**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

**ТОШКЕНТ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ
НУКУС ФИЛИАЛИ**

СЕИДУЛЛАЕВ АБАТ КАМАЛОВИЧ

ИНТЕГРАЛ ГЕОМЕТРИЯНИНГ ПАРАБОЛАЛАР ВА СИНИҚ ЧИЗИҚЛАР ОИЛАЛАРИДАГИ МАСАЛАЛАРНИНГ МОДЕЛЛАРИ ВА АЛГОРИТМЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ГЕОФИЗИКАДА ҚЎЛЛАНИЛИШИ

**05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2022

УДК: 517.9

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ТОШКЕНТ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ
НУКУС ФИЛИАЛИ

СЕИДУЛЛАЕВ АБАТ КАМАЛОВИЧ

ИНТЕГРАЛ ГЕОМЕТРИЯНИНГ ПАРАБОЛАЛАР ВА СИНИҚ ЧИЗИҚЛАР ОИЛАЛАРИДАГИ МАСАЛАЛАРНИНГ МОДЕЛЛАРИ ВА АЛГОРИТМЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ГЕОФИЗИКАДА ҚЎЛЛАНИЛИШИ

**05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2022

Фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида №B2022.2. PhD/FM741 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Тошкент ахборот технологиялари университети Нукус филиалида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Утеулиев Ниетбай Утеулиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Бегматов Акрам Хасанович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Нормуродов Чори Бегалиевич физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Қарши давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил 3 декабрь соат 15^{30}даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz.)

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (143 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2022 йил 21 ноябрь куни тарқатилди.
(2022 йил 25 октябрь даги 12 рақамли реестр баённомаси).

М. М. Арипов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

З. Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

Б. Ф. Абдурахимов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида математик моделлаштиришда интеграл геометрия масалаларига бағишланган изланишлар долзарб бўлиб, илм-фаннинг кўплаб соҳаларида кенг татбиққа эгадир. Интеграл геометрия масалалари тескари масалаларнинг жадал ривожланаётган тармоқларидан бири ҳисобланиб, унинг масалалари амалиётда юқори аҳамиятга эга эканлиги уларни ўрганишнинг долзарблигини ифодалайди. Бундай масалалар турли амалий масалалар билан боғлиқ бўлиб, сейсмик қидирув масалаларининг математик асосини ўрганишда, геофизик ва аэрокосмик кузатувлар маълумотларини таҳлил қилишда, астрофизика ва гидроакустиканинг тескари масалаларини ечишда кенг қўлланилади. Шу сабабли сейсмик маълумотларга асосланиб, ер ости қатламларини махсус эгри чизиқлар оиласида тиклаш алгоритмлари ва амалий дастурлар мажмуасини яратиш амалий математиканинг долзарб вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда қатор амалий масалаларни ечишда учрайдиган ер ости қатламларини тасвир кўринишида тиклаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Хусусан, интеграл геометрия масалаларини ўрганиш математик физика ва анализнинг классик масаласи бўлиб, ҳозирги вақтда бир неча асосий йўналишларда кенг тадқиқ этилмоқда. Шу сабабли интеграл берилганларга асосланиб, махсус эгри чизиқлар оиласида турғунлиги юқори бўлган ер ости қатламларини тасвир кўринишида қайта тиклаш алгоритмларини қуриш, қулай интерфейсга эга дастурлар мажмуасини яратиш мақсадли илмий тадқиқотлардан бири ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган математик физика, геология, компьютер томографияси ва геофизика соҳаларидаги масалаларнинг сонли-аналитик ечиш усулларини ишлаб чиқиш каби долзарб йўналишларга катта эътибор қаратилмоқда. Хусусан, геофизика соҳаларида қўлланиладиган интеграл геометрия масалаларини тадқиқ қилиш, Фурье анализ ва ҳисоблаш математикаси усулларини ҳисобга олган ҳолда, объектларнинг ички структураларини интеграл характеристикалари бўйича тасвир кўринишида қайта тиклаш жараёнларини автоматик равишда бошқариш бўйича муҳим натижаларга эришилди. «Функционал анализ, алгебра, дифференциал тенгламалар, математик физика, математик моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» каби устувор йўналишлар бўйича халқаро стандартлар даражасидаги илмий изланишлар олиб бориш ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятининг асосий вазифаларидан бири ҳисобланади[1]. Ушбу қарор ижросини таъминлашда объектнинг ички структураларини тиклашда интеграл геометрия усулларига асосланган математик моделлаштириш назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий- тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа меъёрий-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологияларни ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация иши республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Интеграл геометрия усуллари функциялар, дифференциал шакллар, тензорлар ва бошқа объектларнинг турлантиришларини, маълум бир кўпхилликлар оиласидаги қисмкўпхилликлар бўйлаб интеграллар тўпламларига мос кўпхилликда берилган турлантиришларни ўрганишнинг асосий воситаларидан бири ҳисобланади. Интеграл геометрия фанининг бундай тушунчаси И.М.Гельфанд ва унинг мактаби, шунингдек, С.Хелгасон асарларида шаклланган. Интеграл геометрияни геометрик эҳтимоллар назарияси маъносида тушунишдан фарқланади. И.М.Гельфанд, С.Г.Гиндикин, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин, Г.М.Хенкин ва бошқа муаллифларнинг асарларида Радон турлантириши ва унинг ҳақиқий, комплекс, проектив фазолардаги ва доимий эгрилик фазоларидаги аналоглари ўрганилган, p-ўлчовли текисликлар учун интеграл геометрия турлантиришлари билан дифференциал шакллар турлантиришлари ўрганилган ҳамда уларнинг шу соҳаларда қўлланилиши келтирилган.

Интеграл геометрия масалалари математик физикада ва дифференциал тенгламалар учун тескари масалалар назариясида мавжуд бўлиб, улар тескари кинематик сейсмик масаласи линеаризацияси сифатида берилган. Бундай масалалар бўйича М.М.Лаврентъев, В.Г.Романов, Ю.Э.Аниконов, А.Л.Бухгейм, Акб.Ҳ.Бегматов ва бошқа муаллифлар ишларида самарали натижалар олинган. Бундай ҳолда, интеграл геометрия шакл алмаштиришидаги интеграллаш тўғри чизиқлар ёки текисликлар бўйлаб эмас, балки мураккаброқ табиатдаги эгри чизиқлар фазоси бўйлаб амалга оширилиши кўрсатилган. Қоидага кўра, бундай шакл алмаштиришлар учун аниқ формулаларни қуриш мумкин эмас ва шунинг учун ҳам тикланишнинг ягоналиги ва унинг турғунлиги тавсифлаш масалалари муҳим ўрин эгаллаган.

Сейсмик маълумотларни қайта ишлашнинг энг асосий муаммоларидан бири сигнал-шовқин нисбатини ошириш учун фойдали сигналларни йиғишдан иборатдир. Сейсмик маълумотларни қайта ишлаш учун A.M.Cormack, A.J. Harding, J.R.Thorson, J.F.Claerbout, G.Turner чизиқли Радон турлантиришларини янада ривожлантирилган. S.H.Bickel, D.Hampson, M.M.Nurul Kabir, D.J.Verschuur, E.Maelandларнинг ишларида объектнинг қўзғалиши ва кўрилаётган сигналининг хусусиятларига қараб махсус параболик ва гиперболик Радон шакл алмаштиришларидан фойдаланилган. Бугунги кунда мамлакатимизда интеграл геометрия ва корректмас масалалар билан тавсифланадиган жараёнларни математик моделлаштириш ва уларни сонли усуллар ёрдамида тақрибий ечиш муаммолари Ш.А.Алимов, К.Фаязов, Акр.Ҳ.Бегматов, Б.Абдурахимов, А.Хасанов, Н.У.Утеулиев, Г.М.Джайков, З.Очиловлар томонидан ўрганилмоқда ва салмоқли назарий, амалий натижаларни қўлга киритилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган илмий-тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Тошкент ахборот технологиялар университети Нукус филиали илмий-тадқиқот ишлари режасининг ФЗ-2019081578 рақамли “Оралбуйи қишлоқ хўжалиги ишлаб чиқаришида экологик вазиятлар таъсирини аниқлаш мониторингини юритишнинг дастурий таъминоти” мавзусидаги лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади сейсмик маълумотларни қайта ишлаш ва тиклаш масалаларини ечиш учун математик моделларни ишлаб чиқиш, сонли ечиш усуллари ва алгоритмларини қуришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

синиқ чизиқлар оиласидаги интеграл геометрия масаласи учун ечимнинг мавжудлиги, ягоналиги, турғунлиги теоремалари исботлаш ва унинг аниқ инверсия формуласи олиш ва шу формула асосида сейсмик маълумотларни қайта тиклаш масалалари сонли ечиш;

сейсмик интеграл маълумотлар хатолик билан берилганда Тихонов ва Лаврентьев регуляризациялар ёрдамида ҳисоблаш алгоритмлари қуриш ва сейсмограммани қайта тиклаш масаласин сонли ечиш;

параболалар оиласидаги интеграл геометрия масалалари учун ечимнинг ягоналиги ва турғунлиги теоремалари исботлаш ва Фурье образи учун ечимнинг аниқ инверсия формуласи олиш;

параболалар оиласидаги интеграл геометрия масаласи ечимининг биринчи ўзгарувчи бўйича Фурье образи топиш ва Тихоновнинг корректмас масалаларнинг регуляризацияси назариясига асосланиб, аниқ ечимига яқинлашувчи ечимлар кетма-кетлиги қуриш.

Тадқиқотнинг объекти интеграл маълумотлар, маълум математик фантомлар, алгоритмик ва дастурий таъминотлардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети сейсмик маълумотларни қайта ишлаш учун математик моделлар ҳамда мос алгоритмик ва дастурий таъминотни яратишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида корректмас масалаларни ечиш назарияси, интеграл тенгламалар, функционал анализ, ҳисоблаш усуллари, математик моделлаштириш ва объектга йўналтирилган дастурлаш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

синиқ чизиқлар оиласидаги интеграл геометрия масаласи учун ечимнинг мавжудлиги, ягоналиги, турғунлиги теоремалари исботланган ва аниқ инверсия формуласи олинган ва шу формула асосида сейсмик маълумотларни қайта тиклаш масалалари сонли ечилган;

сейсмик интеграл маълумотлар хатолик билан берилганда Тихонов ва Лаврентьев регуляризациялар ёрдамида ҳисоблаш алгоритмлари қурилган ва сейсмограммани қайта тиклаш масаласи илк бор сонли ечилган;

параболалар оиласидаги интеграл геометрия масалалари учун ечимнинг ягоналиги ва турғунлиги теоремалари исботланган ва Фурье образи учун аниқ инверсия формуласи олинган;

параболалар оиласидаги интеграл геометрия масаласи ечимининг биринчи ўзгарувчи бўйича Фурье образи топилган ва Тихоновнинг корректмас масалаларнинг регуляризацияси назариясига асосланиб, аниқ ечимига яқинлашувчи ечимлар кетма-кетлиги қурилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

сейсмик қидирув масалаларида олинган сейсмограммани қайта тиклашда интеграл геометрия масалаларини синиқ чизиқлар оиласида илк бор сонли ечиш алгоритмлари ишлаб чиқилган;

параболалар оиласидаги интеграл геометрия масалаларида интеграл маълумотлар хатолик билан берилганда масалани регуляризация ёрдамида сонли ечиш учун дастурлар мажмуи ишлаб чиқилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги назарий тасдиқларнинг исботи, ишлаб чиқилган алгоритмларнинг таҳлили ва сонли тажриба натижалари билан тасдиқланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти интеграл геометрия усулларидан фойдаланиб, интеграл берилганлар бўйича функцияларни тиклаш теоремалари исботланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти геофизика соҳаларида юзага келадиган интеграл берилганлар бўйича қайта тиклаш масалаларини сонли ечишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Синиқ чизиқлар ва параболалар оилаларида интеграл геометриянинг масалаларини сонли ва аналитик ечиш бўйича олинган илмий натижалар асосида:

сейсмик маълумотларни қайта ишлаш учун ишлаб чиқилган дастурий мажмуадан Устюрт геофизика экспедициясида тасвир кўринишидаги фойдали геологик ва геофизик маълумотларни қайта ишлаш учун фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси давлат геология ва минерал ресурслар қўмитаси “Ўзбекгеофизика” АЖнинг 2022 йил 1 июндаги 01-894-сон маълумотномаси).

Илмий натижаларнинг қўлланилиши сейсмик маълумотларни қайта ишлаш ва улардан фойдали маълумотларни ажратиб олиш имконини берган;

интеграл геометриянинг синиқ чизиқлар ва параболалар оиласи масалаларига оид назарий натижалардан “Ностационар чегаравий масалларни сонли ечишнинг математик саволлари” мавзусидаги фундаменталь лойиҳада ностационар чегаравий масалаларни ечишда фойдаланилган (Қорақалпоқ давлат университетининг 2022 йил 3 июндаги 01-22-04/263-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ностационар чегаравий масалалар ечимларининг ягоналиги ва турғунлигини исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари жумладан 12 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 22 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та мақола, жумладан 4 таси хорижий, 3 таси республика журналларида нашр этилган. 1 та дастурий маҳсулотга гувоҳнома олинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 95 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялари тараққиётининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган. Тадқиқотнинг мақсад ва вазифалари белгилаб олинган ҳамда тадқиқот объекти ва предмети аниқланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган. Олинган натижаларнинг ишончлилиги асослаб берилган, уларнинг назарий ва амалий аҳамияти очилган, тадқиқот натижаларини амалда жорий қилиш ҳолати, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи **«Интеграл геометрия ва унинг сейсморазведка ишларида қўлланилиши»** бобида интеграл геометрия масаласининг қўйилиши, мавзу бўйича тадқиқот ва адабиётларнинг қисқача таҳлили, шунингдек ўрганиш натижаларини муҳокама қилиш учун зарур бўлган асосий тушунчалар ва ёрдамчи тасдиқлар келтирилган.

Фараз қилайлик, $x \in R^n$, $x = (x_1, \dots x_n)$, $y \in R^m$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $S(y)$ – R^n соҳада берилган m ўлчовли y параметрга боғлиқ эгри чизиқлар оиласи, $\dim S = p$; $u(x)$ – бирор $D \subset R^n$ соҳада аниқланган функция; $\rho(x, y)$ – x, y эркли ўзгарувчили функция; $\omega(y)$ – $S(y)$ эгри чизиқлар оиласининг ўлчами.

Қўйидаги тенгликни қарайлик:

$$\int\limits_{S(y)} \rho(x,y)u(x)d\omega = f(y). \qquad (1)$$

Интеграл геометрия математиканинг бир қисми бўлиб, (1) формулага кирувчи элементлар орасидаги ўзаро ҳар хил боғлиқликлар ўрганилади.

(1) тенгламани $u(x)$ функцияга нисбатан чизиқли оператор кўринишидаги тенглама деб қараймиз. Интеграл геометриянинг классик оператори – Радон шакл алмаштиришидир. У $u(x)$ функцияни барча мумкин бўлган гипертекисликлар устидаги интеграллар билан боғлайди.

Кўпгина амалий масалалар интеграл геометрия масалаларига олиб келинади, хусусан у сейсмик маълумотлар, физик муҳитнинг шаффофлиги, рентген тасвирларини интерпретациялашда қўлланилади.

М.М.Лаврентьев ва В.Г.Романовларнинг ишларига асосланиб, интеграл геометриянинг энг муҳим хусусиятларини санаб ўтамиз. Бу, биринчидан, функцияларнинг муайян синфида (1) тенглама ечимининг ягоналиги масаласидир. Иккинчидан, ечимнинг турғунлигини баҳолаш. Интеграл геометриядаги масалаларнинг кенг синфларида юқори даражада турғун бўлмаган масалалар мавжудлигини ҳисобга олсак, шартли турғунликни баҳолаш ҳам катта аҳамиятга эга. Изланаётган функцияни қайта тиклаш жараёнини ишлаб чиқиш масаласи: бу умумий ҳолда бу учун самарали ҳисоблаш алгоритмларини яратиш, хусусан регуляризацияни қуриш талаб қилинади. Алоҳида қизиқишни, албатта, ўтиш формулаларини ошкор кўринишда, яъни $f(y)$ функция орқали $u(x)$ функцияни ифодаловчи аналитик ифодаларни топиш уйғотади. Афсуски, бу фақат алоҳида ҳолларда мумкин, қоида тариқасида, бу ҳолда кўпхилликлар ва вазн функциялари автоморфизмларининг етарлича бой гуруҳига эга бўлган фазони ўзига акслантиришда ўзгармас деб ҳисобланади. Ва ниҳоят, масаланинг ечимини, шунингдек (1) формуладаги каби ифодаланувчи $f(y)$ функция қаноатлантириши керак бўлган зарурий ва етарли шартларни топиш.

Диссертациянинг иккинчи «**Параболалар ва синиқ чизиқлар оилалари бўйича интеграл геометрия масалаларини математик моделлаштириш**» бобида интеграл геометриянинг синиқ чизиқлар ва параболалар оилаларидаги масалалари келтирилган. Синган чизиқлар оиласига тегишли масала учун ўнг томон орқали ифодаланадиган аниқ ечими олинган, шунингдек, масаланинг Соболев фазосида турғунлиги ва ечимнинг мавжудлиги теоремалари исботланган. Интеграл геометриянинг параболалар оиласи учун иккита масала кўриб чиқилган. Биринчи масала вазн функцияси $g(x,y) = \mathrm{sgn}(x-\xi)$ бўлганда параболанинг икки томонга тармоқланган чизиқлар бўйича интеграланнадиган масалага келтирилган. Бу масала учун ечимнинг турғунлиги баҳоланиб, унинг асосида ечимнинг ягоналиги исботланган. Иккинчи масала вазн функцияси бирга тенг бўлганда Вольтеррнинг иккинчи тур масаласига олиб келиниб, унинг ечимининг ягоналиги исботланган. Бу масалалар қатъий корректмас масалалар бўлгани учун регуляризация масаласи ҳам кўриб чиқилган. Бу регуляризация масалалари учун ўнг томон орқали ифодаланадиган аниқ ечим, шунингдек турғунлик баҳоси олинган.

2.1-масала. $L_H = \{(x,y): x \in R^1, 0 \le y \le H, H < \infty\}$ соҳада $\Gamma(x,y) = \{(\xi,\eta): y - \eta = |x - \xi|, 0 \le y \le H\}$ эгри чизиқлар оиласи бўйича интеграли

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} g(x,y)u(\xi,\eta)d\xi = f(x,y) \qquad (2)$$

маълум бўлган $g(x,y) = \mathrm{sgn}(x-\xi)$ вазн функцияси учун икки ўзгарувчили $u(x,y)$ функцияни тикланг.

2.2-масала. L_H соҳада интегралларнинг

$$\int\limits_{\Gamma_4(x,y)} g(x,\xi)u(\xi,\eta)d\xi + \int\limits_0^y \int\limits_{x-h}^{x+h} K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta = \mathbb{F}(x,y) \qquad (3)$$

кўринишидаги йиғиндиси маълум бўлган икки ўзгарувчили $u(x,y)$ функциясини тикланг. Бу ерда $h = y - \eta$.

2.1-масала интеграл геометриянинг интеграл тенгламасининг Вольтерр туридаги масаласи бўлса, 2.2-масала қўзғалишли интеграл геометрия масаласига мос келади.

Теорема 2.1. *Агар $f(x,y)$ функция барча $(x,y) \in L_H$ учун аниқланган, вазн функцияси эса $g(x,\xi) = \mathrm{sgn}(x-\xi)$ кўринишга эга бўлса, у ҳолда L_H соҳада финит ташувчига эга икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфида 2.1-масаланинг ечими*

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\xi,y)d\xi \qquad (4)$$

формула асосида ягона тарзда $f(x,y)$ функцияси бўйича ифодаланади ва у

$$\|u(x,y)\|_{W_2^{1,0}} \le C_1 \|f(x,y)\|_{W_2^{2,2}}$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Бу ерда C_1 – ўзгармас мусбат сон.

Теорема 2.2: *Айтайлик, $f(x,y)$ функция барча $(x,y) \in L_H$ учун аниқланган ва қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

1) $f(x,y)$ функция x ўзгарувчиси бўйича финит функция;

2) $f(x,y)$ функция иккинчи тартибгача узлуксиз барча хусусий ҳосилаларга эга бўлсин;

3) L_H соҳа чегараларида, яъни $y = 0$ ва $y = H$ да $f(x,y)$ функцияси ўзининг иккинчи тартибгача бўлган барча хусусий ҳосилалари билан нолга тенг бўлсин.

У ҳолда (4) *формула x аргументи бўйича финит функция бўлган икки марта дифференциалланувчи узлуксиз функциялар синфида 2.1- масаланинг ечими мавжуд.*

Теорема 2.3. *Агар вазн функцияси* $g(x,\xi)=\operatorname{sgn}(x-\xi)$ *кўринишга эга бўлса,* $K(x,y,\xi,\eta)$ *финит функция* $\Gamma(x,y)$ *эгри чизиқ устида ўзининг иккинчи тартиблигача бўлган барча хусусий ҳосилалари билан нолга тенг бўлса, у ҳолда 2.2-масаланинг ечими икки марта дифференциалланувчи финит функциялар синфида ягона бўлади ва у учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\|u(x,y)\|_{W_2^{1,0}}\le C_2\|\mathbb{F}(x,y)\|_{W_2^{2,2}},$$

бу ерда C_2 *– ўзгармас мусбат сон.*

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$L_H=\{(x,y):x\in(-\infty;\infty),0\le\eta\le y\le H,H<\infty\},$$
$$\overline{L_H}=\{(x,y):x\in[-\omega;\omega],0\le\eta\le y\le H,H<\infty\},$$
$$\Omega_G=\{(x,y):x\in(-\infty;\infty),0\le y\le\eta\le G,G<\infty\},$$
$$\overline{\Omega_G}=\{(x,y):x\in[-\omega;\omega],0\le y\le\eta\le G,G<\infty\}.$$

2.3-масала. L_H соҳада $\left\{\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta):\ x-\xi=\sqrt{y-\eta},\ 0\le\eta\le y\right\}\right\}$ эгри чизиқлар оиласи бўйича

$$\int_{\Upsilon(x,y)}u(\xi,\eta)d\xi=f(x,y) \tag{5}$$

интеграл қиймати маълум бўлса, у ҳолда икки ўзгарувчили $u(x,y)$ функцияни тикланг.

2.4-масала. Ω_G соҳада $\left\{\Lambda(x,y)=\left\{(\xi,\eta):\ x-\xi=\sqrt{\eta-y},\ y\le\eta\le G\right\}\right\}$ эгри чизиқлар оиласи бўйича

$$\int_{\Lambda(x,y)}u(\xi,\eta)d\xi=f(x,y) \tag{6}$$

интеграл маълум бўлган икки ўзгарувчили $u(x,y)$ функцияни тикланг.

Лемма 2.1. Фараз қилайлик, $f(x,y)$ функция икки марта узлуксиз дифференциалланувчи ва L_H соҳада финит бўлсин. У ҳолда L_H соҳада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи финит функциялар синфига тегишли (5) тенгламанинг ечими ягона ва у учун қуйидаги муносабат ўринли:

$$\hat{u}(\lambda,y)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y\frac{ch\left(\lambda\sqrt{y-\eta}\right)}{\sqrt{y-\eta}}\hat{f}(\lambda,\eta)d\eta. \tag{7}$$

Теорема 2.4. *Айтайлик,* $f(x,y)$ *функция* L_H *соҳада аниқланган бўлсин. (7) тенглама учун* $R(u,\alpha)=\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{u}\ e^{-\alpha_1^2\lambda^2}\right]$ *регуляризация операторини ташкил этсин. У ҳолда* L_H *соҳанинг* $\bar{L}_H$ *тўртбурчак ташувчига эга узлуксиз, икки марта дифференциалланувчи финит функциялар синфида 2.3- масаланинг ечимини*

$$u_{\alpha_1}(x,y)=\frac{1}{2\alpha_1\sqrt{\pi^3}}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{y-\eta-(x-\xi)^2}{4\alpha_1^2}}\cos\frac{(x-\xi)\sqrt{y-\eta}}{2\alpha_1^2}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\xi d\eta$$

ташкил этади ва у учун қўйидаги тенгсизлик ўринли:

$$\left\|u_{\alpha_1}-u\right\|_{L_2\left(\overline{L_H}\right)}\le C_3\alpha_1^2\|f\|_{L_2\left(\overline{L_H}\right)}$$

бу ерда α_1 *–регуляризация параметри;* C_3 *– мусбат ўзгармас сон.*

Лемма 2.2. Фараз қилайлик, $f(x,y)$ функция икки марта узлуксиз дифференциалланувчи ва Ω соҳада финит бўлсин. У ҳолда Ω соҳада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи финит функциялар синфига тегишли (6) тенгламанинг ечими

$$\hat{u}(\lambda,y)=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_y^H\frac{ch\left(\lambda\sqrt{\eta-y}\right)}{\sqrt{\eta-y}}\hat{f}(\lambda,\eta)d\eta \qquad (8)$$

ягонадир.

Теорема 2.5. *Айтайлик,* $f(x,y)$ *функция* Ω_G *соҳада аниқланган бўлсин. (8) тенглама учун* $R(u,\alpha)=\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{u}\,e^{-\alpha_2^2\lambda^2}\right]$ *регуляризация оператори мавжуд. У ҳолда* Ω_G *соҳанинг* $\bar{L}_H$ *тўртбурчагида ташувчига эга икки марта узлуксиз дифференциалланувчи финит функциялар синфида 2.4-масаланинг ечими*

$$u_{\alpha_2}(x,y)=-\frac{1}{2\alpha_2\sqrt{\pi^3}}\frac{\partial}{\partial y}\int_y^G\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{\eta-y-(x-\xi)^2}{4\alpha_2^2}}\cos\frac{(x-\xi)\sqrt{\eta-y}}{2\alpha_2^2}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{\eta-y}}d\xi d\eta$$

га тенг ва у қуйидаги тенгсизликни бажаради:

$$\left\|u_{\alpha_2}-u\right\|_{L_2\left(\overline{\Omega_G}\right)}\le C_4\alpha_2^2\|f\|_{L_2\left(\overline{\Omega_G}\right)},$$

бу ерда α_2 *–регуляризация параметри;* $\mathcal{F}^{-1}$ *– тескари шакл алмаштириш;* C_4 *– мусбат константа.*

Диссертациянинг учинчи "**Параболалар ва синиқ чизиқлар оилаларида интеграл геометрия масаласининг сонли ечимларини топиш**" бобида синиқ чизиқлар оиласида ечимни топишнинг сонли алгоритми ва Тихонов регуляризацияси ёрдамида шовқинли интеграл маълумотли масаланинг ечимини топишнинг алгоритми яратилган. А.Н.Тихоновнинг корректмас масалаларни регуляризация қилиш ғоясидан келиб чиқиб, параболалар оиласида аниқ ечимга мос тақрибий ечимлар кетма-кетлиги қурилган.

2.1-масалани сонли ечиш усулини кўриб чиқамиз. Масаланинг аниқ ечими қўйидаги кўринишга эга:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\xi,y)d\xi.$$

Тўғри бурчакли $D=[-1;1]\times[0;2]$ соҳада ўзгармас қадамли тўрни киритамиз. Мазкур тўғри тўртбурчакда масаланинг тақрибий ечимини қидирамиз.

Масалани ечиш алгоритми

1-қадам. Ox ўқидаги $[-1,1]$ кесмани ва Oy ўқидаги $[0,2]$ кесмани мос равишда n_x-1 ва n_y-1та тенг бўлакларга бўламиз, $x_i=-1+(i-1)h_x$, $y_j=(j-1)h_y$, $N=n_x=n_y$ белгилашларни киритамиз.

2-қадам. $u(x_i,y_j)$ функциянинг тақрибий қийматларини белгилаймиз:

$$u^A(x_i,y_j)=\int_{-1}^{x_i}F(\xi,y_j)d\xi, \tag{9}$$

бу ерда $F_{ij}=\dfrac{f_{i+1j}-2f_{ij}+f_{i-1j}}{2\sqrt{2}h_x{}^2}-\dfrac{f_{ij+1}-2f_{ij}+f_{ij-1}}{2\sqrt{2}h_y{}^2}$.

1-жадвал

Шепп-Логан фантоми берилганлари

Эллипс	**Маркази**	**Катта ўқи**	**Кичик ўқи**	**Эллипсни буриш бурчаги γ**	**Зичлик ρ**
1	(0,0)	0.69	0.92	0	2
2	(0,–0.0184)	0.6624	0.874	0	–0.98
3	(0.22,0)	0.11	0.31	18°	–0.02
4	(–0.22,0)	0.16	0.41	8°	–0.02
5	(0,0.35)	0.21	0.25	0	0.01
6	(0,0.1)	0.046	0.046	0	0.01
7	(0,–0.1)	0.046	0.046	0	0.01
8	(–0.08,–0.605)	0.046	0.023	0	0.01
9	(0,–0.605)	0.023	0.023	0	0.01
10	(0.06,–0.605)	0.023	0.046	0	0.01

Юқорида тавсифланган функцияни таклиф этилган алгоритмлар асосида тиклаш учун C++ дастурлаш тилида дастурлар пакети ишлаб чиқилди. Алгоритмлар маркази ва ярим ўқлари билан берилган 10 та эллипс мисолида синовдан ўтказилди. Бу мисолда маркази координата бошидан бошқа нуқтада жойлашган эллипслар қуйидаги шакл алмаштиришлар ёрдамида аниқланди:

$$x'=(x-x_0)\cos\gamma+(y-y_0)\sin\gamma,\ y'=(x-x_0)\sin\gamma+(y-y_0)\cos\gamma,$$

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\rho,\ агар\ \dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}\le 1,\\ 0,\ агар\ \dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}>0.\end{cases}$$

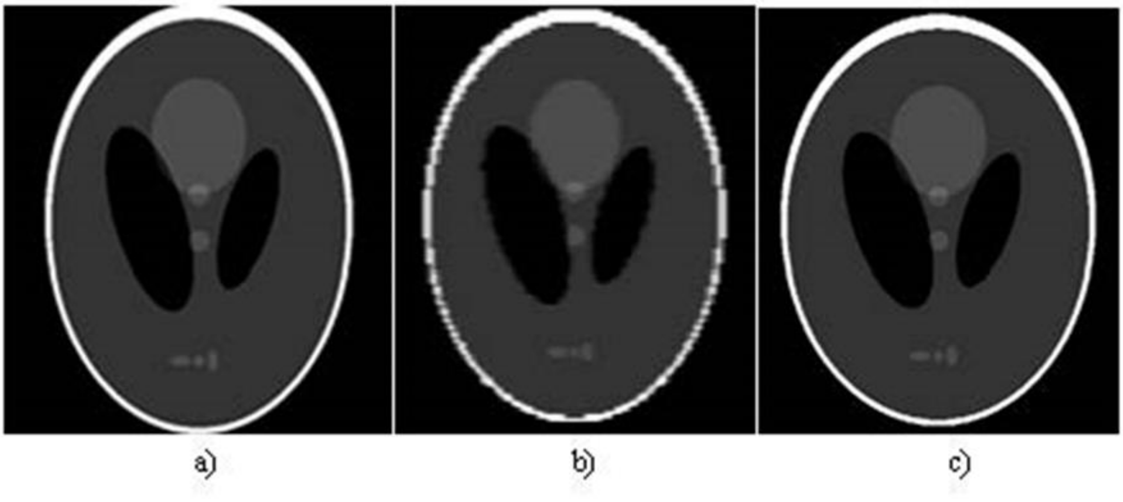
Ушбу модель қайта тиклаш учун ўта мураккаб объектдир, чунки у ёпиқ қобиқ ичида жойлашган кўплаган ўзаро кесишувчи соҳаларини ўз ичига олади. Натижалар 1-жадвалда келтирилди. Унда зичлик деганда берилган эллипснинг ранги тушинилади.

Сонли ҳисоблаш натижаларини қуйида келтирилган 2-жадвал ва 1-расмда кўрса бўлади.

2-жадвал

***N* нинг ҳар хил қийматларидаги нисбий хатоликлар**

N	64	128	256	512
$\sqrt{\dfrac{\left(u^A\left(x_i,y_j\right)-u\left(x_i,y_j\right)\right)^2}{u^2\left(x_i,y_j\right)}}$	0.34083	0.226749	0.155605	0.109906



1-расм. Тасвирни тиклаш. а) оригинал тасвир; б) $N=128$ бўлганда тиклаш; в) $N=512$ бўлганда тиклаш

2.1-масаладаги икки ўзгарувчили $u\left(x,y\right)$ функциянинг тикланишини кўриб чиқайлик. Агар (2) тенгламанинг ўнг қисми баъзи бир хатолик билан тақрибий берилган бўлса, у ҳолда (4) формуладан фойдаланиш қўпол хатоликка олиб келади.

(2) тенгламанинг аниқ ечими қўйидаги кўринишга эга:

$$u\left(x,y\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}f^{\delta}\left(\xi,y\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}f^{\delta}\left(\xi,y\right)\right)d\xi.$$

Айтайлик, $u(x,y)$ функция $[0;1]\times[0;1]$ квадратда аниқланган бўлсин. Сонли ечимни мазкур квадратда қидирамиз. Интеграл ости ифодаларини қўйидагича белгилаймиз:

$$\psi\left(x,y_j\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f^{\delta}\left(x,y_j\right),\;\; \varphi\left(x_i,y\right)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}f^{\delta}\left(x_i,y\right).$$

Дифференциаллаш масаласини биринчи тур Вольтерр тенгламаси кўринишида ёзиш мумкин:

$$\int_0^1 K(x,s)\psi(s,\cdot)ds=f^{\delta}(x,\cdot)-f^{\delta}(a,\cdot), \tag{10}$$

$$K(x,s)=\begin{cases}(1-s)x, & 0\le x\le s,\\ (1-x)s, & s\le x\le 1.\end{cases}$$

Ox ўқида $[0;1]$ кесмани ва Oy ўқидаги $[0;1]$ кесмани мос равишда n_x-1 ва n_y-1 бўлакларга бўламиз: $x_i=(i-1)h_x, y_j=(j-1)h_y$. $N=n_x=n_y$ белгилаш киритамиз.

Тўрда дискретлаш ва квадратура формулалари бўйича интеграл тенгламани аппроксимациялашдан сўнг (8) тенглама мусбат аниқланган матрицали чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишга келади.

$$(x_i-1)\int_0^1 s\psi(s,\cdot)ds+x_i\int_0^1(1-s)\psi(s,\cdot)ds=f^{\delta}(x,\cdot)-f^{\delta}(a,\cdot). \tag{11}$$

Трапеция усулидан фойдаланиб, $\left(\psi_1,\psi_2,...,\psi_{n_x-1}\right)$ компонентали ψ векторга нисбатан (9) тенгламалар системасини қўйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$A_h\psi=\tilde{f}^{\delta}, \tag{12}$$

бу ерда $\tilde{f}^{\delta}=f^{\delta}(x,\cdot)-f^{\delta}(0,\cdot)$.

Шундай қилиб, (12) масала корректмас масала синфига тегишили бўлганлиги сабабли, тенгламани дискретлаштириш натижасида ҳосил бўлган ЧАТС ёмон шартлашган ҳисобланади ва уни ечишда қўйидаги иккита усулдан фойдаланамиз.

Тихонов усули:

$$\left(A_h^T A_h+\alpha_x E\right)\psi=A_h^T\tilde{f}^{\delta}, \qquad \psi=\left(A_h^T A_h+\alpha_x E\right)^{-1}A^T\tilde{f}^{\delta}, \tag{13}$$

Лаврентьев усули:

$$\left(A_h+\alpha_x E\right)\psi=\tilde{f}^{\delta}, \qquad \psi=\left(A_h+\alpha_x E\right)^{-1}\tilde{f}^{\delta}, \tag{14}$$

бу ерда α_x – регуляризация параметри; E – бирлик матрица.

α регуляризация параметрини танлаш жараёнини тавсифлаймиз. Дастлаб α нинг бирор бир қийматлари тўплами берилсин:

$$\alpha_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i \alpha_{i-1}, \ \ \alpha_0 = 1, \ i = 1,2,3,...$$

α_x қийматлар қатори учун (13) ва (14) ЧАТС ечилади. Ечим хатолигига нисбатан қуйидагини топамиз:

$$\varepsilon(\alpha_x) = \left\|\psi_{ij}^{\alpha_x} - \psi_{ij}\right\|_{L_2} / \left\|\psi_{ij}\right\|_{L_2} \to \min.$$

Сўнгра (13) ва (14) формулалар бўйича $\psi^{\alpha_{opt,x}}$ топилади. Шу каби қўйидаги тенглама

$$\int_0^1 K(y,\tau)\varphi(\cdot,\tau)d\tau = f^{\delta}(\cdot,y), \ \ K(y,\tau) = \begin{cases}(1-\tau)y, \ 0 \le y \le \tau, \\ (1-y)\tau, \ \tau \le y \le 1,\end{cases}$$

ҳам ечилиб,

$$\varphi = \left(B^T B + \alpha_y E\right)^{-1} B^T \tilde{f}^{\delta}, \ \ \varphi = \left(B + \alpha_y E\right)^{-1} \tilde{f}^{\delta}$$

аниқланди. Натижада (2) тенглама ечими

$$u\left(x_i, y_j\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{x_i} \left(\psi\left(\xi, y_j\right) - \varphi\left(\xi, y_j\right)\right) d\xi \qquad (15)$$

формула тарзида топилди.

Тавсифланган усул бўйича алгоритмларнинг сифатини текшириш учун Тихонов ва Лаврентьев регуляризация усулларини қўллашда тасодифий шовқиннинг объектнинг ички тузилишини тиклаш хатосига таъсирини аниқлаш учун ҳисоблаш тажрибалари ўтказилди.

Сонли ҳисоблаш натижаси билан таққослаш учун синов тариқасида $f(x,y) = 2xy^2 - \frac{1}{3}xy^4$ функциядан фойдаланилди. Қўйида Тихонов ва Лаврентьев регуляризация усулларининг нисбий хатосини кўрсатадиган жадвалларни келтирамиз.

3-жадвал

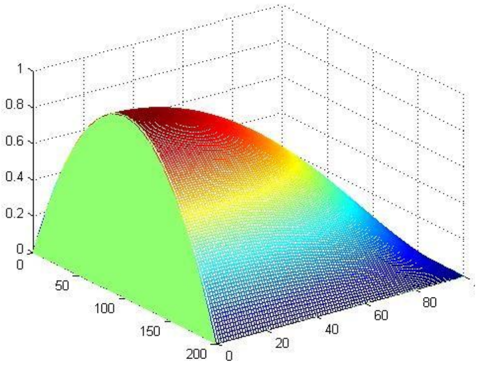
Функцияни $\alpha = 10^{-6}$ қийматида 10% шовқин билан қайта тиклаш

$\left\|u_{ij}^{\alpha} - u_{ij}^{T}\right\| / \left\|u_{ij}^{T}\right\|$	$N = 64 \times 64$	$N = 128 \times 128$	$N = 256 \times 256$
Тихонов регуляризацияси	0,248898	0,247558	0,212097
Лаврентьев регуляризацияси	0,105565	0,056436	0,029475

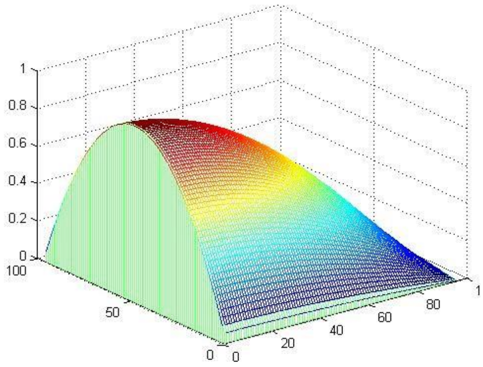
4-жадвал

Функцияни $\alpha=10^{-6}$ қийматида 5% шовқин билан қайта тиклаш

$\left\|u_{ij}^{\alpha}-u_{ij}^{T}\right\| / \left\|u_{ij}^{T}\right\|$	$N=64\times 64$	$N=128\times 128$	$N=256\times 256$
Тихонов регуляризацияси	0,248154	0,211112	0,210622
Лаврентьев регуляризацияси	0,106586	0,057289	0,029807



2-расм. Функциянинг асли



3-расм. Қайта тиклаш натижаси

2.3-масалани ечишнинг алгоритмини келтирамиз.

1-қадам. Ox ўқида $[a,b]$ кесмани ва Oy ўқида $[c,d]$ кесмани мос равишда n_x-1 ва n_y-1 тенг бўлакларга бўламиз ва $x_i=a+(i-1)h_x,\ \ y_j=b+(j-1)h_y$ тўрни киритамиз.

2-қадам. $u(x_i,y_j)$ функциясининг тақрибий қийматларини

$$u_{\alpha_1}(x_i,y_j)=\frac{G_{ij+1}-G_{ij-1}}{4\alpha_1 h_y\sqrt{\pi^3}} \tag{15}$$

формула асосида топамиз. Бу ерда

$$G_{ij}=\int_{0}^{y_j}\int_{-1}^{1} e^{\frac{y_j-\eta-(x_i-\xi)^2}{4\alpha_1^2}}\cos\frac{(x_i-\xi)\sqrt{y_j-\eta}}{2\alpha_1^2}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{y_j-\eta}}d\xi d\eta,$$

α_1 – регуляризация параметри.

α_1 регуляризация параметрини танлаш жараёнини тавсифлаймиз. Биринчидан α нинг аниқланган қийматлар қатори берилсин:

$$\alpha_i=\theta\alpha_{i-1},\ \ 0<\theta<1,\ i=1,2,3,\ldots,m. \tag{16}$$

u_{α_i} ечимининг хатолигига нисбатан топамиз:

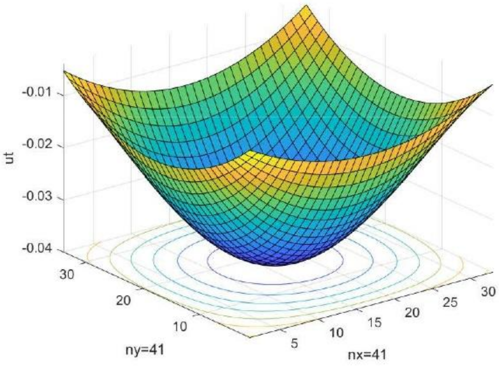
$$\varepsilon(\alpha_1)=\left\|u_{ij}^{T}-u_{ij}^{\alpha_1}\right\| / \left\|u_{ij}^{T}\right\|\rightarrow \min. \tag{17}$$

Сонли ҳисоблаш натижаси билан таққослаш учун синов тариқасида

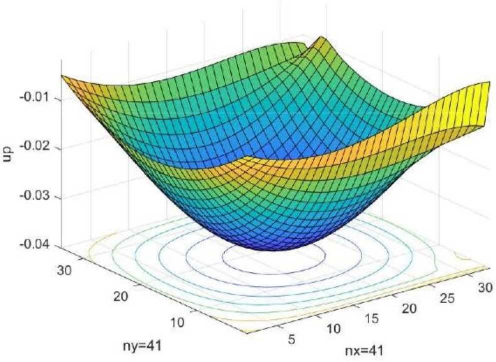
$$u(x,y)=\left(1-x^2\right)\left(y^2-\frac{2}{5}y\right)$$

функциясидан фойдаланамиз.

Тўғри бурчакли $D=\left[-1;1\right]\times\left[0;0,5\right]$ соҳада тенг қадамли тўрни киритамиз. Алгоритм натижалари қўйидаги расмларда келтирилган.

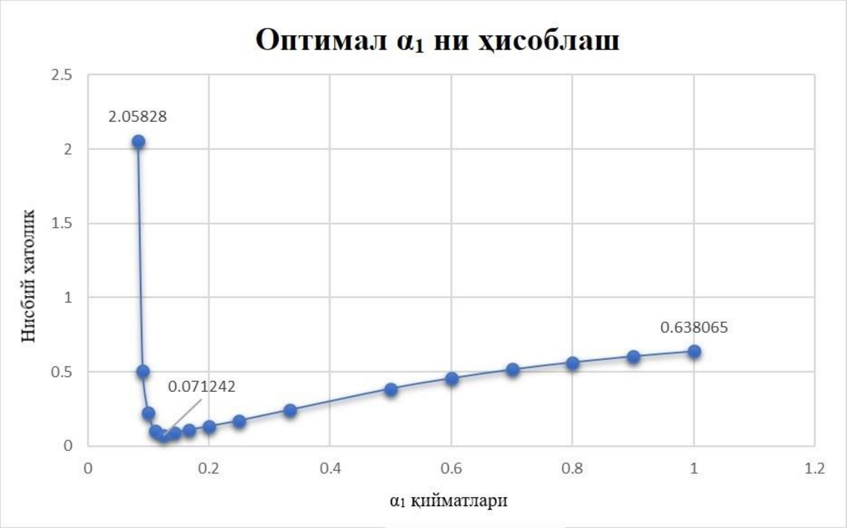


4-расм. Аниқ маълумотлар



5-расм. Тақрибий маълумотларни тиклаш. $\alpha_1=0,125$

Қўйида (17) формулага асосланиб оптимал регуляризация параметрин танлаш графигини юқорида келтирилган масала учун келтирамиз.



6-расм. $n_x=n_y=41$ **бўлганда оптимал** α_1 **ни танлаш**

2.4-масаласини ечишнинг алгоритмини келтирамиз.

1-қадам. Ox ўқида $\left[a,b\right]$ кесмани ва Oy ўқида $\left[c,d\right]$ кесмани мос равишда n_x-1 ва n_y-1 тенг бўлакларга бўлиб, $x_i=a+\left(i-1\right)h_x,\ y_j=b+\left(j-1\right)h_y$ ларни киритамиз.

2-қадам. $u\left(x_i,y_j\right)$ функциясининг тақрибий қийматларини

$$u_{\alpha_2}\left(x_i,y_j\right)=-\frac{F_{ij+1}-F_{ij-1}}{4\alpha_2 h_y\sqrt{\pi^3}}, \tag{18}$$

формула билан топамиз. Бу ерда

$$F_{ij} = \int_{y_j}^{d} \int_{a}^{b} e^{\frac{\eta - y_j - (x_i - \xi)^2}{4\alpha_2^2}} \cos \frac{(x_i - \xi)\sqrt{\eta - y_j}}{2\alpha_2^2} \frac{f(\xi, \eta)}{\sqrt{\eta - y_j}} d\xi d\eta ,$$

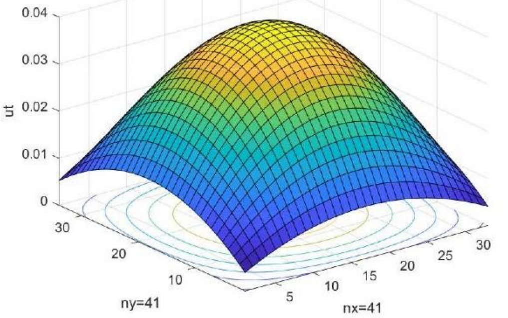
α_2 – регуляризация параметри.

α_2 регуляризация параметри (16) – (17) схема бўйича танланади. Сонли ҳисоблаш натижаси билан таққослаш учун модель тариқасида

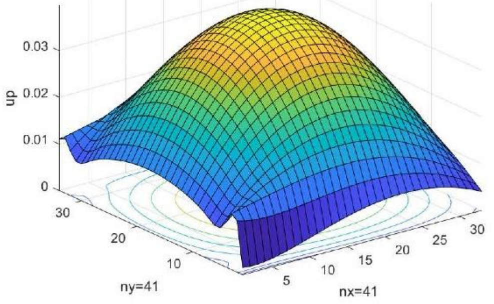
$$u(x, y) = (x^2 - 1)\left(y^2 - \frac{y}{2}\right)$$

функциясидан фойдаланамиз.

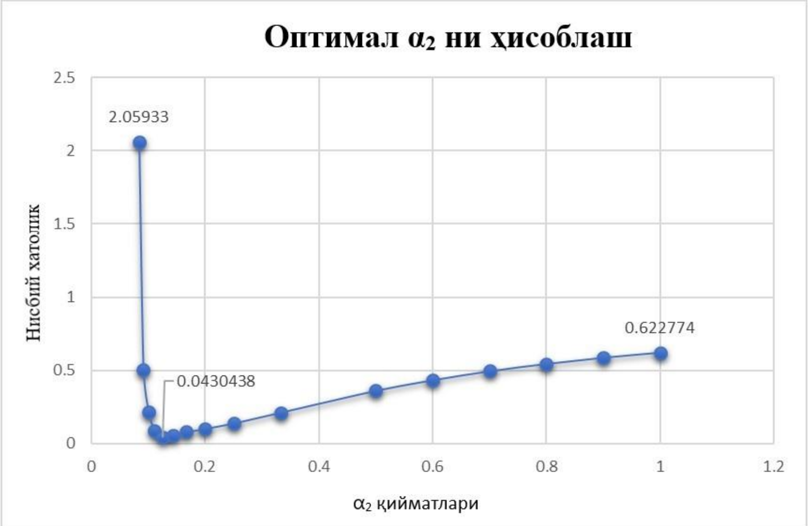
Тўғри бурчакли $D = [-1;1] \times [0,5;1]$ соҳада тенг қадамларда олинган натижалар қўйидаги расмларда келтирилган.



7-расм. Аниқ маълумотлар



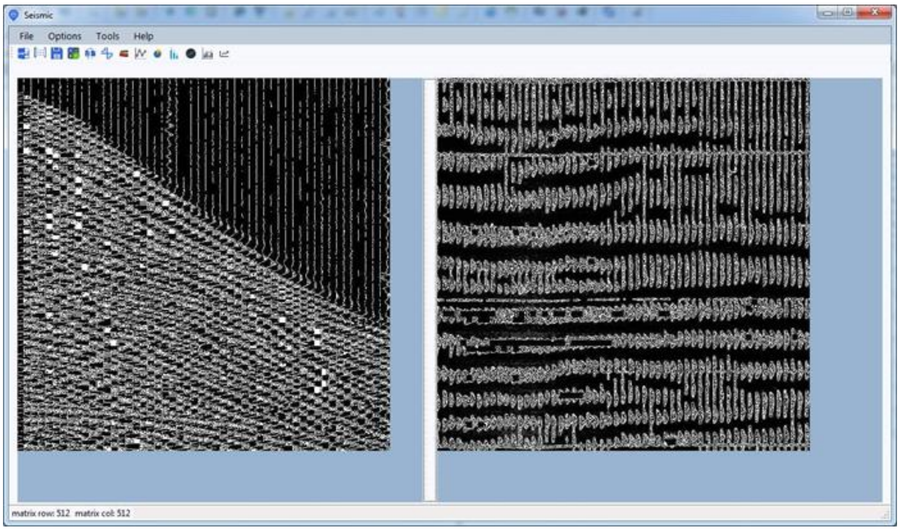
8-расм. Тақрибий маълумотларни тиклаш. $\alpha_2 = 0{,}125$



9-расм. $n_x = n_y = 41$ **бўлганда оптимал** α_2 **ни танлаш**

(9), (14), (15), (18) формулалар бўйича ишлаб чиқилган сонли алгоритмлар асосида интеграл маълумотларни моделлаштириш, моделли ва реал интеграл маълумотлар бўйича тасвирларнинг сейсмик маълумотларини қайта ишлашга мўлжалланган дастурий восита яратилди.

Дастур C# тилида Microsoft Visual Studio 2017 муҳитида ишлаб чиқилган. Дастлаб маълумотлар дастурнинг меню панелидаги маълумотларни юклаш тугмаси ёрдамида юкланади. Кейин кичик ойнада кўрсатилган усуллардан бири ёрдамида маълумотларни тиклайди.



8-расм. Синиқ чизиқлар оиласи учун сейсмик маълумотларни қайта ишлаш натижаси

8-расмнинг чап томонида сейсмик қайдларнинг сейсмограммаси келтирилган, ордината ўқи бўйлаб вақт ўқи секундларда берилган, бу тўлқиннинг юқорига ёки пастга ҳаракат қилиш вақти. Горизонтал чизиқ бўйлаб эса нуқтанинг қўзғалиш масофалар келтирилган. Ушбу сейсмограммалар қайта ишловчиларга берилади, улар материалнинг сифатини яхшилаш учун қайта ишлашади, натижада ўнг томонда кўрсатилгандек сейсмик кесим олинади. Бу ерда тўлқинларнинг фазали ўқлари деб номланадиган ўқини кузатиш мумкин ва ушбу тўлқинларни геофизик интерпретатор ёрдамида геологик қатламлар ёки геологик чегаралар эканлигини аниқласа бўлади.

ХУЛОСА

«Интеграл геометриянинг параболалар ва синиқ чизиқлар оилаларидаги масалаларнинг моделлари ва алгоритмлари ва уларнинг геофизикада қўлланилиши» мавзусидаги диссертация тадқиқотининг натижалари асосида қуйидаги асосий хулосалар олинди:

1. Тўғри бурчакли соҳада қисм-ўзгармас вазн функцияли синиқ чизиқлар оиласидаги интеграл геометрия масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида теоремалар исботланди.

2. Ўнг томон функцияси орқали Соболев фазосида кучсиз корректмас масаланинг ечими турғунлиги баҳоланди.

3. Параболалар оиласи бўйича интеграл маълумотлар бўйича функцияни тиклаш жараёнининг математик модели шакллантирилди. Ягоналик теоремалари исботланди ва силлиқ чекли функциялар синфида қурилаётган

интеграл геометрия масаласини ечиш учун Фурье образининг аниқ формуласи олинди. А.Н.Тихоновнинг корректмас қўйилган масалаларни регуляризациялаш методи асосида масалани аниқ ечиш учун тақрибий ечимлар кетма-кетлиги тузилган.

4. Тихонов регуляризацияси усули асосида шовқинли интеграл маълумотга эга объектларнинг ички тузилмаларини тиклаш учун сонли алгоритм қурилди.

5. Синиқ чизиклар ва параболалар оилалари бўйича интеграл характеристикалар ёрдамида сейсмик маълумотларни қайта ишлашнинг математик моделларини ҳисоблаш учун дастурий таъминот ишлаб чиқилди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

СЕИДУЛЛАЕВ АБАТ КАМАЛОВИЧ

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА СЕМЕЙСТВАХ ПАРАБОЛ И ЛОМАНЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОФИЗИКЕ

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2022.2.PhD/FM741.

Диссертация выполнена в Нукусском филиале Ташкентского университета информационных технологий.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Утеулиев Ниетбай Утеулиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Бегматов Акрам Хасанович** доктор физико-математических наук, профессор
	Нормуродов Чори Бегалиевич доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится 3. 12. 2022 в 15^{30} на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 143). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан 21 ноября 2022 года.
(протокол рассылки № 12 от 25 . октября 2022 года).

М. М. Арипов
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З. Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Б. Ф. Абдурахимов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, ведущиеся в мире, в большинстве случаев сводятся к задачам интегральной геометрии математического моделирования. Задачи интегральной геометрии являются одним из интенсивно развивающихся разделов обратных задач, и их чрезвычайно высокая прикладная важность обосновывает актуальность их исследования. Такие задачи связаны с самыми разнообразными прикладными проблемами и имеют многочисленные приложения при исследовании математических основ задач сейсморазведки, интерпретации данных геофизических и аэрокосмических наблюдений, при решении обратных задач астрофизики и гидроакустики. Поэтому создание на основе сейсмических данных алгоритмов и комплекса прикладных программ восстановления подповерхностных слоев в семействе специальных кривых остается одной из актуальных задач прикладной математики.

В настоящее время в мире широко изучаются различные прикладные задачи, при решении которых большое значение имеет восстановление подземных слоев в виде изображений. В частности, изучение задач интегральной геометрии является классической проблемой математической физики и анализа, активно исследуемая и развивающееся в настоящее время по нескольким основным направлениям. Поэтому актуальной является разработка устойчивых алгоритмов для восстановления изображения подповерхностных слоев на основе интегральных данных, а также создания соответствующего комплекса программ, ориентированного на широкий круг пользователей, имеющего удобный интерфейс.

В нашей стране большое внимание уделяется таким актуальным направлениям исследований, как разработка численных и аналитических методов решения задач в области математической физики, геологии, компьютерной томографии и геофизике, которые имеют различные научные и практические приложения фундаментальных наук. В частности, получены весомые результаты в сфере управления процессами восстановления внутренних структур объектов в виде изображений на основе их интегральных характеристик с учетом методов анализа Фурье и вычислительной математики, исследования задач интегральной геометрии, используемые в областях геофизики. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифферен-циальные уравнения, математическая физика, математическое моделирова-ние, вычислительная и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» является одной из основных задач в деятельности Института математики имени В.И.Романовского АН РУз[1]. Для обеспечения реализации этого решения важно развитие теории математического моделирования на основе

---

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

методов интегральной геометрии при восстановлении внутренних структур объекта.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных Указом Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», Постановлениями Президента Республики Узбекистан №ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых документах, принятых в данной сфере.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Методы интегральной геометрии являются одним из основных инструментов исследования преобразований функций, дифференциальных форм, тензоров и других объектов, заданных на многообразии, ставящие им в соответствие наборы их интегралов вдоль подмногообразий из некоторого семейства подмногообразий. Такое понимание интегральной геометрии сформировалось в работах И. М. Гельфанда и его школы, а также С. Хельгасона. Это отличается от понимания интегральной геометрии в смысле геометрической теории вероятностей. В работах И. М. Гельфанда, С. Г. Гиндикина, М. И. Граева, Н. Я. Виленкина, Г. М. Хенкина и других авторов изучены классификация Радона и ее аналоги в вещественных, комплексных, проективных пространствах и пространствах постоянной кривизны, дифференциальные классификации форм для p-мерных плоскостей и представлены их приложения в этих областях.

Задачи интегральной геометрии существует в теории математической физики и теории обратных задач для дифференциальных уравнений, и возникают в виде линеаризации обратной кинематической задачи сейсмики. Весомые результаты в этом направлении получены в работах М.М.Лаврентьева, В.Г.Романова, Ю.Е.Аниконова, А.Л.Бухгейма, Акб.Х.Бегматова и других авторов. При этом интегрирование в преобразовании интегральной геометрии производится не по прямым или плоскостям, а по подмногообразиям более сложной природы. Явных формул обращения для таких преобразований, как правило, построить не удается и поэтому наиболее важным является вопрос о единственности восстановления и его устойчивости.

Одной из самых основных проблем обработки данных сейсморазведки является суммирование полезных сигналов для повышения отношения сигнал-шум. Для обработки сейсмических данных, в работах A.M.Cormack, A. J. Harding, J.R.Thorson, J.F.Claerbout, G.Turner было развито линейное преобразование Радона. В работах S.H.Bickel, D.Hampson, M.M.Nurul Kabir, D.J.Verschuur, E.Maeland использованы специальные параболические и гиперболические преобразования Радона в зависимости от возбуждения источника и свойств сигнала цели. В нашей стране проблемы математического моделирования процессов характеризующихся интегральной геометрией и некорректными задачами, и их приближенное решение с использованием численных методов исследовались в работах Ш.А.Алимова, К.Фаязова, Акр.Х.Бегматова, Б.Абдурахимова, А.Хасанова, Н.У. Утеулиева, Г.М.Джайкова, З.Очилова, и в этом направлении были получены значительные теоретические и практические результаты.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ Нукусском филиале Ташкентского университета информационных технологий в рамках проекта Ф3-2019081578 по теме “Программное обеспечение проведения мониторинга определения влияния экологической ситуации на сельскохозяйственное производство Приаралья”.

Целью работы является разработка математических моделей, построение численных методов, алгоритмов и создание комплекса программ для решения задач восстановления и обработки сейсмических данных, а также проведение вычислительных экспериментов для проверки разработанных моделей и алгоритмов.

Задачи исследования:

доказательство теорем существования, единственности и устойчивости решения задачи интегральной геометрии на семействе ломаных, получение явной формулы обращения решения, и численное решение задач восстановления сейсмических данных на основе этой формулы;

построение алгоритмов расчета с использованием регуляризаций Тихонова и Лаврентьева и численное решение восстановления сейсмограммы случаях когда интегральные сейсмический данные даны с погрешностью;

доказательство теорем единственности и устойчивости решения задач интегральной геометрии в семействе парабол, и нахождение явной формулы обращения решения для образа Фурье;

нахождение образа Фурье решения задачи интегральной геометрии в семействе парабол по первой переменной, и построение последовательности решений, на основе Тихоновской теории регуляризации некорректных задач, сходящиеся к точному решению.

Объектом исследования являются интегральные данные, известные математические фантомы, алгоритмическое и объектно-ориентированное программное обеспечение.

Предметом исследования являются построение математических моделей для обработки сейсмических данных, построение соответствующих алгоритмов и программного обеспечения.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы теории решения некорректных задач, интегральных уравнений, функционального анализа, численные методы и методы математического моделирования и объектно-ориентированного программирования.

Научная новизна исследования состоит в следующем.

доказано теорема существования, единственности и устойчивости решения задачи интегральной геометрии на семействе ломаных, получено явная формула обращения решения, и численное решение задач восстановления сейсмических данных на основе этой формулы;

построено алгоритмы расчета с использованием регуляризаций Тихонова и Лаврентьева и получено численное решение восстановления сейсмограммы случаях когда интегральные сейсмический данные даны с погрешностью;

доказано теорема единственности и устойчивости решения задач интегральной геометрии в семействе парабол, и получено явная формула обращения решения для образа Фурье;

получен образ Фурье решения задачи интегральной геометрии в семействе парабол по первой переменной, и построено последовательность решений, на основе Тихоновской теории регуляризации некорректных задач, сходящиеся к точному решению.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

алгоритмы численного решения задач интегральной геометрии в семействе ломаных при восстановлении сейсмограммы, полученое в задачах сейсморазведки, разработаны впервые;

разработан комплекс программ для численного решения задачи с помощью регуляризации, когда в задачах интегральной геометрии в семействе парабол интегральные данные имеют погрешность.

Достоверность результатов исследования подтверждается доказательствами теоретических утверждений, анализом разработанных алгоритмов и результатами проведенных численных экспериментов.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования подтверждается доказательствами теорем восстановления функций по интегральным данным с применением методов интегральной геометрии.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы при численном решении задач обработки сейсмических данных, возникающих в области геофизики.

Внедрение результатов исследования. Научные результаты по численному и аналитическому решению задач интегральной геометрии на семействах ломаных и парабол, полученные в диссертационной работе, внедрены в практику в следующих направлениях

разработанный программный комплекс для обработки сейсмических данных использован для извлечения полезной геолого-геофизической информации в виде изображения в Устюртской геофизической экспедиции (справка Государственного комитета геологии и минеральных ресурсов Республики Узбекистан АО «Узбекгеофизика» № 01-894 от 1 июня 2022 года). Применение научных результатов позволило обрабатывать сейсмические данные и извлечь из них полезную информацию;

теоретические результаты, связанные с задачами интегральной геометрии на семействе ломаных и парабол, были использованы в фундаментальном проекте “Математические вопросы численного решения нестационарных краевых задач” (справка Каракалпакского государственного университета за номером № 01-22-04/263 от 3 июня 2022 года). Применение научных результатов позволило доказать единственность и устойчивость решений нестационарных краевых задач.

Апробация работы. Результаты данного исследования обсуждены на 11 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 22 научных работ, из них – 7 статей в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан к публикации основных научных результатов диссертаций, в том числе 4 в зарубежных и 3 в республиканских журналах. Получено свидетельство о регистрации программных продуктов для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений. Объем диссертации составляет 95 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, соответствие с приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан. Сформулированы цель и задачи, указаны объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования. Обоснована достоверность полученных результатов, раскрыта их теоретическая и практическая значимость, приведены перечень внедрений в практику результатов исследования, сведения об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе **«Интегральная геометрия и её приложение в сейсморазведке»** диссертации проведена постановка задачи, краткий обзор исследований и литературы по теме диссертации, а также даны основные определения и вспомогательные утверждения, необходимые для дальнейшего обсуждения результатов исследования.

Пусть $x \in R^n$, $x=(x_1,\ldots x_n)$, $y \in R^m$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$, $S(y)$ – семейство многообразий в R^n, зависящее от параметра y размерности m, $\dim S = p$; $u(x)$ – функция, определенная в некоторой области $D \subset R^n$; $\rho(x,y)$ – функция переменных x, y; $\omega(y)$ – мера на многообразии $S(y)$.

Рассмотрим соотношение

$$\int\limits_{S(y)} \rho(x,y)u(x)d\omega = f(y). \tag{1}$$

Интегральная геометрия есть раздел математики, в котором изучаются различные взаимоотношения между элементами, входящими в (1).

Мы будем рассматривать (1) как линейное операторное уравнение относительно функции $u(x)$. Классический оператор интегральной геометрии – преобразование Радона. Оно ставит в соответствие функции $u(x)$ с её интегралами по всевозможным гиперплоскостям.

К задачам интегральной геометрии сводятся многие прикладные задачи, в частности, задачи интерпретации сейсмических данных, просвечиваний физических сред, рентгеновских снимков.

Исходя из работ М.М.Лаврентьева и В.Г.Романова, перечислим наиболее важные моменты исследования задачи интегральной геометрии. Во-первых, это вопрос о единственности решения уравнения (1) в некотором классе функций. Во-вторых, получение оценок устойчивости решения задачи. Учитывая, что широкие классы задач интегральной геометрии являются сильно некорректными, большое значение имеют оценки условной устойчивости. Далее, разработка процедуры восстановления искомой функции, что в общем случае требует создания эффективных вычислительных алгоритмов, в частности, построения регуляризаторов. Особый интерес, разумеется, представляет получение явных формул обращения, т.е. аналитических выражений, представляющих $u(x)$ через $f(y)$. К сожалению, это возможно только в специальных случаях, как правило, при этом многообразия и весовые функции предполагаются инвариантными относительно отображений пространства на себя с достаточно богатой группой автоморфизмов. И наконец, проблема разрешимости, т.е. нахождение необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять функция $f(y)$, представимая в виде (1).

Во второй главе «**Математическое моделирование задачи интегральной геометрии на семействах парабол и ломаных**» приведены задачи интегральной геометрии на семействах парабол и ломаных. Для задачи, принадлежащий семейству ломаных, получена явная формула обращения, и, кроме того, доказаны теоремы существования и устойчивости задачи на пространстве Соболева. Для семейства парабол интегральной геометрии рассмотрены две задачи. Первая из них – задача интегрирования по кривой разнонаправленной ветви параболы в случае, когда весовая функция имеет вид

$g(x,\xi)=\operatorname{sgn}(x-\xi)$. Для этой задачи доказана оценка устойчивости, что влечет его единственность. Во второй задаче, в случае когда весовая функция равняется единице, задача сводится к задаче второго типа Вольтерра, и доказывается его единственность. Поскольку, эти задачи являются сильно некорректными мы рассматриваем регуляризационную задачу. Для этих регуляризационных задач получена явная формула обращения и оценка устойчивости.

Задача 2.1. Восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$, если в полосе $L_H=\{(x,y):x\in R^1,0\le y\le H,H<\infty\}$ известны её интегралы по кривым семейства $\Gamma(x,y)=\{(\xi,\eta):y-\eta=|x-\xi|,\,0\le y\le H\}$ с весовой функцией $g(x,y)=\operatorname{sgn}(x-\xi)$:

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} g(x,y)u(\xi,\eta)d\xi=f(x,y). \tag{2}$$

Задача 2.2. Восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$, если в полосе L_H известны суммы её интегралов вида

$$\int\limits_{\Gamma_4(x,y)} g(x,\xi)u(\xi,\eta)d\xi+\int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h}K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta=\mathbb{F}(x,y), \tag{3}$$

где $h=y-\eta$.

Задача 2.1 является задачей интегральной геометрии вольтерровского типа, задача 2.2 соответствует задаче интегральной геометрии с возмущением.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $f(x,y)$ *задана для всех* $(x,y)\in L_H$*, весовая функция имеет вид* $g(x,\xi)=\operatorname{sgn}(x-\xi)$*. Тогда решение задачи 2.1 в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных с носителем в полосе* L_H *функций единственно, выражается через функцию* $f(x,y)$ *по формуле*

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\xi,y)d\xi \tag{4}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|u(x,y)\|_{W_2^{1,0}}\le C_1\|f(x,y)\|_{W_2^{2,2}},$$

где C_1 *– некоторая положительная константа.*

Теорема 2.2. *Пусть функция* $f(x,y)$ *задана для всех* $(x,y)\in L_H$*, а также удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(x,y)$ *финитна по переменной* x*;*

2) $f(x,y)$ *имеет все непрерывные частные производные до второго порядка включительно;*

3) $f(x,y)$ *вместе со своими частными производными до второго порядка включительно обращается в нуль на границах полосы* L_H*, то есть при* $y=0$ *и* $y=H$.

Тогда существует решение задачи 2.1 в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, финитных по аргументу x*, определенное формулой* (4).

Теорема 2.3. *Если весовая функция имеет вид* $g(x,\xi)=\operatorname{sgn}(x-\xi)$, *функция* $K(x,y,\xi,\eta)$ *финитна, имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и вместе со своими производными обращается в нуль на* $\Gamma(x,y)$.

Тогда решение задачи 2.2 в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций единственно и имеет место следующая оценка

$$\left\|u(x,y)\right\|_{W_2^{1,0}} \le C_2 \left\|\mathbb{F}(x,y)\right\|_{W_2^{2,2}},$$

где C_2 *– некоторая положительная константа.*

Введем обозначения:

$$L_H=\{(x,y): x\in(-\infty;\infty), 0\le\eta\le y\le H, H<\infty\},$$
$$\overline{L_H}=\{(x,y): x\in[-\omega;\omega], 0\le\eta\le y\le H, H<\infty\},$$
$$\Omega_G=\{(x,y): x\in(-\infty;\infty), 0\le y\le\eta\le G, G<\infty\},$$
$$\overline{\Omega_G}=\{(x,y): x\in[-\omega;\omega], 0\le y\le\eta\le G, G<\infty\}.$$

Задача 2.3. В полосе L_H восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$, если известны интегралы от нее по кривым семейства $\{\Upsilon(x,y)\}$

$$\int\limits_{\Upsilon(x,y)} u(\xi,\eta)d\xi = f(x,y) \qquad (5)$$

где произвольная кривая семейства представлена выражением

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta): x-\xi=\sqrt{y-\eta},\ 0\le\eta\le y\right\}.$$

Задача 2.4. В полосе Ω восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$, если известны интегралы от нее по кривым семейства $\{\Lambda(x,y)\}$

$$\int\limits_{\Lambda(x,y)} u(\xi,\eta)d\xi = f(x,y) \qquad (6)$$

где произвольная кривая семейства представлена выражением

$$\Lambda(x,y)=\left\{(\xi,\eta): x-\xi=\sqrt{\eta-y},\ y\le\eta\le H\right\}.$$

Лемма 2.1. Пусть функция $f(x,y)$ дважды непрерывно дифференцуемая по аргументам и финитная в полосе L_H. Тогда единственное решение уравнения (5) в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в полосе L_H имеет место представление

$$\hat{u}(\lambda,y)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y \frac{ch\left(\lambda\sqrt{y-\eta}\right)}{\sqrt{y-\eta}}\hat{f}(\lambda,\eta)d\eta. \qquad (7)$$

Теорема 2.4. *Пусть функция* $f(x,y)$ *задана в полосе* $\overline{L}_H$. *Рассмотрим регуляризирующий оператор для уравнения (7)*

$$R(u,\alpha)=\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{u}\, e^{-\alpha_1^2\lambda^2}\right].$$

Тогда решение задачи 2.4 в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в прямоугольнике $\overline{L}_H$ *полосы* L_H *имеет место представление*

$$u_{\alpha_1}(x,y)=\frac{1}{2\alpha_1\sqrt{\pi^3}}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{y-\eta-(x-\xi)^2}{4\alpha_1^2}}\cos\frac{(x-\xi)\sqrt{y-\eta}}{2\alpha_1^2}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\xi d\eta$$

и выполняется неравенство

$$\left\|u_{\alpha_1}-u\right\|_{L_2\left(\overline{L_H}\right)}\le C_3\alpha_1^2\left\|f\right\|_{L_2\left(\overline{L_H}\right)},$$

где $\alpha_1>0$ *– параметр регуляризации,* $\mathcal{F}^{-1}$ *– обратное преобразование Фурье,* C_3 *– константа.*

Лемма 2.2. Пусть функция $f(x,y)$ дважды непрерывно дифференцуемая по аргументам и финитная в полосе Ω. Тогда единственное решение уравнения (6) в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в полосе Ω имеет место представление

$$\hat{u}(\lambda,y)=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^H\frac{ch\left(\lambda\sqrt{\eta-y}\right)}{\sqrt{\eta-y}}\hat{f}(\lambda,\eta)d\eta. \qquad (8)$$

Теорема 2.5. *Пусть функция* $f(x,y)$ *задана в полосе* $\overline{L}_H$. *Рассмотрим регуляризирующий оператор для уравнения (4)*

$$R(u,\alpha)=\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{u}\, e^{-\alpha_2^2\lambda^2}\right].$$

Тогда решение задачи 2.4 в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в прямоугольнике $\overline{L}_H$ *полосы* L_H *имеет место представление*

$$u_{\alpha_2}(x,y)=-\frac{1}{2\alpha_2\sqrt{\pi^3}}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^H\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\eta-y-(x-\xi)^2}{4\alpha_2^2}}\cos\frac{(x-\xi)\sqrt{\eta-y}}{2\alpha_2^2}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{\eta-y}}d\xi d\eta$$

и выполняется неравенство

$$\left\|u_{\alpha_2}-u\right\|_{L_2\left(\overline{L_H}\right)}\le C_4\alpha_2^2\left\|f\right\|_{L_2\left(\overline{L_H}\right)},$$

где $\alpha_2>0$ *– параметр регуляризации,* $\mathcal{F}^{-1}$ *– обратное преобразование Фурье,* C_4 *– положительная константа.*

В третьей главе «**Численная реализация решений задачи интегральной геометрии на семействах парабол и ломаных»** диссертации построен численный алгоритм и алгоритм с зашумленными интегральными данными на семействе ломаных, с помощью регуляризации Тихонова. Исходя из идеи А.Н.Тихонова о регуляризации некорректных задач, построена последовательность приближенных решений к точному решению задачи на семействах парабол.

Рассмотрим численную реализацию решения задачи 2.1. Точное решение задачи 2.1 имеет вид

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\xi,y)d\xi.$$

Введем равномерную сетку в прямоугольной области $D=[-1;1]\times[0;2]$. Отыскиваем приближенные решения задачи на этом прямоугольнике.

Схема алгоритма решения задачи:

Шаг 1. Разобьем отрезки $[-1,1]$ на оси Ox и $[0,2]$ на оси Oy на n_x-1 и n_y-1 частей, введем обозначения: $x_i=-1+(i-1)h_x$, $y_j=(j-1)h_y$, $N=n_x=n_y$.

Шаг 2. Приближения функций $u(x_i,y_j)$ будем обозначать через

$$u^A(x_i,y_j)=\int_{-1}^{x_i}F(\xi,y_j)d\xi, \qquad (9)$$

где $F_{ij}=\dfrac{f_{i+1j}-2f_{ij}+f_{i-1j}}{2\sqrt{2}h_x{}^2}-\dfrac{f_{ij+1}-2f_{ij}+f_{ij-1}}{2\sqrt{2}h_y{}^2}$.

Для реализации описанного выше алгоритма восстановления функции был разработан пакет программ на языке программирования С++. Тестирование алгоритмов происходило на примере 10 эллипсов с заданными центрами и полуосями. Эллипсы, центры которых расположены в точках отличных от начала координат, вычисляются с помощью следующих преобразований.

$$x'=(x-x_0)\cos\gamma+(y-y_0)\sin\gamma,\ y'=(x-x_0)\sin\gamma+(y-y_0)\cos\gamma,$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\rho,\ если\ \dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}\le 1,\\ 0,\ если\ \dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}>0.\end{cases}$$

Эта модель является чрезвычайно трудным объектом для восстановления, т.к. содержит множество пересекающихся областей, находящихся внутри замкнутой оболочки. Результаты численного расчета представим на табл. 2 и рис. 1. Здесь под плотностью понимается цвет эллипсов.

Таблица 1

Данные фантома Шеппа-Логана

Эллипс	Центр	Большая ось	Малая ось	Угол поворота эллипса γ	Плотность ρ
1	(0,0)	0.69	0.92	0	2
2	(0,–0.0184)	0.6624	0.874	0	–0.98
3	(0.22,0)	0.11	0.31	–18°	–0.02
4	(–0.22,0)	0.16	0.41	18°	–0.02
5	(0,0.35)	0.21	0.25	0	0.01
6	(0,0.1)	0.046	0.046	0	0.01
7	(0,–0.1)	0.046	0.046	0	0.01
8	(–0.08,–0.605)	0.046	0.023	0	0.01
9	(0,–0.605)	0.023	0.023	0	0.01
10	(0.06,–0.605)	0.023	0.046	0	0.01

Таблица 2

Относительные ошибки при разных значениях *N*

N	64	128	256	512
$\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=2}^{n_x-1}\sum\limits_{j=2}^{n_y-1}\left\|u^A\left(x_i,y_j\right)-u\left(x_i,y_j\right)\right\|^2}{\sum\limits_{i=2}^{n_x-1}\sum\limits_{j-2}^{n_y-1}\left\|u\left(x_i,y_j\right)\right\|^2}}$	0.34083	0.226749	0.155605	0.109906

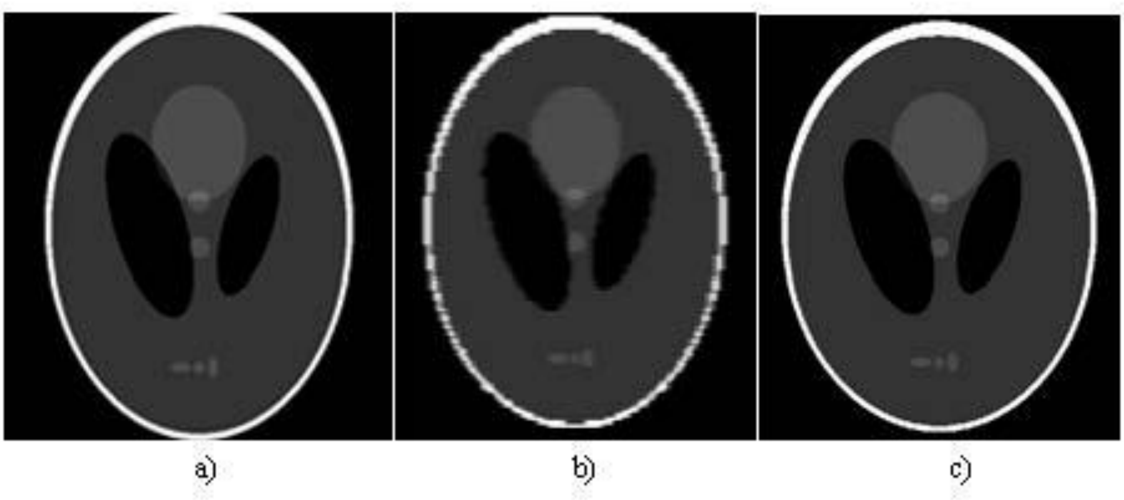


Рис. 1. Восстановление изображения тестового примера: а) оригинал изображения, б) восстановление при $N=128$, в) восстановление при $N=512$

Рассмотрим восстановление функции двух переменных $u(x,y)$ из задачи 2.1. Если правая часть уравнения (2) задана приближенно с некоторой погрешностью, тогда использование формулы обращения (4) приводит к грубой ошибке.

Решение уравнения (2) имеет следующий вид

$$u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}f^{\delta}(\xi,y)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}f^{\delta}(\xi,y)\right)d\xi.$$

Пусть функция $u(x,y)$ определена в квадрате $[0;1]\times[0;1]$. Численное решение формулы обращения отыщем в этом квадрате. Обозначим подынтегральные выражения в следующем виде:

$$\psi(x,y_j)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f^{\delta}(x,y_j),\ \ \varphi(x_i,y)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}f^{\delta}(x_i,y).$$

Задачу дифференцирования можно записать в виде уравнения Вольтерра первого рода:

$$\int_0^1 K(x,s)\psi(s,\cdot)ds=f^{\delta}(x,\cdot)-f^{\delta}(a,\cdot), \tag{10}$$

$$K(x,s)=\begin{cases}(1-s)x, & 0\le x\le s,\\ (1-x)s, & s\le x\le 1.\end{cases}$$

Разобьем отрезок $[0;1]$ на оси Ox и $[0;1]$ на оси Oy на n_x-1 и n_y-1 частей соответственно, обозначим $x_i=(i-1)h_x, y_j=(j-1)h_y,\ N=n_x=n_y$.

После дискретизации на сетке и аппроксимации интегрального уравнения по квадратурным формулам (9) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с положительно определенной матрицей:

$$(x_i-1)\int_0^1 s\psi(s,\cdot)ds+x_i\int_0^1(1-s)\psi(s,\cdot)ds=f^{\delta}(x,\cdot)-f^{\delta}(a,\cdot). \tag{11}$$

Используя метод трапеции, систему уравнений (10) относительно вектора ψ с компонентами $\left(\psi_1,\psi_2,...,\psi_{n_x-1}\right)$ можно записать в виде

$$A_h\psi=\tilde{f}^{\delta}, \tag{12}$$

где $\tilde{f}^{\delta}=f^{\delta}(x,\cdot)-f^{\delta}(0,\cdot)$.

Так как уравнение (12) относится к классу некорректно поставленных задач, то СЛАУ, возникающая в результате дискретизации уравнения, является плохо обусловленной, и используем следующие две регуляризация:

Регуляризация Тихонова:

$$\left(A_h^T A_h+\alpha_x E\right)\psi=A_h^T\tilde{f}^{\delta},\ \ \psi=\left(A_h^T A_h+\alpha_x E\right)^{-1}A^T\tilde{f}^{\delta}, \tag{13}$$

Регуляризация Лаврентьева:

$$\left(A_h+\alpha_x E\right)\psi=\tilde{f}^{\delta},\quad \psi=\left(A_h+\alpha_x E\right)^{-1}\tilde{f}^{\delta}, \tag{14}$$

где α_x – параметр регуляризаций; E – единичная матрица.

Опишем процедуру выбора параметра регуляризации α. Сначала задается некоторый набор значений α:

$$\alpha_i=\left(\frac{1}{2}\right)^i\alpha_{i-1},\quad \alpha_0=1,\quad i=1,2,3,...$$

Для ряда значений α_x решается СЛАУ (13) и (14). Находим решение ψ_{α_i} относительно погрешности решения, и с его помощью имеем, что:

$$\varepsilon\left(\alpha_x\right)=\frac{\left\|\psi_{ij}^{\alpha_x}-\psi_{ij}\right\|_{L_2}}{\left\|\psi_{ij}\right\|_{L_2}}\to\min.$$

Затем по формулам (13) и (14) находится $\psi^{\alpha_{opt,x}}$. Аналогично решая уравнение

$$\int_0^1 K\left(y,\tau\right)\varphi\left(\cdot,\tau\right)d\tau=f^{\delta}\left(\cdot,y\right),\quad K\left(y,\tau\right)=\begin{cases}\left(1-\tau\right)y, & 0\le y\le\tau,\\ \left(1-y\right)\tau, & \tau\le y\le 1,\end{cases}$$

получаем

$$\varphi=\left(B^TB+\alpha_yE\right)^{-1}B^T\tilde{f}^{\delta},\quad \varphi=\left(B+\alpha_yE\right)^{-1}\tilde{f}^{\delta}.$$

В итоге решение уравнение (2) находим по формуле

$$u\left(x_i,y_j\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{x_i}\left(\psi\left(\xi,y_j\right)-\varphi\left(\xi,y_j\right)\right)d\xi. \tag{15}$$

Для проверки качества работы алгоритмов по описанной методике в работе проведены вычислительные эксперименты по выявлению влияния случайного шума на погрешность восстановления внутренней структуры объекта при использовании методов регуляризации Тихонова и Лаврентьева.

В качестве тестового примера для сравнения с результатами численного расчета используем следующую функцию

$$f\left(x,y\right)=2xy^2-\frac{1}{3}xy^4.$$

Ниже приведем таблицы, где показывает относительно погрешность методы регуляризаций Тихонова и Лаврентьева.

Таблица 1

Восстановление функций при $\alpha = 10^{-6}$ с шумом 10%

$\left\|u_{ij}^{\alpha}-u_{ij}^{T}\right\| / \left\|u_{ij}^{T}\right\|$	$N=64\times 64$	$N=128\times 128$	$N=256\times 256$
Регуляризация Тихонова	0,248898	0,247558	0,212097
Регуляризация Лаврентьева	0,105565	0,056436	0,029475

Таблица 2

Восстановление функций при $\alpha = 10^{-6}$ с шумом 5%.

$\left\|u_{ij}^{\alpha}-u_{ij}^{T}\right\| / \left\|u_{ij}^{T}\right\|$	$N=64\times 64$	$N=128\times 128$	$N=256\times 256$
Регуляризация Тихонова	0,248154	0,211112	0,210622
Регуляризация Лаврентьева	0,106586	0,057289	0,029807

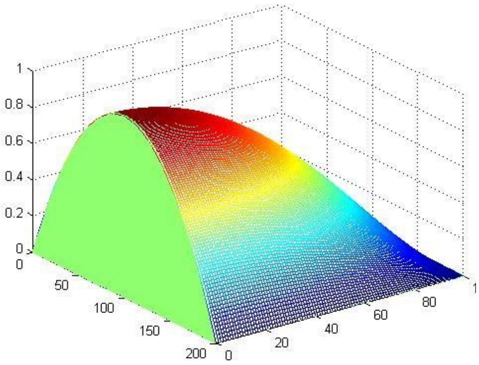


Рис. 2. Исходная функция

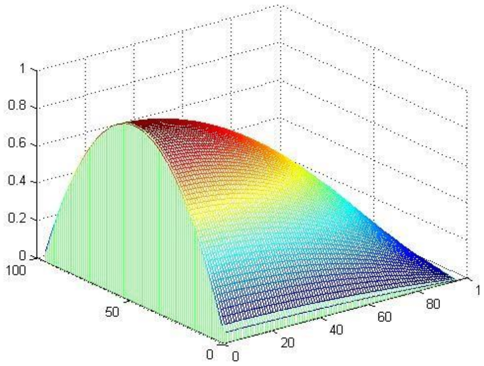


Рис. 3. Результат восстановления

Приведем схему алгоритма решения задачи 2.3.

Шаг 1. Разобьем отрезок $[a,b]$ на оси Ox и $[c,d]$ на оси Oy на n_x-1 и n_y-1 частей соответственно. $x_i=a+(i-1)h_x,\ y_j=b+(j-1)h_y$.

Шаг 2. Приближения функций $u(x_i,y_j)$ находим по формуле:

$$u_{\alpha_1}(x_i,y_j)=\frac{G_{ij+1}-G_{ij-1}}{4\alpha_1 h_y\sqrt{\pi^3}}, \tag{15}$$

где

$$G_{ij}=\int\limits_0^{y_j}\int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{y_j-\eta-(x_i-\xi)^2}{4\alpha_1^2}}\cos\frac{(x_i-\xi)\sqrt{y_j-\eta}}{2\alpha_1^2}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{y_j-\eta}}d\xi d\eta,$$

α_1 – параметр регуляризации.

Описываем процедуру выбора параметра регуляризации α_1. Во-первых, задан определенный ряд значений α:

$$\alpha_i=\theta\cdot\alpha_{i-1}, 0<\theta<1, i=1,2,3,\ldots,m. \tag{16}$$

Находим относительную погрешность решения u_{α_i}

$$\varepsilon(\alpha_1) = \left\| u_{ij}^T - u_{ij}^{\alpha_1} \right\| / \left\| u_{ij}^T \right\| \to \min. \tag{17}$$

В качестве тестового примера для сравнения с результатами численного расчета используем следующую функцию:

$$u(x,y) = \left(1 - x^2\right)\left(y^2 - \frac{2}{5}y\right).$$

Введем равномерную сетку в прямоугольной области $D = [-1;1] \times [0;0,5]$. Результаты алгоритма представим на рисунках.

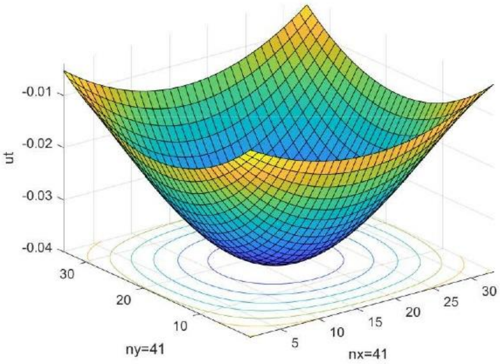


Рис. 4. Точные данные

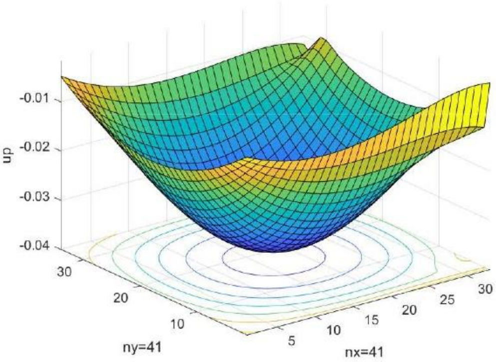


Рис. 5. Восстановленные приблизительно данные. $\alpha_1 = 0,125$

На основе формулы (17) приведем график выбора оптимального параметра регуляризации для вышеуказанной пример.

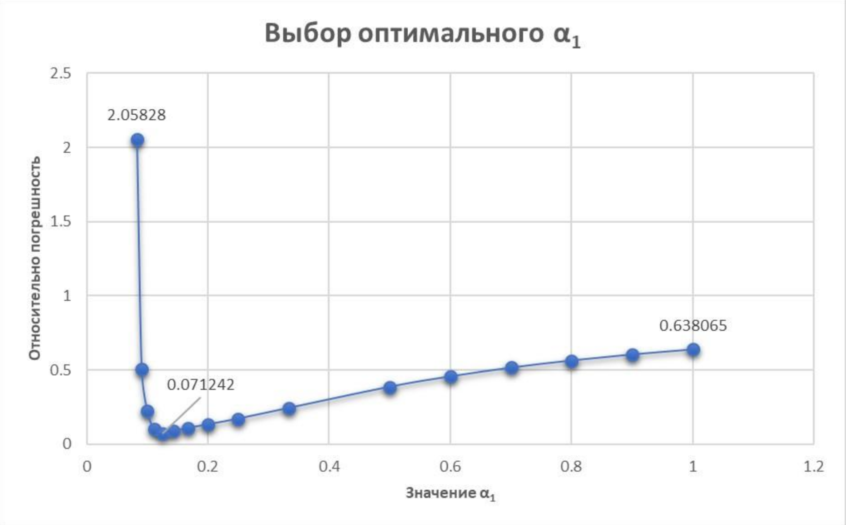


Рис. 6. Выбор оптимального значения α_1 **при** $n_x = n_y = 41$

Приведем схему алгоритма решения задачи 2.4:

Шаг 1. Разобьем отрезок $[a,b]$ на оси Ox и $[c,d]$ на оси Oy на $n_x - 1$ и $n_y - 1$ частей и введем $x_i = a + (i-1)h_x,\ y_j = b + (j-1)h_y$.

Шаг 2. Приближения функций $u(x_i, y_j)$ находим по формуле

$$u_{\alpha_2}\left(x_i, y_j\right) = -\frac{F_{ij+1} - F_{ij-1}}{4\alpha_2 h_y \sqrt{\pi^3}}, \tag{18}$$

где

$$F_{ij} = \int_{y_j}^{d}\int_{a}^{b} e^{\frac{\eta - y_j - (x_i - \xi)^2}{4\alpha_2^2}} \cos\frac{(x_i - \xi)\sqrt{\eta - y_j}}{2\alpha_2^2} \frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{\eta - y_j}} d\xi d\eta,$$

α_2 – параметр регуляризации.

Параметр α_2 выбирается по схеме (16)-(17). В качестве модельного примера выберем функцию

$$u(x, y) = \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - \frac{y}{2}\right).$$

Результаты на равномерной сетке в области $D = [-1;1] \times [0,5;1]$ представлены на рисунках.

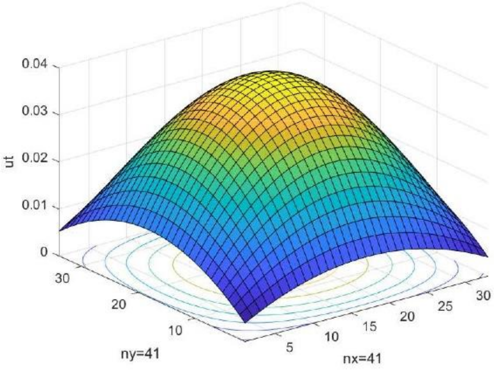


Рис. 7. Точные данные

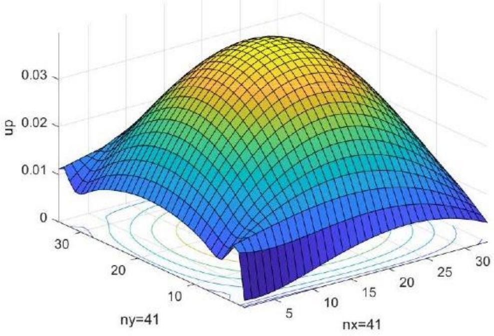


Рис. 8. Восстановленные приблизительные данные. $\alpha_2 = 0{,}125$

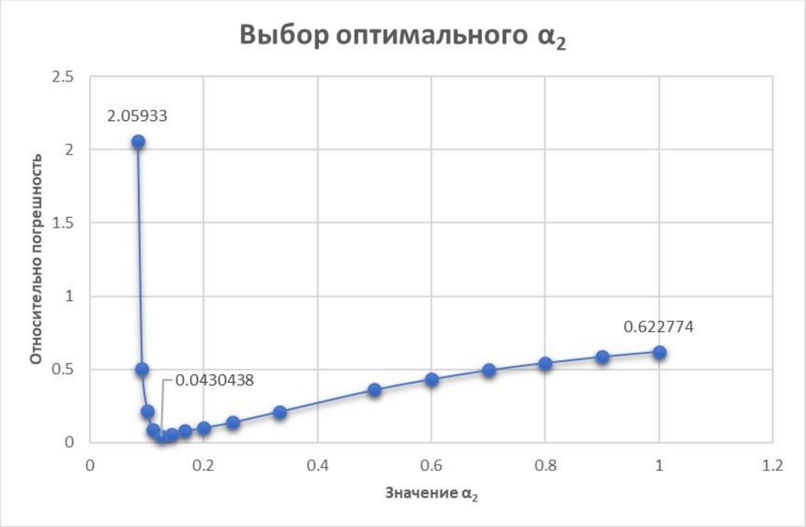


Рис. 9. Выбор оптимального значения α_2 **при** $n_x = n_y = 41$

На основе разработанных численных алгоритмов по формулам (9), (14), (15) и (18) создано программное средство, предназначенное для моделирования интегральных данных, обработки сейсмических данных изображений по модельным и реальным интегральным данным.

Программа разработана в среде Microsoft Visual Studio 2017 на языке C#. Первоначально данные загружаются с помощью кнопки загрузки данных в строке меню программы. Затем он восстанавливает данные, используя один из методов, показанных в маленьком окне.

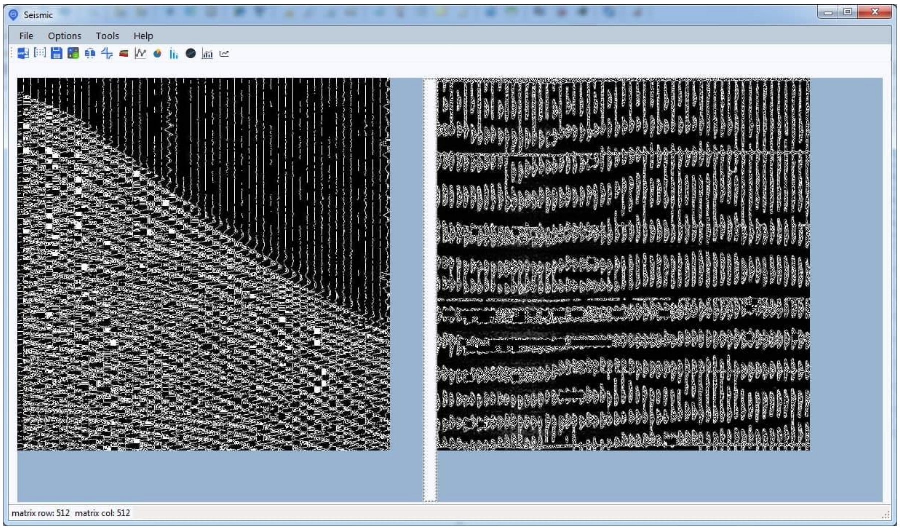


Рис. 8. Результат обработки сейсмических данных по семейству ломаных

В левой части рис. 8 приведена сейсмограмма сейсмических записей, вдоль оси ординат указано время в секундах, в которое волна движется вверх или вниз. Вдоль горизонтальной линии указаны расстояния передвижения точки. Эти сейсмограммы передаются обработчикам, где они обрабатываются для улучшения качества материала, в результате чего получается сейсмический разрез, как показано справа. Здесь можно наблюдать ось, известную как фазовая ось отраженных волн, которая, точнее, может быть геологическими слоями или геологическими границами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам диссертационного исследования по теме "Модели и алгоритмы решения задачи интегральной геометрии на семействах параболы и ломаных и их приложения в геофизике" получены следующие основные выводы:

1. Доказаны теоремы единственности и существования решения задачи интегральной геометрии в полосе на семействе ломаных с кусочно-постоянной весовой функцией.

2. Установлены оценки устойчивости решения слабокорректной задачи в пространстве Соболева через правую часть.

3. Разработана математическая модель процесса восстановления функции по интегральным данным на семействе парабол. Были доказаны теоремы единственности и получена явная формула для образа Фурье для решения

рассматриваемой задачи интегральной геометрии в классе гладких финитных функций. На основе метода А.Н.Тихонова о регуляризации некорректных задач построена последовательность приближённых решений, стремящаяся к точному решению задачи.

4. На основе метода регуляризации Тихонова был построен численный алгоритм для восстановления внутренних структур объектов с зашумленными интегральными данными.

5. Разработан программный комплекс для расчетов математических моделей обработки сейсмических данных по интегральным характеристикам на семействах ломаных и парабол.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NUKUS BRANCH OF TASHKENT UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGIES

SEIDULLAEV ABAT KAMALOVICH

MODELS AND ALGORITHMS FOR SOLVING THE PROBLEM OF INTEGRAL GEOMETRY ON FAMILIES OF PARABOLAS AND POLYLINES AND THEIR APPLICATIONS IN GEOPHYSICS

05.01.07 – Mathematical simulation. Numerical methods and software
(Physical and mathematical sciences)

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.2.PhD/FM741.

Dissertation has been prepared at Nukus branch of Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Uteuliev Nietbay Uteulievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Begmatov Akram Khasanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor **Normurodov Chori Begalievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Karshi state university**

Defense will take place 3 december 2022 at 15^{30} at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №143) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on 21 november 2022 year
(Mailing report No. 12 on 25 october 2022 year)

M. M. Aripov
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.T.S., professor

Z. R. Rakhmonov
Scientific secretary of scientific
council on award of
scientific degrees, D.F.-M.S.

B. F. Abduraximov
Chairman of scientific seminar
under scientific council on award
of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is the development of mathematical models, the construction of numerical methods, algorithms and the creation of a set of programs for solving problems of recovery and processing of seismic data, as well as conducting computational experiments to test the developed models and algorithms.

The research object: Integral data in determining seismic data, well-known mathematical phantoms, algorithmic and object-oriented software.

Scientific novelty of the research work: is as follows:

the existence, uniqueness and stability theorem for the solution of the integral geometry problem on the family of broken lines is proved, an explicit inversion formula for the solution is obtained, and a numerical solution for seismic data recovery problems based on this formula is obtained.;

calculation algorithms using Tikhonov and Lavrentyev regularisations are constructed and a numerical solution for seismogram reconstruction is obtained for cases where the integral seismic data given with error;

the singularity and stability theorem for the solution of integral geometry problems in the family of parabolas is proved, and an explicit inversion formula for the Fourier image is obtained;

the Fourier image of the solution of the problem of integral geometry in the family of parabolas on the first variable is obtained, and a sequence of solutions, based on Tikhonov's theory of regularization of ill-posed problems, converging to the exact solution is constructed.

Implementation of the research results. Scientific results on numerical and analytical solution of the problems of integral geometry on the families of broken lines and parabolas, which were obtained in the dissertation work, have been put into practice in the following directions:

the software package for seismic data processing was used to extract useful geological and geophysical information in the form of images in the Ustyurt Geophysical Expedition (reference No. 01-894 of the State Committee of Geology and Mineral Resources of the Republic of Uzbekistan JSC "Uzbekgeofizika", June 1, 2022). Applying the scientific results enabled processing of the seismic data and extracting useful information from it;

theoretical results related to the problems of integral geometry on the family of polylines and parabolas were used in the fundamental project "Mathematical problems of numerical solution of non-stationary boundary value problems" (reference No. 01-22-04/263 of Karakalpak State University, June 3, 2022). The application of scientific results made it possible to prove the uniqueness and stability of solutions to non-stationary boundary value problems.

The structure and volume of the thesis: The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion, a list of used literature and applications. The volume of the dissertation is 95 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I бўлим (Часть I; Part I)

1. Бегматов А.Х., Пиримбетов А.О., Сеидуллаев А.К. Задачи интегральной геометрии в полосе на семействах параболических кривых // Докл. АН ВШ РФ. – 2012.–Т. 2, № 2(19).–С. 6-15. (01.00.00 (18) Ulrich's Periodicals Directory, (35) CrossRef, IF=0.32)
2. Begmatov A.H., Seidullaev A.K., Pirimbetov A.O. Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography // 2012 7th International Forum on Strategic Technology (IFOST). – IEEE, 2012. – С. 1-6. (01.00.00 (3) Scopus, IF=0.242)
3. Бегматов А.Х., Пиримбетов А.О., Сеидуллаев А.К. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии с возмущением на семействе ломаных // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15. – №. 1. – С. 5-12. (01.00.00 (1) Web of Science, IF=0.208)
4. Uteuliev N.U, Djaykov G.M., Seidullaev A.K., Pirimbetov A.O., Yadgarov Sh.A. Stability estimates and numerical solution for the problem of integral geometry in the strip // Science and Education in Karakalpakstan. – 2018. – Volume 3. – P. 31–37. (01.00.00; №11).
5. Сеидуллаев А.К. Об одной задаче регуляризации задачи интегральной геометрии в полосе на семействе ломаных // Бюллетень Института математики. 2020, №6. – С. 49-54 (01.00.00; ОАК Раёсатининг 2019 йил 28 мартдаги 263/7.1-сон қарори асосида)
6. Uteuliev N.U, Djaykov G.M., Seidullaev A.K. Numerical and analytical solutions of the integral geometry problem on the families of parabola and broken lines // Science and Education in Karakalpakstan. – 2020. – Volume 3-4. – P. 9-16 (01.00.00; №11).
7. Uteuliev N.U, Djaykov G.M., Seidullaev A.K. Inversion formula for the problem of integral geometry on families of parabolas // AIP Conference Proceedings 2365, 070004, 2021. (01.00.00 (3) Scopus, IF=0.4)

II бўлим (Часть II; Part II)

1. Бегматов А.Х., Пиримбетов А.О., Сеидуллаев А.К. Две слабо некорректные задачи интегральной геометрии в полосе // IV Международная молодежная научная школа-конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". – Новосибирск, 5-15 августа 2012. – С. 31.
2. Сеидуллаев А.К. Задачи интегральной геометрии на специальных кусочно-гладких кривых // Материалы 50-й юбилейной международной студенческой научной конференции. – Новосибирск, 13-19 апреля 2012. – С. 100.

3. Бегматов А.Х., Пиримбетов А.О., Сеидуллаев А.К. Восстановление функции по ее интегралам на семействе "двусторонних" кривых // Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики". – Новосибирск, 5-12 августа 2012. – С. 124.

4. Сеидуллаев А.К. Устойчивость решения задачи интегральной геометрии в полосе на семействах параболических кривых // Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых "Наука. Технологии. Инновации". Часть 3. – Новосибирск, 29 ноября - 2 декабря 2012. – С. 131-134.

5. Begmatov Akb.H., Seidullaev A.K. Integral geometry problems on the parabolic curves in a strip // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезмий 2012». – Ташкент, 19-22 декабря, 2012. – С. 42-45.

6. Сеидуллаев А.К. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии на параболических кривых // Материалы 51-й юбилейной международной студенческой научной конференции. – Новосибирск, 12-18 апреля 2013. – С. 100.

7. Begmatov A.H., Seidullaev A.K. Numerical algorithm for a weakly ill-posed problem of integral geometry // V Международная молодежная научная школа-конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". – Новосибирск, 8-13 октября 2013. – С. 19.

8. Сеидуллаев А.К. Формула обращения и оценки устойчивости решения для одной слабо некорректной задачи интегральной геометрии // Материалы всероссийской научной конференции молодых ученых "Наука. Технологии. Инновации". Часть 3. – Новосибирск, 21-24 ноября 2013. – С. 153-156.

9. Бегматов А.Х., Сеидуллаев А.К. Численное решение одной слабо некорректной задачи интегральной геометрии // Материалы международной научно-практической конференции «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». – Семей, 3-5 октября 2013. – С. 270-275.

10. Begmatov A.H., Pirimbetov A.O., Seidullaev A.K. Computational approach to weakly ill-posed problems of integral geometry // International conference Advanced mathematics, computations and applications – 2014. - Novosibirsk, June 8-11, 2014. – pp. 53.

11. Seidullaev A.K. On a weakly ill-posed problem of integral geometry with a perturbation on a family of broken lines // Тезисы Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики". – Новосибирск, 1-5 июля 2019. – С. 98.

12. Seidullaev A.K., Djaykov G.M. Analytical and numerical regularization solution of the problem of integral geometry on the families of parabolic and broken lines // Тезисы Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики". – Новосибирск, 1-5 июля 2019. – С. 98.

13. Uteuliev N.U., Djaykov G.M., Seidullaev A.K. Inversion formula for the problem of integral geometry on families of parabolas // Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference: Computational models and technologies. – Tashkent, August 24-25, 2020. – pp. 221-222.

14. Утеулиев Н.У., Джайков Г.М., Сеидуллаев А.К. Моделирование задачи интегральной геометрии на семействах парабол // Математик моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси ва дастурий таъминот инженериясининг долзарб муаммолари мавзусидаги Республика илмий анжумани материаллари / Қарши давлат университети. Қарши, 23-24 октябрь, 2020. – 108-109 б.

15. Утеулиев Н.У., Джайков Г.М., Сеидуллаев А.К. Разработка программного обеспечения для обработки сейсмических томографических данных по интегральным характеристикам. № DGU 13927, 03.11.2021.

Автореферат «Қорақалпоқ давлат университетининг Ахборотномаси» журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,25. Адади 100 дона. Буюртма № 68/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.