ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ФАРҒОНА ПОЛИТЕХНИКА ИНСТИТУТИ

ДАЛИЕВ БАХТИЁР СИРОЖИДДИНОВИЧ

БИРИНЧИ ТУР СИНГУЛЯР ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УЧУН ОПТИМАЛ АЛГОРИТМЛАР

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

УДК: 519.642.7

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ФАРҒОНА ПОЛИТЕХНИКА ИНСТИТУТИ

ДАЛИЕВ БАХТИЁР СИРОЖИДДИНОВИЧ

БИРИНЧИ ТУР СИНГУЛЯР ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УЧУН ОПТИМАЛ АЛГОРИТМЛАР

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.2.PhD/FM342 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Фарғона политехника институтида бажарилган..

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ҳаётов Абдулло Раҳмонович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Худойберганов Мирзоали Уразалиевич физика-математика фанлари доктори, доцент
Етакчи ташкилот:	**Бухоро давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг «___»_________ 2022 йил соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2022 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2022 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

М.М. Арипов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

Р.Д.Алоев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида аэродинамика, эластиклик назарияси ва бошқа амалий фанларнинг кўплаб масалалари кесмада ёки кесмалар системасида бир ўлчовли сингуляр интеграл тенгламаларни ечишга келтирилади. Квадратур формулалар ёрдамида ифодаланган сингуляр интеграл тенгламаларнинг тақрибий аналитик ечимлари сонли алгебра, сонли интеграллаш назарияси, интерполяция, аппроксимация ва бошқа шу каби масалаларнинг тадқиқот объекти ҳисобланади. Сингуляр интеграл тенгламалар математика, физика ва механиканинг турли соҳаларида кенг қўлланилади. Шунинг учун Соболев фазосидаги функциялар учун сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий ечишда оптимал квадратур, кубатур ва интерполяцион формулаларни қуриш, ҳамда уларнинг яқинлашиш тартибини яхшилаш ҳисоблаш математикасининг долзарб вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги вақтда жаҳонда етарлича силлиқ функциялар учун Соболев фазоларида оптимал, асимптотик оптимал ва тартиб бўйича оптимал квадратур ва кубатур формулалар қуриш муҳим аҳамият касб этмоқда. Хусусан, кучсиз сингуляр интеграл тенгламаларни сонли-аналитик ечишда оптимал формулалар қуриш, уларнинг Соболев фазоларида хатоликларини баҳолаш кенг татбиқ этилмоқда. Маълумки, Соболев фазосидаги функциялар учун Абел типидаги кучсиз сингуляр тенгламаларни сонли-аналитик ечишда алгебраик аниқлик даражаси юқори бўлган формулаларни қўллаш яхши натижага олиб келади. Шу сабабли Соболев фазосида умумлашган Абел интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун ҳосилали, сингуляр вазнли оптимал квадратур формулаларни қуриш мақсадли илмий тадқиқотлардан бири ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган механика, гидродинамика, аэродинамика, электродинамика, квант механикаси ва эластиклик назарияси масалаларини сонли-аналитик ечиш усулларини ҳосил қилиш каби долзарб йўналишларга катта эътибор қаратилмоқда. Хусусан, Соболев фазоларида оптимал, асимптотик оптимал ва тартиб бўйича оптимал сонли интеграллаш формулаларини қуриш, уларнинг хатоликларини баҳолаш бўйича муҳим натижаларга эришилди. «Функционал анализ, алгебра, дифференциал тенгламалар, математик физика, математик моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика»[1]каби устувор йўналишлар бўйича ҳалкаро стандартлар даражасидаги илмий изланишлар олиб бориш ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятининг асосий вазифаларидан бири ҳисобланади. Қарор ижросини таъминлашда квадратур формулалар қуриш ва уларнинг хатоликларини баҳолаш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий- тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПҚ-4708-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги, 2022 йил 28 январдаги ПФ-60 сонли «2022-2026 йилларга мўлжалланган Янги Ўзбекистоннинг тараққиёт стратегияси тўғрисида»ги фармонлари, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси.

Ҳозирда каср тартибли интеграллар ва ҳосилаларнинг, яъни, Абел умумлашган интгерал тенгламасининг амалий аҳамияти муҳимлигини таъкидлаш лозим. Ўз вақтида Абелнинг машҳур таутохрон масаласидан сўнг, ушбу масаланинг ечими Лиувилл томонидан биринчи бўлиб геометрия, физика ва механика масалаларига тадбиқ қилинган. Улар орасида магнитга чексиз тўғри чизиқли ўтказгичнинг таъсири бўйича Лаплас масаласи, иккита бундай ўтказгичнинг ўзаро таъсири бўйича Ампер масаласи, жисмлар тортишиши билан боғлиқ масалалар, шарда иссиқлик тарқалиш масаласи, тақрибий квадратуралар бўйича Гаусс масаласи ва бошқалар мавжуд. Охирги йилларда каср тартибли интеграл тенгламалар, интегро-диффференциал тенгламалар ва дифференциал тенгламар табиий жараёнларни ифодоловчи математик модел сифатида қаралмоқда. Турли фазоларда бундай тенгламаларнинг ечимлари мавжуд ва ягоналиги чуқур ўрганилмоқда. Шу билан бирга, кўп ҳолларда бу тенгламаларнинг аналитик ечимларини топиш мураккабдир. Шунинг учун каср тартибли интеграл, интегро-дифференциал ва дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишнинг янги самарали усулларини ишлаб чиқиш муҳимдир.

Маълумки, бир қатор ишлар Абел интеграл тенгламасининг сонли ечимига бағишланган. Масалан, Li Huang, Yong Huang, Li Xian-Fang лар номаълум функциянинг Тейлор қаторини кенгайтиришдан фойдаланиб, Абел интеграл тенгламаси учун тақрибий ечим олишган. R.Piessens томонидан Абел интеграл тенгламасини Чебышев кўпҳадлари ёрдамида ечиш усули таклиф қилинди. S.A.Yousefi эса Абел интеграл тенгламасини Лежандр вейвлетлари билан ечиш учун сонли усулни таклиф қилган. Абел интеграл тенгламасининг номаълум функцияси учун Тейлор қатори ёрдамида тақрибий ечимни M.Yaghobifar, Nik N.M.A.Long, Z.K.Eshkuvatov лар қуришган. N.Singha ва C.Nahak ўзларининг тадқиқотларида ортогонал Лагерр кўпҳадлари ёрдамида умумлашган Абел интеграл тенгламасини тақрибий ечиш учун сонли яқинлашишни таклиф этишган. Абел интеграл тенгламасини тақрибий ечиш учун Эрмит вейвлетлари яқинлашишига асосланган сонли усулни R.A.Mundewadi, S. Kumbinarasaiah лар тақдим этишган. Salman Jahanshahi, Esmail Babolian, Delfim F.M. Torres, Alireza Vahidi ларнинг ишларида каср тартибли интеграллар ва Капуто маъносидаги каср тартибли ҳосилаларини яқинлаштиришга қўлланилган.

Шуни таъкидлаш жоизки, С.Л.Соболев, В.Л.Васкевич ва Ҳ.М.Шадиметовларнинг ишларида панжарали квадратур ва кубатур формулаларни оптималлаштириш масаласи кўриб чиқилган. В.В. Ивановнинг ишларида сингуляр интегралларни ҳисоблашни оптималлаштириш масалалари кўриб чиқилган. Регуляр ва сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал формулаларни қуриш Б.Г.Габдулхаев, И.В.Бойков, М.И.Исраилов, Ҳ.М.Шадиметов, А.Р.Ҳаётов, Д.М.Ахмедов ларнинг ишларида давом эттирилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган илмий-тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг илмий-тадқиқот режаларининг ОТ-Ф4-86 “Гильберт фазоларида дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечишнинг оптимал методларини ишлаб чиқиш, ЁФА-Фтех-2018-13 “Сингуляр тенгламаларни тақрибий-аналитик ечишнинг оптимал алгоритмларини ишлаб чиқиш” мавзуларидаги лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади умумлашган Абел интеграл тенгламасини тақрибий ечиш учун оптимал квадратур формула қуриш ва уларнинг хатолик функционалларини дифференциалланувчи функциялар синфларда нормаларини ҳисоблашдир.

Тадқиқотнинг вазифалари:

$L_2^{(m)}(0,t)$ фазосида Абел типидаги сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун квадратур формулалар хатолигининг юқоридан баҳосини топиш;

$L_2^{(m)}(0,t)$ фазосида биринчи тур Абел типидаги сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун ҳисоблаш алгоритмларини ишлаб чиқиш;

$L_2^{(m)}(0,t)$ фазосида биринчи тур Абел типидаги сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш ва хатоликларни баҳолаш учун ҳисоблаш алгоритмини $m=1$, $m=2$ ва $m=3$ ҳолларда амалга ошириш;

$L_2^{(m)}(0,t)$ фазосида Абел типидаги тенгламаларнинг тақрибий ечимларини топиш ва ечимларнинг хатолигини баҳолаш учун қулай дастур яратиш.

Тадқиқотнинг объекти Биринчи тур сингуляр интеграл тенгламалари, умумлашган Абел интеграл тенгламари, квадратур формулалар, квадратур формулаларнинг хатолигини баҳосидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети Экстремал функциялар, Соболев фазосида умумлашган Абел интеграл тенгламалар, кучсиз сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, ҳамда дифференциал тенгламалар назарияси, умумлашган функциялар, дискрет аргументли функциялар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Соболев фазосида Абел интеграл тенгламасининг тақрибий ечими учун квадратур формулаларнинг хатолик функционали нормасининг квадрати ҳисобланган;

Соболев фазосида Абел интеграл тенгламасининг тақрибий ечими учун оптимал квадратур формулаларнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган, ҳамда ушбу тенгламани ечиш учун сонли алгоритм ишлаб чиқилган;

$L_2^{(m)}(0,t)$ фазосида биринчи тур Абел типидаги интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун $m=1$, $m=2$ ва $m=3$ ҳолларда квадратур формулаларнинг оптимал коэффициентлари топилган;

$L_2^{(m)}(0,t)$ фазосида Абел типидаги тенгламаларнинг тақрибий ечимларини топиш ва ечимларнинг хатолигини баҳолаш учун дастур яратилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат**:**

оптимал квадратур формула ёрдамида энергия ўзгартиришнинг иссиқлик циклларига асосланган қуёш энергетик қурилмалари учун иссиқлик тарқалиш тенгламаларини сонли ҳисоблаш схемалари қурилган;

турғунлиги оширилган тракторнинг конструктив, технологик параметрларини аниқлашда дифференциал ва интеграл тенгламалар ечимини тақрибий ҳисоблаш схемалари қурилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги квадратур формулалар назарияси, ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар назарияси методларини қўлланилганлиги, ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Диссертация ишида олинган натижаларнинг илмий аҳамияти шундаки, Соболев фазосида умумлашган Абел интеграл тенгламасини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формула қурилган.

Физика, механика, эластиклик назарияси ва бошқа фанларнинг кўплаб масалаларини ечишда улар табиий равишда Абелнинг интеграл тенгламаларига ва сингуляр интегралларни ҳисоблашга келади. Ушбу ишда олинган оптимал квадратур формулалар ушбу масалаларни сонли ечиш учун қўлланилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Соболев фазосида умумлашган Абел типидаги интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун оптимал алгоритмни ҳосил қилиш бўйича олинган илмий натижалар асосида:

Соболевнинг m - тартибли ҳосиласи квадрати билан жамланувчи функциялар фазосида Абел интеграл тенгламаларини ечиш учун берилган алгоритмлардан ва қурилган оптимал квадратур формуладан ОТ-Ф-3-19 – “Энергия ўзгаришининг иссиқлик циклларига асосланган қуёш энергетик қурилмалари учун янги типдаги фундаментал тадқиқотларни ривожлантириш” фундаментал лойиҳасида энергия ўзгартиришнинг иссиқлик циклларига асосланган қуёш энергетик қурилмаларида иссиқлик тарқалиш тенгламаларини ечиш учун сингуляр интегралларни хисоблашда фойдаланилган (Фарғона политехника институтининг 2021 йил 17 июлдаги маълумотномаси). Натижада, энергия ўзгартиришнинг иссиқлик циклларига асосланган қуёш энергетик қурилмалари учун иссиқлик тарқалиш тенгламаларини ечиш учун сингуляр интегралларни ҳисоблаш имконини берган;

$L_2^{(m)}(0,t)$ фазосида сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун қурилган квадратур формулалардан МВ-Атех-2018-94 “Чўл ерлари учун турғунлиги оширилган универсал-чопиқ тракторининг конструктив ва технологик параметрларини ишлаб чиқиш” фундаментал лойиҳасида турғунлиги оширилган тракторнинг конструктив, технологик параметрларини аниқлашда дифференциал тенгламалар, интеграл тенгламалар ечимини тақрибий ҳисоблашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг 2022 йил 16 июндаги маълумотномаси). Натижада, дифференциал ва интеграл тенгламаларнинг тақрибий ечими турғунлиги оширилган тракторнинг конструктив, технологик параметрларини аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 11 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 7 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши.

Диссертация мавзуси бўйича жами 17 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан 2 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 99 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг “**Сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш усуллари ва Абел интеграл тенгламаси**” деб номланган биринчи бобида $L_2^{(m)}$ фазосида Сард маъносида Абел интеграл тенгламасини ечиш учун оптимал квадратур формулалар қуриш масаласи қўйилган ва қўйилган масала биринчи қисми тўлиқ ечилган, яъни Соболевнинг қўшма $L_2^{(m)*}(0,t)$ фазосида қаралаётган квадратур формуланинг хатолик функционали нормаси топилган.

Ушбу бобнинг биринчи параграфида сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун маълум натижаларни муҳокама қилишга бағишланган. Математик физика ва кимёнинг баъзи муҳим масалалари муҳокама қилинади, масалан стереология, иссиқлик ўтказувчанлиги, ярим чексиз қаттиқ ва кристалл ўсишидан иссиқлик нурланиши кабилар Абел типидаги характерли сингуляр интегралларга киради. Бундай тенгламаларнинг ечимлари Абел типидаги сингуляр интеграллар ёрдамида ифодаланиши таъкидланади.

1.2-параграфда Абел интеграл тенгламаси масаласи ва ечими батафсил баён этилган. Интеграл тенгламага биринчи бўлиб Абел дуч келган. У битта механик масалани кўриб чиқишда игтеграл тенгламага келган ва Абел ҳолатида тенглама квадратура билан ҳал қилинди. Ушбу Абел масаласи, механиканинг бошқа масалалари каби дифференциал тенглама ёрдамида ифодалаш мумкин эмаслиги ва тарихий жиҳатдан интеграл тенгламаларни кўриб чиқиш зарурлигига олиб келган биринчи масалани англатиши билан қизиқ. Абел тенгламаси кўриниши қуйидагича

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(s)ds}{\sqrt{x-s}}.$$

Бу ерда $f(x)$ маълум функция, $\varphi(s)$ эса номаълум функция.
Абел тенгламасининг ечими ушбу кўринишда ифодаланади

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\sqrt{s}} + \int_0^s \frac{f'(z)dz}{\sqrt{s-z}}\right].$$

Ушбу кўринишдаги

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1$$

тенглама Абелнинг умумлашган тенгламаси дейилади ва унинг ечимини аналитик кўриниши

$$\varphi(s)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{s^{1-\alpha}}+\int_0^s\frac{f'(z)dz}{(s-z)^{1-\alpha}}\right].$$

Бизнинг мақсадимиз ушбу

$$\int_0^s\frac{f'(z)dz}{(s-z)^{1-\alpha}}$$

интегрални юқори аниқликда ҳисоблашдан иборат.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида Соболев фазосидаги вазнли оптимал, асимптотик оптимал ва тартиби бўйича оптимал квадратур формулаларини оптималлаштириш масаласининг функционал қўйилиши батафсил баён этилган.

Қуйидаги квадратур формулани қараймиз

$$\int_0^t\frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}}\cong\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\varphi(h\beta), \tag{1}$$

бу квадратур формуланинг хатолик функционали $L_2^{(m)}(0,t)$ Соболев фазосида қуйидагича

$$\ell(x)=\varepsilon_{[0,t]}(x)(t-x)^{\alpha-1}-\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\delta(x-h\beta). \tag{2}$$

Бу ерда $\varphi(x)\in L_2^{(m)}(0,t),\quad t>0$ ихтиёрий чекли сон, $h=\dfrac{t}{N},\quad N\geq m$-натурал сон, $\delta(x)$-Диракнинг дельта функцияси, $\varepsilon_{[0,t]}$- [0,t] кесманинг характеристик функцияси, $C[\beta]$ - квадратур формуланинг коэффициентлари ва $C[\beta]=0,\, h\beta\notin[0,t],\ 0<\alpha<1.$

Ушбу $L_2^{(m)}$ функциялар синфи қуйидаги скаляр кўпайтма ёрдамида

$$<\varphi,g>=\int_0^t\left(\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}\right)\left(\frac{d^mg(x)}{dx^m}\right)dx.$$

гильберт фазоси бўлади.

Бу ишнинг мақсади $L_2^{(m)}(0,t)$ фазодаги (2) хатолик функционали нормасини коэффициентлар бўйича минималлаштириш ва чизиқли алгебраик тенгламалар системасини олиш ва система ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлашдан иборат.

(1) квадратур формуланинг хатолик функционали нормаси квадрати ҳисобланган

$$\left\|\ell/L_2^{(m)*}\right\|^2=(-1)^m\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\beta'=0}^{N}C[\beta]C[\beta']G_m(\mathrm{h}\beta-\mathrm{h}\beta')\right.$$

$$\left.-2\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\int_0^t(\mathrm{t}-\mathrm{x})^{\alpha-1}G_m(\mathrm{x}-\mathrm{h}\beta)\mathrm{dx}\right.$$

$$+\int_0^t\int_0^t (\mathrm{t-x})^{\alpha-1}(\mathrm{t-y})^{\alpha-1}G_m(\mathrm{x-y})\,\mathrm{dxdy}\Big] \;. \tag{3}$$

Бу ерда $G_m\left[\beta\right]=\dfrac{\left|h\beta\right|^{2m-1}}{2*(2m-1)!},\quad G_m\left[x\right]=\dfrac{\left|x\right|^{2m-1}}{2*(2m-1)!}.$

1.4 параграфда эса вазнли квадратур формуланинг $L_2^{(m)}(0,t)$ фазодаги экстремал функцияси ҳақидаги қуйидаги теорема исботланди.

Теорема 1. $L_2^{(m)}(0,t)$ фазода (1) квадратур формуланинг экстремаль функцияси ушбу тенглик билан аниқланади

$$U_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x).$$

Бу ерда ℓ - хатолик фунционали (2), $G_m(x)$ - Грин функцияси $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ дифференциал операторнинг фундаментал ечими, $G_m(x)=\dfrac{|\,x\,|^{2m-1}}{2(2m-1)!}$,

$P_{m-1}(x)$ эса $m-1$ даражали кўпхад.

Диссертациянинг “**Соболевнинг функционал фазосида Абелнинг умумлашган интеграл тенгламасини тақрибий-аналитик ечиш учун оптимал квадратур формулалар**” номли иккинчи бобида Соболев фазосида Абел типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун Сард маъносида оптимал квадратур формулаларни қуриш масаласи ечилган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида (1) квадратур формуланинг оптимал коэффициентларин топиш учун чизиқли тенгламалар ситемаси олинган.

Ортогоналлик шарти билан (3) нормани минималлаштиришга ўтамиз

$$(\ell,\mathrm{x}^k)=0,\quad \mathrm{k}=0,1,...,\mathrm{m}-1\;, \tag{4}$$

$$(\ell,\mathrm{x}^k)=\int_0^t(\mathrm{t-x})^{\alpha-1}x^k dx-\sum_{\beta=0}^{N}C\left[\beta\right](\mathrm{h}\,\beta)^k\,,$$

ёки

$$\sum_{\beta=0}^{N}C\left[\beta\right](\mathrm{h}\,\beta)^k=\int_0^t(\mathrm{t-x})^{\alpha-1}x^k dx,\qquad k=0,1,...,m-1\;.$$

Бунинг учун Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усулини қўллаймиз. Ёрдамчи функцияни тузамиз

$$\Phi(\mathrm{C},\lambda)=\left\|\ell\,/\,L_2^{(\mathrm{m})*}\right\|^2+2\cdot(-1)^{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k(\ell,\mathrm{x}^k)\;.$$

$\Phi(\mathrm{C},\lambda)$ функциядан $C\left[\beta\right]$ ва λ_k лар бўйича хусусий хосилаларни нўлга тенглаб, қуйидагини оламиз

$$\sum_{\beta=0}^{N}C\left[\beta\right]G_m(\mathrm{h}\,\beta-\mathrm{h}\,\gamma)+\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k\left[\gamma\right]^k=f_m\left[\gamma\right],\ \left[\gamma\right]=(\mathrm{h}\,\gamma)\in\left[0,t\right],$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta][\beta]^k = g_k, \qquad k=0,1,...,m-1,$$

бу ерда

$$f_m[\beta] = \int_0^t (\mathrm{t-x})^{\alpha-1} G_m(\mathrm{x-h}\,\beta)\,\mathrm{dx},$$

$$g_k = \int_0^t (\mathrm{t-x})^{\alpha-1}\,\mathrm{x}^k \mathrm{dx}.$$

(2) хатолик функционали нормасининг квадрати (1) формула $C[\beta]$, $\beta=0,1,...,N$ коэффициентларининг кўп ўзгарувчили квадрат функциясидир. (3) ифода (4) шартларда $C[\beta]$ коэффициентлари бўйича шартли минимумни топиш учун Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилари усулидан фойдаланамиз. Натижада $C[\beta]$, $\beta=0,1,...,N$ коэффициентларга нисбатан чизиқли тенгламалар системаси олинди.

Ушбу бобнинг иккинчи параграфида бу система ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланади ва бу системанинг ечими (3) ифодага минимум бериши ҳам кўрсатилади. Бу минимумга мос келувчи $\overset{\circ}{C}[\beta]$ $(\beta=0,1,...,\mathrm{N})$ коэффициентли квадратур формула оптимал квадратур формула дейилади, $\overset{\circ}{C}[\beta]$ коэффициентлар эса квадратур формуланинг оптимал коэффициентлари дейилади.

2.3 параграфда юқоридаги алгоритм ёрдамида биз Абел типидаги сингуляр интегралларни ҳисоблаш учун мураккаб квадратур формулаларини олдик

$$\int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho} C^{(\nu)}[\beta]\varphi^{(\nu)}[\beta]. \tag{5}$$

Бу ерда $C^{(\nu)}[\beta]$ квадратур формуланинг коэффициентлари, $[\beta]=h\beta$ тугун нуқталар.

(5) квадратур формулага мос хатолик функционали ушбу кўринишда

$$(l,\varphi) = \int \left[\frac{\varepsilon_{[0,t]}(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^{\nu}\delta(x-h\beta) \right] \varphi(x)dx.$$

Бу бобнинг 2.4 параграфида $L_2^{(m)^*}$ фазода мураккаб квадратур формуланинг хатолик функционали нормаси квадратининг кўриниши олинади

$$\left\| l \,|\, L_2^{(m)*} \right\| = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\beta'=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho}\sum_{\nu'=0}^{\rho} C^{(\nu)}[\beta]C^{(\nu')}[\beta'] \cdot (-1)^{\nu'} G_m^{(\nu+\nu')}[\beta-\beta'] - \right.$$
$$\left. -2\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^{\nu} C^{(\nu)}[\beta]\, f_m^{(\nu)}[\beta] + K_m \right].$$

Бу ерда

$$f_m^{(\nu)}[\beta]=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2m-1-\nu}(-1)^{\nu+j}\frac{(h\beta)^{2m-\nu-j-1}}{(2m-\nu-j-1)![\alpha+j]!}+\frac{(t-h\beta)^{2m-\nu+\alpha+1}}{[\alpha+2m-\nu-1]!},$$

$$K_m=\frac{t^{2m-1+2\alpha}}{[\alpha+2m-1]!(2m-1+2\alpha)},$$

$$[\alpha+2m-1]!=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+2m-1),$$

$$[\alpha+2m-\nu-1]!=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+2m-\nu-1),$$

$$[\alpha+j]!=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+j).$$

Ушбу бобнинг 2.5 параграфида эса Абел типидаги сингуляр интегрални тақрибий ҳисоблаш учун мураккаб квадратур формуланинг оптимал коэффициентларини топиш алгоритми олинади.

$\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[\beta]$, $\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[0]$ ва $\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[N]$ коэффициентлар қуйидагича аниқланади

$$\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[\beta]=h^{-1}\left(F_k[\beta-1]-2F_k[\beta]+F_k[\beta+1]\right),$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[0]=\frac{P_k}{2}+h^{-1}\left[F_k[1]-F_k[0]\right],$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[N]=\frac{P_k}{2}-h^{-1}\left[F_k[N]-F_k[N-1]\right].$$

Диссертациянинг “**Мураккаб квадратур формулаларнинг оптимал коэффициентлари**” номли учинчи бобида $L_2^{(m)}(0,t)$ фазода $m=1$, $m=2$ ва $m=3$ ҳолларда алгоритм амалга оширилади.

Ушбу бобнинг биринчи параграфида $m=1$ бўлганда (5) квадратур формуланинг коэффициентларининг аналитик кўриниши олинган ва хатолик функционали нормасининг квадрати топилган.

Теорема 2. $L_2^{(1)}(0,t)$ фазода $\rho=0$ да (5) шаклдаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидаги формулалар билан аниқланади

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[0]=\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+\frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\left((t-h)^{\alpha+1}-t^{\alpha+1}\right),$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[\beta]=\frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1}-2(t-h\beta)^{\alpha+1}+(t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\right],$$

$\beta=1,2,...,N-1$ бўлганда,

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[N]=\frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}.$$

Теорема 3. (1) оптимал квадратур формула хатолик функционали нормасининг квадрати $L_2^{(1)}(0,\mathrm{t})$ фазода қуйидаги тенглик билан ифодаланади

$$\left\|\ell / L_2^{(1)*}(0,\mathrm{t})\right\|^2=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left[\sum_{\beta=0}^{N}\overset{\circ}{C}\left[\beta\right](\mathrm{t}-\mathrm{h}\,\beta)^{\alpha+1}-\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\right].$$

Ва қуйидаги изоҳлар олинди.

Изоҳ 1. $h \to 0$ да $\overset{\circ}{C}\left[\beta\right]$ оптимал коэффициентлар нўлга интилади. Агар биз ушбу лимитни Лопитал қоидасини қўллаш орқали ҳисобласак, бу дарҳол келиб чиқади, чунки

$$\lim_{h\to 0}\overset{\circ}{C}\left[\beta\right] = \lim_{h\to 0}\frac{(\mathrm{t-h}(\beta+1))^{\alpha+1} - 2(\mathrm{t-h}\,\beta)^{\alpha+1} + (\mathrm{t-h}(\beta-1))^{\alpha+1}}{h\alpha(\alpha+1)}$$

$$= 2\beta t^{\alpha} - (\beta+1)t^{\alpha} - (\beta-1)t^{\alpha} = 0.$$

Изоҳ 2. Оптимал коэффициентларни бошқа шаклда ҳам ёзиш мумкин.

$\Delta^2\left[\beta\right] = \delta\left[\beta+1\right] - 2\delta\left[\beta\right] + \delta\left[\beta-1\right]$ бўлсин,

у ҳолда

$$\overset{\circ}{C}\left[\beta\right] = \frac{\mathrm{h}^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\Delta^2\left[\beta\right] * (\mathrm{t-h}\,\beta)^{\alpha+1}.$$

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида $m=2$ бўлган ҳолда (5) квадратур формуланинг коэффициентларининг аналитик кўриниши олинган хамда хатолик функционали нормасининг квадрати топилган.

Теорема 4. Қуйидаги квадратур формулалари орасида

$$\int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^{N}\left(C^{(0)}[\beta]\varphi[\beta] + C^{(1)}[\beta]\varphi^{1}[\beta]\right)$$

$L_2^{(2)}(0,t)$ фазода коэффициентлари ушбу формулалар билан аниқланадиган ягона оптимал квадратура формула мавжуд, яъни оптимал коэффициентлар қуйидагича

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[0] = \frac{1}{h[\alpha+2]!}\left[(t-h)^{\alpha+2} - t^{\alpha+2}\right] + \frac{1}{2[\alpha+1]!}\left[(t-h)^{\alpha+1} + t^{\alpha+1}\right],$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta] = \frac{1}{2[\alpha+1]!}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1} - (t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\right] +$$

$$+\frac{h^{-1}}{[\alpha+2]!}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+2} - 2(t-h\beta)^{\alpha+2} + (t-h(\beta-1))^{\alpha+2}\right],\ \beta = \overline{1, N-1}$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[N] = -\frac{h^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)(\alpha+2)},\ h = \frac{t}{N},\ N = 1, 2, ...,$$

Ушбу бобнинг учинчи параграфида эса $m=3$ бўлганда (5) квадратур формуланинг коэффициентларининг аналитик кўриниши олинган.

Теорема 5. Қуйидаги квадратур формулалари орасида

$$\int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^{N}\left(C^{(0)}[\beta]\varphi(h\beta) + C^{(1)}[\beta]\varphi^{(I)}(h\beta) + C^{(2)}[\beta]\varphi^{(II)}(h\beta)\right)$$

$L_2^{(3)}(0,t)$ фазода коэффициентлари ушбу формулалар билан аниқланадиган ягона оптимал квадратура формула мавжуд, яъни оптимал коэффициентлар қуйидаги кўринишга эга

$$\overset{\circ}{C}{}^{(2)}[0] = \frac{h}{12[\alpha+1]!}\left[(t-h)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right] + \frac{1}{2[\alpha+2]!}\left[(t-h)^{\alpha+2} + t^{\alpha+2}\right] +$$

$$+\frac{h^{-1}}{[\alpha+3]!}\Big[(t-h)^{\alpha+3}-t^{\alpha+3}\Big],$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(2)}[\beta]=\frac{h}{12[\alpha+1]!}\Big[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1}-2(t-h\beta)^{\alpha+1}+(t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\Big]+$$

$$+\frac{1}{2[\alpha+2]!}\Big[(t-h(\beta+1))^{\alpha+2}-(t-h(\beta-1))^{\alpha+2}\Big]+$$

$$+\frac{h^{-1}}{[\alpha+3]!}\Big[(t-h(\beta+1))^{\alpha+3}-2(t-h\beta)^{\alpha+3}+(t-h(\beta-1))^{\alpha+3}\Big],$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(2)}[N]=\frac{h^{\alpha+2}\alpha(\alpha-1)}{12[\alpha+3]!}.$$

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида ушбу бобда қурилган оптимал квадратур формуланинг афзалликларини кўрсатадиган сонли натижалар келтирилган ва олинган сонли натижалар чет эл олимлари олган натижалар билан солиштирилган.

ХУЛОСА

Диссертация ишида биринчи тур сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий ечишнинг оптимал алгоритми яратилган. Бу ерда Абелнинг умумлашган биринчи тур сингуляр интеграл тенгламасини тақрибий ечиш учун янги оптимал алгоритм ишлаб чиқилди.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. Абел типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ечиш учун квадратур формулаларнинг экстремал функцияси топилди.
2. Қаралаётган квадратур формуланинг хатолик функционали нормасининг квадрати ҳисобланди. Норманинг квадратини коеффициентлар бўйича минималлаштириб, ушбу квадратур формуланинг оптимал коеффициентларини топиш учун чизиқли алгебраик тенгламалар системаси олинди.
3. Олинган система ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.
4. Абел типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун мураккаб квадратур формулаларнинг оптимал коеффициентларини топишнинг янги алгоритми берилган.
5. $L_2^{(1)}(0,t)$, $L_2^{(2)}(0,t)$ ва $L_2^{(3)}(0,t)$ фазоларда оптимал квадратур формулалар қурилди.
6. $L_2^{(1)}(0,t)$ ва $L_2^{(2)}(0,t)$ фазоларда оптимал квадратур формула нормасининг квадрати ҳисобланди.
7. Сонли экспериментлар ўтказилди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ФЕРГАНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ДАЛИЕВ БАХТИЁР СИРОЖИДДИНОВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2022

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрированна в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.2.PhD/FM342.

Диссертация выполнена в Ферганском политехническом институте.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Хаётов Абдулло Рахмонович** доктор физико-математических наук, профессор
	Худойберганов Мирзоали Уразалиевич доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Бухарский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2022 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2022 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2022 года).

М.М. Арипов
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.т.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире, многие задачи аэродинамики, теории упругости и других разделов прикладных наук сводятся к решению одномерных сингулярных интегральных уравнений на отрезке или на системе отрезков. Численно-аналитические решения сингулярных интегральных уравнений, выражаясь с помощью квадратурных формул, являются объектом исследований в области численной алгебры, теории численного интегрирования, интерполяции, аппроксимации и других подобных задач. Сингулярные интегральные уравнения широко используются в различных областях математики, физики и механики. Поэтому построение оптимальных квадратурных, кубатурных и интерполяционных формул приближенного решения сингулярных интегральных уравнений для функций в пространстве Соболева, а также улучшение порядка сходимости остается одной из актуальных задач вычислительной математики.

В настоящее время в мире построение оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку квадратурных и кубатурных формул для достаточно гладких функций в пространствах Соболева приобретает все большее значение. В частности, широко используются построение оптимальных формул для численно-аналитического решения слабо сингулярных интегральных уравнений и оценка их погрешностей в пространствах Соболева. Известно, что использование формул с высокой алгебраической точности при численно-аналитическом решении слабо сингулярных уравнений типа Абеля для функций в пространстве Соболева приводит к лучшему результату. Поэтому построение оптимальных квадратурных формул с производными, сингулярной весью для приближенного решения обобщенных интегральных уравнений Абеля в пространстве Соболева является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется таким актуальным направлениям, как разработка численно-аналитических методов решения задач механики, гидродинамики, аэродинамики, электродинамики, квантовой механики и теории упругости, имеющих научные и практические приложения. В частности, значительные результаты были получены при построении оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку формул численного интегрирования в пространствах Соболева и оценка их погрешностей. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетном направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» в деятельности Института математики имени В.И.Романовского АН РУз, является одной из основных задач [2]. Для обеспечения выполнения

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

постановления важно построить квадратурные формулы, а также оценить их погрешности.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан УП –№ 4947 от 07 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-№60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», в постановлениях ПП – № 2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», ПП – № 2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», ПП –№ 3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», ПП – № 4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно–правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы.

В настоящее время важно подчеркнуть практическое значение интегралов и производных дробного порядка, т. е. обобщенного интегрального уравнения Абеля. После известной задачи Абеля о таутохроне, решение этой задачи было впервые применено Лиувилем к задачам геометрии, физики и механики. Среди них задача Лапласа о влиянии бесконечного прямолинейного проводника на магнит, задача Ампера о взаимодействии двух таких проводников, задачи, связанные с притяжением тел, задача о распределении тепла в шаре, задача Гаусса о приближенных квадратурах и др. В последние годы в качестве математических моделей, описывающих природные процессы, рассматриваются интегральные уравнения дробного порядка, интегро-дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения. Существования и единственность решения таких уравнений в разных пространствах, широко изучается. Однако в большинстве случаев сложно найти аналитическое решение этих уравнений. Поэтому важно разработать новые эффективные методы приближенного решения интегральных уравнений дробного порядка, интегро-дифференциальных и дифференциальных уравнений.

Известно, что численному решению интегрального уравнения Абеля посвящены ряд работ. В работах Li Huang, Yong Huang, Li Xian-Fang использовали разложения в ряд Тейлора неизвестной функции и получили приближенное решение для интегрального уравнения Абеля. R.Piessens предложил метод решения интегрального уравнения Абеля с использованием полиномов Чебышева. S.A.Yousefi предложил численный метод решения интегрального уравнения Абеля вейвлетами Лежандра. M.Yaghobifar, Nik N.M.A. Long, Z.K. Eshkuvatov применением ряд Тейлора для неизвестной функции интегрального уравнение Абеля построена приближенное решение. В исследованиях N.Singha и C.Nahak предлагается численное приближение для решения обобщенного интегрального уравнения Абеля с использованием ортогональных полиномов Лагерра. R.A. Mundewadi, S. Kumbinarasaiah представили численный метод, основанной на приближениях вейвлетов Эрмита решения интегрального уравнения Абеля. В работах Salman Jahanshahi, Esmail Babolian, Delfim F.M. Torres, Alireza Vahidi приводятся метод основанных на приближении дробных интегралов и дробных производных в смысле Капуто.

Следует отметить, что в работах С.Л.Соболева, В.Л.Васкевича, Х.М.Шадиметова рассматривались вопросы оптимизации решетчатых квадратурных и кубатурных формул. В работах В.В.Иванова рассматривались вопросы оптимизации вычисления сингулярных интегралов. Построение оптимальных формул приближенного вычисления регулярных и сингулярных интегралов продолжались в работах Б.Г.Габдулхаева, И.В.Бойкова, М.И.Исраилова, Х.М.Шадиметова, А.Р.Хаётова, Д.М.Ахмедова.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательской организации, в котором выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ОТ-Ф4-86 «Разработка оптимальных методов приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений в пространствах гильберта» и ЁФА-Фтех-2018-13 «Оптимальные алгоритмы приближенно – аналитического решения сингулярных уравнений» Института математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Целью исследования являются построение оптимальных квадратурных формул для приближенного решения обобщенного интегрального уравнения Абеля и вычисление норм их функционалов погрешностей на классах дифференцируемых функций.

Задачи исследования.

нахождение верхней оценки погрешности квадратурных формул приближенного решения сингулярных интегральных уравнений типа Абеля в пространстве $L_2^{(m)}(0,t)$;

разработка вычислительных алгоритмов приближенного решения сингулярных интегральных уравнений Абеля первого рода в пространстве $L_2^{(m)}(0,t)$;

реализация алгоритма для приближенного решения сингулярных интегральных уравнений типа Абеля первого рода в пространстве $L_2^{(m)}(0,t)$ и оценка погрешностей в случаях $m=1$, $m=2$ и $m=3$;

создание удобной программы для нахождения приближенных решений и оценка погрешности решений уравнений типа Абеля в пространстве $L_2^{(m)}(0,t)$.

Объект исследования. Сингулярные интегральные уравнения первого рода, обобщенное интегральное уравнения Абеля, квадратурные формулы, оценка погрешности квадратурных формул.

Предмет исследования. Экстремальные функции, обобщенные интегральные уравнения Абеля в пространстве Соболева, оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления слабо сингулярных интегралов.

Методы исследования. В исследовательской работе использованы методы вычислительной математики и функционального анализа, а также теории дифференциальных уравнений, обобщенных функций, функций дискретного аргумента.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

вычислена квадрат нормы функционала погрешности квадратурных формул для приближенного решения интегрального уравнения Абеля в пространстве Соболева;

доказана существование и единственность оптимальных квадратурных формул приближенного решения интегрального уравнения Абеля в пространстве Соболева, а также разработан численный алгоритм решения этого уравнения;

найдены оптимальные коэффициенты квадратурных формул в случаях $m=1$, $m=2$ и $m=3$ для приближенного решения интегральных уравнений первого рода типа Абеля в пространстве $L_2^{(m)}(0,t)$;

создана программа для нахождения приближенных решений и оценка погрешности решений уравнений типа Абеля в пространстве $L_2^{(m)}(0,t)$.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

построены схемы численного расчета с помощью оптимальных квадратурных формул для уравнений распространения тепла на основе тепловых циклов преобразования энергии;

построены схемы приближенного расчета решения дифференциальных и интегральных уравнений для определения конструктивно-технологических параметров трактора повышенной устойчивости.

Достоверность результатов исследования основана на применении теории квадратурных формул, вычислительной математики, функционального анализа, теории функций с дискретными аргументами и строгости математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость полученных результатов диссертационной работы заключается в том, что построены оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления общего интегрального уравнение Абеля в пространстве Соболева.

При решении многих задач физики, механики, теории упругости и других наук естественным образом сводятся к интегральным уравнениям Абеля и вычислениям сингулярных интегралов. Полученные в данной работе оптимальные квадратурные формулы применяются для численного решения этих задач.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов создан оптимальный алгоритм приближенного решения обобщенных интегральных уравнений типа Абеля в пространстве Соболева:

Из приведенных алгоритмов для решения интегральных уравнений Абеля в пространстве Соболева интегрируемых функций с квадратом производной m-порядка и построенной оптимальной квадратурной формулы использован при расчете сингулярных интегралов для решения уравнений распространения тепла в солнечных энергетических устройствах на основе тепловых циклов преобразования энергии в фундаментальном проекте ОТ-Ф-3-19 - «Развитие нового вида фундаментальных исследований солнечной энергетики устройства на основе тепловых циклов преобразования энергии» (справка Ферганского политехнического института от 17 июля 2021 г.). В результате это позволило вычислить сингулярных интегралов для решения уравнений распространения тепла на основе тепловых циклов преобразования энергии;

Построенные квадратурные формулы для приближенного решения сингулярных интегральных уравнений в пространстве $L_2^{(m)}(0,t)$, были использованы в приближенном расчете решения дифференциальных уравнений, интегральных уравнений для определения конструктивно-технологических параметров трактора с повышенной устойчивостью в фундаментальном проекте МВ-Атекс-2018-94 «Разработка конструктивно-технологические параметры универсального травяного трактора повышенной устойчивости для пустынных земель» (справка АН РУз от 16 июня 2022 года). В результате приближенное решение дифференциальных и интегральных уравнений дало определить конструктивных и технологических параметров трактора с повышенной устойчивостью.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 11 научно-практических конференциях, в том числе, на 7 международных и 4 республиканской научно-практической конференции.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 17 научные работы, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 2 опубликована в зарубежном журнале и 4 в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация содержит 99 страниц и состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации **“Методы приближенного вычисления сингулярных интегралов и интегральное уравнение Абеля”** была поставлена задача построения оптимальных квадратурных формул для решения интегрального уравнения Абеля в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(m)}$, и первая часть задачи решена полностью, то есть найдена норма функционала погрешности рассматриваемой квадратурной формулы в сопряженном пространстве Соболева $L_2^{(m)*}(0,t)$.

Первый параграф этой главы посвящен обсуждению известных результатов по приближенному вычислению сингулярных интегралов. обсуждаются некоторые важные проблемы математической физики, химии, таких как стереология, теплопроводность, излучение тепла из полу бесконечного твердого тела и рост кристаллов, которые приводятся к характеристическим сингулярным интегралам типа Абеля. Подчеркивается, что решения таких уравнений выражаются с помощью сингулярных интегралов типа Абеля.

В параграфе 1.2 подробно описывается задача и решение интегрального уравнения Абеля. Абель первым столкнулся с интегральным уравнением. Он пришел к интегральному уравнению при рассмотрении одной механической задачи, и в случае Абеля уравнение было решено в квадратурах. Эта задача Абеля интересна тем, что не может быть выражена с помощью дифференциального уравнения, как другие задачи механики, и исторически представляет собой первую задачу, которая привела к необходимости рассмотрения интегральных уравнений. Уравнение Абеля имеет вид

$$f(x)=\int_0^x \frac{\varphi(s)ds}{\sqrt{x-s}}.$$

Решение уравнения Абеля выражается формулой

$$\varphi(s)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\sqrt{s}}+\int_0^s \frac{f'(z)dz}{\sqrt{s-z}}\right].$$

Здесь $f(x)$ известная функция, а $\varphi(s)$ неизвестная функция.

Уравнения вида

$$f(x)=\int_0^x \frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1$$

называют обобщенным уравнением Абеля и решение обобщенного уравнения Абеля в виде:

$$\varphi(s)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{s^{1-\alpha}}+\int_0^s\frac{f'(z)dz}{(s-z)^{1-\alpha}}\right].$$

Наша цель является вычисление следующего интеграла с большой точностью

$$\int_0^s\frac{f'(z)dz}{(s-z)^{1-\alpha}}.$$

В третьем параграфе первой главы подробно описывается функциональная постановка задачи оптимизации весовых оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку квадратурных формул в пространстве Соболева.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^t\frac{\varphi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{t-x})^{1-\alpha}}\cong\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\varphi(\mathrm{h}\beta) \tag{1}$$

и соответственно ее функционал погрешности

$$\ell(\mathrm{x})=\varepsilon_{[0,t]}(\mathrm{x})(\mathrm{t-x})^{\alpha-1}-\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\delta(\mathrm{x}-\mathrm{h}\beta) \tag{2}$$

в пространстве Соболева $\mathrm{L}_2^{(\mathrm{m})}(0,\mathrm{t})$. Здесь $\varphi(\mathrm{x})\in\mathrm{L}_2^{(\mathrm{m})}(0,\mathrm{t})$, $\mathrm{t}>0$ произвольное конечное число, $h=\dfrac{t}{N}$, $N\geq m$ натуральное число, $\delta(\mathrm{x})$ –дельта функция Дирака, $\varepsilon_{[0,t]}(\mathrm{x})$ –характеристическая функция отрезка $[0,t]$, $C[\beta]$ – коэффициенты квадратурных формул и $C[\beta]=0$, при $h\beta\notin[0,t]$, $0<\alpha<1$.
Пространство Соболева $\mathrm{L}_2^{(\mathrm{m})}(0,\mathrm{t})$ - гильбертово пространство классов вещественных функций $\varphi(\mathrm{x})$, отличающихся друг от друга на полином степени $m-1$, квадратично интегрируемыми с производными (в смысле обобщенных функций) порядка m в интервале $(0,\mathrm{t})$ и скалярным произведением

$$\langle\varphi,\mathrm{g}\rangle=\int_0^t\left(\frac{d^m\varphi(\mathrm{x})}{dx^m}\right)\left(\frac{d^m g(\mathrm{x})}{dx^m}\right)dx\ .$$

Целью настоящей работы является минимизация нормы функционала погрешности (2) в пространстве $\mathrm{L}_2^{(\mathrm{m})}(0,\mathrm{t})$ по коэффициентам $C[\beta]$ и получение систему линейных алгебраических уравнений и доказать существования и единственность решение полученной системы. Вычислен квадрат нормы функционала погрешности квадратурных формул (1)

$$\left\|\ell/L_2^{(\mathrm{m})*}\right\|^2=(-1)^m\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\beta'=0}^{N}C[\beta]C[\beta']G_m(\mathrm{h}\beta-\mathrm{h}\beta')\right.$$

$$-2\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\int_0^t(\mathrm{t-x})^{\alpha-1}G_m(\mathrm{x}-\mathrm{h}\beta)\,\mathrm{dx}$$

$$+\int_0^t\int_0^t (\mathrm{t-x})^{\alpha-1}(\mathrm{t-y})^{\alpha-1}G_m(\mathrm{x-y})\mathrm{dxdy}\Big] \ . \qquad (3)$$

Здесь $G_m[\beta]=\dfrac{|h\beta|^{2m-1}}{2*(2m-1)!}$, $G_m[x]=\dfrac{|x|^{2m-1}}{2*(2m-1)!}$.

А в параграфе 1.4 доказывается следующая теорема об экстремальной функций весовой квадратурной формулы в пространстве $L_2^{(m)}(0,t)$.

Теорема 1. Экстремальная функция весовой квадратурной формулы (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,t)$ определяется равенством

$$U_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x).$$

Здесь ℓ -функционал погрешности (2), $G_m(x)$ -фундаментальное решение дифференциального оператора $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$, $\quad G_m(x)=\dfrac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!}$,

$P_{m-1}(x)-$некоторый полином степени $m-1$.

Во второй главе диссертации, названной **“Оптимальные формулы для приближенно -аналитического решения общего интегрального уравнения Абеля в функциональном пространстве Соболева”**, решена задача построения оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Абеля в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,t)$.

В первом параграфе второй главы получена система линейных уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурной формулы (1).

Переходим к минимизации нормы (3) с условием ортогональности

$$(\ell,\mathrm{x}^k)=0,\quad \mathrm{k}=0,1,...,\mathrm{m}-1, \qquad (4)$$

$$(\ell,\mathrm{x}^k)=\int_0^t(\mathrm{t-x})^{\alpha-1}x^k dx-\sum_{\beta=0}^N C[\beta](\mathrm{h}\beta)^k,$$

или

$$\sum_{\beta=0}^N C[\beta](\mathrm{h}\beta)^k=\int_0^t(\mathrm{t-x})^{\alpha-1}x^k dx,\qquad k=0,1,...,m-1 \ .$$

Для этой цели применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Составим вспомогательную функцию

$$\Phi(\mathrm{C},\lambda)=\left\|\ell\,/\,L_2^{(\mathrm{m})*}\right\|^2+2\cdot(-1)^{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k(\ell,\mathrm{x}^k)\ .$$

Приравнивая к нулю вариацию по $C[\beta]$ и λ_k от функции $\Phi(\mathrm{C},\lambda)$, получим

$$\sum_{\beta=0}^N C[\beta]G_m(\mathrm{h}\beta-\mathrm{h}\gamma)+\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k[\gamma]^k=f_m[\gamma],\ \text{при}\ [\gamma]=(\mathrm{h}\gamma)\in[0,t],$$

$$\sum_{\beta=0}^N C[\beta][\beta]^k=g_k,\qquad k=0,1,...,m-1,$$

где

$$f_m\left[\beta\right]=\int_0^t(\mathrm{t-x})^{\alpha-1}G_m(\mathrm{x-h}\,\beta)\,\mathrm{dx},$$

$$g_k=\int_0^t(\mathrm{t-x})^{\alpha-1}\,\mathrm{x}^k\mathrm{dx}.$$

Квадрат нормы (3) функционала погрешности (2) является многопеременной квадратной функцией коэффициентов $C[\beta]$, $\beta=0,1,...,N$ формулы (1). Чтобы найти условный минимум по коэффициентам $C[\beta]$ выражения (3) при условиях (4), применяем метод неопределенных множителей Лагранжа. В результате получена система линейных уравнений относительно коэффициентов $C[\beta]$, $\beta=0,1,...,N$.

Во втором параграфе этой главы доказаны существование и единственность решения этой системы, а также показано, что решение этой системы дает минимум выражению (3). Квадратурная формула с коэффициентами $\overset{\circ}{C}\left[\beta\right]$ $(\beta=0,1,...,\mathrm{N})$ соответствующая этому минимуму называется оптимальной, а $\overset{\circ}{C}\left[\beta\right]$ - называются оптимальными коэффициентами квадратурных формул.

А в параграфе 2.3, используя вышеприведенный алгоритм, нами получены Составные квадратурные формулы для вычисления сингулярных интегралов типа Абеля

$$\int_0^t\frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}}\cong\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho}C^{(\nu)}\left[\beta\right]\varphi^{(\nu)}\left[\beta\right]. \tag{5}$$

Здесь $C^{(\nu)}\left[\beta\right]$ коэффициенты квадратурной формулы, $\left[\beta\right]=h\beta$ узлы формулы. Квадратурной формуле (5) сопоставим функционал погрешности

$$(l,\varphi)=\int\left[\frac{\varepsilon_{[0,t]}(x)}{(t-x)^{1-\alpha}}-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho}(-1)^{\nu}\,\delta(x-h\beta)\right]\varphi(x)dx.$$

Далее в параграфе 2.4 получена представление квадрата нормы функционала погрешности составной квадратурной формулы в пространстве $L_2^{(m)^*}$

$$\left\|l\,|\,L_2^{(m)*}\right\|=(-1)^m\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\beta'=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho}\sum_{\nu'=0}^{\rho}C^{(\nu)}[\beta]C^{(\nu')}[\beta']\cdot(-1)^{\nu'}G_m^{(\nu+\nu')}[\beta-\beta']-\right.$$

$$\left.-2\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho}(-1)^{\nu}C^{(\nu)}[\beta]\,f_m^{(\nu)}[\beta]+K_m\right].$$

Здесь

$$f_m^{(\nu)}[\beta]=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2m-1-\nu}(-1)^{\nu+j}\,\frac{(h\beta)^{2m-\nu-j-1}}{(2m-\nu-j-1)![\alpha+j]!}+\frac{(t-h\beta)^{2m-\nu+\alpha+1}}{[\alpha+2m-\nu-1]!},$$

$$K_m = \frac{t^{2m-1+2\alpha}}{[\alpha+2m-1]!(2m-1+2\alpha)},$$
$$[\alpha+2m-1]! = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+2m-1),$$
$$[\alpha+2m-\nu-1]! = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+2m-\nu-1),$$
$$[\alpha+j]! = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+j).$$

А в параграфе 2.5 получен алгоритм нахождение оптимальных коэффициентов составных квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярного интеграла типа Абеля.

Коэффициенты $\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[\beta]$, $\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[0]$ и $\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[N]$ определяются в виде

$$\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[\beta] = h^{-1}\left(F_k[\beta-1] - 2F_k[\beta] + F_k[\beta+1]\right),$$
$$\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[0] = \frac{P_k}{2} + h^{-1}\left[F_k[1] - F_k[0]\right],$$
$$\overset{\circ}{C}{}^{(k)}[N] = \frac{P_k}{2} - h^{-1}\left[F_k[N] - F_k[N-1]\right].$$

В третьей главе диссертации, названной **“Оптимальные коэффициенты составных квадратурных формул”** реализован алгоритм в пространстве $L_2^{(m)}(0,t)$ в случаях $m=1$, $m=2$ и $m=3$.

В первом параграфе этой главы при $m=1$ получено аналитическое представление коэффициентов квадратурной формулы (5) и найден квадрат нормы функционала погрешности.

Теорема 2. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (12) при $\rho = 0$ в пространстве $L_2^{(1)}(0,t)$ определяются формулами

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[0] = \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\left((t-h)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right),$$
$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[\beta] = \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1} - 2(t-h\beta)^{\alpha+1} + (t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\right],$$

при $\beta = 1,2,...,N-1$.

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[N] = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}.$$

Теорема 3. Квадрат нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул вида (1) над пространством $L_2^{(1)}(0,\mathrm{t})$ выражается равенством

$$\left\|\ell / L_2^{(1)*}(0,\mathrm{t})\right\|^2 = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left[\sum_{\beta=0}^{N}\overset{\circ}{C}\left[\beta\right](\mathrm{t}-\mathrm{h}\,\beta)^{\alpha+1} - \frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\right].$$

И получены следующие замечания.

Замечание 1. Оптимальные коэффициенты $\overset{\circ}{C}[\beta]$ при $h\to 0$ стремится к нулю. Этот факт сразу следует, если вычислим этот предел применяя правилу Лопиталя, так как

$$\lim_{h\to 0}\overset{\circ}{C}[\beta]=\lim_{h\to 0}\frac{(\mathrm{t}-\mathrm{h}(\beta+1))^{\alpha+1}-2(\mathrm{t}-\mathrm{h}\,\beta)^{\alpha+1}+(\mathrm{t}-\mathrm{h}(\beta-1))^{\alpha+1}}{h\alpha(\alpha+1)}=$$

$$=2\beta t^{\alpha}-(\beta+1)t^{\alpha}-(\beta-1)t^{\alpha}=0.$$

Замечание 2. Оптимальные коэффициенты $\overset{\circ}{C}[\beta]$ ещё можно записать в другой форме. Пусть

$$\Delta^2[\beta]=\delta[\beta+1]-2\delta[\beta]+\delta[\beta-1],$$

тогда

$$\overset{\circ}{C}[\beta]=\frac{\mathrm{h}^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\Delta^2[\beta]*(\mathrm{t}-\mathrm{h}\,\beta)^{\alpha+1}.$$

Во втором параграфе третьей главы при $m=2$ получено аналитическое представление коэффициентов квадратурной формулы (5), а также найден квадрат нормы функционала погрешности.

Теорема 4. Среди квадратурных формул вида

$$\int_0^t\frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}}\cong\sum_{\beta=0}^{N}\left(C^{(0)}[\beta]\varphi[\beta]+C^{(1)}[\beta]\varphi^1[\beta]\right)$$

в пространстве $L_2^{(2)}(0,t)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула коэффициенты которой определяются формулами, т.е. оптимальные коэффициенты имеют вид

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[0]=\frac{1}{h[\alpha+2]!}\Big[(t-h)^{\alpha+2}-t^{\alpha+2}\Big]+\frac{1}{2[\alpha+1]!}\Big[(t-h)^{\alpha+1}+t^{\alpha+1}\Big],$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta]=\frac{1}{2[\alpha+1]!}\Big[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1}-(t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\Big]+$$

$$+\frac{h^{-1}}{[\alpha+2]!}\Big[(t-h(\beta+1))^{\alpha+2}-2(t-h\beta)^{\alpha+2}+(t-h(\beta-1))^{\alpha+2}\Big],\ \beta=\overline{1,N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[N]=-\frac{h^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)(\alpha+2)},\ h=\frac{t}{N},\ N=1,2,...,$$

В третьем параграфе этой главы при $m=3$ получено аналитическое представление коэффициентов квадратурной формулы (5).

Теорема 5. Среди квадратурных формул вида

$$\int_0^t\frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}}\cong\sum_{\beta=0}^{N}\left(C^{(0)}[\beta]\varphi(h\beta)+C^{(1)}[\beta]\varphi^{(I)}(h\beta)+C^{(2)}[\beta]\varphi^{(II)}(h\beta)\right)$$

в пространстве $L_2^{(3)}(0,t)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула коэффициенты которой определяются формулами, т.е. оптимальные коэффициенты имеют вид

$$\overset{\circ}{C}{}^{(2)}[0]=\frac{h}{12[\alpha+1]!}\Big[(t-h)^{\alpha+1}-t^{\alpha+1}\Big]+\frac{1}{2[\alpha+2]!}\Big[(t-h)^{\alpha+2}+t^{\alpha+2}\Big]+$$
$$+\frac{h^{-1}}{[\alpha+3]!}\Big[(t-h)^{\alpha+3}-t^{\alpha+3}\Big].$$
$$\overset{\circ}{C}{}^{(2)}[\beta]=\frac{h}{12[\alpha+1]!}\Big[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1}-2(t-h\beta)^{\alpha+1}+(t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\Big]+$$
$$+\frac{1}{2[\alpha+2]!}\Big[(t-h(\beta+1))^{\alpha+2}-(t-h(\beta-1))^{\alpha+2}\Big]+$$
$$+\frac{h^{-1}}{[\alpha+3]!}\Big[(t-h(\beta+1))^{\alpha+3}-2(t-h\beta)^{\alpha+3}+(t-h(\beta-1))^{\alpha+3}\Big].$$
$$\overset{\circ}{C}{}^{(2)}[N]=\frac{h^{\alpha+2}\alpha(\alpha-1)}{12[\alpha+3]!}.$$

В четвёртом параграфе третьей главы приведены численные результаты, показывающие преимущество оптимальных квадратурных формул, построенных в этой главе и полученные численные результаты, сравнивались с результатами, полученными зарубежными учеными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе создан оптимальный алгоритм для приближенного решения интегральных уравнений первого рода. Здесь для приближенного решения обобщенного интегрального уравнение Абеля, которое является интегральным уравнением первого рода разработан новый оптимальный алгоритм.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Найдена экстремальная функция квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Абеля.
2. Вычислена квадрат нормы функционала погрешности рассматриваемых квадратурных формул. Минимизируя этого квадрата нормы по коэффициентам получена система линейных алгебраических уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов рассматриваемой квадратурной формулы.
3. Доказано существование и единственность решений этой системы.
4. Даётся новый алгоритм нахождения оптимальных коэффициентов составных квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Абеля.
5. Построены оптимальные квадратурные формулы в пространствах $L_2^{(1)}(0,t)$, $L_2^{(2)}(0,t)$ и $L_2^{(3)}(0,t)$.
6. Вычислена квадрат нормы оптимальных квадратурных формул в пространствах $L_2^{(1)}(0,t)$ и $L_2^{(2)}(0,t)$.
7. Проведены численные эксперименты.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

FERGANA POLYTECHNIC INSTITUTE

DALIEV BAKHTIYOR SIROJIDDINOVICH

OPTIMAL ALGORITHMS FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF A SINGULAR INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2019.2.PhD/FM342.

Dissertation has been prepared at Fergana polytechnic institute

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific superviser:	**Shadimetov Kholmat Makhkambaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Hayotov Abdullo Rakhmonovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Khudoyberganov Mirzoali Urazalievich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Bukhara State University**

Defense will take place «____» _____________2022 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc/03/30/12/2019/FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2022 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2022 year)

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.T.S., Professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S.

R.D. Aloev
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The aim of the study is to construct optimal quadrature formulas for an approximate solution of the generalized Abel integral equation and to calculate the norms of their error functionals on classes of differentiable functions.

The object of the research is singular integral equations of the first kind, Abel generalized integral equations, quadrature formulas, error estimation of quadrature formulas.

The scientific novelty of the research work is as follows:

the norm of the error functional of quadrature formulas for the approximate solution of the Abel integral equation in the Sobolev space is calculated;

the existence and uniqueness of optimal quadrature formulas for the approximate solution of the Abel integral equation in Sobolev space are proved, a numerical algorithm for solving this equation is developed;

the optimal coefficients of quadrature formulas in the cases $m=1$, $m=2$ and $m=3$ are found for the approximate solution of integral equations of the first kind of the Abel type in the $L_2^{(m)}(0,t)$ space;

a program for finding approximate solutions of Abel-type equations in the $L_2^{(m)}(0,t)$ space and estimating the error of solutions has been created.

Implementation of the research results. Based on the obtained scientific results, an optimal algorithm for the approximate solution of generalized integral equations of Abelian type in the Sobolev space was created:

the above algorithms for solving the Abel integral equations in the Sobolev space of integrable functions with the square of the m-th derivative and the constructed optimal quadrature formula used in the calculation of singular integrals for solving the equations of heat propagation in solar energy devices based on thermal cycles of energy conversion in the fundamental project OT-F-3-19 - "Development of a new type of fundamental research of solar energy devices based on thermal energy conversion cycles" (certificate of the Fergana Polytechnic Institute dated July 17, 2021). As a result, it was possible to calculate singular integrals for solving heat propagation equations based on thermal energy conversion cycles;

the quadrature formulas constructed for the approximate solution of singular integral equations in $L_2^{(m)}\left(0,t\right)$ space, the solutions of differential equations, integral equations were used in an approximate calculation to determine the structural and technological parameters of a tractor with increased stability in the fundamental project MV-Ateks-2018-94 "Development of structural and technological parameters universal grass tractor of increased stability for desert lands" (certificate of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated June 16, 2022). As a result, the approximate solution of differential and integral equations made it possible to determine the design and technological parameters of a tractor with increased stability.

The structure and volume of the thesis. The dissertation contains 99 pages and consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I бўлим (Часть I; Part I)

1. Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Экстремальная функция квадратурных формул для приближённого решения обобщённого интегрального уравнения Абеля // Проблемы вычислительной и прикладной математики. –Ташкент, 2019. - № 2. -С. 88-96.
2. Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул для приближенного решения общего интегрального уравнения Абеля // Проблемы вычислительной и прикладной математики. –Ташкент, 2020. - № 2. -С. 24-31.
3. Shadimetov Kh.M., Daliyev B.S. Optimal quadrature formulas for approximate solution of the Abel integral equation // Uzbek mathematical journal, **№**2, 2020. -pp.157-163.
4. Shadimetov Kh.M., Daliyev B.S. Composite optimal formulas for approximate integration of weight integrals // AIP Conference Proceeding, 2365, 020025-1-18 (2021), 16 July. **(Scopus, IF:=0.4)**.
5. Далиев Б.С. Оптимальный алгоритм решения линейных обобщенных интегральных уравнений Абеля // Проблемы вычислительной и прикладной математики. –Ташкент, 2021. - № 5. -С. 120-129.
6. Shadimetov Kh.M., Daliyev B.S. Optimal formulas for the approximate-analytical solution of the general Abel integral equation in the Sobolev space // Results in Applied Mathematics,100276 15-1-20(2022),1 May.Elsevier **(Scopus, Q2, IF: =0.59)**

II бўлим (Часть II; Part II)

7. Shadimetov Kh.M., Daliyev B.S. Approximate analytical solution of the integral Abel’s equations. // International scientific conference on September 13–15, 2018 in Tashkent city of National University of Uzbekistan “Modern problems of the applied mathematics and information technology- Al-Khorezmiy 2018”, pp 142-143.
8. Далиев Б.С. Система нахождения оптималных коэффициентов квадратурных формул для решения интегрального уравнения Абеля // Международная конференция. “Обратные и некорректные задачи” Самарканд, Узбекистан, 2-4 октября 2019. -С.72-73.
9. Далиев Б.С. Оптимальные коэффициенты квадратурных формул для приближенного решения интегрального уравнения Абеля // Узбекско-Российская научная конференция. “Неклассические уравнения математической физики и их приложения” 24-26 октября 2019. Ташкент, Узбекистан. -С. 271.
10. Далиев Б.С.Метод оптимальных квадратурных формул для приближенного решения интегрального уравнения Абеля // Международная научная конференция. “Современные проблемы

дифференциальных уравнений и смежных разделов математики”. Фергана, Узбекистан, 12-13 марта 2020. -С.202-204.

11. Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Существования и единственность оптимальных квадратурных формул для решения обобщенного интегрального уравнения Абеля // Республиканская научная онлайн конференция молодых ученных «Современные проблемы математики и прикладной математики» посвященной 100 летию академика С.Х.Сираждинова. Ташкент, 21 мая 2020 . -С.123-128.
12. Далиев Б.С. Система уравнений для коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(2)}(0,t)$ для приближенного решения общего интегрального уравнения Абеля // Узбекско-Малайзийская международная онлайн конференция «Вычислительные модели и технологии (вмт2020)» Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, 24-25 августа 2020.-С.48-49.
13. Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Квадрат нормы функционала погрешности составных квадратурных формул // Республиканская научная онлайн конференция «Современные проблемы математики: проблемы и решения» Термиз, Узбекистан, 21-23 октября 2020. -С. 338-339.
14. Далиев Б.С. Оптимальная квадратурная формула для приближенного решения интегрального уравнения Абеля // Научная конференция «Актуальные проблемы стохастического анализа», посвященной 80 летию академика Ш.К.Форманова. Ташкент, 20-21 февраля 2021. -С. 517-519.
15. Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Об одном оптимально-приближенно аналитического метода решения интегрального уравнения Абеля // Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий» Бухара, Узбекистан, 15 апреля 2021. -С. 48-49.
16. Далиев Б.С. Numerikal experiments of an approximate analytical method for solving the Abel integral equations // Of the VII international scientific conference on November 15–17, 2021 in Ferghana city of Ferghana State University of Uzbekistan “Modern problems of applied mathematics and information technologies-Al-Khwarizmi 2021”. pp. 263-264.
17. Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Об одном новом оптимальном алгоритме для приближенного вычисления общего сингулярного интеграла Абеля //Международная научно-практическая конференция "Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий" Бухара, Узбекистан,11-12 мая 2022.-С.378-379.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Бичими 60x84 1/16. Ризограф босма усули. Times гарнитураси.

Шартли босма табоғи: 2,75. Адади 100. Буюртма № 23.
Баҳоси келишилган ҳолда.

«ЎзР Фанлар Академияси Асосий кутубхонаси» босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100170, Тошкент ш., Зиёлилар кўчаси, 13-уй.