В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АЛИЕВ АБДУРАҲМОН ФАРҲОД ЎҒЛИ

АЙЛАНАНИНГ МАХСУСЛИККА ЭГА БЎЛГАН АКСЛАНТИРИШЛАРИ ЁРДАМИДА ҲОСИЛ ҚИЛИНГАН ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР УЧУН ЛИМИТИК ТЕОРЕМАЛАР

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент–2022

УДК: 519.21

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Алиев Абдураҳмон Фарҳод ўғли
Айлананинг махсусликка эга бўлган акслантиришлари ёрдамида ҳосил қилинган тасодифий миқдорлар учун лимитик теоремалар …… 3

Aliyev Abdurakhmon Farkhod ugli
Limit theorems for random variables associated by circle maps with singularities …… 19

Алиев Абдурахмон Фарход угли
Предельные теоремы для случайных величин ассоциированных отображениями окружности с особенностями …… 33

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works …… 36

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АЛИЕВ АБДУРАҲМОН ФАРҲОД ЎҒЛИ

АЙЛАНАНИНГ МАХСУСЛИККА ЭГА БЎЛГАН АКСЛАНТИРИШЛАРИ ЁРДАМИДА ҲОСИЛ ҚИЛИНГАН ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР УЧУН ЛИМИТИК ТЕОРЕМАЛАР

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент–2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.3.PhD/FM743 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш вебсаҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва "ZiyoNet" таълим ахборот тармоғида (http:www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Джалилов Ахтам Абдурахмонович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Шарипов Олимжон Шукурович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Сафаров Ўткир Аваёрович физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Тошкент давлат транспорт университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил " 6 " декабр соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (149-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2022 йил " 16 " ноябр куни тарқатилди.
(2022 йил " 16 " ноябрдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

А.Азамов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раис ўринбосари,
ф.-м.ф.д., академик

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

Я.М.Хусанбоев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раис ўринбосари,
ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Дунё миқёсида олиб борилаетган кўплаб илмий ва амалий тадқиқотлар замонавий динамик системалар масалаларига хусусан айлана динамикасини ўранишга келтирилади. Замонавий айлана динамикасида махсусликка эга бўлган айлана акслантиришларини, уларнинг инвариант эҳтимоллик ўлчовларининг сонли характеристикаларини ва орбиталарининг тасодифий силжишларини тадқиқ қилиш долзарб масала ҳисобланади. Дастлаб XIX асрнинг охирида осмон механикаси муаммоларини тадқиқ этиш жараёнида йўналишни сақловчи айлана гомеоморфизмларини ўрганиш бошланган. Ночизиқли жараёнларнинг кўплаб масалалари, ахборотлар назариясида учрайдиган тасодифий шовқинлар, юрак касалликларида ритм ўзгариши муаммолари ва бошқа табиий фанларнинг муаммолари айлана гомеоморфизмлари билан яқиндан боғлиқ.

Жаҳонда динамик системалар назариясининг муҳим масалаларидан бўлган айлана диффеоморфизмларини, бўлакли-силлиқ айлана акслантиришларини тадқиқ қилиш ва ночизиқли жараёнларни моделлаштириш бўйича чуқур илмий изланишлар олиб борилмоқда. Бундай жараёнлар хаотик ва стуруктураси жиҳатдан мураккаб жараён бўлгани учун, бу масалаларни ечишда эҳтимоллар назарияси методларидан фойдаланишга алоҳида эътибор берилмоқда. Бунда, олиб борилаётган тадқиқотлар динамик системаларнинг ўлчам характеристикаларини топиш ва тасодифий силжишлар учун лимит теоремалар исботлашнинг алоҳида аҳамият касб этишини кўрсатиб бермоқда. Бу борада: айлана акслантиришларнинг эҳтимоллик инвариант ўлчовларини сонли характеристикаларини тадқиқ этиш ва айлана динамикаси ёрдамида кичик тасодифий хатоликларни баҳолаш каби масалалар мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳиобланади.

Мамлакатимизда математиканинг фундаментал ва амалий тадбиқига эга бўлган эҳтимоллар назарияси ва динамик системаларга эътибор кучайтирилди. Жумладан, сўнги йилларда динамик системалар замонавий математиканинг муҳим ташкил этувчиси сифатида, назарий ва амалий масалаларни ечишда салмоқли натижаларга эришилди. Шунингдек, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият этиб белгиланди[1]. Бу борада айлана акслантиришларини тадқиқ этиш назарий ва амалий жиҳатдан алоҳида аҳамиятга эгадир.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Харакатлар стратегияси тўғрисида” ги ПФ-4947 Фармони, 2019 йил 9 июлдаги “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори.

томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4387-сонли ва 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708 сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устивор йўналиши айланасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Ўлчовларнинг ўлчам характеристикалари билан боғлиқ масалалар ўлчовлар назарияси, эҳтимоллар назарияси, динамик системалар каби математиканинг кўплаб соҳалари учун муҳим аҳамиятга эга. Ўлчам характеристикалари ичида Хаусдорфф ўлчамини ўрганишга олимлар томонидан катта қизиқиш билдирилмода. Айлананинг йўналишни сақловчи гомеоморфизмлари учун эҳтимоллик инвариант ўлчовининг регуларлик масаласи яни абсолют узлуксизлик ёки сингуларлик масаласи динамик системалар назариясида муҳим аҳамиятга эга. Ушбу масала билан чамбарчас боғлиқ бўлган, ўлчам характеристикалари масаласидир. Айлананинг аналитик диффеоморфизмлари учун биринчи натижалар В.И. Арнольднинг фундаменталь ишларида олинган. Диффеоморфизмларнинг силлиқлиги бўйича кейинги фундаментал натижалар М. Эрман, Ю. Мозер, Ж. Йоккоз, Х. Катцнельсон, Д. Орнстейн, Я. Г. Синай, К.М. Ханин ва бошқаларнинг ишларида олинган. Бугунги кунга келиб диффеоморфизмлар учун инвариант ўлчовнинг абсолют узлуксизлиги масаласи яхши ўрганилган. Сўнгги энг мухим натижалар Ҳ. Кацнелсон ва Д. Орнстейн, Я. Г. Синай ва К. М. Ханин ишларида исботланган. Айлананинг $C^{2+\alpha}-$ диффеоморфизмларининг буриш сони типик иррационал сон бўлганда, инвариант ўлчовни айланадаги Лебег ўлчовига нисбатан абсолют узлуксиз эканлиги исботланган. Бундан эса шу инвариант ўлчовнинг Хаусдорф ўлчами 1 га тенг экани келиб чиқади. В.Садовская томонидан ихтиёрий $\beta \in [0,1]$ сони ва Лювил типидаги ихтиёрий иррационал $\rho \in (0,1)$ учун, силлиқлиги C^{∞}, буриш сони ρ га тенг бўлган ва инвариант ўлчовининг Хаусдорфф ўлчами β га тенг бўладиган айлана гомеоморфизмлари қурилган. Синишларга эга бўлган, бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмлари диффеоморфизмларнинг табиий умумлашмасидир. Айлананинг бўлакли-чизиқли гомеоморфизмлари М. Эрман, И. Лиоус, И. Коело ва А. Лопес ишларида ўрганилган. Бўлакли-силлиқ гомеоморфизмларнинг инвариант ўлчовлари А. Джалилов, К. Ханин, Д. Майер, И. Лиоусс, Д. Майер, У. Сафаров, А. Теплинский ва бошқаларнинг ишларида ўрганилган. К.Ханин ва С. Кошичлар томонидан деярли барча иррационал буриш сонлари учун силлиқлиги $C^{2+\alpha}$ бўлган, битта синиш

нуқтага эга айлана гомеоморфизмларининг инвариант ўлчовларининг Хаусдорфф ўлчами 0 га тенг экани исботланган.

Шу соҳадаги яна бир муҳим масалалардан бири тасодифий силжишли бир ўлчовли динамика масаласидир. Дастлабки натижалар Ж.Кручфелд, Б.Шаирман ва бошқалар томонидан Феигенбаум акслантиришлари учун қўшилаётган силжиш тасодифий миқдорлари боғлиқсиз ва стандарт нормал тақсимот билан тақсиманган ҳолатда олинган. Е.Вул, Я.Синай, К.Ханинлар Феигенбаум акслантиришлари учун кичик силжишли жараённинг стационар ўлчови ва Феигенбаум аттрактори орасидаги муносабатларни биринчи маротаба термодинамик формализмни қўллаш орқали ўрганишган. О.Эспиноса ва Р.Лавелар ренормализация усулларидан фойдаланиб тасодифий силжишли бир ўловли силлиқ акслантиришлар учун марказий лимит теоремалар исботлашган.

Шуни таъкидлаш лозимки, юқорида санаб ўтилган кўплаб муҳим натижаларга қарамасдан бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмлари учун тасодифий силжиш жараёнлар учун лимит теоремаларни, ҳамда синиш нуқталари сони биттадан кўп бўлганда инвариант эҳтимоллик ўлчовининг ўлчам характеристикаларини тадқиқ қилиш масалалари охиригача ҳал қилинмаган. Шу нуқтаи назардан, бу соҳадаги тадқиқотлар долзарбдир.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация мавзуси В.И.Романовский номидаги математика институти илмий Кенгашида тасдиқланган ва математика институтининг “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” кафедрасининг режалаштирилган мавзусига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади синиш типидаги махсусликка эга бўлган айлана гомеоморфизмларининг эҳтимоллик инвариант ўлчовларининг Хаусдорфф ўлчамларини ҳисоблаш ва айланадаги асимптотик тасодифий силжишларини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

иккита синишга эга айлана гомеоморфизмининг эҳтимоллик инвариант ўлчовларининг Хаусдорф ўлчамларини ҳисоблаш;

айлана гомеоморфизми ёрдамида қурилган символик фазода аниқланган трансфер операторларининг бош хос қийматлари ва шу айлана гомеоморфизмининг Ляпунов функциялари орасида боғлиқлик муносабатларини аниқлаш;

битта синишга эга айлана гомеоморфизми учун айлананинг ихтиёрий нуқтасининг боғлиқсиз тасодифий силишли траекторияси учун лимит теоремалар исботлаш;

силжиш миқдорлари боғлиқ бўлган тасодифий силжишли айлана гомеоморфизмлари учун марказий лимит теоремалар исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти. Бўлакли-силлиқ, синиш нуқталарига эга бўлган гомеоморфизмлар, эҳтимоллик инвариант ўлчовлар, Хаусдорф ўлчами ва марказий лимит теоремалар.

Тадқиқотнинг предмети. Эҳтимоллар назарияси, динамик системалар, айлана гомеоморфизмлари назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишда эҳтимоллар назарияси, эргодик назария, динамик системалар назарияси ва математик анализ усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

иккита синиш нуқталарига эга айлана гомеоморфизмининг сингуляр инвариант эҳтимоллик ўлчовларининг Хаусдорфф ўлчамлари ҳисобланган;

айлана гомеоморфизми трансфер операторларининг бош хос қийматлари ва шу айлана гомеоморфизмининг Ляпунов функциялари орасида тенгсизликлари ҳамда трансфер операторларининг бош хос қийматлари фукциясининг монотонликлиги исботланган;

битта синишга эга айлана гомеоморфизмида айлананинг ихтиёрий нуқтасининг боғлиқсиз тасодифий силишли траекторияси учун марказий лимит теорема исботланган;

силжиш миқдорлари боғлиқ бўлган тасодифий силжишли айлана гомеоморфизмлари учун марказий лимит теорема исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

айлананинг синиш типидаги махсусликка эга бўлган акслантиришларининг инвариант эҳтимоллик ўлчовларининг Хаусдорфф ўлчамлари бўйича олинган натижалар сингулар эҳтимоллик ўлчовларининг характеристикаларини тушунишга ёрдам беради ва динамик системалар, эҳтимоллар назарияси ва уларнинг тадбиқларида фойдаланилади;

тасодифий силжишли айлана гомеоморфизмлари учун исботланган марказий лимит теоремалар айлана динамикаси билан боғлиқ бўлган амалий масалаларнинг ечими хатоликларини баҳолашда ва эҳтимоллар назарияси, динамик системалар ва уларнинг тадбиқларида фойдаланилади;

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик фикрлаш ва исботларнинг қатъийлиги, эҳтимоллар назарияси, динамик системалар ва математик анализнинг маълум усулларидан фойдаланиш билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалар бир ўлчовли акслантиришларнинг инвариант ўлчовининг ўлчам характеристикаларини топишда ва тасодифий силжишли синиш типидаги махсусликка эга бўлган айлананинг гомеоморфизмлари учун лимит теоремаларни тадқиқ қилишда фойдаланилади.

Амалий аҳамияти шундаки, диссертация натижаларидан айлана акслантиришларини моделлаштиришда, тасодифий силжишли айлана акслантиришлари учун гепотезаларни текширишда ва дастурлаш ёрдамида инвариант ўлчовнинг сонли кўрсаткичларини ҳисоблашда фойдаланилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Айлананинг махсусликка эга бўлган акслантиришлари ёрдамида ҳосил қилинган тасодифий миқдорлар учун лимитик теоремалар бўйича олинган натижалар асосида:

силжиш миқдорлари боғлиқ бўлган тасодифий силжишли айлана гомеоморфизмлари учун исботланган марказий лимит теоремадан ОТ-F4-40 рақамли “Ўлчовли функциялар синфида индексланган интеграл эмперик процессларнинг асимптотик хоссаларини тадқиқ қилиш” мавзусидаги фундаментал лойиҳада индексларнинг асимптотик ҳолатини баҳолаш учун фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университетининг 2022 йил 30 сентабрдаги №04/11-5971-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши индексланган интеграл эмперик процессларнинг индекслари боғлиқ бўлган ҳолат учун гепотезаларни текшириш имконини берган;

иккита синиш нуқталарига эга айлана гомеоморфизмининг инвариант эҳтимоллик ўлчовларининг Хаусдорфф ўлчамлари учун олинган ўлчовлардан MRU-OT-9/2017 рақамли “Кўп ўлчовли комплекс анализ” мавзусидаги фундаментал лойиҳада плюрисубгармоник фукнциялардан ҳосил бўлган плюриполяр тўпламларни ҳосил қилиш учун фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университети 2022 йил 4 октабрдаги №04/11-6044-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши махсусликка эга кўп ўлчамли комплекс ўзгарувчили функциялардан ҳосил бўлган тўпламларнинг сиғимини ҳисоблаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 9 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси бўйича жами 19 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та, жумладан, 1 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида, шунингдек, 13 та маъруза тезислари илмий конференция материалларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, 12 параграфга бўлинган бўлиб, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 91 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат.

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг “**Айлана динамикаси ва лимит теоремалар**” номли биринчи бобида айлана гомеоморфизмлари, улар ёрдамида ҳосил қилинган термодинамик формализм, синиш типидаги айлана гомеоморфизмларининг синиш нуқталари жойлашуви, улар ёрдамида ҳосил қилинган инвариант ўлчовларнинг Хаусдорфф ўлчамлари, марказий лимит теоремалар ва Марков занжирлари учун зарур бўлган дастлабки маълумотлар келтирилган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида айлана гомеоморфизмлари ва динамик бўлинишлар дастлабки маълумотлар келтирилган.

Айтайлик $S^1 = R / Z \simeq [0,1)$ бирлик айлана бўлсин. Айлана бўйича соат мили йўналишига қарама-қарши йўналиш *мусбат йўналиш* дейилади.

1-таъриф. *Ўзаро бир қийматли, ўзи ва тескариси узлуксиз узлуксиз бўлган* $T : S^1 \to S^1$ *акслантириш айлана гомеоморфизми деб аталади.*

Айлананинг йўналишини сақловчи гомеоморфизми T ни қуйидаги формула орқали аниқлаш мумкин:

$$T(x) = F(x) \bmod 1, \quad \forall x \in S^1,$$

бу ерда $F : R^1 \to R^1$ функция қуйидаги хоссаларга эга:

- F функция R^1 да қатъий ўсувчи ва узлуксиз;
- ҳар қандай $x \in R^1$ учун $F(x+1) = F(x) + 1$ бўлади.

Ушбу F функция T учун *аниқловчи функция* дейилади.

Агар F_1 ва F_2 битта гомеоморфизмни аникловчи функциялари бўлса, у ҳолда $\forall x \in R^1$ учун $F_1(x) = F_2(x) + k$ бўлади, k бутун сон .

T гомеоморфизмнинг F аниқловчи функцияси бўлсин, у холда T^n учун F^n, $n \in Z$ аниқловчи функция бўлади, бу ерда T^n қуйидагича аникланади:

$$T^0(x) = x, \quad T^n(x) = T\left(T^{n-1}(x)\right).$$

2-таъриф. $T : S^1 \to S^1$ *айлана гомеоморфизмини қараймиз. Агар* $T^{(i)}(x_0) \neq T^{(j)}(x_0), \quad 0 \le i < j \le k-1.$ $k > 1$ *ва* $T^{(k)}(x_0) = x_0$ *бўлса,* $x_0 \in S^1$ *нуқта* $k-$ *даврли даврий нуқта дейилади.*

Ушбу $T(x_0) = x_0$ бўлган ҳолда, x_0 нуқта T акслантиришнинг *қўзгалмас нуқтаси* дейилади.

А. Пуанкаренинг фундаментал теоремасини келтирамиз.

1-теорема (Пуанкаре). *Айтайлик* $T : S^1 \to S^1$ *- йўналишни сақловчи айлана гомеоморфизми ва* $F-$ *ушбу гомеоморфизмнинг ихтиёрий аниқловчи функцияси бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $x \in R^1$ *лар учун қуйидаги*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{(n)}\ x}{n} = \rho_T(F)$$

лимит мавжуд ва унинг қиймати $x \in R^1$ *нуқтани танлаб олишга боғлиқ эмас.* $\rho_T(F)$ *рационал сон бўлиши учун* T *даврий траекторияга эга бўлиши зарур ва етарли.*

Агар $F_1(x) = F_2(x) + k,\ k \in Z$ бўлса, у ҳолда равшанки,

$$\rho_T(F_1) = \rho_T(F_2) + k$$

бўлади.

3-таъриф. *Айтайлик T йўналишни сақловчи айлана гомеоморфизми ва F – ушбу гомеоморфизмнинг аниқловчи функцияси бўлсин. У ҳолда*

$$\rho_T = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n} \pmod 1$$

сони T гомеоморфизмнинг буриш сони дейилади.

T гомеоморфизмни аниқловчи функциялари ичида $0 \le F(0) < 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ягона аниқловчи функция F мавжуд. Кейинги ўринларда гомеоморфизмни аниқловчи функцияси ҳақида деганда, айнан ушбу функцияни назарда тутамиз.

Бурилиш сони ρ иррационал бўлган T айлана гомеоморфизмини қараймиз. ρ сонининг узлуксиз касрга ёйилиши қуйидаги $\rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$ кўринишга эга. $\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, ..., k_n], n \ge 1$ деб белгилаймиз. Бу ерда $q_n, n \ge 1$ сонлари **биринчи қатиш вақтлари** дейилади ва қуйдаги рекурент муносабатни қаноатлантиради $q_0 = 1,\ q_1 = k_1$ ва $q_{n+1} = k_{n+1} q_n + q_{n-1},\ n \ge 1.$

Агар $\rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$ сони учун шундай $C > 0$ константа мавжуд бўлсаки ихтиёрий n натурал сони учун $k_n < C$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда ρ сони **чегараланган типдаги** иррационал сон дейилади, акс ҳолда **чегараланмаган типдаги** иррационал сон дейилади.

Ихтиёрий нуқта $x_0 \in S^1$ учун $I_0^{(n)}(x_0)$ билан четки нуқталари x_0 ва $x_{q_n} = T_f^{(q_n)} x_0$ бўлган ёпиқ кесмани белгилаймиз. Агар n тоқ бўлса, x_{q_n} нуқта x_0 нинг чап томонида жойлашган, ва n жуфт бўлса ўнгда. $I_i^{(n)}(x_0) = T_f^{(i)}\ I_0^{(n)}(x_0)$, $i \ge 1$ деб белгилаймиз. Орбитанинг бир қисми бўлган $x_i = T_f^{(i)} x_0,\ 0 \le i < q_n + q_{n+1}$ айланани кесишмайдиган (охирги нуқталардан ташқари) сегментларга ажратади: $I_i^{(n)}(x_0),\ 0 \le i < q_{n+1},\quad I_j^{(n+1)}(x_0),\quad 0 \le j < q_n$. Олинган бўлинишни $P_n(x_0)$ билан белгиланади. $P_n(x_0)$ бўлиниш **n-чи динамик бўлиниш** дейилади.

$P_n(x_0)$ бўлинишнинг $z \in S^1$ нуқта ётган элементини $I^{(n)}(z)$ каби белгилаймиз.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида битта синиш нуқтага эга бўлган айлана гомеоморфизмлари ёрдамида символик фазо қурилиб, шу фазода термодинамик формализм қурилган. Дастлаб, бир ўлчовли динамика масалаларини Е.Вул, Я.Синай ва К. Ханинлар томонидан термодинамик формализм масалаларига келтирилган. Кейинроқ А. Джалилов ва бошқалар томонидан айлана акслантиришлари учун термодинамик формализм қуриб унинг хоссалари ўрганилган.

$x_b \in [0,1)$ нуқта T акслантиришнинг синиш нуқтаси дейилади, агар шу нуқтада унинг биринчи тартибли ҳосиласи сакрашга эга бўлса.

Қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган функсиялар жуфтлиги $(f(x),\ x \in [-1,0], g(x), x \in [0,\alpha]),\ \alpha > 0$ ни X_{br} билан белгилаймиз

- $f(0)=\alpha,\ g(0)=-1;$
- $f(-1)=g(\alpha);$
- $f(g(0))=f(-1)<0;$
- $f^{(2)}(g(0))\geq 0;$
- $f(x)\in C^{2+\varepsilon}([-1,0]),\ g(x)\in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha])$ барча $\varepsilon>0;$
- $f'_{-}(0)\neq g'_{+}(0).$

Бу шартлар $[-1,\alpha)$ да синиш нуқтаси $x_b=0$ бўлган айлана гомеоморфизмини аниқлашга ёрдам беради.

$$T_{f,g}(x)=\begin{cases} f(x)\ агар\ x\in[-1,0), \\ g(x)\ агар\ x\in[0,\alpha). \end{cases}$$

Бу гомеоморфизмни $l:[-1,\alpha)\to S^1$ чизиқли акслантириш $l(x)=\dfrac{x+1}{\alpha+1}$ айлана гомеоморфизми $l\circ T_{f,g}\circ l^{-1}$ га ўтказади. $X_{br}(\omega)$ билан $(f,g)\in X_{br}$ нинг буриш сони $\omega=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ бўладиган элементларидан иборат қисм тўпламини белгилаймиз. Шу тўпламда ренормализация оператори $R_{br}:X_{br}(\omega)\to X_{br}(\omega)$ ни қуйидагича аниқлаймиз

$$R_{br}(f(x),g(x))=\ \tilde{f}(x),x\in[-1,0];\ \tilde{g}(x),\ x\in[0,\alpha']\ ,$$

бу ерда

$$\tilde{f}(x)=-\alpha^{-1}f(g(-\alpha x)),\ \tilde{g}(x)=-\alpha^{-1}f(-\alpha x),\ \alpha'=-\alpha^{-1}f(-1).$$

1993 йил Е.Вул ва К.Ханинлар томонидан бу ренормализация операторининг қўзғалмас нуқтаси мавжуд эмаслиги ва фақатгина даври иккига тенг бўлган ягона даврий нуқталар жуфтлиги (f_1,g_1) ва (f_2,g_2)

$$R(f_1,g_1)=(f_2,g_2)\text{ ва }R(f_2,g_2)=(f_1,g_1)$$

мавжудлиги исботланган ва уларнинг кўриниши топилган.

Шу жуфтликлардан исталган бирини танлаймиз ва у ёрдамида юқоридагидек аниқланган айлана гомеоморфизмини G_{br} деб белгилаймиз. Шу айлана гомеоморфизми G_{br} билан $C^{1+\varepsilon}$ эквивалент бўлган айлана гомеоморфизмлари тўпламини $B(G_{br})$ билан белгилаймиз. А.Джалилов ва Ж.Каримовлар 2020 йилда $B(G_{br})$ тўпламга тегишли айлана гомеоморфизмлари ёрдамида символик фазо қуриб, шу фазода потенциал функция мавжудлиги исботлашган.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида марказий лимит теоремалар ва Марков занжирлари тўғрисида дастлабки тушунчалар ва фундаментал теоремалар келтирилган.

Биринчи бобнинг тўртинчи параграфида ўлчовларнинг Хаусдорфф ўлчами ва айлана гомеоморфизмларининг инвариант ўлчовларининг Хаусдорф ўлчами ва нуқтали ўлчамини топиш бўйича дастлабки натижалар келтирилган.

Айтайлик μ бирор X метрик фазодаги эҳтимоллик ўлчови ва $E \subset X$ ихтиёрий қисм тўплам бўлсин. Берилган d ва r номанфий сонлар учун қуйидаги белгилашни киритамиз $H_r^d(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^d : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), r_i < r \right\}$,

бу ерда $B(x,r)$ маркази x нуқтада радиуси r га тенг бўлган шар. E тўпламнинг d **ўлчамли Хаусдорфф** ўлчови деб қуйидаги сонга айтилади $H^d(E) := \sup_{r>0} H_r^d(E)$. E тўпламнинг **Хаусдорфф ўлчамли** деб қуйидаги сонга айтилади $\dim_H E := \inf \{ d : H^d(E) = 0 \}$. μ ўлчовнинг **Хаусдорфф ўлчамли** деб қуйидаги сонга айтилади

$$\dim_H \mu := \inf \{ \dim_H E : \mu(E) = 1 \}.$$

Я.Синай ва К.Ханинлар томонидан 1989 йил силлиқлиги $C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ бўлган, буриш сони Диофант типидаги айлана гомеоморфизмларининг инвариант ўлчовлари Лебег ўлчовига нисбатан абсалют узлуксиз эканини исботлашган ва бундан шу инвариант ўлчовнинг Хаусдорфф ўлчами 1 га тенг экани келиб чиқади.

Ундан сўнг, В.Садовская томонидан 2009 йил ихтиёрий $\beta \in [0,1]$ сони ва Диофант типида бўлмаган ихтиёрий $\rho \in (0,1)$ учун, силлиқлиги C^{∞}, буриш сони ρ га тенг бўлган, шундай айлана гомеоморфизмлари қурилганки унинг инвариант ўлчовининг Хаусдорфф ўлчами β га тенг бўлади.

2017 йил К.Ханин ва С.Кошичлар томонидан деярли барча иррационал буриш сонлари учун силлиқлиги $C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ бўлган, битта синиш нуқтага эга айлана гомеоморфизмларининг инвариант ўлчовларининг Хаусдорфф ўлчами 0 га тенг экани исботланган.

Биринчи бобнинг бешинчи параграфида бўлакли чизиқли иккита синиш нуқтага эга булган айлна гомеоморфизми T учун, T^{q_n} нинг синиш нуқталари жойлашуви ўрганилган ва айлананинг хар бир x нуқтаси учун $T^{q_n}(x)'$ ни ҳисоблаш учун теоремалар келтирилган.

Диссертациянинг “**Айлана акслантиришлари инвариант ўлчовларининг ўлчам характеристикалари**” номли иккинчи боби иккита синишга ва буриш сони иррационал бўлган, бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмларининг Хаусдорфф ўлчамини ўрганишга бағишланган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида синиш нуқталари орбиталари ёрдамида ҳосил қилинган динамик бўлинишда шу синиш нуқта орбитасида ётмайдиган ихтиёрий нуқтанинг жойашишини ўрганамиз.

4-таъриф. *Айтайлик,* $[a,b] - S^1$ *айлананинг ёйи бўлиб,* $c \in (a,b)$ *бўлсин,* c *нинг* $[a,b]$ *даги* ***баррисентрик коэффициенти*** *деб* $|[a,c]|/|[a,b]|$ *нисбатга айтилади. Бу ерда* $|I|$ *ёзув* I *ёйнинг узунлигини билдиради.*

Бирор сонли кетма-кетлик $\{a_n\}$ учун $A < c < C < B$ шартни қаноатлантирувчи c ва C сонлари мавжуд бўлиб $a_n \in (c,C)$ бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$ кетма-кетлик А ва В сонлардан **универсал чегараланган** дейилади,.

2-теорема. *Айтайлик, T битта синиш нуқтага эга булган йўналишни сақловчи буриш сони чегараланган типдаги иррационал сон бўлган* $\operatorname{var}\ln T' < \infty$ *шартни қаноатлантирувчи айлна гомеоморфизми бўлсин. Синиш нуқтаси* x_0 *бўлиб унинг орбитасида ётмайдиган ихтиёрий* $z_0 \in S^1$ *нуқта олайлик. У ҳолда шундай* $\{n_m\}$ *натурал сонлар кетма-кетлиги мавжудки* $z_k := T^k z_0$ *нуқталарнинг* $I^{(n_m)}(z_k) \in P_{n_m}(x_0)$ *интервалларда баррисентрик коеффициенлари 0 ва 1 дан универсал чегараланган бўлади.*

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида иккита синишга эга бўлган бўлак-чизиқли айлана гомеоморфизмининг инвариант ўлчовининг Хаусдорфф ўлчами ҳисобланган.

3-теорема. *Айтайлик, T иккита синиш нуқтага эга булган йўналишни сақловчи айлна гомеоморфизми ва унинг* $\mu := \mu_T$ *инвариант ўлчови бўлсин. Агар буриш сони* $\rho \in S$ *ва турли орбитали* b_1 *ва* b_2 *синиш нуқталари* $\mu\,[b_1, b_2] \in G_\rho$ *шартни қаноатлантирса, у ҳолда* $\dim_н \mu = 0.$

Бу ерда S ва G_ρ Лебег ўлчови 1 га тенг бўлган иррационал сонлар тўпламлари бўлиб, G_ρ фақат ρ га боғлиқ.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида биз айланада шундай ўлчов қурганмизки у сингулар ва унинг Хаусдорф ўлчами 1 га тенг бўлади.

М.Эрман томонидан 1979 йил буриш сони иррационал бўлган иккита синишга эга бўлакли чизиқли айлана гомеоморфизмларининг инвариант ўлчовлари сингулар бўлиши учун уларнинг синиш нуқталари турли орбиталарга эга бўлиши зарур ва етарли эканини исботланган.

Биз шундай акслантиришлар ёрдамида Хаусдорф ўлчами 1 га тенг бўлган сингулар ўлчов қурамиз.

4-теорема. *Айтайлик, T иккита синиш нуқтага эга булган йўналишни сақловчи айлна гомеоморфизми ва унинг* $\mu := \mu_T$ *инвариант ўлчови бўлсин. Агар буриш сони* ρ *чегараланмаган типда бўлиб, турли орбитали* b_1 *ва* b_2 *синиш нуқталари* $\mu\,[b_1, b_2] \notin G_\rho$ *шартни қаноатлантирса, у ҳолда* $\dim_н \mu = 1.$

Диссертациянинг учинчи боби **“Айлана акслантиришларининг тасодифий силжишлари”** деб номланган ва тасодифий силжишли айлана динамикаси учун марказий лимит теоремалар исботланган. Бу теоремаларни исботлаш учун муҳим рол ўйнайдиган, айлана акслантиришлари учун термодинамик формализм ва ундаги трансфер операторининг хос қийматларининг хоссалари ўрганилган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида айлана гомеоморфизмларининг Ляпунов функциялари ва трансфер операторининг хос қийматлари орасидаги боғланиш ўрганилган.

Айтайлик, $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\}), \varepsilon > 0$ синиш нуқтаси x_b бўлган $T'(x) \geq Const > 0, x \in S_1 \equiv [x_b, x_b + 1)$ шартни қаноатлантирувчи айлана гомеоморфизми бўлсин. Ихтиёрий $z_0 \in S^1 \setminus \{T^i(x_b), i = 0, -1, -2, \ldots\}$ нуқта ва

$s \ge 0, n \ge 1$ сонлари учун $\Lambda_s(z_0, n)$ ва $\hat{\Lambda}(z_0, n)$ Ляпунов функцияларини қуйидагича аниқлаймиз

$$\Lambda_s(z_0, n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=k}^{n-1} \left| T'(z_j) \right|^s$$

$$\hat{\Lambda}(z_0, n) = \max_{1 \le i \le n-1} \sum_{k=1}^{i} \prod_{j=k}^{i} \left| T'(z_j) \right|.$$

Фараз қилайлик T нинг буриш сони $\rho_T = [k_1, k_2, .., k_m, 1, 1, ...]$, $m \ge 1$ кўринишда бўлсин. Синиш нуқта x_b орқали ҳосил қилинган n- динамик бўлиниш $P_n(x_b) = \{I_j^{(n)}(x_b),\ 0 \le j < q_{n+1};\ I_i^{(n+1)}(x_b),\ 0 \le i < q_n\}$ ни қараймиз. $I^{(n)}(x_b; z_0)$ билан $P_n(x_b)$ нинг $z_0 \in S^1$ нуқтани ўз ичига олувчи ёйини белгилаймиз.

5-теорема. *Ихтиёрий* $\beta > 0$ *сони ва* $z_0 \in S^1 \setminus \{T^i(x_b), i = 0, -1, -2, ..., -q_n + 1\}$ *нуқталар учун шундай* $n_0 := n_0(\beta) > m$ *натурал сон мавжудки, ихтиёрий* $n > n_0$ *лар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$c_1 \left| I^{(n)}(x_b; z_0) \right|^\beta \lambda_{-\beta}^n \le \Lambda_\beta(z_0, q_n) \le C_1 \left| I^{(n)}(x_b; z_0) \right|^\beta \lambda_{-\beta}^n,$$

бу ерда $\lambda_{-\beta}$ *сони* $D_{-\beta}$ *трансфер операторининг бош хос қиймати ва* c_1, C_1 *лар фақатгина* $\mathrm{var}(\ln T')$ *га боғлиқ бўлган константалар.*

6-теорема. *Ихтиёрий* $n \ge 1$ *сони ва* $z_0 \in S^1 \setminus \{T^i(x_b), i = 0, -1, -2, ..., -q_n + 1\}$ *нуқталар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\hat{\Lambda}(z_0, q_{n+1}) \le Const \cdot \lambda_{-1}^n,$$

бу ерда λ_{-1} *сони* D_{-1} *трансфер операторининг бош хос қиймати ва* $Const$ *фақатгина* $\mathrm{var}(\ln T')$ *га боғлиқ бўлган константа.*

7-теорема. *Ихтиёрий* $1 \le \delta < \beta$ *шартни қаноатлантирувчи* δ *ва* β *сонилари учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\lambda_{-\beta}^\delta < \lambda_{-\delta}^\beta,$$

бу ерда λ_t *сони* D_t *трансфер операторининг бош хос қиймати.*

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида айлана гомеоморфизмларининг синиш нуқтасининг манфий орбитасидан ташқаридаги нуқталари учун тасодифий силжишли жараён ўрганилган ва шу жараён учун марказий лимит теорема исботланган.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ эҳтимоллик фазоси ва $T : S^1 \to S^1$ айлана гомеоморфизми берилган бўлсин. Қуйидаги тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини қарайлик

$$\overline{x}_{n+1} = T(\overline{x}_n) + \sigma \xi_{n+1},\ \overline{x}_0 := x \in S^1$$

бу ерда (ξ_n) боғлиқсиз, $p > 2$ чекли моментга эга, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги:

$$E\xi_n = 0; \tag{1}$$

$$const \le (E \left| \xi_n \right|^2)^{1/2} \le (E \left| \xi_n \right|^p)^{1/p} \le Const. \tag{2}$$

Тасодифий силжишсиз кетма-кетликни қуйидагича белгилаймиз

$$x_n = T^n(x_0),\ n \geq 1.$$

Чизиқли эффиктив шовқин деб аталувчи қуйидаги тасодий миқдорлар кетма-кетлигини киритамиз

$$L_n(x) = \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \prod_{j=k}^{n-1} T'(x_j),\ x \in S^1.$$

Қуйидаги $\omega_n(x,\sigma)$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини киритамиз

$$\omega_n(x,\sigma) = \frac{\overline{x}_n - x_n}{\sigma\sqrt{\mathrm{var}\left(L_n(x)\right)}}.$$

8-теорема. *Фараз қилайлик* $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\}),\ \varepsilon > 0$, *синиш нуқтаси* x_b, *буриш сони* $\rho_T = [k_1, k_2, .., k_m, 1, 1, ...],\ m \geq 1$ *бўлган ва* $T'(x) \geq Const > 0,\ x \in [x_b, x_b + 1]$ *шартни қаноатлантирувчи айлна гомеоморфизми бўлсин.* (ξ_n) *тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги боғлиқсиз ва* $p > 2$ *чекли моментга эга бўлиб (2), (3) шартларни қаноатлантирсин.* $z \in S^1 \setminus \{T^i(x_b),\ i = 0, -1, -2, ...\}$ *нуқталар учун*

- *Шундай* $\gamma > 1$ *сон мавжудки қуйидаги*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n n^{\gamma} = 0,$$

шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий σ_n *кетма-кетликлар учун* $\omega_{q_n}(z, \sigma_{q_n})$ *кетма-кетлик тақсимот бўйича стадарт Нормал тасодифий миқдорга интилади.*

- *Шундай* p *га боғлиқ* $\tau, \kappa > 0$ *сонлар ва* $C_1 > 0$ *константа мавжудки* $\sigma_n \leq C_1 n^{-\tau}$ *шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий* σ_n *кетма-кетликлар учун қуйидаги муносабат ўринли*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| P(\omega_{q_n}(z, \sigma_{q_n}) \leq t) - \Phi(t) \right| \leq C q_n^{-\kappa},$$

Бу ёрда $C > 0$ *фақат* z *га боғлиқ сон ва* $\Phi(t)$ *стадарт Нормал тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси.*

Учинчи бобнинг учинчи параграфида $z \in \{T^i(x_b),\ i = 0, -1, -2, ...\}$ нуқталар учун шартли тақсимотларнинг яқинлашиши ўрганилган.

Фараз қилайлик $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\}),\ \varepsilon > 0$ синиш нуқтаси x_b бўлган айлана гомеоморфизми бўлсин. x_b нинг синиш катталигини $c = \dfrac{T'_-(x_b)}{T'_+(x_b)}$ билан белгилаймиз. Бирор $l \in \mathbb{N}$ натурал сонни фиксирлаб $z = T^{-l}(x_b)$ нуқтани бошланғич нуқта сифатида олайлик. Ўнг ва чап чизиқли эффиктив шовқинларни мос равишда қуйидагича белгилаймиз

$$L_n^-(x) = \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \prod_{j=k}^{n-1} T'_-(x_j) \quad \text{ва} \quad L_n^+(x) = \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \prod_{j=k}^{n-1} T'_+(x_j).$$

Ўнг ва чап Ляпунов функцияларини ҳам қуйидагича белгилаймиз:

$$\Lambda_s^-(x,n)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=k}^{n-1}|T_-'(x_j)|^s,$$

$$\Lambda_s^+(x,n)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=k}^{n-1}|T_+'(x_j)|^s.$$

Ҳар бир $n>0$ натурал сони учун $\omega_n^-(x,\sigma)$ ва $\omega_n^+(x,\sigma)$ тасодифий миқдорларни киритамиз:

$$\omega_n^-(x,\sigma)=\frac{\overline{x}_n-x_n}{\sigma\sqrt{var\left(L_n^-(x)\right)}},\quad \omega_n^+(x,\sigma)=\frac{\overline{x}_n-x_n}{\sigma\sqrt{var\left(L_n^+(x)\right)}}.$$

Қуйидаги ҳодисаларни ҳам аниқлайлик

$$H_l^-=\{\xi_1<0\}\cup\{\xi_1=0,\xi_2<0\}\cup\ldots\cup\{\xi_1=0,\ldots,\xi_{l-1}=0,\xi_l<0\}\cup$$
$$\cup\{\xi_1=0,\ldots,\xi_l=0,\xi_{l+1}\le 0\},$$

$$H_l^+=\{\xi_1>0\}\cup\{\xi_1=0,\xi_2>0\}\cup\ldots\cup\{\xi_1=0,\ldots,\xi_{l-1}=0,\xi_l>0\}\cup$$
$$\cup\{\xi_1=0,\ldots,\xi_l=0,\xi_{l+1}\ge 0\}.$$

Кўриш осонки $\Omega=H_l^-\cup H_l^+$.

9-теорема. *Фараз қилайлик* $T\in C^{2+\varepsilon}(S^1\setminus\{x_b\})$, $\varepsilon>0$, *синиш нуқтаси* x_b *буриш сони* $\rho=[1,1,1,....)$ *бўлган ва* $T'(x)\ge Const>0$, $x\in[x_b,x_b+1]$ *шартни қаноатлантирувчи айлна гомеоморфизми бўлсин.* (ξ_n) *тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги боғлиқсиз ва* $p>2$ *чекли моментга эга бқлиб (2), (3) шартларни қаноатлантирсин.* $z\in\{T^i(x_b),\ i=0,-1,-2,...\}$ *нуқтани фиксирлаймиз. Шундай* $\alpha>0$ *сон мавжудки* $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n n^{1+\alpha}=0$, *шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий* σ_n *кетма-кетликлар учун* $P(\omega_{q_n}^-(z,\sigma_{q_n})\le t/H_l^+)$, $P(\omega_{q_n}^-(z,\sigma_{q_n})\le t/H_l^-)$, $P(\omega_{q_n}^+(z,\sigma_{q_n})\le t/H_l^+)$ *ва* $P(\omega_{q_n}^+(z,\sigma_{q_n})\le t/H_l^-)$ *шартли тақсимотлар параметрлари мос равишда* $(0,1/c)$, $(0,1)$, $(0,1)$ *ва* $(0,c)$ *бўлган Нормал тақсимотга интилади.*

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида силжиш миқдорлари боғлиқ (коррелациаланган) бўлган ҳолатда, тасодифий силжишли айлана гомеоморфизмлари учун марказий лимит теорема исботланган.

Фараз қилайлик (ξ_n) стационар тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлиб қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

A1. $\rho(n)=\sup\limits_{X\in L_2(M_1^k),Y\in L_2(M_{k+n}^\infty)}\dfrac{|\mathrm{E}XY-\mathrm{E}X\mathrm{E}Y|}{\sqrt{\mathrm{var}X\ \mathrm{var}Y}}<Cn^{-\theta}$, $\theta>1$, бу ерда M_a^b – $\xi_a,\xi_{a+1},...,\xi_b$ лар ҳосил қилган $\sigma-$ алгебра;

A2. $E\xi_1=0, E|\xi_1|^s<\infty$, бу ерда $2<s<s_0(\theta)=\dfrac{\theta-1}{\theta}+\sqrt{\dfrac{(\theta-1)^2}{\theta}+\dfrac{4+2\theta}{\theta}}$;

A3. $ES_n^2=E\left(\xi_1+...+\xi_n\right)^2\ge\mu nE\xi_1^2$, $\mu>0$.

10-теорема. *Фараз қилайлик* $T \in C^2(S^1)$ *айлана гомеоморфизми ва* $\{\xi_n\}$ *A1-A3 шартларни қаноатлантирувчи стационар тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлсин. Агар бирор* $x \in S^1$ *нуқта ва* $\{n_k\}$ *натурал сонлар кетма-кетлиги учун қуйидаги*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Lambda_2(x, n_k)}{\mathrm{var}(L_{n_k}(x))} = 0$$

шарт ўринли бўлса, у ҳолда қуйидаги

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sup_{x\in S^1} |T''(x)| \cdot \left(E \max_{1\le j\le n_k} |\xi_j|^s \right)^{1/s} (\hat{\Lambda}(x, n_k))^3}{\sqrt{\mathrm{var}(L_{n_k}(x))}} \sigma_k = 0,$$

шартни қаноатлантирадиган ихтиёрий $\{\sigma_k\}$ *кетма-кетлик учун* $\omega_{n_k}(x, \sigma_{n_k})$ *тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги тақсимот бўйича стандарт Нормал тасодифий миқдорга интилади.*

ХУЛОСА

Диссертация ишининг мақсади синиш типидаги айлана акслантиришлари динамикасини эҳтимоллар назарияси нуқтаи назаридан ўрганишга бағишланган. Хусусан айлана акслантиришларининг инвариант эҳтимоллик ўлчовларининг ўлчам характеристикаларини ҳисоблаш ва тасодифий силжишли айлана динамикалари учун марказий лимит теоремалар исботлашдир.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Иккита синиш нуқталарига эга айлана гомеоморфизмлари сингуляр инвариант эҳтимоллик ўлчовларининг Хаусдорф ўлчамлари ҳисобланган.
2. Айлана гомеоморфизми трансфер операторларининг бош хос қийматлари ва шу айлана гомеоморфизмининг Ляпунов функциялари орасида тенгсизликлар исботланган.
3. Айлана гомеоморфизми трансфер операторларининг бош хос қийматлари фукциясининг монотонлик хоссаси исботланган.
4. Битта синишга эга айлана гомеоморфизмда айлананинг ихтиёрий нуқтасининг боғлиқсиз тасодифий силжишли траекторияси учун марказий лимит теорема исботланган.
5. Силжиш миқдорлари боғлиқ (коррелациаланган) тасодифий силжишли айлана гомеоморфизмлари учун марказий лимит теорема исботланган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ALIYEV ABDURAKHMON FARKHOD UGLI

LIMIT THEOREMS FOR RANDOM VARIABLES ASSOCIATED BY CIRCLE MAPS WITH SINGULARITIES

01.01.05-Probability theory and mathematical statistics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.3.PhD/FM743.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Dzhalilov Akhtam Abdurakhmonovich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
Official opponents:	**Sharipov Olimjon Shukurovich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor **Safarov Utkir Avlayorovich** Candidate of physical and mathematical sciences
Leading organization:	**Tashkent State Transport University**

Defense will take place " 6 " December 2022 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered № 149). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on " 16 " November 2022 year
(Mailing report № 2 on " 16 " November 2022 year)

A.Azamov
Deputy Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

Ya.M.Khusanbayev
Deputy Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees
D.F.-M.S., docent

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

Actuality and demand of the theme of the thesis. A lot of scientific and applied researches in the world have been devoted to the problems of dynamical systems, in particular to the circle dynamics. Actual researches of modern circle dynamics are related to the study of circle maps with singularities, dimensional characteristics of their invariant probability measures, and asymptotical behavior of their stochastic perturbation. Circle homeomorphisms were first studied at the end of the 19th century in connection with the problem of celestial mechanics. To date, we can say with full confidence that many problems of nonlinear processes, abnormal rhythms in heart disease, random noise in information theory and problems of natural sciences are closely related to circle homeomorphisms.

In the world, scientific research is being carried out on the study of circle diffeomorphisms, piecewise-smooth circle maps and modeling of nonlinear processes, which are one of the actual problems of the theory of dynamical systems. Since such processes are chaotic and have a complex structure, particular attention is paid to use methods of probability theory in solving these problems. At the same time, recent researches show that finding the dimensional characteristics of dynamical systems and proving limit theorems for random perturbations are of particular importance. In this way, problems such as studying the dimensional characteristics of invariant probability measures of circle maps and estimation of circle dynamics with small random errors require purposeful scientific research.

In our country, special attention is paid to the probability theory and dynamical systems, which have fundamental and practical application not only in mathematics. Investigations on the international level in such important areas as the functional analysis, mathematical physics, probability theory and theory of dynamical systems considered as the main task of fundamental research[2]. Circle maps and dynamical systems are important not only for natural sciences, but also for economics, information theory, biology, for the study of various heart diseases, for blood tests, etc.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February 7, 2017, PF-4947, "On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan", PQ-4387 dated July 9, 2019 "On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan", PQ-4708 of May 7, 2020 "On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics" as well as in other regulations related to basic sciences.

[2] Decree of the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan dated May 18, 2017 No. 292 "On measures to organize the activities of newly created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan"

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of the Republic of Uzbekistan IV, "Mathematics, Mechanics and Computer Science".

The degree of scrutiny of the problem. Problems related to dimensional characteristics of measures are important for many branches of mathematics, such as measure theory, probability theory, and dynamical systems. Scientists are showing great interest in studying the Hausdorff dimension among dimensional characteristics. The problem of regularity of invariant probability measure for circle homeomorphisms, i.e. the problem of absolute continuity or singularity, is important in the theory dynamical systems. The problem of dimensional characteristics is closely related to this regularity problem. The first results for analytic circle diffeomorphisms were obtained in fundamental works of V.I. Arnold. Further fundamental results on the smoothness of diffeomorphisms obtained by M. Herman, Y. Moser, J. Yoccoz, K. Katznelson, D. Ornstein, Y. G. Sinai, K.M. Khanin et al. To date, the problem of absolute continuity of invariant measure of circle diffeomorphisms has been well studied. The last most important results were proved in the works of K. Katznelson and D. Ornstein, Y. Sinai and K. Kanin. It is proved that the invariant measure of $C^{2+\alpha}-$ circle diffeomorphism is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, if rotation number of it is a typical irrational number. It follows that the Hausdorff dimension of this invariant measure is equal to 1. For arbitrary $\beta \in [0,1]$ and any Liouville number $\rho \in (0,1)$, V.Sadovskaya constructed $C^{\infty}-$circle diffeomorphism with rotation number ρ and Hausdorff dimension of the invariant measure equal to β. Piecewise-smooth circle homeomorphisms with breaks are natural generalizations of circle diffeomorphisms. Piecewise-linear circle homeomorphisms were studied in the works of M. Herman, I. Lious, I. Koelo and A. Lopes. Invariant measures of piecewise-smooth homeomorphisms were studied in the works of A. Djalilov, K. Khanin, I. Liouss, D. Mayer, U. Safarov, A. Teplinsky and others. It was proved by K. Khanin and S. Kocić that the Hausdorff dimension of the invariant dimensions of $C^{2+\alpha}-$circle homeomorphisms with one break for almost all irrational rotation numbers is equal to 0.

Another important problem in this field is asymptotic behavior of stochastic perturbations of one-dimensional dynamics. J. Crutchfield et al. and B. Shraiman et al. considered in their works heuristically a renormalization group - respectively a field theoretic path-integral approach for weak Gaussian noise perturbing one dimensional maps with period doubling at the onset of chaos. E.Vul, Y.Sinai, and K.Khanin studied the effect of noise on the ergodic properties of these maps and showed that for systems with weak noise at the accumulation of period doubling there is a stationary measure, depending on the magnitude of the noise, which converges for vanishing noise to the invariant measure of the attractor. O.Espinosa and R.Llave studied stochastic perturbations of several systems using the renormalization group technique and proved a central limit theorem for critical circle maps with golden mean rotation number and some mild conditions on the stochastic noise.

It should be noted that, despite the many important results mentioned above, there are still some open problems, such as asymptotical behavior of stochastic perturbation for circle maps with breaks and dimensional characteristics of invariant probability measure for circle maps.

The connection of the theme of the thesis with the research plans of the higher education institute, where the research on the thesis is carried out. The theme of the dissertation was approved by the Scientific Council of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy and was carried out in accordance with the planned theme of the Department of Mathematics Institute "Probability theory and mathematical statistics".

The aim of the research work is to calculate the Hausdorff dimensions of invariant probability measures of circle homeomorphisms with breaks and to prove limit theorems for stochastic perturbations of circle maps.

Research problems:

to calculate Hausdorff dimension of invariant probability measure of circle maps with two breaks;

to investigate the relation between Lyapunov functions and the leading eigenvalue of the transfer operators associated by circle maps with a break;

to study asymptotic behavior of stochastic perturbations of circle maps.

The research object: circle homeomorphisms with breaks, invariant probability measure, Hausdorff dimension, central limit theorems.

The research subject: probability theory, dynamical systems, the theory of circle homeomorphisms.

Research methods. In the work used the methods of probability theory, ergodic theory, dynamical systems and mathematical analysis.

Scientific novelty of the research work is as follows:

Hausdorff dimension of invariant probability measure of circle maps with two breaks is calculated;

relations between Lyapunov functions and the leading eigenvalue of the transfer operators associated by circle maps with a break are found;

the central limit theorems for stochastic perturbations of circle maps with a break point and independent noise are proved;

the central limit theorems for stochastic perturbations of circle maps with dependent noise are proved.

Practical results of the research:

the results obtained on the Hausdorff dimensions of the invariant probability measures of circle maps with breaks help to understand the dimensional characteristics of singular probability measures and are used in dynamical systems, probability theory and their applications;

the central limit theorems for stochastic perturbations of circle maps are used in estimating the errors of solving practical problems associated by circle dynamics and in the theory of probabilities, dynamical systems and their applications;

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using the methods of probability theory, mathematical analysis, dynamical systems and stochastic processes. The obtained results are mathematically strongly proved.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the research results is that the obtained results are used to find the dimensional characteristics of the invariant measure of one-dimensional maps and to study the limit theorems for circle dynamics with external noise.

The practical significance is that the results of the dissertation are used in the modeling of circle dynamics, in the testing hypotheses for circle maps with random noise, and in the calculation of numerical characteristics of invariant measures using programming.

Implementation of the research results. The scientific results obtained during the research of dissertation are implemented in the following research research projects:

the central limit theorem proved for circle homeomorphisms with dependent random perturbations was used to estimate the asymptotic behavior of indices in the fundamental project OT-F4-40 "Research of asymptotic properties of indexed integral empirical processes in the class of measurable functions" (Reference No. 04/11-5971 of the National University of Uzbekistan dated September 30, 2022). The application of the scientific result allowed to test hypotheses for depend indices of the indexed integral empirical processes;

the results obtained for Hausdorff dimensions of the invariant probability measures of the circle homeomorphism with two breaking points were used to generate pluripolar sets associated with plurisubharmonic functions in the fundamental project MRU-OT-9/2017 on the topic "Multidimensional complex analysis" (Reference No. 11-6044 of the National University of Uzbekistan, October 4, 2022). The application of the scientific result allowed to calculate the capacity of sets formed from multidimensional complex functions with special features.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 9 international and 4 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 19 research papers have been published in the scientific journals, 6 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the PhD thesis; in addition 1 of them were published in international journals and 5 papers published in national mathematical journals.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The general volume of the thesis is 91 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE THESIS

The introduction part of the thesis includes the actuality and the demand of the research, the relevance of the research to the priority areas of science and technology. We showed the degree of study of the problem, formulates goals and objectives, identifies the object and subject of research, sets out scientific novelty and practical the results of the research, the theoretical and practical significance of the results obtained is disclosed, information is given on the implementation of the research results, on the published works and on the structure of the dissertation.

The first chapter of the dissertation, titled "**Circle dynamics and limit theorems**" contains preliminary and necessary information for circle homeomorphisms, the thermodynamic formalism associated by them, the location of break points of circle homeomorphisms, Hausdorff dimensions of invariant measures of circle maps, central limit theorems, and Markov chains.

In the first paragraph of the first chapter, circle homeomorphisms and dynamical partitions are introduced.

Let $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0,1)$ be a unit circle. The counterclockwise direction of the circle is called the *positive direction*.

Definition 1. *If T is one-to-one, T and T^{-1} are continuous on S^1, T is called circle homeomorphism.*

Consider the function $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ with the following properties:

- F strictly increasing continuous function on $\mathbb{R}$;
- $F(x+1) = F(x)+1$ for all $x\in\mathbb{R}$.

Using the function F we may define orientation preserving circle homeomorphism T via the following formula:

$$T(x) = F(x) mod 1, \forall x \in S^1.$$

The function F is called the **lift function** of the homeomorphism T.

Note that, if F_1 and F_2 define the same homeomorphism, then they differ for some constant, i.e. $F_1(x) = F_2(x) + k$ for all $x\in\mathbb{R}$, for some integer k (see [18]).

Let the function F be the lift of homeomorphism T, then F^n, $n\in\mathbb{Z}$ is lift of T^n, where T^n defined by the recurrent relation $T^0(x) = x$ and $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$.

Definition 2. *Let T be a circle homeomorphism $T:S^1\to S^1$. The point $x_0\in S^1$ is called the periodic point with period $k, k>1$, if*

$$T^i(x_0) \neq T^j(x_0), 0 \le i < j < k \text{ and } T^k(x_0) = x_0.$$

In the case $T(x_0) = x_0$ the point x_0 is called *fixed point* of the map T.

Now, we formulate the classical theorem of A. Poincare.

Theorem 1 (Poincare). *Let $T:S\to S$ be an orientation preserving circle homeomorphism and F be its lift function. Then for any $x\in\mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F^n(x)}{n} = \rho_T(F)$$

The limit exists and the value of the limit doesn't depend on the point $x \in \mathbb{R}$. *The number* $\rho_T(F)$ *is rational if and only if* T *has periodic trajectory.*

The number $\rho_T(F)$ depend on F lift of the homeomorphism T. However, if $F_1(x) = F_2(x) + k,\ k \in \mathbb{Z},$ then it is easy to see that $\rho_T(F_1) = \rho_T(F_2) + k.$

Definition 3. *Let* T *be an orientation preserving circle homeomorphism and* F *be its lift function. The number* $\rho_T := \rho_T(F) \bmod 1$ *is called the rotation number of the homeomorphism* T.

Let T be an orientation preserving circle homeomorphism with irrational rotation number ρ_T. Then ρ_T can be uniquely expanded as a continued fraction i.e. $\rho_T = 1/(k_1 + 1/(k_2 + ...)) := [k_1, k_2, ..., k_n, ...)$. Denote by $p_n / q_n = [k_1, k_2, ..., k_n],\ n \geq 1,$ its n-th convergent. The numbers $q_n,\ n \geq 1$ are called the **first return times** of T and satisfy the recurrence relations $q_{n+1} = k_{n+1} q_n + q_{n-1}\ n \geq 1,$ where $q_0 = 1$ and $q_1 = k_1.$ If there exists a constant $C > 0$ for the number $\rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$ such that $k_n < C$ for an arbitrary number n natural, then the number ρ is called an irrational number of bounded type, otherwise it is called an irrational number of unbounded type.

Fix an arbitrary point $z_0 \in S^1.$ Its forward orbit $O_T^+(z_0) = \{z_i = T^i(z_0),\ i = 0, 1, 2 ...\}$ defines a sequence of natural partitions of the circle. Indeed, denote by $I_0^{(n)}(z_0)$ the closed interval in S^1 with endpoints z_0 and $z_{q_n} = T^{q_n}(z_0)$. If $I_i^{(n)}(z_0) = T^i(I_0^{(n)}(z_0)), i \geq 1,$ denote the iterates of the interval $I_0^{(n)}(z_0)$ under T, it is well known, that the set $P_n(z_0)$ of intervals with mutually disjoint interiors, defined as

$$P_n(z_0) = \{I_i^{(n)}(z_0),\ 0 \leq i < q_{n+1}\} \cup \{I_j^{(n+1)}(z_0),\ 0 \leq j < q_n\}$$

determines a partition of the circle for any n. The partition $P_n(z_0)$ is called the n-th **dynamical partition** of S^1 determined by the point z_0 and the map T.

Denote by $I^{(n)}(z)$ the element of the partition $P_n(x_0)$ which includes the point $z \in S^1$.

In the second paragraph of this chapter, a symbolic space is constructed associated by circle homeomorphisms with one break point, and a thermodynamic formalism is constructed in this space. Initially, one-dimensional dynamical system problems were introduced into thermodynamic formalism problems by E. Vul, Y. Sinay and K. Khanin. Later, A. Dzhalilov and others constructed a thermodynamic formalism for circle maps and studied its properties.

Let X_{br} be the set of strictly increasing pairs of functions $(f(x), x \in [-1, 0], g(x), x \in [0, \alpha]$ for some $\alpha > 0)$ satisfying the following conditions:

- $f(0) = \alpha,\ g(0) = -1;$
- $f(-1) = g(\alpha);$

- $f(g(0)) = f(-1) < 0$;
- $f^{(2)}(g(0)) \geq 0$;
- $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([-1,0])$, $g(x) \in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha])$ барча $\varepsilon > 0$;
- $f'_{-}(0) \neq g'_{+}(0)$.

These conditions allow us to construct a circle homeomorphism $G_{f,g}$ on $[-1,\alpha)$ from a pair $(f,g) \in X_{br}$ with break point $x_b = 0$ (and possibly with a second break point $x_b = -1$ if $f'_{+}(-1) \neq g'_{-}(\alpha)$) as follows

$$T_{f,g}(x) = \begin{cases} f(x) \ \ if \ \ x \in [-1,0), \\ g(x) \ \ if \ \ x \in [0,\alpha). \end{cases}$$

Using the map $l:[-1,\alpha] \to S^1$ with $l(x) = \dfrac{x+1}{\alpha+1}$ we get a circle homeomorphism $l \circ G_{f,g} \circ l^{-1}$ on $S^1 = \mathbb{R} \bmod 1$, which we also denote for simplicity by $G_{f,g}$. We define the rotation number $\rho(G_{f,g})$ of $G_{f,g}$ by the rotation number of this circle homeomorphism. Denote by $X_{br}(\omega)$ the subset of $(f,g) \in X_{br}$ with $\rho(G_{f,g}) = \omega = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Recall the jump ration $c = \dfrac{G'_{f,g}(0_-)}{G'_{f,g}(0+)} = \dfrac{f'_{-}(0)}{g'_{+}(0)}$.

It is clear that in the case $c = 1$ the homeomorphism $G_{f,g}$ is a smooth map as long as 0 is its only break point. We assume that $c \neq 1$. Now, we define a renormalization operator $R_{br} : X_{br}(\omega) \to X_{br}(\omega)$ in the following way:

$$R_{br}(f(x), g(x)) = (\tilde{f}(x), x \in [-1,0]; \tilde{g}(x), x \in [0,\alpha']),$$

where

$$\tilde{f}(x) = -\alpha^{-1} f(g(-\alpha x)), \tilde{g}(x) = -\alpha^{-1} f(-\alpha x), \alpha' = -\alpha^{-1} f(-1).$$

K.Khanin and E.Vul proved that $R_{br} : X_{br}(\omega) \to X_{br}(\omega)$ has a unique periodic orbit $\{f_i(x,c_i), g_i(x,c_i), i = 1,2\}$ with the period two. By using the pairs of functions (f_i, g_i), $i = 1,2$, we define circle homeomorphisms $G_i : [-1,\alpha_i] \to [-1,\alpha_i]$, $i = 1,2$. We rename the homeomorphism of the circle S^1 corresponding to G_1 by G_{br} and denote by $B(G_{br})$ the set of all circle homeomorphisms which are $C^{1+\varepsilon}$ conjugate to G_{br}. In 2020, A.Dzhalilov and J.Karimov constructed a symbolic space using the circle homeomorphisms belonging to the set $B(G_{br})$ and proved the existence of a potential function in this space.

In the third paragraph of the first chapter, the basic concepts and fundamental theorems about central limit theorems and Markov chains are presented.

The fourth paragraph of the first chapter presents preliminary results on finding the Hausdorff dimension of measures and point dimension of invariant measures of circle homeomorphisms.

Let μ be a probability measure on a metric space X. For any set $E \subset X$, we define the $d-$ dimensional Hausdorff content of E as

$H_r^d(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^d : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), r_i < r\right\}$. The $d-$**dimensional Hausdorff measure** of E is given by $H^d(E) := \sup_{r>0} H_r^d(E)$. First we define the **Hausdorf dimension of the set** E as $\dim_H E := \inf\{d : H^d(E) = 0\}$. Next define the **Hausdorff dimension of the measure** μ: $\dim_H \mu := \inf\{\dim_H E : \mu(E) = 1\}$.

In the fifth paragraph of the this chapter, for the circle homeomorphism T with two break points on disticnt orbits, the locations of break points of T^{q_n} are studied and it is given a theorem about $T^{q_n}(x)'$ for arbitrary point x.

The second chapter of the dissertation, titled **"Dimensional characteristics of invariant measure of circle maps"** is devoted to calculate Hausdorff dimension of invariant measure of piecewise smooth circle homeomorphism with two break points.

In the first paragraph of the second chapter, we investigate orbits of non singular points on n th dynamical partition of a break point.

Definition 4. *Let* $[a,b]$ *be an interval in* S^1 *and* $c \in [a,b]$. *The* ***barycentric*** *coefficient of* c *in* $[a,b]$ *is the ratio* $|[a,c]|/|[a,b]|$, *where* $|I|$ *denotes the length of the interval* I.

We will say that the barycentric coefficients of c_n in the intervals $[a_n, b_n]$ are **universally bounded** in the interval (0,1) if there exist constants C_1 and C_2 such that $C_1 \le \frac{|[a_n, c_n]|}{|[c_n, b_n]|} \le C_2$. The intervals $[a,b]$ and $[a,c]$ are comparable if and only if the barycentric coefficient of c in $[a,b]$ is universally bounded in $(0,1)$.

Theorem 2. *Let* T *be a circle homeomorphism with bounded type irrational rotation number* ρ. *Suppose* $x_0 := x_b \in S^1$ *is the unique break point of* T. *Choose a point* $z_0 \in S^1$ *whose orbit* $\mathbb{O}_T(z_0)$ *is disjoint from the one of* x_0. *There exists a subsequence of integers* $\{n_m\}$ *such that the barycentric coefficient of the points* $z_k := T^k z_0$ *in* $I^{(n_m)}(z_k)$, $0 \le k < q_{n_m+1}$ *is universally bounded in* $(0,1)$.

In the second paragraph of the second chapter, it is calculated that Hausdorff dimension of invariant measures of PL circle homeomorphisms with two breaks.

Theorem 3. *Let* T *be a piecewise linear circle homeomorphism with irrational rotation number* $\rho_T \in S$ *and two break points* b_1 *and* b_2 *on different orbits which* $\mu_T([b_1, b_2]) \in G_\rho$. *Then the Hausdorff dimension of invariant probability measure* $\mu := \mu_T$ *equals to zero i.e.* $\dim_H \mu = 0$.

Where S and G_ρ are sets of irrational numbers with Lebesgue measure 1, and G_ρ depends only on ρ.

The purpose of third paragraph of this chapter is to construct an example such that there exist a circle homeomorphism whose Hausdorff dimension is 1 and invariant measure is singular. M. Herman proved that if piecewise linear circle

homeomorphism with irrational rotation number has two break points with disjoint trajectories, then its unique invariant probability measure is singular. So it is enough to construct such piecewise linear circle homeomorphism with two break points on different orbits which its Hausdorff dimension of invariant measure equals to 1.

Theorem 4. *Let T be a piecewise linear (PL) circle homeomorphism with unbounded type irrational rotation number ρ and two break points b_1 and b_2 on different orbits which $\mu_T([b_1,b_2]) \notin G_\rho$. Then Hausdorff dimension of its invariant measure is 1, i.e.* $\dim_H \mu = 1$.

The third chapter of the dissertation, titled "Random perturbations of circle maps" is devoted to prove central limit theorems for circle dynamical system with random nose. Also, it is investegated the properties of the leading eigenvalues thermodynamic formalism for circle maps.

In the first paragraph of the third chapter, the connection between the Lyapunov functions of circle homeomorphisms and the eigenvalues of the transfer operator is investegated.

Let $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, be a circle homeomorphism with break point x_b, $T'(x) \geq Const > 0, x \in S_1 \equiv [x_b, x_b + 1)$. We define Lyapunov functions $\Lambda_s(z_0, n)$ and $\hat{\Lambda}(z_0, n)$ for an arbitrary $z_0 \in S^1 \setminus \{T^i(x_b), i = 0, -1, -2, ...\}$ and each $s \geq 0$, $n \geq 1$, as follows

$$\Lambda_s(z_0,n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=k}^{n-1} \left|T'(z_j)\right|^s \text{ and } \hat{\Lambda}(z_0,n) = \max_{1 \leq i \leq n-1} \sum_{k=1}^{i} \prod_{j=k}^{i} \left|T'(z_j)\right|.$$

Assume that rotation number of T is $\rho_T = [k_1, k_2, .., k_m, 1, 1, ...]$ for some $m \geq 1$. In this case we have $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$, $n \geq m$, since $k_{n+1} = 1$ for $n \geq m$. Consider the n-th dynamical partition $P_n(x_b) = \{I_j^{(n)}(x_b),\ 0 \leq j < q_{n+1};\ I_i^{(n+1)}(x_b),\ 0 \leq i < q_n\}$ generated by the break point x_b with the map T. Denote by $I^{(n)}(x_b; z_0)$ the interval of the partition $P_n(x_b)$ containing the point z_0.

Theorem 5. *For any $\beta > 0$ and $z_0 \in S^1 \setminus \{T^i(x_b), i = 0, -1, -2, ..., -q_n + 1\}$, there exists $n_0 := n_0(\beta) > m$, such that for every $n > n_0$ the following inequalities hold*

$$c_1 \left| I^{(n)}(x_b; z_0) \right|^\beta \lambda_{-\beta}^n \leq \Lambda_\beta(z_0, q_n) \leq C_1 \left| I^{(n)}(x_b; z_0) \right|^\beta \lambda_{-\beta}^n,$$

where $\lambda_{-\beta}$ is the eigenvalue of the $D_{-\beta}$ transfer operator and c_1, C_1 are constants that depend only on $\mathrm{var}(\ln T')$.

Theorem 6. *For any $n \geq 1$ and $z_0 \in S^1 \setminus \{T^i(x_b), i = 0, -1, -2, ..., -q_n + 1\}$, the following inequality holds*

$$\hat{\Lambda}(z_0, q_{n+1}) \leq Const \cdot \lambda_{-1}^n,$$

where λ_{-1} is the eigenvalue of the D_{-1} transfer operator and Const are constants that depend only on $\mathrm{var}(\ln T')$.

Theorem 7. *For arbitrary real numbers β and δ with $1 \leq \delta < \beta$ the following inequality holds*

$$\lambda_{-\beta}^{\delta} < \lambda_{-\delta}^{\beta},$$

where λ_t *is the leading eigenvalue of the transfer operator* D_t.

In the second paragraph of the third chapter, it is proved that central limit theorem for random perturbations of circle maps with a break point in case initial point is not belong to orbit of the break point.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $T : S^1 \to S^1$ a homeomorphism of the circle $S^1 \to S^1$. Let the stochastic sequence $\bar{x}_n$ be defined as

$$\bar{x}_{n+1} = T(\bar{x}_n) + \sigma\xi_{n+1}, \ \bar{x}_0 := x \in S^1$$

where (ξ_n) is a sequence of independent random variables with $p > 2$ finite moments satisfying the following conditions:

$$E\xi_n = 0; \tag{1}$$

$$const \le (E \mid \xi_n \mid^2)^{1/2} \le (E \mid \xi_n \mid^p)^{1/p} \le Const. \tag{2}$$

In the following we set

$$x_n = T^n(x_0), n \ge 1,$$

where T^n denotes the n-th iteration of T. The linearized effective noise is defined as

$$L_n(x) = \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \prod_{j=k}^{n-1} T'(x_j), x \in S^1.$$

Let $\omega_n(x, \sigma)$ be the stochastic process defined by

$$\omega_n(x, \sigma) = \frac{\bar{x}_n - x_n}{\sigma\sqrt{\mathrm{var}(L_n(x))}}.$$

Theorem 8. *Let* $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$ *be a circle homeomorphism with break point* x_b, $T'(x) \ge Const > 0$, $x \in [x_b, x_b + 1]$ *and irrational rotation number* $\rho_T = [k_1, k_2, .., k_m, 1, 1, ...], m \ge 1$. *Consider a sequence of independent random variables* (ξ_n) *with* $p > 2$ *finite moments satisfying the conditions (1) and (2) for some* $z \in S^1 \setminus \{T^i(x_b), i = 0, -1, -2, ...\}$. *Then*

- *there exists a constant* $\gamma > 1$ *depending on* T, *for all sequences* σ_n *satisfying the condition:*

  $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n n^{\gamma} = 0,$$

  the process $\omega_{q_n}(z, \sigma_{q_n})$ *converges in distribution to the standard Gaussian random variable.*

- *furthermore, there are constants* $\tau > 0$ *and* $\kappa > 0$ *depending on* p *and* T, *and a constant* $C_1 > 0$, *for all sequences* σ_n *satisfying the condition* $\sigma_n \le C_1 n^{-\tau}$, *then*

  $$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| P(\omega_{q_n}(z, \sigma_{q_n}) \le t) - \Phi(t) \right| \le C q_n^{-\kappa},$$

  where q_n *is the first return time of* T, *the constant* $C > 0$ *depends only on* z *and* $\Phi(t)$ *is the distribution function of the standard Gaussian on* $\mathbb{R}$.

In the third paragraph of the third chapter, the approximation of conditional distributions for $z \in \{T^i(x_b),\ i = 0,-1,-2,...\}$ points is investigated.

Let $T \in C^1\left(S^1 / \{x_b\}\right)$ be a circle homeomorphism with one break point x_b. Rewrite jump ratio of T at x_b as $c = \dfrac{T'_-(x_b)}{T'_+(x_b)}$. Let us take $x = T^{-l}(x_b)$ as initial point, for some $l \in \mathbb{N}$. Left and right linearized effective noises are defined as

$$L_n^-(x) = \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1}\xi_k \prod_{j=k}^{n-1} T'_-(x_j) \quad \text{and} \quad L_n^+(x) = \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1}\xi_k \prod_{j=k}^{n-1} T'_+(x_j),$$

respectively.

We introduce the left and right Lyapunov functions $\Lambda_s^{\pm}(x,n)$:

$$\Lambda_s^-(x,n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=k}^{n-1} |T'_-(x_j)|^s,$$

$$\Lambda_s^+(x,n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=k}^{n-1} |T'_+(x_j)|^s .$$

For each $n > 0$ we define the random variables $\omega_n^-(x,\sigma)$ and $\omega_n^+(x,\sigma)$:

$$\omega_n^-(x,\sigma) = \frac{\overline{x}_n - x_n}{\sigma\sqrt{var\left(L_n^-(x)\right)}}, \quad \omega_n^+(x,\sigma) = \frac{\overline{x}_n - x_n}{\sigma\sqrt{var\left(L_n^+(x)\right)}}.$$

Next we define following events

$$H_l^- = \{\xi_1 < 0\} \cup \{\xi_1 = 0, \xi_2 < 0\} \cup \ldots \cup \{\xi_1 = 0,\ldots,\xi_{l-1} = 0, \xi_l < 0\} \cup$$
$$\cup \{\xi_1 = 0,\ldots,\xi_l = 0, \xi_{l+1} \le 0\},$$
$$H_l^+ = \{\xi_1 > 0\} \cup \{\xi_1 = 0, \xi_2 > 0\} \cup \ldots \cup \{\xi_1 = 0,\ldots,\xi_{l-1} = 0, \xi_l > 0\} \cup$$
$$\cup \{\xi_1 = 0,\ldots,\xi_l = 0, \xi_{l+1} \ge 0\}.$$

One can see that $\Omega = H_l^- \cup H_l^+$.

Theorem 9. *Let $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$ be a circle homeomorphism with golden mean rotation number $\rho = [1,1,1,....)$ and one break point x_b, $T'(x) \ge Const > 0$, $x \in [x_b, x_b + 1]$ and $\{\xi_n\}$ be a sequence of independent random variables with $p > 2$ finite moments and satisfies the conditions (2) and (3). Then there exists a constant $\alpha > 0$ depending on T, for all sequences σ_n satisfying the condition $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n n^{1+\alpha} = 0$, the conditional distributions $P(\omega_{q_n}^-(z,\sigma_{q_n}) \le t / H_l^+)$, $P(\omega_{q_n}^-(z,\sigma_{q_n}) \le t / H_l^-)$, $P(\omega_{q_n}^+(z,\sigma_{q_n}) \le t / H_l^+)$ and $P(\omega_{q_n}^+(z,\sigma_{q_n}) \le t / H_l^-)$ converge to Normal distributions with parameters $(0,1/c),(0,1),(0,1)$ and $(0,c)$, respectively as $n \to \infty$.*

In the fourth paragraph of the third chapter, the central limit theorem for circle homeomorphisms with dependent random perturbation is proved.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space. Let (ξ_n) be a sequence of stationary random variables satisfying the following conditions:

A1. $\rho(n) = \sup_{X \in L_2(M_1^k), Y \in L_2(M_{k+n}^\infty)} \frac{|\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y|}{\sqrt{\mathrm{var}X \ \mathrm{var}Y}} < Cn^{-\theta}, \ \theta > 1,$ where M_a^b denotes the $\sigma-$algebra generated by the random variables $\xi_a, \xi_{a+1}, ..., \xi_b$.

A2. $E\xi_1 = 0, E|\xi_1|^s < \infty,$ where $2 < s < s_0(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta} + \sqrt{\frac{(\theta-1)^2}{\theta} + \frac{4+2\theta}{\theta}};$

A3. $ES_n^2 = E\left(\xi_1 + ... + \xi_n\right)^2 \geq \mu n E\xi_1^2, \ \mu > 0.$

Theorem 10. *Let $T \in C^2(S^1)$ be a circle map and (ξ_n) be a sequence of stationary random variables satisfying A1-A3 conditions. Suppose that there exists an increasing sequence of positive integers n_k, such that*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\Lambda_2(x, n_k)}{\mathrm{var}(L_{n_k}(x))} = 0$$

For all sequence $\{\sigma_k\}$ satisfying the following condition

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\sup_{x \in S^1} |T(x)| (E \max_{1 \leq j \leq n_k} |\xi_j|^s)^{2/s} (\hat{\Lambda}(x, n_k))^3 \sigma_k}{\sqrt{\mathrm{var}(L_{n_k}(x))}} = 0,$$

the stochastic process $\omega_{n_k}(x, \sigma_{n_k})$ converges in distribution to the standard Normal random variable.

CONCLUSION

This thesis is devoted to study dynamics of circle homeomorphisms with breaks from the point of view of probability theory. In particular, it was investigated calculation of dimensional characteristics of invariant probability measures of circle maps with breaks and the proof of central limit theorem for circle maps with external noises.

Main results of the thesis are followings:

1. calculated Hausdorff dimension of invariant probability measure of circle maps with two breaks;
2. found relations between Lyapunov functions and the leading eigenvalue of the transfer operators associated by circle maps with a break;
3. proved the monotonicity property of the the function under leading eigenvalue of transfer operators of circle homeomorphism;
4. proved the central limit theorems for stochastic perturbations of circle maps with a break point and independent noise;
5. the central limit theorems for stochastic perturbations of circle maps with dependent noise.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АЛИЕВ АБДУРАХМОН ФАРХОД УГЛИ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН АССОЦИРОВАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯМИ ОКРУЖНОСТИ С ОСОБЕННОСТЯМИ

01.01.05 –Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент–2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2022.3.PhD/FM743.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовкого.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский, (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Джалилов Ахтам Абдурахмонович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Шарипов Олимжон Шукурович** доктор физико-математических наук, профессор
	Сафаров Уткир Аваярович кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Ташкентский государственный транспортный университет**

Защита диссертации состоится « 6 » декабря 2022 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 149). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 16 » ноября 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от « 16 » ноября 2022 года).

А.Азамов
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Я.М.Хусанбоев
Заместитель председателя Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Целью исследования является вычисление Хаусдорфова размерностей инвариантных вероятностных мер гомеоморфизмов окружности с точками излома и доказательство предельных теорем для стохастических возмущений отображений окружности.

Объект исследования: гомеоморфизмы окружности с точками излома, инвариантная вероятностная мера, Хаусдорфова размерность, предельные теоремы.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Вычислена Хаусдорфова размерность инвариантной вероятностной меры гомеоморфизмов окружности с двумя точками излома;

Доказана связь между функциями Ляпунова и старшим собственным значением трансфер-операторов ассоциированных отображениями окружности с изломами;

Доказано центральные предельные теоремы для стохастических возмущений отображений окружности с точкой излома и независимым шумом;

Доказано центральные предельные теоремы для стохастических возмущений отображений окружности с зависимым шумом.

Внедрение результатов исследования. Научные результаты, полученные в ходе исследования диссертации, использованы в следующих научно-исследовательских проектах;

центральная предельная теорема, доказанная для гомеоморфизмов окружности с зависимыми случайными возмущениями, использовалась для оценки асимптотического поведения индексов в фундаментальном проекте ОТ-Ф4-40 “Исследование асимптотических свойств, индексированных интегральных эмпирических процессов в классе измеримых функций” (справка № 04/11-5971 Национального университета Узбекистана от 30 сентября 2022 года). Применение научного результата позволило проверить гипотезы о зависимых показателях, индексированных интегральных эмпирических процессов;

полученные результаты для Хаусдорфовых размерностей инвариантных вероятностных мер гомеоморфизма окружности с двумя точками излома, были использованы для генерации плюриполярных множеств, связанных с плюрисубгармоническими функциями в фундаментальном проекте МРУ-ОТ-9/2017 по теме “Многомерный комплексный анализ” (справка № 11-6044 Национальный университет Узбекистана, 4 октября 2022 г.). Использование научного результата позволило найти мощности множеств, образованных из многомерных сложных функций с особыми свойствами.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 91 страниц.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I ; Part I)

1. A.Dzhalilov, D.Mayer, A.Aliyev, The thermodynamic formalism and central limit theorem for stochastic perturbations of circle maps with a break // Russian journal of nonlinear dynamics, 2022, vol. 18, No. 2, pp. 253-282. (3. Scopus IF=0,92).
2. A.Dzhalilov, A.Aliyev, On location of singularity points of circle maps // Uzbek Mathematical Journal, 2019, No 1, pp. 50-59. (01.00.00; №6)
3. A.Aliyev, Invariant probability measure of circle maps with breaks and Hausdorff dimension // Uzbek Mathematical Journal, 2020, No 2, pp. 4-15. (01.00.00; №6)
4. A.Aliyev, Central limit theorem for circle dynamics with external strong mixing noise // Bulletin of the Institute of Mathematics, 2021, Vol.4, No. 6, pp. 1-7. (01.00.00; №17)
5. A.Aliyev, The limit theorems for stochastic perturbations of circle maps with a break // Доклады академии наук Р.Уз, 2022 No 3. стр. 6-10. (01.00.00; №7)
6. A.F.Aliyev, Singular measure on the circle with full Hausdorff dimension // Доклады академии наук Р.Уз, 2022 No 4. стр. 3-6. (01.00.00; №7)

II бўлим (Часть 2 ; Part 2)

7. A.Dzhalilov, D.Mayer, A.Aliyev, Central limit theorem for stochastic perturbations of circle maps with a break // XIII Белорусская математическая конференция, материалы Международной научной конференции, Минск, 20-25 ноября, 2021 г., pp. 29-30.
8. A.A.Dzhalilov, A.F.Aliyev, Hausdorff dimension of invariant measures of piecewise smooth circle maps // Abstracts of the international scientific conference of “Contemporary mathematics and its application”, Tashkent, November 19-21, 2021, pp. 129-130.
9. A.A.Dzhalilov, A.F.Aliyev, Denjoy equality for piecewise linear circle maps // Abstracts of the VI international scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorazmiy 2018”, Tashkent, September13-15, 2018, pp. 23-24.
10. A.A.Dzhalilov, A.F.Aliyev, The location of break points piecewise smooth circle maps // International conference Mathematical analysis and its application to mathematical physics, Samarqand, September 17-20, 2018, pp. 78- 79.
11. A.F.Aliyev, Probability of cardiac diseases and circle map // Materials of the xv international scientific and practical conference trends of modern science -2019, vol. 16, Angliya, May 30- June 7, 2019, pp. 16-18.

12. A.A.Dzhalilov, A.F.Aliyev, Hausdorff dimension of invariant measure of circle maps // Abstracts of international scientific conference on the theme “Modern problems of differential equations and related branches of mathematics”, Vol. II, Fergana, March 12-13, 2020. pp, 138-140.
13. A.F.Aliyev, Central limit theorem for circle maps with a break and external noise // Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference, Tashkent, August 24-15, 2020, pp.150-151.
14. A.F.Aliyev, G.D.Tirkasheva, Hausdorff dimension of invariant measures of piecewise linear circle maps with two breaks //Abstracts of the international scientific and practical conference “Modern problems of applied mathematics and information technologies” , Bukhara, May 11-12, 2022, pp. 11-12.
15. A.A.Dzhalilov, A.F.Aliyev, Central limit theorem for stochastic perturbations of critical circle maps // Stoxastik tahlilning dolzarb muammolari konferensiyasi tezislari to’plami, Vol. I, Toshkent, 20-21 Fevral, 2021, 35-36 b.
16. A.A.Dzhalilov, A.F.Aliyev, The behavior of leading eigenvalue of transfer operators associated by circle maps // “Sarimsoqov o‘qishlari” Respublika ilmiy konferensiyasi tezislari to‘plami, Toshkent, 16-18 sentabr, 2021, 201-202 b.
17. A.A.Dzhalilov, A.F.Aliyev, Кусочно-линейные гомеоморфизмы окружности с несколькими изломами // Abstracts of the republican scientific conference Modern problems of dynamical systems and their applications, Tashkent, May 1-3, 2017, pp. 205-206.
18. A.A.Dzhalilov, A.F.Aliyev, Berry-Esseen theorem for circle maps with a break and external noise // Академик С.Ҳ.Сирожиддинов таваллудининг 100 йиллигига бағишланган «Стохастик таҳлилнинг замонавий муаммолари» конференцияси тезислари тўплами, Тошкент, 16-18 Сентябрь, 2020, 42-43 б.
19. A.A.Dzhalilov, A.F.Aliyev, Central limit theorem for circle dynamics with external strong mixing noise // Abstracts of the international online conference frontier in mathematics and computer science, Tashkent, October 12-15, 2020, pp. 35-36.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
2022 йил 31 октябрда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги
матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,5. Адади 100 дона. Буюртма № 70/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.