачи (6)-(7) существует и единственно.*

Вторая глава диссертации, названная «Перидинамическая формулировка деформации в произвольной области с кусочно-гладкой границей», посвящена изучению разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с сингулярным ядром, связанного с линейной перидинамической моделью, в произвольной области с кусочно-гладкой границей.

В первом параграфе этой главы приведена математическая формулировка перидинамической модели, описываемая интегро-дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \int_D K(x,y)\left[u(x,t) - u(y,t)\right]dy = f(x,t),\ x \in \Omega, t > 0 \tag{10}$$

с начальными данными

$$u(x,0) = \varphi\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), x \in \Omega, \tag{11}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей, причем $n \ge 3$.

В данном параграфе рассматривается симплифицированная модель, в которой предполагается, что неизвестная функция $u:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$, ядро $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ и внешняя сила $f:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ являются скалярными функциями.

Интегральный оператор в левой части уравнения (10) имеет специальное сильно сингулярное ядро, особенность которого заключается в том, что вблизи диагонали $x=y$ оно имеет вид

$$K(x,y)=\frac{c}{|x-y|^n}+\gamma(x,y),$$

где $\gamma(x,y)$ интегрируемая функция, и выполняется граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial\nu_x}K(x,y)=0, x\in\partial\Omega, y\in\Omega.$$

Здесь $\nu(x)$ внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ в точке $x\in\partial\Omega$.

Соответствующий интегральный оператор

$$Au(x)=\int_\Omega K(x,y)[u(x)-u(y)]dy \tag{12}$$

является гиперсингулярным и неограниченным в классических функциональных пространствах, таких, как $L_p(\Omega)$ или соболевские пространства $W_p^l(\Omega)$.

Рассмотрим самосопряжённое расширение оператора Лапласа $-\Delta$, порождённое граничными условиями Неймана. Спектр этого расширения состоит из собственных значений $\{\lambda_k\}$, а собственные функции $\{\upsilon_k\}$ удовлетворяют соотношениям:

$$-\Delta\upsilon_k(x)=\lambda_k\upsilon_k(x),\ x\in\Omega,\ \frac{\partial\upsilon_k(s)}{\partial\nu}=0, s\in\partial\Omega, k=0,1,2,... \tag{13}$$

Решение этой спектральной задачи мы понимаем в смысле $W_2^1(\Omega)$.

Для любого $\beta\ge 0$ введём гильбертово пространство $H^\beta(\Omega)=D((\mathrm{I}-\Delta)^{\beta/2})$ с нормой

$$\|u\|_\beta^2=\sum_{k=0}^{\infty}(1+\lambda_k)^\beta|(u,\upsilon_k)|^2.$$

Символом $W_2^\alpha(\Omega)$, где $\alpha > 0$, обозначаются классические пространства Соболева (дробного) порядка α.

Для любых $T > 0$ и $m = 0,1,...$ и произвольного банахова пространства B обозначим символом $C^m\{[0,T]\to B\}$ пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений отрезка $[0,T]$ в B.

Решением задачи (10) - (11) из класса $H^\beta(\Omega)$ назовём функцию $u\in C^m\{[0,T]\to H^\beta(\Omega)\}$, удовлетворяющую уравнению (10) и начальным условиям (11).

Во втором параграфе этой главы приведены новые оценки для функций из классов Соболева, необходимые для доказательства разрешимости задачи первого параграфа.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей.

Для любого $h > 0$ символом Ω_h обозначим множество

$$\Omega_h = \{x \in \Omega : dis\left(x, \partial\Omega\right) > h\}.$$

Будем говорить, что область Ω принадлежит классу B^{τ}, где $0 < \tau \le 1$, если выполняется условие

$$\left|\Omega \setminus \Omega_h\right| \le const\, h^{\tau}, 0 < h < 1.$$

Далее, будем говорить, что функция f принадлежит классу $W_p^{\alpha}\left(\Omega\right)$, если она является следом некоторой функции из $W_p^{\alpha}\left(\mathbb{R}^n\right)$, которую будем обозначать тем же символом f.

Для любого $h > 0$ обозначим символом χ_h характеристическую функцию множества Ω_h, т. е.

$$\chi_h\left(x\right) = \begin{cases} 1, & если \quad x \in \Omega_h, \\ 0, & если \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_h. \end{cases}$$

Введём функции

$$P\left(x,h\right) = f\left(x\right)\chi_{3h}\left(x\right), \quad Q\left(x,h\right) = f\left(x\right)\left[\chi\left(x\right) - \chi_{3h}\left(x\right)\right].$$

Ясно, что носитель функции $P\left(x,h\right)$ содержится в Ω_{3h}, а носитель функции $Q\left(x,h\right)$ содержится в $\Omega \setminus \Omega_{3h}$.

Очевидно, выполняется равенство

$$f\left(x\right) = P\left(x,h\right) + Q\left(x,h\right), \quad x \in \Omega.$$

Лемма 3. *Для любого вектора* $u \in \mathbb{R}^n, |u| < h$ *выполняется оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\, P\left(x+u,h\right) - P\left(x,h\right)|^2\, dx \le \mathrm{const} \cdot h^{2\alpha\tau/n}.$$

Лемма 4. *Для любого $h > 0$ выполняется оценка*

$$\int\limits_{\Omega} |\, Q\left(x,h\right)|^2\, dx \le \mathrm{const}\, h^{2\alpha\tau/n}.$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что $\Omega \in B^{\tau}$, где $0 < \tau \le 1$.

Лемма 5. *Пусть* $f \in W_2^{\alpha}\left(\Omega\right)$, *где* $0 < \alpha < 1$. *Тогда для любого $h > 0$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, P_k(h)|^2\, [\phi(h\sqrt{\lambda_k}) - 1]^2 \le const \cdot h^{(2\alpha\tau/n)}.$$

Лемма 6. *Пусть* $f \in W_2^{\alpha}\left(\Omega\right)$, *где* $0 < \alpha < 1$. *Тогда для любого $h > 0$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|Q_k\left(h\right)\right|^2\left[\phi\left(h\sqrt{\lambda_k}\right)-1\right]^2 \le \text{const}\, h^{2\alpha\tau/n}.$$

Лемма 7. *Предположим, что* $\Omega \in B^{\tau}$*, где* $0<\tau\le 1$*. Пусть* $f \in W_2^{\alpha}\left(\Omega\right)$*, где* $0<\alpha<1$*. Тогда, для любого* $\mu \ge 1$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{\mu\le\sqrt{\lambda_k}\le 2\mu} \left|f_k\right|^2 \le \text{const}\,\mu^{-2\alpha\tau/n} .$$

Лемма 8. *Предположим, что* $\Omega \in B^{\tau}$*, где* $0<\tau\le 1$*. Пусть* $f \in W_2^{\alpha}\left(\Omega\right)$*, где* $0<\alpha<1$*. Тогда для любого* $0<\beta<\alpha\tau/n$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_k\right|^2\lambda_k^{\beta} < \infty.$$

Теорема 5. *Для любого* α *из интервала* $0<\alpha<1$ *и любого положительного* $\beta<\alpha/n$ *тождественный оператор непрерывно действует из* $W_2^{\alpha}\left(\Omega\right)$ *в* $H^{\beta}\left(\Omega\right)$

$$\left\|u\right\|_{\beta} \le const\left\|u\right\|_{W_2^{\alpha}\left(\Omega\right)}.$$

Третий параграф второй главы посвящен изучению разрешимости задачи (10) - (11). Для преобразования уравнения введём в следующую функцию (напомним, что $n\ge 3$):

$$L_0\left(x,y\right) = \alpha\,|\,x-y\,|^{2-n}\,\ln\frac{1}{\left|x-y\right|}\cdot\chi\left(\frac{\left|x-y\right|}{R}\right),\quad x\in\Omega,\quad y\in\Omega, \tag{14}$$

где $\alpha = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{n/2}}$ и невозрастающая функция $\chi \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}\right)$

$$\chi\left(r\right)=\begin{cases}1,\ если\ \ r\le 1/2,\\ 0,\ если\ \ r\ge 1.\end{cases}.$$

Лемма 9. *Разложение функции (14) в ряд Фурье по собственным функциям задачи (13) имеет вид*

$$L_0\left(x,y\right) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}v_k\left(x\right)v_k\left(y\right)+\gamma\sum_{\lambda_k>0}\frac{v_k\left(x\right)v_k\left(y\right)}{\lambda_k}+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left(x\right)v_k\left(x\right)v_k\left(y\right),$$

где коэффициенты $c_k\left(x\right)$ *для любого номера N удовлетворяют условию*

$$\left|c_k\left(x\right)\right| \le \frac{C_N\left(x\right)}{(1+\lambda_k)^N}, \tag{15}$$

а величины $C_N\left(x\right)$ *ограничены по x равномерно на каждом компактном подмножестве области* Ω*.*

Обозначим символом $G(x,y)$ обобщённую функцию Грина, связанную с задачей (13):

$$G\left(x,y\right) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{v_k\left(x\right)v_k\left(y\right)}{\lambda_k}.$$

Далее положим

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) v_k(x) v_k(y) \ .$$

Из оценки (15) следует, что функция $R(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $\Omega \times \Omega$.

Введём функцию

$$L(x,y) = L_0(x,y) - \gamma G(x,y) - R(x,y). \tag{16}$$

Лемма 10. *Ряд Фурье функции $L(x,y)$, определённой равенством (16), имеет вид*

$$L(x,y) = \sum_{\lambda_k > 0} \frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} v_k(x) v_k(y).$$

Функция $L(x,y)$ бесконечно дифференцируема вне диагонали $x = y$ и равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega$ её производные удовлетворяют условию

$$\left| D^{\alpha} L(x,y) \right| \le \mathrm{const} \frac{|\ln|x-y||}{|x-y|^{n-2+\alpha}}, \quad x \in \Omega, \quad y \in \Omega .$$

Заметим

$$K(x,y) = \left(-\Delta_y\right) L(x,y),\ x \in \Omega, y \in \Omega. \tag{17}$$

Лемма 11. *Для любой функции $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ выполняется равенство*

$$\| Au(x) \|_{\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} |\ (u, v_k)|^2 \cdot \lambda_k^{\beta} \ln^2 \lambda_k \ .$$

Теорема 6. *Для любого α из интервала $0 < \alpha < 1$ и любого положительного β < α/n сингулярный интегральный оператор A непрерывно действует из $W_2^{\alpha}(\Omega)$ в $H^{\beta}(\Omega)$*

$$\|Au\|_{\beta} \le const \|u\|_{W_2^{\alpha}(\Omega)} .$$

Решение уравнения (10) ищется в виде ряда по собственным функциям краевой задачи (13). Основным результатом этого параграфа являтся следющая теорема.

Теорема 7. *Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $0 < \beta < \alpha / n$. Для любого $T > 0$ и любых $\varphi(x) \in W_2^{\alpha}(\Omega)$, $\psi(x) \in W_2^{\alpha}(\Omega)$ и $f(x,t) \in C\left\{[0,T] \to W_2^{\alpha}(\Omega)\right\}$ существует и притом единственное решение задачи (10)-(11) из класса $C^2\left\{[0,T] \to H^{\beta}(\Omega)\right\}$.*

Четвертый параграф второй главы посвящен изучению задачи (10) - (11) в двумерной области с кусочно-гладкой границей.

В этом случае равенство (17) выполняется при

$$L(x,y) = \frac{1}{2} \ln^2 |x-y| + \eta(x,y). \tag{18}$$

Эта функция определяется как и в предыдущем параграфе, но через

$$L_0(x,y)=\frac{1}{2}\ln^2|x-y|\cdot\chi\left(\frac{|x-y|}{R}\right),\tag{19}$$

для которой верно следующее.

Лемма 13. *Разложение функции (19) в ряд Фурье по собственным функциям задачи (13) в двумерном пространстве, имеет вид*

$$L_0(x,y)=\pi\sum_{\lambda_k>0}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}\upsilon_k(x)\upsilon_k(y)+\gamma\sum_{\lambda_k>0}\frac{\upsilon_k(x)\upsilon_k(y)}{\lambda_k}+\sum_{k=1}^{\infty}d_k(x)\upsilon_k(x)\upsilon_k(y),$$

где $d_k(x)$ *удовлетворяют для любого* N *условию*

$$|d_k(x)|\le\frac{D_N(x)}{(1+\lambda_k)^N},$$

а величины $D_N(x)$ *ограничены равномерно по* x *на каждом компактном подмножестве области* Ω.

Согласно Лемме 13 для сингулярного интегрального оператора (12), имеет место следующая

Лемма 14. *Для любой функции* $u\in C_0^\infty(\Omega)$ *выполняется равенство*

$$Au(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\lambda_k(u,\upsilon_k)\upsilon_k(x),\ x\in\Omega.$$

И имеет место следующая теорема о разрешимости задачи (10) - (11) в двумерной области.

Теорема 8. *Пусть* $n=2,\ \alpha\in(0,1)$ *и* $0<\beta<\alpha/2$. *Для любого* $T>0$ *и любых* $\varphi(x)\in W_2^\alpha(\Omega)$, $\psi(x)\in W_2^\alpha(\Omega)$ *и* $f(x,t)\in C\{[0,T]\to W_2^\alpha(\Omega)\}$ *существует и притом единственное решение задачи (10) - (11) из класса* $C^2\{[0,T]\to H^\beta(\Omega)\}$.

Третья глава посвящена исследованию линейной перидинамической модели на двумерной периодической структуре.

В первом параграфе этой главы рассматривается линейная модель, которая приводится к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\int_{\mathbb{T}^2}K(x,y)\big[u(x,t)-u(y,t)\big]dy=f(x,t),\quad x\in\mathbb{T}^2,\quad t>0,\tag{20}$$

с начальными данными

$$u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in\mathbb{T}^2.\tag{21}$$

Здесь $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{T}^2=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$. Все функции считаются 2π - периодичными по каждой из переменных $x_k,k=1,2$.

В уравнении (20) и условии (21) предполагается, что $u:\mathbb{T}^2\times[0,T]\to\mathbb{R}^2$ - неизвестная функция, ядро K – матричная функция размерности 2×2 с областью определения $\mathbb{T}^2\times\mathbb{T}^2$, функции $\phi:\mathbb{T}^2\to\mathbb{R}^2$ и $\psi:\mathbb{T}^2\to\mathbb{R}^2$ - начальные данные и $f:\mathbb{T}^2\times[0,T]\to\mathbb{R}^2$ – внешняя сила.

В уравнении рассматривается ядро вида

$$K(x,y) = K_\tau(x-y), \quad x \in \mathbb{T}^2,\ y \in \mathbb{T}^2,$$

где $K_\tau(x)$ – периодическая функция вида

$$K_\tau(x) = \frac{(x \otimes x)}{|x|^{4+\tau}} \chi(|x|), \quad \tau > 0, \quad x \in \mathbb{T}^2. \tag{22}$$

Введем функцию $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, которая для некоторого $\rho > 0$ и некоторого фиксированного $\beta, 0 < \beta < 1$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 \quad , & r \le (1-\beta)\rho, \\ 0 \quad , & r \ge \rho, \end{cases}$$

и $0 \le \chi(r) \le 1$ при $r \in \mathbb{R}$.

Обычно параметр ρ, называемый горизонтом, достаточно мал. Значение параметра β определяется толщиной пограничного слоя, в котором воздействие окружающих частиц сводится к нулю.

Пользуясь четностью ядра $K_\tau(x)$ уравнение (20) может быть записано в виде

$$u_{tt}(x,t) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2} K_\tau(y)\left[u(x+y,t) - 2u(x,t) + u(x-y,t)\right]dy = f(x,t). \tag{23}$$

Объектом нашего исследования является это сингулярное интегро-дифференциальное уравнение.

В дальнейшем мы предполагаем, что

$$0 < \tau < 2. \tag{24}$$

Для любого $\alpha > 0$ определим пространство Соболева $L_2^\alpha(\mathbb{T}^2)$ как пространство вектор-функций $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$, для которых конечна норма

$$\| f \|_{L_2^\alpha}^2 = 4\pi^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} | f_k |^2 (1 + |k|^2)^\alpha .$$

Здесь f_k коэффициенты Фурье функции f .

При целых $\alpha > 0$ пространство $L_2^\alpha(\mathbb{T}^2)$ совпадает с обычным пространством Соболева $W_2^\alpha(\mathbb{T}^2)$

Введем оператор

$$Bv(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2} K_\tau(y)\left[v(x+y) - 2v(x) + v(x-y)\right]dy \,. \tag{25}$$

Итак, мы пришли к следующей задаче Коши для уравнения

$$u_{tt}(x,t) - Bu(x,t) = f(x,t), \quad x \in \mathbb{T}^2, \quad t > 0, \tag{26}$$

с начальными условиями (21).

Определим решение задачи Коши (26), (21) как функцию $u(x,t)$, принадлежащую пространству $L_2^\tau(\mathbb{T}^2)$ при каждом $t \ge 0$, непрерывную по t в норме этого пространства на замкнутой полупрямой $t \ge 0$, дважды непрерывно дифференцируема на открытой полупрямой $t > 0$ по норме $L_2(\mathbb{T}^2)$, и удовлетворяющую (26) и (21).

Заметим, что, наложив условие (24) для $L_2^\tau(\mathbb{T}^2)$, мы допускаем существование решений, разрывных по пространственным переменным.

Во втором параграфе гиперсингулярный оператор преобразовывается в регулярный интегро-дифференциальный оператор. Приведем основные этапы.

Заметим, что коэффициенты Фурье любой функции $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ связаны с коэффициентами Фурье функции $v = (\nabla \otimes \nabla)u$ следующим равенством

$$v_k = (ik \otimes ik)u_k.$$

Введем следующий дифференциальный оператор:

$$A_\tau(\nabla) = \frac{1}{\tau(\tau+2)}\left[(\nabla \otimes \nabla) + \frac{1}{\tau} I\Delta\right]. \tag{27}$$

В случае, если $f(x)$ произвольная гладкая функция, то символ $A_\tau(\nabla) f(x)$ означает произведение матриц $A_\tau(\nabla)$ и $f(x)I$

$$A_\tau(\nabla) f(x) = A_\tau(\nabla)[f(x)I].$$

Утверждение 2. *Для* $\tau > 0$ *верно следуещее равенство*

$$A_\tau(\nabla)\frac{1}{|x-y|^\tau} = \frac{(x-y)\otimes(x-y)}{|x-y|^{\tau+4}}.$$

Следствие 1. Без ограничения общности можно считать, что ядро (26) имеет вид

$$K_\tau(x) = A_\tau(\nabla)\frac{\chi(|x|)}{|x|^\tau} + W(x), \quad \tau > 0, \quad x \in \mathbb{T}^2,$$

где $W(x)$- матричная функция с элементами $w^{(ij)} \in C_0^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Лемма 15. *Для любой функции* $v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ *верно равенство*

$$Bv(x) = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\chi(|y|)}{|y|^\tau} A_\tau(\nabla_y)v(x-y)dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2} [W(y)+W(-y)]v(x+y)dy - \left(\int_{\mathbb{T}^2} W(y)dy\right)v(x).$$

В третьем параграфе третьей главы при $0 < \tau < 2$ рассматривается ядро

$$L(x) = \frac{\chi(|x|)}{|x|^\tau}, \quad x \in \mathbb{T}^2,$$

причем коэффициенты Фурье этой функции удовлетворяют следующему равенству

$$L_k = \frac{C_\tau}{|k|^{2-\tau}} + O\left(|k|^{-N}\right), \qquad k \neq 0,$$

где C_τ зависит только от τ.

Для произвольной 2×2 матрицы $G = \left(g^{(ij)}\right)$ введем норму

$$|G| = \left(\sum_{i,j=1}^{2} | \ g^{(ij)} |^2 \right)^{1/2}.$$

Введем следующее обозначение

$$\Lambda(k) = (2\pi)^2 \left[L_k A_\tau(k) - W_k - W_{-k} + W_0 \right], \quad k \in \mathbb{Z}^2. \qquad (28)$$

Заметим, что любого натурального N верно следующее соотношение

$$\Lambda(k) = (2\pi)^2 C_\tau A_\tau(k) |k|^{\tau-2} + W_0 + O(|k|^{-N}), \ k \in \mathbb{Z}^2,$$

а значит имеет место следующая оценка

$$|\Lambda(k)| \le C(1+|k|^2)^{\tau/2}, \ k \in \mathbb{Z}^2.$$

Кроме того, существуют постоянные $b > a > 0$ и $R > 0$, такие, что при любом $\xi \in R^2$ с $|\xi| = 1$ матрица $\Lambda(k)$ удовлетворяет следующему неравенству

$$a|k|^\tau \le (\Lambda(k)\xi, \xi) \le b|k|^\tau, \quad k \in \mathbb{Z}^2, \quad |k| \ge R.$$

Лемма 16. *Пусть* $0 < \tau < 2$. *Тогда для любой функции* $v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ *верна оценка*

$$\| Bv \|_{L_2(\mathbb{T}^2)} \le C \| v \|_{L_2^\tau(\mathbb{T}^2)}.$$

Из последней леммы следует, что гиперсингулярный оператор $B : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to L_2(\mathbb{T}^2)$ может быть расширен как непрерывный оператор $B : L_2^\tau(\mathbb{T}^2) \to L_2(\mathbb{T}^2)$.

В четвертом параграфе третьей главы рассмотривается дифференциальное уравнение (26) с начальными данными (21). Переходя к коэффициентам Фурье, мы получаем следующую задачу Коши:

$$\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + \Lambda(k) u_k(t) = f_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}^2, \quad t > 0, \qquad (29)$$

$$u_k(0) = \phi_k, \quad \frac{du_k}{dt}(0) = \psi_k. \qquad (30)$$

Для нахождения решения задачи (29)-(30) введем две матрицы-функции, зависящие от параметра *t*:

$$P(t, \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \Lambda^m, \qquad Q(t, \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{2m}}{(2m)!} \Lambda^m. \qquad (31)$$

Заметим, что при $\Lambda = \Lambda(k) > 0$ и любого $t \ge 0$ верны следующие оценки

$$\| Q(t, \Lambda) \| \le 1, \qquad \| P(t, \Lambda) \| \le \frac{1}{\sqrt{\mu(\Lambda)}}.$$

А для любого $T > 0$ существует константа $C_T > 0$ такая, что для всех $0 \le t \le T$ функции (31) удовлетворяют неравенствам

$$\| Q(t, \Lambda(k)) \| \le C_T, \quad \| P(t, \Lambda(k)) \| \le \frac{C_T}{(1+|k|^2)^{\tau/4}}, \quad k \in \mathbb{Z}^2.$$

С помощью функций (31), находится решение рассматриваемой задачи.

Лемма 17. *Функции*

$$u_k(t) = Q\big(t,\Lambda(k)\big)\phi_k + P\big(t,\Lambda(k)\big)\psi_k + \int_0^t P\big(t-s,\Lambda(k)\big) f_k(s)ds \qquad (32)$$

являются решениями задачи Коши (29)-(30).

Лемма 18. *Пусть* $\phi(x)$ *и* $\psi(x)$ *принадлежат* $L_2(\mathbb{T}^2)$ *, а* $f(x,t)$ *непрерывно зависит от* $t \geq 0$ *по норме* $L_2(\mathbb{T}^2)$ *. Тогда функции (32) представляют собой последовательность коэффициентов Фурье некоторой функции* $u(x,t)$*, непрерывно зависящую от* $t \geq 0$ *в норме* $L_2(\mathbb{T}^2)$.

Лемма 19. *Пусть* $\alpha \geq \tau$ *, функции* $\phi(x) \in L_2^{\alpha}(\mathbb{T}^2)$ *и* $\psi(x) \in L_2^{\alpha-\tau/2}(\mathbb{T}^2)$ *, а* $f(x,t)$ *непрерывно зависит от* $t \geq 0$ *по норме* $L_2^{\alpha-\tau/2}(\mathbb{T}^2)$ *. Тогда функция* $u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} u_k(t)e^{ikx}$*, где коэффициенты* $u_k(t)$ *определены (32), непрерывна по переменной* $t \geq 0$ *и принадлежит* $L_2^{\alpha}(\mathbb{T}^2)$ *по переменной x, и дважды непрерывно дифференцируема по t на полупрямой* $t > 0$ *в норме* $L_2^{\alpha-\tau}(\mathbb{T}^2)$.

Учитывая все полученные результаты, мы можем сформулировать основной результат треьей главы.

Теорема 9. *Пусть* $\alpha \geq \tau$ *. Предположим, что функции* $\phi(x)$ *и* $\psi(x)$ *принадлежат пространствам Соболева* $L_2^{\alpha}(\mathbb{T}^2)$ *и* $L_2^{\alpha-\tau/2}(\mathbb{T}^2)$*, соответственно, а* $f(x,t)$ *непрерывно зависит от* $t \geq 0$ *по норме* $L_2^{\alpha-\tau/2}(\mathbb{T}^2)$ *. Тогда решение задачи Коши (20)-(21) существует, единственно и принадлежит* $L_2^{\alpha}(\mathbb{T}^2)$.

В **четвертой главе**, названной «О разрешимости нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, связанных с периднамическими моделями», рассматриваются случаи, когда определяющее поведение описывается классом нелинейных уравнений.

В первом параграфе этой главы изучена перидинамическая модель в среде с нелинейными и нелокальными свойствами упругости, которая приводит к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int_\Omega F(u(x,t)-u(y,t),x-y)dy = f(x,t), x\in\Omega, t>0, \qquad (33)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x\in\Omega, \qquad (34)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n -$ область с кусочно-гладкой границей.

Здесь предполагается, что неизвестная функция $u:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}^n$, ядро $F:(\Omega\times[0,T])\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ и внешняя сила $f:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}^n$ являются векторными функциями.

В данном параграфе, мы предполагаем, что вектор-функция F имеет вид:

$$F(u,x) = P(u)Q(x), \qquad (35)$$

где $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – гладкая вектор-функция, удовлетворяющая условию $P(0)=0$, а $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ – матрица-функция, которая может иметь особенность в нуле, но должна быть интегрируема в некоторой степени.

Поскольку основной проблемой перидинамики является описание сильных разрывов решений, будем искать решение задачи (33) - (34) в классах $L_p(\Omega)$.

Положим

$$B[u](x) = \int_\Omega Q(x-y)P\big(u(x,t)-u(y,t)\big)dy. \tag{36}$$

Интегрируя уравнение (33) дважды по t, получим

$$u(x,t) = \int_0^t (t-s)B\big[u(x,s)\big]ds + \Phi(x,t), \tag{37}$$

где

$$\Phi(x,t) = \varphi(x) + t\psi(x) + \int_0^t (t-s)f(x,s)ds.$$

Введем оператор

$$A[u](x,t) = \int_0^t (t-s)B\big[u(x,s)\big]ds + \Phi(x,t) \tag{38}$$

В разрешимости задачи (33) - (34) важную роль играют операторы *A* и *B*, поэтому далее исследуем их свойства.

Лемма 20. *Пусть функция P такова, что*

$$\big|P(u)-P(v)\big| \le L|u-v|,$$

а для некоторого $q>1$ *верно*

$$\int_\Omega |\,Q(y)|^q\,dy \le const.$$

Тогда для $p=\dfrac{q}{q-1}$ *верно неравенство*

$$\big\|B[u]-B[v]\big\|_{L_p} \le C\,\|u-v\|_{L_p}.$$

Здесь L, C - положительные постоянные.

Пусть H – некоторое банохово пространство. Для $z:[0,\ T] \to H$ мы определим

$$\|z\|_t = \sup_{0\le s\le t}\big\|z(s)\big\|.$$

Лемма 21. *Пусть выполнены условия Леммы 20. Тогда верно неравенство*

$$\big\|A[u]-A[v]\big\|_t^2 \le \frac{C^2t^3}{3}\int_0^t \|u-v\|^2\,ds.$$

Лемма 22. *В условиях Леммы 20 верно следующее*

$$\|A^m[z](\cdot,t)-A^m[w](\cdot,t)\|^2 \le \frac{C^{2m}t^{4m-1}}{3^m\,4^{m-1}(m-1)!}\int_0^t \|z(\cdot,s)-w(\cdot,s)\|^2\,ds.$$

Следствие 2. Для любого $T>0$ существует $m\in\mathbb{N}$ такое, что

$A^m : C\Big(\big[0,T\big] \to L_2\big(\mathbb{R}^n\big)\Big) \to C\Big(\big[0,T\big] \to L_2\big(\mathbb{R}^n\big)\Big)$ является сжимающим отображением.

Используя полученные оценки, доказывается следующий результат о разрешимости исследуемой задачи.

Теорема 10. *Пусть заданные функции* $\phi(x), \psi(x) \in L_2(\Omega)$, $f(x,t) \in L_2\big(\Omega \times [0,T]\big)$ *для произвольного* $T > 0$. *Тогда задача (33)-(34) разрешима единственным образом в классе* $C^2\Big(\big[0,T\big] \to L_2(\Omega)\Big)$.

Во втором параграфе четвертой главы приведен пример, показывающий важность условий теоремы 10.

Третий параграф этой главы посвящен изучению следующей задачи Коши

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\Omega} F(u(x,t)-u(y,t), x-y)dy = f(x,t),\ x \in \Omega, t > 0, \tag{39}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in \Omega, \tag{40}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n -$ область с кусочно-гладкой границей.

Мы предполагаем, что вектор-функция F имеет вид (35), где $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – абсолютно непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию $P(0) = 0$, а $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ – матрица-функция, которая может иметь особенность в нуле, но должна быть интегрируема в некоторой степени.

Всюду ниже мы предполагаем, что плотность $\rho(x)$ является измеримой функцией, удовлетворяющей условию $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$.

Также предполагается, что функция $P \in L_p(\Omega)$, а ее якобиан $J(u) = \dfrac{\partial P(u)}{\partial u}$ удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial P(u)}{\partial u}\right| \leq \Phi\big(|u|\big),$$

где $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — некоторая возрастающая функция.

Если уравнение (39) дважды проинтегрировать по t, то решение задачи Коши удовлетворяет интегральному уравнению $u = A[u]$, где

$$A[u](x,t) = \int\limits_0^t (t-s) B[u(x,s)]ds + \Psi(x,t), \tag{41}$$

причем

$$B[u](x,t) = \frac{1}{\rho(x)}\int\limits_{\Omega} Q(x-y) \mathrm{P}(u(x,t) - u(y,t))\, dy,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{42}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\rho(x)}\big(\varphi(x) + t\psi(x)\big) + \frac{1}{\rho(x)}\int\limits_0^t (t-s)\, f(x,s)ds.$$

Приведем некоторые необходимые оценки

Лемма 23. *Пусть* $|u| \leq L$ *и* $|v| \leq L$, *а для некоторого* $q > 1$

$$\int_{\Omega} |Q(y)|^q \, dy \le const.$$

Тогда для $p = q/(q-1)$ *имеет место следующая оценка*

$$\|B[u]-B[v]\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{2\Phi(L)}{\rho_0}\|Q\|_{L_q(\Omega)}\|u-v\|_{L_p(\Omega)}.$$

Следствие 3. Так как $P(0)=0$, то верна оценка

$$\|B[u]\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{2\Phi(L)}{\rho_0}\|Q\|_{L_q(\Omega)}\|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Покажем, что оператор A сжимающий.

Лемма 24. *Пусть* $|u| \le L$ *и* $Q \in L_q(\Omega)$, $q>1$. *Тогда при* $\varphi,\psi \in L_p(\Omega)$ *и* $f \in L_p(\Omega\times[0,T])$, *где* $p = \dfrac{q}{q-1}$, *верны следующие оценки*

$$\|A[u]-\varphi\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{2p}{\rho_0}(t^2\Phi(L)\|Q\|_{L_q(\Omega)}\|u\|_{L_p(\Omega)} + t\|\psi\|_{L_p(\Omega)} + \frac{t^2}{2}\|f\|_{L_p(\Omega)}),$$

$$\|A[u]-A[v]\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{2p}{\rho_0}t^2\Phi(L)\|Q\|_{L_q(\Omega)}\|u-v\|_{L_p(\Omega)}.$$

Теорема 11. *Пусть для некоторого* $q>1$ *функция* $Q(x)\in L_q(\Omega)$. *Тогда существует некоторое* $T>0$ *такое, что при* $\varphi,\psi\in L_p(\Omega)$ *и* $f\in L_p(\Omega\times[0,T])$ *задача (39)-(40) имеет единственное решение из класса* $C^2([0,T],L_p(\Omega))$, *где* $p=\dfrac{q}{q-1}$.

Четвертый параграф четвертой главы, посвящен изучению разрешимости следующей задачи, являющейся обобщением известных результатов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta\left[\beta * \left(u + g(u,x,t)\right)\right], \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t>0, \tag{43}$$

$$u(x,0)=\phi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{44}$$

где $u=u(x,t)$-неизвестная функция, g - нелинейная функция u,x,t, символ $*$ означает свертку во всем пространстве, β - заданная функция.

Далее мы будем использовать преобразование Фурье и $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ будет означать пространство Соболева L_2 в $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|u\|_s^2 = \int_{R^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Обозначим

$$G(x,t)=g(u(x,t),x,t)$$

и

$$\hat{G}(\xi,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} g\left(u(x,t),x,t\right)e^{-ix\xi}\,dx.$$

Так же, пусть

$$B[\hat{u}](\xi,t) = \hat{G}(\xi,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} g\left(u(x,t),x,t\right)e^{-ix\xi}\,dx,$$

где

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \hat{u}(\xi,t)e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Заметим, что если $g \in \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^n\right)$, то имеет место оценка

$$\| B[\hat{u}] - B[\hat{v}] \| \le L \| \hat{u} - \hat{v} \|.$$

Причем, если $g(0,x,t) = 0$, то $\| B[\hat{u}] \| \le L \| \hat{u} \|$.

Введем еще одно обозначение

$$A[\hat{u}](\xi,t) = \omega(\xi)\int_0^t \sin\omega(\xi)\,(t-\tau)\,B[\hat{u}](\xi,\tau)\,d\tau.$$

Для $z:[0,T] \to B$ мы определим

$$\|z\|_t = \max_{0 \le s \le t} \| z(s) \|.$$

Тогда, очевидно, что если $g \in \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $\omega(\xi)$ ограниченная $\left|\omega(\xi)\right| \le C$, то

$$\left\| A[\hat{u}] - A[\hat{v}] \right\|_t^2 \le \frac{L^2 C^4 t^3}{3} \int_0^t \| \hat{u} - \hat{v} \|^2\, d\tau.$$

Теперь исследуем уравнение

$$z = Az + \Phi. \qquad (45)$$

Лемма 25. *Имеет место оценка*

$$\| A^m[z](\cdot,t) - A^m[w](\cdot,t) \|^2 \le \frac{C^4 L^{2m} t^{4m-1}}{3^m 4^{m-1}(m-1)!} \int_0^t \| z(\cdot,\tau) - w(\cdot,\tau) \|^2\, d\tau.$$

А значит, для любого $T > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $A^m : C\left([0,T] \to L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \to C\left([0,T] \to L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ - сжимающее отображение. Следовательно, оператор $A : C\left([0,T] \to L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \to C\left([0,T] \to L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ имеет единственную неподвижную точку и уравнение (45) имеет единственное решение.

Теорема 12. *Существует $T > 0$ такое, что задача Коши (43)-(44) корректна с решением из $C^2\left([0,T], L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ для начальных данных $\phi(x), \psi(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^n\right)$.*

Теорема 13. *Пусть $s > 0$ и $0 < \alpha < s$. Тогда существует $T > 0$ такое, что задача Коши (43)-(44) разрешима в $C^2\left([0,T], H^s\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ для начальных данных $\phi \in H^s\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $\psi \in H^s\left(\mathbb{R}^n\right)$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследований диссертационной работы, были получены следующие результаты:

1. задачи для перидинамических сингулярных интегро-дифференциальных уравнений были сведены к операторным интегральным уравнениям Вольтерра и показана однозначная разрешимость последних;
2. найдены условия на заданные функции и классы разрешимости уравнений, связанных с перидинамическими моделями нелинейной эластики в двумерной периодической структуре;
3. доказаны новые оценки для функций из класса Соболева;
4. разработан метод приведения сингулярного интегро-дифференциального уравнения, рассматриваемого в произвольной двумерной области, к регулярному виду;
5. получена новая форма ядра с особенностью порядка $n(n \geq 3)$ сингулярного интегро-дифференциального уравнения, рассматриваемого в произвольной $n-$мерной области;
6. доказана однозначная разрешимость гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения, рассматриваемого на двумерной периодической структуре, а также найден класс существования решения и изучены его свойства;
7. определены условия глобальной и локальной разрешимости нелинейного перидинамического уравнения;
8. получены условия разрешимости интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска;
9. изучены свойства полученных решений.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

YULDASHEVA ASAL VICTOROVNA

ON THE SOLVABILITY OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS RELATED WITH PERIDYNAMIC MODELS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2022

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.1. DSc/FM187.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Alimov Shavkat Arifdjanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, academician
Official opponents:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Rakhimov Abdumalik Abdumajidovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Urinov Ahmadjon Kushakovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Leading organization:	Ahmet Yessawi International Kazakh -Turkish University (Kazakhstan)

Defense will take place « 1 » November 2022 at 16:00 at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) - 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz.

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 145) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) - 207-91-40. E-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Abstract of dissertation sent out on « 14 » October 2022.
(mailing report № 2 on « 14 » October 2022).

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., senior researcher

A.Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of the research work is to construct solutions of the problems with initial data for integro-differential equations with singular kernels and nonlinear integro-differential equations associated with peridynamic models.

The subject of the study. Singular integro-differential equations and nonlinear integro-differential equations.

Scientific novelty of the research work is as follows:

representations of singular kernels of integro-differential equations on a two-dimensional periodic structure are found, which make it possible to reduce problems to equations with a regular kernel;

existence and uniqueness theorems for solutions of problems with initial data for peridynamic equations in arbitrary two-dimensional and multidimensional domains are proved;

conditions for global and local solvability of various nonlinear peridynamic equations are found;

new estimates are proved for some functions from the Sobolev classes.

Implementation of the research results. Based on the results obtained for singular integro-differential equations associated with peridynamic models:

existence and uniqueness theorems for solving problems with initial data for peridynamic equations in arbitrary two-dimensional and multidimensional domains were used in the study of a nonlinear fractured medium in the project of a foreign grant on the topic "Natural disasters in Kamchatka - earthquakes and volcanic eruptions" No. AAAA-A19-119072290002-9 (reference of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Kamchatka State University named after Vitus Bering" number 17/2-12 dated May 31, 2022, Russia). The application of this scientific result made it possible to develop effective algorithms for the numerical solution of a mathematical model based on the hypersingular integro-differential equation of peridynamics;

the method of reducing integro-differential equations with a singular kernel to equations with a regular kernel on a two-dimensional periodic structure was used in a grant project on the theme "Development of nonlinear models of elastic and plastic media and the study of nonlinear deformation of isotropic and anisotropic bodies under the action of static and dynamic loads" in the development of nonlinear models of elastic media (reference of the Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures of the Academy of Sciences of Uzbekistan No. 437-3 dated June 20, 2022.) The application of this scientific result made it possible implement numerical methods for solving plasticity problems;

methods developed for quasi-linear equations of even order and nonlinear equations of peridynamics were used in MRU-OT-1/2017 "Non-local boundary and inverse problems for non-classical differential and operator-differential equations" to solve non-local problems for linear and quasi-linear equations of mixed type (reference of the National University of Uzbekistan dated June 23, 2022 under the number 01/11-3672). The application of the scientific results of the dissertation within the framework of this project made it possible to prove the existence and uniqueness of solutions to non-local problems for equations of odd order with the heat operator in the main part;

the results on nonlinear integro-differential equations related to peridynamic models were used in the framework of scientific research under the grant 18-51-41002 "Mathematical modeling of a thermodynamically consistent mathematical model of two-phase media in a dissipative approximation with cross effects" to solve a boundary value problem for the system of equations (reference of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, number 15301 dated June 10, 2022, Russia). The application of scientific results made it possible to show the existence and uniqueness of a generalized solution of boundary value problems for the system of magnetoporosity equations in the dissipative approximation.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and titles of used literature. The full volume of the thesis is 136 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Юлдашева А.В. Краевая задача для одного уравнения четного порядка // Вестник НУУз. – 2016 . – 2/1. – С. 78-85. (01.00.00, № 8).
2. Yuldasheva A.V. An Inverse Coefficient Problem for a Quasilinear Parabolic Equation of High Order. // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – Springer. – 2017. – V. 216. – P. 423-429. (3. Scopus. IF=0.32).
3. Yuldasheva A.V. On a problem for a quasi-linear equation of even order // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – V. 241(4). – P. 423–429. (3. Scopus. IF=0.415).
4. Alimov S., Yuldasheva A.V. On Cauchy problem for Boussinesq-type equation // Bulletin of the Institute of Mathematics. –2020. – No.1. – P. 10-14. (01.00.00, № 17).
5. Yuldasheva A.V. The Linear Peridynamic Model in Elasticity Theory // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – V.41, No. 1. – P. 137-141 (3.Scopus. IF=1.01).
6. Yuldasheva A.V. On Solvability of One Singular Equation of Peridynamics // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – V.41, No. 6. – P. 1131-1136. (3.Scopus. IF=1.01).
7. Алимов Ш.А., Юлдашева А.В. О разрешимости перидинамического уравнения с сингулярным ядром // Дифференциальные уравнения. – 2021. –Том 57, № 3. – С. 375-386. (3. Scopus. IF=1.067).
8. Shavkat Alimov, Asal Yuldasheva. Solvability of Singular Equations of Peridynamics on Two-Dimensional Periodic Structures // Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling. – Springer, 2021. – P. 1-19 (3. Scopus. IF=0.1).
9. Юлдашева А.В. Задача Коши для уравнения перидинамики на плоскости // ДАН РУз. –2021. – № 3. – С. 7-9. (01.00.00, № 7).
10. Юлдашева А.В. О разрешимости нелинейного уравнения перидинамики // Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2022. – V.5, №1– С. 156-160. (01.00.00, № 17).
11. Юлдашева А.В. Локальная разрешимость нелинейного уравнения перидинамики // ДАН РУз. –2022. – №2. – С. 7-11. (01.00.00, № 7).

II бўлим (II часть; II Part)

12. Юлдашева А.В. О разрешимости нелинейного интегро-дифференциального уравнения // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2020. –Т. 32, № 3. – С. 127-134.

13. Yuldasheva A. V. Initial data problem for an equation related to a peridynamic model in a two-dimensional domain // Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. – 2021 – V. 37, No. 4. – P. 45–52.
14. Алимов Ш.А., Юлдашева А.В. О разрешимости уравнения с сингулярным ядром, связанного с перидинамической моделью // Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовничего. 13-15 мая 2019. – Москва, С. 653.
15. Yuldasheva A.V. Cauchy problem for non-line equation of peridynamics // Int'l Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences, September 7-10, 2020. – Greece, P. 90.
16. Yuldasheva A.V. Initial problem for boussineq – type equation // International Online Conference «FRONTIER IN MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE», 12 – 15 October 2020. – Tashkent, P. 76.
17. Юлдашева А.В. Об одной задаче для уравнения, связанного с перидинамической моделью // Материалы научной конференции «Актуальные проблемы стохастического анализа», 20-21 февраля 2021. – Ташкент, С. 357-358.
18. Юлдашева А.В. О разрешимости задачи Коши для уравнения, связанного с перидинамической моделью// Тезисы докладов международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики», 12-15 сентября 2021. – Стерлитамак, С. 67-70.
19. Юлдашева А.В. Задача Коши для линейного уравнения, связанного с перидинамической моделью // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых САРЫМСАКОВСКИЕ ЧТЕНИЯ, 16–18 сентября 2021. – Ташкент, С. 160.
20. Алимов Ш.А., Юлдашева А.В. О разрешимости сингулярного уравнения перидинамики в двумерной периодической области // Тезисы докладов международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы», 25-29 октября 2021.– Белгород, С. 16-19.
21. Юлдашева А.В. О существовании локального решения интегро-дифференциального уравнения, связанного с перидинамической моделью // Тезисы докладов международной научно-практической конференции «XII Ломоносовские чтения», 29-30 апреля 2022. – Душанбе, С.90.
22. Юлдашева А.В. О задаче, связанной с линейной перидинамической моделью // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXIII, 3–9 мая 2022. – Воронеж, С.289-290.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2022 йил 3 октябрда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,75. Адади 100 дона. Буюртма № 62/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.