ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

АБДИШУКУРОВА ГЎЗАЛ МАҚСУД ҚИЗИ

СУБМЕРСИЯЛАР ҲОСИЛ ҚИЛГАН ҚАТЛАМАЛАР ГЕОМЕТРИЯСИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2022

УДК: 514.763.2

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

АБДИШУКУРОВА ГЎЗАЛ МАҚСУД ҚИЗИ

СУБМЕРСИЯЛАР ҲОСИЛ ҚИЛГАН ҚАТЛАМАЛАР ГЕОМЕТРИЯСИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.3.PhD/FM749 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Шарипов Анваржон Солиевич** физика-математика фанлари доктори, доцент
Расмий оппонентлар:	**Заитов Адилбек Атаханович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Рахимов Абдуғафур Абдумаджидович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Ажиниёз номидаги Нукус давлат педагогика институти**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «___»_________ соат_____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2022 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2022 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор,
академик

Н.К. Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Б.Бешимов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси
муовини, ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳонда илмий-техникавий тараққиётнинг жадал ривожланиши замонавий математика методларидан фойдаланишни тақозо этмоқда, бу эса фундаментал тадқиқотларнинг янги йўналишларини ривожлантиришга ва олинган натижаларни амалиётга татбиқ этишга олиб келади. Илмий-техника тараққиёти эҳтиёжларидан келиб чиқадиган кўплаб математик муаммолар динамик системалар ва оптимал бошқариш муаммоларига келтирилади. Сўнгги пайтларда геометрик усуллар математиканинг турли соҳаларида кўплаб тадбиқ қилинмоқда, айниқса динамик системалар назариясида кенг қўлланилмоқда. Динамик тизимлар назариясида кенг қўлланиладиган замонавий геометриянинг асосий тармоқларидан бири бу қатламалар назариясидир. Қатламалар назариясининг муҳим бўлимларидан бири риман қатламалари ҳисобланади. Риман қатламалари табиий равишда риман геометриясининг асосий муаммоларида пайдо бўлади ва назарий физика ва механикада муҳим йўналишлардан ҳисобланади.

Ҳозирги вақтда жаҳонда замонавий геометриянинг долзарб муаммоларидан бири риман субмерсиялари ҳосил қилган риман қатламалари геометриясини ўрганишдир. Субмерсиялар геометриясини, хусусан, риман субмерсияси геометриясини ўрганиш долзарб муаммо ҳисобланади, чунки риман субмерсияси замонавий Риман геометриясининг барча соҳаларида қўлланилади. Субмерсиялар геометриясини ўрганиш қатламалар геометриясини ўрганиш билан чамбарчас боғлиқ, чунки ҳар бир қатлама локал равишда субмерсиялар сатҳ сиртлари оиласи билан берилади. Субмерсиялар геометриясини математиканинг бошқа соҳаларида, механикада ва назарий физикада турли масалаларни ҳал қилишда қўллаш долзарб илмий йўналиш ҳисобланади.

Мамлакатимизда табиий ва аниқ фанлар соҳасидаги замонавий йўналишларга эътибор кучаймоқда, хусусан, математиканинг фундаментал йўналишлари, замонавий геометрия усулларининг метод ва натижаларини қўллашга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Математика фанларининг устувор йўналишлари ҳисобланган “Алгебра, динамик системалар назарияси, геометрия ва топология ва шу каби” ихтисосликлар бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш фундаментал тадқиқотларнинг асосий вазифаси сифатида қаралади[1]. Геометриянинг муҳим соҳаларидан бири бўлган қатламалар назариясини ривожлантириш ушбу қарорни бажаришда муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида” ги ПФ-4947 Фармони, 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш,

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори.

бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-Қарори ва 2019 йил 9 июлдаги “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В. И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4387-сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқот мавзуси ва объекти, мавзу юзасидан ўрганилган муаммолар муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Максимал рангли дифференциалланувчи акслантиришларнинг муҳим синфларидан бири- ботиришлар риман геометриясининг илк даврларидан интенсив ўрганилган. Ботиришга қўшма бўлган субмерсия тушунчаси нисбатан кейинроқ, XX асрнинг иккинчи ярмида шаклланган. Субмерсияларнинг дифференциал геометрияси биринчи марта R. Hermann ва B. O'Neil асарларида баён қилинган. Хусусан, R. Hermann томонидан силлиқ боғланишли тўлиқ риман кўпхилликда риман субмерсияси берилган бўлса, у даста ҳосил қилиши, бундан ташқари, бу субмерсия ҳосил қилган қатлама тўла геодезик қатлама бўлса, унинг ҳамма қатламлари ўзаро изометрик бўлиши исботланган. Ботириш учун мавжуд Гаусс ва Кодаци деривацион тенгламаларининг аналоглари субмерсиялар учун B.O'Neil томонидан топилган. Субмерсиялар геометриясининг замонавий риман геометриясининг барча бўлимларида қўлланилиши жуда самарали бўлди. Риман субмерсияларининг фундаментал хоссалари J. Cheeger, D. Gromoll, R. Hermann, B. O'Neil, G. Walschарлар томонидан олинган. Италия математиклари M. Falcitelli, A. M. Pastore, S. Ianus[2] ишларида риман субмерсияларининг назарий физикадаги тадбиқлари ўрганилган.

Ўзбекистон Миллий университети профессори А. Я. Нарманов ва унинг шогирдлари тадқиқотларида риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламалар геометрияси ўрганилмоқда. А.Я.Нарманов ва Б.Турсунов ишларида номанфий эгриликга эга бўлган кўпхилликда берилган риман субмерсиялари геометрияси, А.Я.Нарманов ва А.Шарипов ишларида қатламали кўпхилликлар изометриялари группаси ўрганилган. Хусусан, кўпхиллик компакт бўлмаган ҳолда унинг диффеоморфизмлар группаси, қатламали кўпхиллик изометриялари группаси компакт-очиқ топологияга нисбатан топологик группа бўлиши исботланган.

[2] Maria Falcitelli, Stere Ianus, Anna Maria Pastore. Riemannian Submersions and Related Topics. World Scientific Pub Co Inc. June 25, 2004, 292 p.

Маълумки субмерсия сатҳ сиртлари қатлама ҳосил қилиши учун унинг сатҳ сиртлари чизиқли боғланишли бўлиши зарур. Бунинг учун зарурий ва етарли шартлар ўрганилмаган. Бундан ташқари риман субмерсияси ҳосил қилган қатламанинг даста бўлиши бўлиши етарли шартлар ўрганилмаган. Ушбу диссертацияда кўрилган қатламали кўпхиллик диффеоморфизмлар группасида киритилган қатламали компакт очиқ топологиянинг саноқли базага бўлиши ва қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлари группаси қатламали компакт очиқ топологияга нисбатан топологик группа эканлиги жуда муҳим бўлсада, бу масала ҳанузгача атрофлича тадқиқ этилмаган. Бу бизнинг мавзумизнинг долзарблигини белгилайди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг Ф4-04 “Қатламали кўпхилликларнинг геометрияси ва топологияси” (2012-2016 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар геометрияси ва топологиясини ҳамда қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлар группасини ўрганишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилар:

Субмерсиялар сатҳ сирталарининг чизиқли боғланишли тўплам бўлиши учун зарурий ва етарли шарт ҳақидаги масалани ҳал қилиш;

Субмерсия ҳосил қилган қатламанинг тўла геодезик қатлама бўлиши учун етарли шартларни аниқлаш;

Уч ўлчамли евклид фазосида ўзгармас эгриликка ва ўзгармас буралишга эга бўлган бир ўлчамли қатлама ҳосил қилувчи субмерсияни аниқлаш;

Бир параметрли алмаштиришлар группасига нисбатан субмерсияларнинг дифференциал инвариантларини топиш усулларини аниқлаш;

Қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлари группасининг қатламали компакт очиқ топологияга нисбатан топологик группа бўлишини исботлаш.

Тадқиқот объекти субмерсия, риман субмерсияси, субмерсия ҳосил қилган қатлама, қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлари группаси, қатламали компакт очиқ топология.

Тадқиқотнинг предмети қатлама, қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлари группаси, риман субмерсияси, қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлари группаси топологиясидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация тадқиқот ишида риман геометрияси, дифференциал топология ва қатламалар назарияси методларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

тўла риман кўпхиллигида берилган субмерсия сатҳ сиртларининг чизиқли боғланишли бўлиши учун субмерсия базаси бир боғламли бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботлаган;

ихтиёрий йўналишда тўғри чизиққа эга ва секцион эгрилиги нолга тенг тўла риман кўпхиллигида берилган риман субмерсияси ҳосил қилган қатламанинг тўла геодезик бўлиши исботланган;

текисликда берилган учта Киллинг вектор майдонлари ёрдамида уч ўлчамли евклид фазосида ўзгармас эгриликка ва ўзгармас буралишга эга бўлган бир ўлчамли қатлама ҳосил қилувчи субмерсия қурилган;

қатламали кўпхиллик диффеоморфизмлар группасида киритилган қатламали компакт очиқ топологиянинг саноқли база ташкил қилувчи очиқ тўпламлар оиласи кўрсатилган;

диффеоморфизмлар группаси қатламали компакт очиқ топологияга нисбатан саноқли базага эканлигидан фойдаланиб, кетма-кетликлар усули ёрдамида бу группанинг топологик группа эканлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар геометрияси бўйича тадқиқот натижалари риман қатламалари геометрияси ва риман геометриясининг турли масалаларини тадқиқ қилишда қўлланилади.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Риман геометрияси, дифференциал топология ва дифференциал геометрия методлари ҳамда математик фикрлашнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, қатламали кўпхиллик диффеоморфизмлар группаси қатламали компакт очиқ топологияга нисбатан топологик группа эканлиги, группа амаллари қатламали компакт очиқ топологияда узлуксиз акслантиришлар бўлиши, диффеоморфизмлар группасининг Ли группалари бўладиган қисм группалари мавжудлигини исботлашда қўлланилганлиги билан изоҳланади.

Диссертациянинг амалий аҳамияти шундан иборатки, субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар геометрияси бўйича тадқиқот натижалари қатлам геометрияси ва қатламалар кўпхиллик геометрияси орасидаги боғланишларни ўрганишда, сатҳ сиртлари геометриясини тавсифлашда ва дифференциал топология фанининг нолокал масалаларини ҳал қилишда қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар геометрияси бўйича олинган диссертация натижалари қуйидаги илмий-тадқиқот лойиҳасида қўлланилган:

Қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлар группасининг топологик группа эканлиги ва бу группа баъзи қисмий группалари Ли группаси эканлиги бўйича олинган натижалар Ўзбекистон Миллий университетида 2017-2020 йилларда бажарилган ОТ-Ф4-42- “Ярим аддитив $\tau -$силлиқ ва Радон функционаллар фазоларининг кардинал ва топологик хоссалари” мавзусидаги фундаментал лойиҳада топологик группаларнинг кардинал инвариантларини тадқиқ этиш имконини берган (Маълумотнома, Ўзбекистон Миллий университети, 26 август 2022 йил № 01/10-11-4890). Илмий натижаларнинг қўлланилиши топологик фазоларнинг топологик, алгебраик ва функционал инвариантлари орасидаги боғланишни аниқлаш, хусусан топологик группаларнинг кардинал инвариантларини топиш имконини берган;

Қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлар тўплами саноқли базага эга топологик фазо ташкил қилиши ва ушбу фазо қатламали компакт очиқ топологияга нисбатан топологик группа ҳосил қилиши бўйича олиб борилган тадқиқот натижалари Россия Федерацияси Таълим ва фан вазирлигининг "№ 075-00232-20-01, ФЕWC-2020-0010 давлат топшириғи доирасида қуйидаги хорижий илмий-тадқиқот лойиҳаларида "Динамик системаларни бошқариш ва барқарорлаштириш назарияси ва усулларини ишлаб чиқиш", РФТФ лойиҳаси 20-01-00293, "Сифатий бошқарув назарияси ва собит бўлмаган терминал моментли дифференциал ўйинлар назарияси" динамик системаларнинг геометрияси масалаларини ҳал қилиш имконини берган (Удмурт давлат университети маълумотномаси, 2022 йил 30 август 7873-8093 / 31-сон). Субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар геометрияси бўйича олинган натижалар агар субмерсиянинг сатҳ сирти динамик системанинг интеграл сирти бўлса, қатламали кўпхилликнинг диффеоморфизмлари группасининг айрим қисм группалари динамик система траекторияларини инвариант қолдиришини аниқлашга хизмат қилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши динамик системаларнинг геометриясини ўрганиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 6 та Халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 17 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация Комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 82 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат.

Кириш қисмида диссертация мавзуси долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мувофиқлиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси ҳамда Ўзбекистон Миллий Университети илмий тадқиқотлари билин боғлиқлиги келтирилган.

Диссертациянинг «Кўпхилликлар диффеоморфизмлар группаси» деб номланувчи биринчи боби учта параграфдан иборат. Ушбу бобда диссертацияда ишлатиладиган асосий тушунча ва ёрдамчи фактлар келтирилган.

Бу бобнинг биринчи параграфида вектор майдонлар ва кўпхилликларнинг секцион эгрилиги баён қилинган.

Бизга n ўлчамли M кўпхиллик берилган бўлсин. Берилган M кўпхилликнинг x нуқтаси орқали чексиз кўп силлиқ чизиқлар ўтади, бу чизиқларнинг x нуқтадаги уринма векторлари тўплами T_xM n ўлчамли вектор фазо бўлади ва кўпхилликнинг x нуқтадиги уринма фазоси деб аталади. Агар кўпхилликнинг ҳар бир T_xM уринма фазосида x нуқтага силлиқ боғланган скаляр кўпайтма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ аниқланган бўлса, у ҳолда M силлиқ кўпхилликда риман метрикаси берилган дейилади. Риман метрикаси аниқланган силлиқ кўпхиллик M риман кўпхиллиги дейилади.

Таъриф 1.1.4. Агар M кўпхилликнинг ҳар бир $x\in M$ нуқтасига шу нуқтадаги уринма фазодаги $X_x\in T_xM$ уринма вектор мос қўйилган бўлса, кўпхилликда вектор майдон берилган дейилади.

Бизга M кўпхилликда аниқланган X силлиқ вектор майдон берилган бўлсин. Ҳар бир $t\in(a,b)$ учун $\dot{\varphi}(t)=X\left(\varphi(t)\right)$, тенглик бажарилса, $\varphi:(a,b)\to M$ силлиқ эгри чизиқ берилган X вектор майдоннинг интеграл эгри чизиғи дейилади. Биз X вектор майдоннинг $t=0$ да $x\in M$ нуқта орқали ўтувчи интеграл чизиғини $t\to X^t(x)$ кщринишда белгилаймиз.

Берилган X вектор майдонга унинг p нуқтадаги u вектор йўналишидаги ҳосиласини мос қўювчи қуйидаги акслантиришни

$$\nabla: V(\mathrm{M})\times \mathrm{V}(\mathrm{M})\to \mathrm{V}(\mathrm{M}) : (\mathrm{u},\mathrm{X})\to\nabla_u X \qquad (1.1.10)$$

қарайлик. Бу акслантириш (U,h) локал координаталарда

$$(\nabla_u X)_p=\left(u^i\frac{\partial \overline{X}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}u^i\frac{\partial \overline{X}^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p, \qquad (1.1.11)$$

формула билан аниқланади, бу ерда $\overline{X}^j=X^j\circ h$, X^j эса X майдоннинг координата функцияларидир.

Тасдиқ 1.1.1.Киритилган (1.1.10) акслантириш қуйидаги хоссаларга эга:

а) $\nabla_{au+bv}X=a\nabla_u X+b\nabla_v X$;

б) $\nabla_u(aX+bY)=a\nabla_u X+b\nabla_u Y$;

с) $\nabla_u(f\,X)=(u\,f)\,X_x+f(x)\nabla_u X$.

Таъриф 1.1.9. Киритилган (1.1.10) акслантириш боғланиш деб аталади. Бу ерда uf билан f функциянинг u вектор йўналишидаги ҳосиласи белгиланган. Юқоридаги $\nabla_u X$ ифода X вектор майдоннинг u вектор йўналишидаги ковариант ҳосиласи деб аталади.

Таъриф 1.1.10. Силлиқ X,Y вектор майдонлар учун

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y] \qquad (1.1.12)$$

тенглик ўринли бўлса, ∇ симметрик боғланиш дейилади.

Таъриф 1.1.11. Берилган ихтиёрий X,Y,Z вектор майдонлар учун

$$X\left\langle Y,Z\right\rangle=\left\langle \nabla_X Y,Z\right\rangle+\left\langle Y,\nabla_X Z\right\rangle. \qquad (1.1.13)$$

тенглик ўринли бўлса, ∇ боғланиш риман боғланиши ёки Леви-Чевита боғланиши дейилади.

Маълумки қуйидаги теорема ўринлидир:

Теорема 1.1.4. Ихтиёрий M риман кўпхиллигида ягона симметрик риман боғланиши мавжуд.

Кўпхилликда қуйидагича формула бўйича

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z,$$

аниқланадиган

$$R{:}V(M)\times V(M)\times V(M)\to V(M)$$

акслантириш ∇ Леви-Чевита боғланишининг эгрилик тензори деб аталади. Бу ерда $\left[X,Y\right]$- X,Y вектор майдонларининг Ли қавси.

Таъриф 1.1.12. Қуйидаги

$$k(u,v){:}=\left\langle R(u,v)v,u\right\rangle. \qquad (1.1.14)$$

формула билан аниқланувчи

$$k{:}T_pM\times T_pM\to R$$

акслантириш риман эгрилиги деб аталади.

Берилган (1.1.14) формулага кўра k акслантириш икки аргументнинг симметрик функциясидир.

Биз чизиқли эркли u,v векторлар ҳосил қилган икки ўлчамли текисликни σ билан белгилаб, унга қуйидаги формула:

$$K_\sigma=\frac{\left\langle R(u,v)v,u\right\rangle}{|u|^2|v|^2-\left\langle u,v\right\rangle^2}, \qquad (1.1.15)$$

билан аниқланувчи K_σ сонини мос қўямиз. Бу ерда $\left\langle u,v\right\rangle$ риман метрикаси g аниқловчи скаляр кўпайтма, K_σ сони икки ўлчамли σ йўналиш бўйича секцион эгрилик деб аталади.

Ҳамма нуқталарда барча икки ўлчамли текисликлар учун $K_\sigma\geq 0$ муносабат ўринли бўлса, кўпхиллик номанфий секцион эгриликли кўпхиллик деб аталади. Маълумки икки ўлчамли кўпхилликлар учун секцион эгрилик Гаусс эгрилиги билан устма уст тушади.

Иккинчи параграф дифференциалланувчи акслантиришлар назариясидан зарурий тушунчаларни ўз ичига олади.

Таъриф 1.2.7. Берилган $f:M\to B$ акслантириш учун $rank_x f=\min(n,m)$ тенглик ҳамма $x\in M$ нуқталарда ўринли бўлса, у мак-симал рангли акслантириш дейилади, бу ерда $n=\dim M, m=\dim B$.

Таъриф 1.2.8. Агар $f:M\to B$ максимал рангли акслантириш бўлиб, $n\leq m$ муносабат ўринли бўлса, у ботириш дейилади.

Таъриф 1.2.9. Агар $f:M\to B$ максимал рангли акслантириш бўлиб, $n>m$ тенгсизлик ўринли бўлса, у субмерсия дейилади**.**

Теорема 1.2.1. Бизга $f: M \to B$ субмерсия берилиб, $M-$ n ўлчамли, $B-$ m ўлчамли кўпхиллик бўлсин. У ҳолда ҳар бир $p \in B$ нуқта учун унинг прообрази $L_p = \{q \in M : f(q) = p\}$ $n-m$ ўлчамли қисм кўпхиллик бўлади.

Бизга $f: M \to B$ субмерсия ва $p \in B$ нуқта берилган бўлсин. У ҳолда $L_p = \{q \in M : f(q) = p\}$ тўплам p нуқта устидаги қатлам дейилади.

Биз L_p қатламнинг $q \in L_p$ нуқтадаги уринма фазосини T_qL билан, унинг ортогонал тўлдирувчисини H_qF билан белгиласак, натижада TM уринма қатламанинг иккита қисм $TF = \{T_qL\}$ ва $HF = \{H_qF\}$ қатламалари пайдо бўлади: $TM = TF \oplus HF$. У ҳолда ихтиёрий X вектор майдонни $X = X^v + X^h$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $X^v \in TF$, $X^h \in HF$. Агар $X^h = 0$ (мос равишда $X^v = 0$) тенглик ўринли бўлса, X вектор майдон вертикал (горизонтал) вектор майдон дейилади. Бошқача қилиб айтганда, агар $v \in T_qM$ вектор L_p қатламга q нуқтада уринса вертикал вектор дейилади. Агар $v \in T_qM$ вектор T_qL уринма фазога ортогонал бўлса у горизонтал вектор дейилади.

Бизга $f: M \to B$-субмерсия берилган бўлса, ҳар бир $u \in T_pB$ вектор ва ихтиёрий $q \in L_p$ учун ягона $h \in H_qF$ вектор мавжуд бўлиб, $df_p(h) = u$ тенглик ўринли бўлади. h вектор u векторнинг q нуқтадаги горизонтал кўтарилиши дейилади. Агар X вектор майдон B кўпхилликда берилган, $\bar{X}$ вектор майдон M кўпхилликда берилган ва X_q вектор $X_{f(q)}$ векторнинг горизонтал кўтарилиши бўлса, $\bar{X}$ вектор майдон X вектор майдоннинг горизонтал кўтарилиши дейилади.

Таъриф 1.2.10. Агар $f: M \to B$ субмерсиянинг дифференциали df горизонтал векторлар узунлигини сақласа, f субмерсия риман субмерсияси дейилади.

Ортогонал проекциялар риман субмерсияларнинг содда синфларини ташкил қилади.

Учинчи параграф кўпхилликлар диффеоморфизмлари группасига бағишланган.

Таъриф 1.3.1. Дифференциалланувчи $f: M \to N$ акслантириш ўзаро бир қийматли ва унга тескари $f^{-1}: N \to M$ акслантириш ҳам дифференциалланувчи бўлса, у диффеоморфизм деб аталади.

Демак, f акслантириш диффеоморфизм бўлиши учун

1) f дифференциалланувчи акслантириш;

2) тескари акслантириш f^{-1} мавжуд ва дифференциалланувчи бўлиши керак.

Биз M силлиқ n ўлчамли кўпхилликни ўзини ўзига акслантирувчи диффеоморфизмлар тўпламини $Diff(M)$ белгилайлик. Бу тўплам акслантиришлар суперпозициясига нисбатан группа бўлади.

Берилган $f, g \in Diff(M)$ элементларнинг кўпайтмаси сифатида уларнинг $f \circ g(x) = f(g(x))$ суперпозициясини, бирлик элемент сифатида айний $I(x) = x$ акслантиришни, берилган $f \in Diff(M)$ элементга тескари элемент сифатида тескари $f^{-1} \in Diff(M)$ акслантиришни оламиз.

Бу диффеоморфизмлар $Diff(M)$ тўпламида компакт очиқ топология киритилади. Компакт очиқ топология тушунчасини эслатиб ўтамиз.

M кўпхилликнинг компакт қисм тўплами K, M кўпхилликнинг очиқ қисм тўплами U - учун

$$[K,U] = \left\{ f \in Diff(M) : f(K) \subset U \right\}.$$

тўпламни аниқлаймиз. Барча компакт K қисм тўпламлар ва барча очиқ U қисм тўпламлар учун $[K,U]$ тўпламлар оиласи битта топология учун олдбаза ташкил қилади. Бу топология компакт очиқ топология дейилади Маълумки компакт очиқ топлогия билан $Diff(M)$ тўплам саноқли базага эга бўлган хаусдорф фазоси бўлади.

Силлиқ кўпхилликлар учун диффеоморфизмлар группаси дифференциал геометрия ва анализда муҳим аҳамиятга эга. Бу группанинг тадбиқлари бўйича илк ишлар В.И. Арнольд, А.М. Лукацкий, Х. Омори тадқиқотларида келтирилган. Диффеоморфизмлар группасини ўрганиш профессор В. И. Арнольд[3] ишларидан кейин жадаллашди. Арнольд ўз ишларида ҳажмни сақловчи диффеоморфизмлар группаси силлиқ кўпхиллик бўлиб, ундаги геодезик чизиқлар идеал сиқилмайдиган суюқликлар ҳаракатини тавсифлашини кўрсатди.

Бунда ташқари $Diff(M)$ группа компакт очиқ топологияга нисбатан топологик группа ҳамдир.

Топологик группа таърифини келтирамиз.

Таъриф 1.3.2. Топологик фазо бўлган G группа учун кўпайтириш

$$(f, g) \in G \times \mathrm{G} \to f \cdot g \in \mathrm{G}$$

ва тескари элемент

$$f \in G \to f^{-1} \in \mathrm{G}$$

амаллари узлуксиз бўлса топологик группа дейилади.

А.Нарманов ва А.Шарипов[4] ишларидан кўпхиллик диффеоморфизмлар группаси $Diff(M)$ компакт очиқ топологияга нисбатан топологик группа эканлиги келиб чиқади.

---

[3] Arnold V. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimenzion infnite et ses applications a l'hidrodynamique des uides parfaits// Ann. Inst. Fourier. 1966. 16, № 1. P. 319–361.

[4] A. Narmanov and A. Sharipov, On the group of foliation isometries, Methods Funct. Anal. Topology 15 (2009), 195–200.

Диссертациянинг **«Субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар геометрияси »** номли иккинчи боби учта параграфдан иборат**.** Бу бобда риман субмерсиялари геометрияси ўрганилган. Бу бобнинг биринчи параграфида риман субмерсияси сатҳ сиртларининг чизиқли боғланишли бўлиши учун зарур ва етарли шарт олинган.

Теорема-2.1.2. Бизг**а** $\pi: M \to B$ - риман субмерсияси берилган бўлиб, M тўла бир боғламли кўпхиллик бўлсин. Шунда ҳар бир $q \in B$ нуқта учун $\pi^{-1}(q)$ қатлам чизиқли боғланишли учун B кўпхиллик бир боғламли бўлиши зарур ва етарлидир.

Иккинчи параграфда риман субмерсияси ҳосил қилган қатлама даста (bundle) бўлиши учун етарли шарт олинган. Даста тушунчаси қатлама тушунчасига нисбатан қадимийроқдир. Дастанинг ҳамма қатламлари ўзаро диффеоморф бўлади.

Даста тушунчасини эслатамиз. Бизга n ўлчамли силлиқ M кўпхиллик, m ўлчамли силлиқ B кўпхиллик берилган бўлиб, $r \geq 1$, $n > m$ бўлсин. Агар $n - m$ ўлчамли N кўпхиллик ва B кўпхилликнинг $\{U_\alpha\}$ очиқ қобиғи мавжуд бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилса:

1. ҳар бир $p \in B$ нуқта учун $\pi^{-1}(p)$ қатлам N кўпхиллика диффеоморф;
2. ҳар бир U_α тўплам учун

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times N$$

диффеоморфизм мавжуд бўлиб,

$$\varphi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times N, p \in U_\alpha .$$

муносабат ўринли бўлса, C^r синфга тегишли $\pi: M \to B$ субмерсия $C^r -$даста ҳосил қилади дейилади.

Профессор R.Hermann[5] ишида риман субмерсияси ҳақида қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 2.2.1. Силлиқ боғланишли тўлиқ риман M кўпхилликда $\pi: M \to B$ риман субмерсияси берилган бўлса, у даста ҳосил қилади. Бундан ташқари, бу субмерсия ҳосил қилган F қатлама тўла геодезик қатлама бўлса, унинг ҳамма қатламлари ўзаро изометрик бўлади.

Риман кўпхиллигида тўғри чизиқ тушунчасини эслатамиз. Берилган $\gamma: R \to M$ геодезик чизиқнинг ҳар бир $[a,b] \subset R$ сегментдаги қисми $\gamma:[a,b] \to M$ қиска чизиқ бўлса у тўғри чизиқ дейилади.

Геодезик $\gamma:[0,+\infty] \to M$ чизиқнинг ҳар бир $[a,b] \subset [0,+\infty]$ сегментдаги қисми $\gamma:[a,b] \to M$ қиска чизиқ бўлса, у нур дейилади

Маълумки ихтиёрий компакт бўлмаган риман кўпхиллигида нур мавжуд.

---

[5] Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc.11 (1960), 236-242.

Ҳар бир $p \in M$ нуқта учун ихтиёрий $v \in T_p M$ йўналишда p нуқтадан чиқувчи тўғри чизиқ мавжуд деган фараз асосида қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема 2.2.2. Секцион эгриликлари нолга тенг силлиқ тўлиқ M риман кўпхиллигида

$$\pi : M \to B \qquad (2,2.3)$$

риман субмерсияси берилган бўлсин. У ҳолда субмерсия ҳосил қилган F қатлама тўлиқ геодезик қатлама бўлади ва унинг қатламлари ўзаро изометрик бўлади.

Бу бобнинг учинчи параграфида уч ўлчамли евклид фазосида ўзгармас эгриликка ва ўзгармас буралишга эга қатлама ҳосил қилувчи риман субмерсияси қурилган. Маълумки M кўпхилликда берилган X вектор майдон ҳосил қилувчи бир параметрли алмаштиришлар $x \to X^t(x)$ группаси изометриялардан иборат бўлса, у Киллинг вектор майдони дейилади[6].

Декарт координаталар системаси (x_1, x_2) киритилган $R^2(x_1, x_2)$ текисликда қуйидаги вектор майдонларни қарайлик :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}. \qquad (2.3.1)$$

Текисликнинг ҳар бир $p(x_1, x_2) \in R^2$ нуқтаси учун $p(x_1, x_2)$ дан ўтувчи орбита $L(p)$ текислик билан устма-уст тушади, яъни $L(p) = R^2$. Бу факт X_1, X_2, X_3 вектор майдонлар ёрдамида қуйидаги субмерсияни

$$\pi : R^3 \to R^2 \qquad (2.3.2)$$

қуриш имкониятини беради, бу ерда $\pi(t_1, t_2, t_3) = X_3^{t_3}(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)))$, O — координаталар боши. Координаталар боши учун $L(O) = R^2$ тенглик ўринли бўлган, ҳар бир $(x_1, x_2) \in R^2$ нуқта учун шундай $(t_1, t_2, t_3) \in R^3$ нуқталар мавжудки $\pi(t_1, t_2, t_3) = (x_1, x_2)$ тенглик ўринли бўлади.

Теорема 2.3.1. Қаралаётган $R^2(x_1, x_2)$ текисликда шундай g риман метрикаси мавжудки, бу риман метрикасига нисбатан (2.3.2) субмерсия риман субмерсияси бўлиб, бу субмерсия ҳосил қилган қатлама қатламлари эгрилиги ва буралиши ўзгармас чизиқлардир.

Диссертациянинг “Қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлари группаси” деб номланган учинчи боби учта параграфдан иборат. Диссертациянинг бу бобида қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлари группаси аниқланиб, бу группа структураси тадқиқ қилинган.

Бизга силлиқ n ўлчамли M кўпхилликда k ўлчамли F қатлама берилган бўлса, уни (M, F) кўринишда белгилаймиз (бу ерда $0 < k < n$).

Таъриф 3.1.1. Агар $f : M \to M$ диффеоморфизмда F қатламанинг ҳар бир L_α қатламининг $f(L_\alpha)$ образи F қатламанинг қатлами бўлса, $f : M \to M$

[6] A. Narmanov and S. Saitova, On the geometry of orbits of killing vector fields, Differential Equations 50 (2014), 1582–1589.

акслантириш қатламали кўпхиллик диффеоморфизми деб аталади ва $f:(M,F)\to(M,F)$ кўринишда ёзилади.

Қуйидаги мисол қатламали кўпхиллик диффеоморфизм тушунчаси коррект аниқланганини кўрсатади.

Мисол- 3.1.1. Биз (x,y) декарт координаталар системаси киритилган евклид текислигини $M=R^2(x,y)$ билан белгилайлик. F қатлама қатлами L_α $y=\alpha=const$ тенглама билан берилган бўлсин.

Текисликнинг $\phi:R^2\to R^2$ гомеоморфизми

$$\phi(x,y)=\left(x+y,\ y^{\frac{1}{3}}\right)$$

формула билан берилган бўлса, у ҳар бир қатламда диффеоморфизм бўлади, лекин бу гомеоморфизм текислик диффеоморфизми бўлмайди.

Қатламали (M,F) кўпхиллик диффеоморфизмлари группасини $Diff_F(M)$ билан белгилаймиз. Қатламали кўпхиллик диффеоморфизмлари $Diff_F(M)$ группаси кўпхиллик диффеоморфизмлари $Diff(M)$ группасининг қисм группаси бўлиб, компакт очиқ топологияга нисбатан топологик группа бўлади.

Биз $Diff_F(M)$ группани қатламага боғлиқ бўлган ва F қатлама n ўлчамли бўлганда компакт очиқ топология билан, агар F қатламанинг коўлчами n га тенг бўлса, бу топологиядаги яқинлашиш нуқтавий яқинлашиш билан устма уст тушадиган янги топология билан ўрганамиз.

Ҳар бири F қатламанинг бирорта қатламининг компакт қисм тўплами бўлган $\{K_\lambda\}$ оилани ва M кўпхиллик очиқ қисм тўпламларидан иборат $\{U_\beta\}$ оилани қарайлик.

Ҳар (K_λ, U_β) жуфтлик учун $f(K_\lambda)\subset U_\beta$ муносабат ўринли бўладиган $f\in Diff_F(M)$ диффеоморфизмлар тўпламини қараймиз. Бу тўпламни

$$[K_\lambda, U_\beta]=\{f:M\to M \mid f(K_\lambda)\subset U_\beta\}.$$

кўринишда белгилаймиз.

Маълумки $[K_\lambda, U_\beta]$ кўринишдаги тўпламларнинг чекли кесишмалари битта топология учун база бўлади. Бу топологияни қатламали компакт очиқ топология деб ёки қисқача $F-$ компакт очиқ топология деб атаймиз. Бу топология биринчи марта профессор А.Я.Нарманов ва А.С.Шарипов ишларида киритилган ва ўрганилган[7]. Хусусан, бу топология билан $Diff_F(M)$ тўплам хаусдорф фазоси эканлиги кўрсатилган.

Биз келтирган $F-$ компакт очиқ топология аниқланишида ҳамма компакт тўпламлар эмас, балки қатламларнинг компакт қисм K_λ тўпламлари қаралаётгани, компакт очиқ топологияда эса ҳамма компакт тўпламлар

[7] A. Narmanov and A. Sharipov, On the group of foliation isometries, Methods Funct. Anal. Topology 15 (2009), 195–200.

қаралиши учун, $F-$ компакт очиқ топология классик компакт очиқ топологияга нисбатан кучсиз топологиядир.

Биринчи параграфнинг асосий натижалари қуйидаги $Diff_F(M)$ тўплам компакт очиқ топология билан саноқли базага эга эканлигини кўрсатувчи лемма ва унинг ёрдамида исботланган теорема 3.1.1 дан иборат.

Лемма 3.1.1. $Diff_F(M)$ тўплам $F-$ компакт очиқ топология билан саноқли базага эга бўлган топологик фазодир.

Теорема 3.1.1. (M,F) — силлиқ қатламали кўпхиллик бўлсин. У ҳолда $Diff_F(M)$ группа F - компакт очиқ топология билан топологик группа бўлади.

Бу бобнинг иккинчи параграфи қатламали кўпхилликнинг изометриялари группасига бағишланган.

Берилган (M, g) риман кўпхиллигининг изометриялар (ҳаракатлар) группасини ўрганиш риман геометриясининг классик масалаларидан бири ҳисобланади.

Биз n ўлчамли (M, g) риман кўпхиллигининг изометриялар группасини $I(M)$ билан белгилаймиз, бу ерда g - риман метрикаси. Ушбу $I(M)$ группанинг структураси фиксирланган g риман метрикасига боғлиқ. Маълумки "ёмон" риман метрикаси учун $I(M)$ группа жуда камбағал бўлиши мумкин. $I(M)$ группа битта айний акслантиришдан иборат бўлган кўпхиллик мавжуд.

Америкалик математиклар S.B. Myers, N. Steenrod[8], изометриялар группаси $I(M)$ компакт очиқ топология билан Ли группаси бўлишини кўрсатдилар.

Қатламали кўпхилликлар изометриялар группасини тадқиқ қилиш геометрияда янги масала бўлиб, бу группа профессор А.Я. Нарманов томонидан киритилган[9]. Қатламали кўпхилликлар изометриялар группаси қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлари группасининг қисм группасидир.

Таъриф 3.2.1. Ҳар бир L_α қатлам учун $\varphi: L_\alpha \to f(L_\alpha)$ акслантириш L_α ва $\varphi(L_\alpha)$ кўпхилликларнинг изометрияси бўлса, $\varphi:(M,F)\to(M,F)$ диффеоморфизм қатламали (M,F) кўпхилликнинг изометрияси дейилади.

Мисол 3.2.1. Декарт координаталар системаси киритилган $R^2(x,y)$ евклид текислигида қатламлари $x^2-y=\alpha=const$ тенглама билан берилган F қатламани қарайлик. Текисликнинг

$$\phi_\lambda(x,y)=(x,y+\lambda)$$

[8] Myers S. and Steenrod N. The Group of Isometries of a Riemannian Manifold. Annals of Mathematics Second Series. 40(2), 1939, pp. 400-416.

[9] A. Narmanov and A. Sharipov, On the group of foliation isometries, Methods Funct. Anal. Topology 15 (2009), 195–200.

формула билан аниқланган $\phi : R^2 \to R^2$ изометрияси ҳар бир $\lambda \in R$ учун қатламали текислик (R^2, F) изометрияси бўлади. Бу акслантириш L_α қатламни $L_{\alpha-\lambda}$ қатламга ўтказади.

Бу параграфда субмерсия ҳосил қилган қатлама изометрияларини ўрганамиз.

Биз

$$\pi\,(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} - f\,(x_1, x_2, x_3, ..., x_n), \tag{3.2.1}$$

формула билан аниқланган $\pi : R^{n+1} \to R^1$ субмерсияни қарайлик, бу ерда $f\,(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) -$ дифференциалланувчи функция.

Берилган (3.2.1) формула билан аниқланган субмерсия R^{n+1} фазода коўлчами бирга тенг F қатламани ҳосил қилади.

Теорема 3.2.1. Қуйидаги

$$\varphi_\lambda(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1} + \lambda\pi) \tag{3.2.2}$$

формула билан аниқланган $\varphi : R^{n+1} \to R^{n+1}$ диффеоморфизм $\lambda \neq -1$ да қатламали (R^{n+1}, F) кўпхиллик изометрияси бўлади.

Теорема 3.2.2. Субмерсия (3.2.1) ҳосил қилган F қатлама учун

$$G_\Lambda = \{\varphi_\lambda : \lambda \in R^1, \lambda \neq -1\}, \tag{3.2.8}$$

диффеоморфизмлар тўплами $Diff_F\, R^{n+1}$ группанинг қисм группаси бўлади.

Лемма 3.2.1. Қисм G_Λ группа бир ўлчамли Ли группасидир.

Теорема 3.2.3. Қуйидаги

$$V = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

вектор майдон учун $V(f) = 0$ тенглик ўринли бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$X = V + \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

вектор майдоннинг оқими қатламали кўпхиллик диффеоморфизмлар группасининг қисм группаси бўлади. Агар V Киллинг вектор майдони бўлса, X вектор майдоннинг оқими қатламали (R^{n+1}, F) кўпхиллик изометрияларидан иборат бўлади.

Учинчи параграфда субмерсияларнинг бир параметрли алмаштиришларга нисбатан дифференциал инвариантларини топиш усуллари ўрганилган.

Феликс Клейннинг[10] машҳур Эрланген программасида геометрияни аниқловчи алмаштиришлар группасига нисбатан инвариантларни топиш геометриянинг асосий масалалари сифатида келтирилган.

Бизга M кўпхилликнинг G алмаштиришлар Ли группаси берилган бўлсин.

---

[10] Felix Klein. A comparative review of recent researches in geometry, trans. M. W. Haskell, Bull. New York Math. Soc. 2, (1892-1893), 215-249.

Таъриф 3.3.1. M кўпхилликда берилган $F(x)$ функция учун $F(x)=F(h\cdot x)$ тенглик ҳар бир $h\in G$ учун ўринли бўлса, у G группанинг инвариант функцияси дейилади.

Биз

$$H:R^m \to R^1, \qquad (3.3.6)$$

субмерсиянинг G группага нисбатан дифференциал инвариантларини топиш масаласини қараймиз.

Аввало

$$(x,y,z)=(x^1,x^2,x^3,...,x^n,y^1,y^2,y^3,...,y^n,z^1,z^2,z^3,...,z^l),$$

белгилаш киритиб оламиз, бу ерда $2n+l=m$.

Биз X - билан оқими G группани ҳосил қиладиган вектор майдонни белгилаймиз. Агар H функция G группанинг инварианти бўлса, биз унинг дифференциал инвариантларини топмоқчимиз. Маълумки, H функция G группанинг инварианти бўлиши учун $X(H)=0$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Биз G группанинг дифференциал инвариантларни топиш учун $H(x,y,z)$ функциядан фойдаланамиз.

Биз қуйидаги тенгламани қаноатлантирувчи

$$X_H(F_i)=1 \qquad (3.3.10)$$

фунционал эркли функцияларни $F_i(x,y),\ \ i=1,2,3,...,2n$ билан белгилаймиз. Фазода янги эгри чизиқли координаталар системасини $s_i=F_i(x,y),\ z_j=z_j$, бу ерда $i=1,2,3,...,2n,\ .\ \ j=1,2,3,...,l$ формулалар ёрдамида киритамиз.

Мураккаб бўлмаган ҳисоблашлар ёрдамида бу координаталар системасида вектор майдонни қуйидаги кўринишга келишини текшириш мумкин

$$X=\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial s_i}.$$

Маълумки $D=\sum_1^{2n}D_{s_i}$ дифференциаллаш операторини биринчи интегралга таъсир эттириб юқори тартибли дифференциал инвариантларни топиш мумкин[11] . Натижада қуйидаги теоремага эга бўламиз:

Теорема 3.3.3. Инвариант H функциянинг k тартибли тўлиқ ҳосилалари D^kH берилган группа учун k тартибли дифференциал инвариантлар бўлади.

Бу жараённи мисолда кўрсатамиз. Бизга уч ўлчамли евклид фазосида

$$H(x,y,z)=x^2+y^2-z \qquad (3.3.11)$$

субмерсия берилган бўлсин. Бу мисолда $m=3,\ n=1,\ l=1$. Биз ясовчиси

$$X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$$

[11]Шарипов Х.Ф. Дифференциальные инварианты субмерсий относительно групп преобразований. Диссертация доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам. Ташкент, 2021.

вектор майдон бўлган группанинг иккинчи тартибли дифференциал инвариантларини топайлик. Биз $X(F)=1$ тенгламадан

$$F_1 = \arctan \frac{y}{x}, \ F_2 = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + z.$$

функцияларни топамиз ва фазода эгри чизиқли координаталар системасини $s_i = F_i(x,y), \ z = z, \ i = 1, 2$, формулалар ёрдамида киритамиз.

Бу координаталар системасида вектор майдон

$$X = \frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2}.$$

кўринишга келади. Биз $X(H)=0$ тенглик ўринлибўлганлигиучун тўла дифференциал $D_{s_1} + D_{s_2}$ операторини H функцияга таъсир эттириб субмерсиянинг иккинчи тартибли дифференциал инвариантларини топамиз. Бизнинг мисолимизда қуйидаги иккинчи тартибли дифференциал инвариантни оламиз

$$K = \frac{4}{(1+4x^2+4y^2)^2}.$$

Бу инвариант субмерсия сатҳ сиртининг гаусс эгрилигидан иборат.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация субмерсиялар ҳосил қилувчи қатламалар геометриясини ўрганишга бағишланган.

Диссертациянинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

- Субмерсия сатҳ сиртлари чизиқли боғланишли бўлишини таьминловчи зарур ва етарли шартлар топилган;
- Субмерсия ҳосил қилувчи қатламанинг тўла геодезик қатлама бўлиши учун етарли шарт олинган;
- Уч ўлчамли евклид фазосида ўзгармас эгриликка ва ўзгармас буралишга эга бўлган бир ўлчамли қатлама ҳосил қилувчи субмерсия қурилган;
- Қатламали кўпхиллик диффеоморфизмлар группаси қатламали компакт очиқ топологияга нисбатан топологик группа эканлиги исботланган;
- Қатламали кўпхиллик изометриялар группасининг Ли группаси бўладиган қисм группаси қурилган;
- Алмаштиришларнинг бир параметрли гуруҳларига нисбатан субмерсияларнинг дифференциал инвариантларни топиш усули аниқланган.

Диссертация ишининг барча натижалари янги бўлиб, ундан вектор майдонлар назарияси, субмерсиялар геометрияси ва замонавий геометриянинг бошқа бўлимларида кейинги тадқиқотларда фойдаланиш мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

АБДИШУКУРОВА ГУЗАЛ МАКСУД КИЗИ

ГЕОМЕТРИЯ СЛОЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ СУБМЕРСИЯМИ

01.01.04 – Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТОШКЕНТ–2022 год

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2022.3.PhD/FM749.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени М. Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Шарипов Анваржон Солиевич** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Заитов Адилбек Атаханович** доктор физико-математических наук, профессор
	Рахимов Абдугафур Абдумаджидович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза**

Защита диссертации состоится «____» _____________2022 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2022 года.

(протокол рассылки №________ от «____» _______________2022 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, Ph.D.

Р.Б.Бешимов
Заместитель председателя научного семинара при
Научном совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире бурное и интенсивное развитие научно-технического прогресса требует использование методов современной математики, что обусловливает разработки новых направлений фундаментальных исследований и внедрения полученных результатов в практику. Многие задачи математики, возникающие из потребностей научно-технического прогресса сводятся к задачам динамических систем и оптимального управления. В последнее время геометрические методы находят многочисленные применения в различных областях математики, особенно широко применяются в теории динамических систем. Одним из основных разделов современной геометрии, имеющее широкое применение в теории динамических систем, является теория слоений. Одним из важных разделов теории слоений является римановы слоения. Римановы слоения естественным образом возникают в одной из основных задач римановой геометрии и является важным направлением в теоретической физике и механике.

В настоящее время в мире, одной из актуальных проблем современной геометрии является решение задачи о геометрии римановых слоений, порожденных римановыми субмерсиями. Изучение геометрии субмерсий, в частности геометрии римановых субмерсий является актуальными задачами, поскольку римановы субмерсии находят применение во всех разделах современной римановой геометрии. Изучение геометрии субмерсий тесно связано с изучением геометрии слоений, так как каждое слоение локально задается семейством поверхностей уровня некоторой субмерсии. Применение результатов по геометрии субмерсий в других областях математки, в механике и в теоритической физике для решения различных задач является одной из актуальных научных направлений.

В нашей стране усиленное внимание уделено актуальным направлениям в области естественных и точных наук, в частности, особое внимание уделяется приложению методов и результатов фундаментальных областей математики, в частности методов современной геометрии.

Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, геометрия и топология»[12]. Развитие теории слоений, в частности, геометрии слоений, порожденных субмерсиями, является важным в обеспечении реализации данного постановления.

Тема и объекты исследования настоящей диссертации и изученные проблемы по теме служат реализацию задач, отмеченных в Указах Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17

[12] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

февраля 2017 года «О дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Важный класс дифференцируемых отображений - погружения изучались с ранних этапов развития римановой геометрии. Другой класс дифференцируемых отображений составляет субмерсии, который сформировался во второй половине двадцатого века. Дифференциальная геометрия субмерсий впервые изучалась в работах R. Hermann и B. O'Neil. В частности, R. Hermann было доказано, что если риманова субмерсия задана на гладком связном пол-ном римановом мнгообразии, то она образует расслоение, причем если слои являются вполне геодезическими подмногообразиями, то все его слои взаимно изометричны. Аналоги существующих деривационных уравнений Гаусса и Кодаци погружений были получены Б.О'Нейлом для субмерсий. Применение геометрии субмерсий во всех разделах современной римановой геометрии оказалось очень плодотворным. Фундаментальные свойства римановых субмерсий получены J. Cheeger, D. Gromoll, R. Hermann, B. O'Neil, G. Walschap. Применения римановых субмерсий в теоретической физике изучены в работах итальянских математиков M. Falcitelli, A. M. Pastore, S. Ianus[13].

В исследованиях профессора Национального университета Узбекистана А. Я. Нарманова и его учеников изучена геометрия вполне геодезических и римановых слоений, порожденных субмерсиями. В работах А. Я. Нарманова и Б. Турсунова изучена геометрия слоений, порожденных римановыми субмерсиями на многообразии с неотрицательной кривизны, в работах А. Я. Нарманова и А. Шарипова изучена группа изометрий слоеных многообразий. В частности, доказано, что группа диффеоморфизмов некомпактных многообразий и группа изометрий слоеных многообразий являются топологическими группами относительно слоеной компактно-открытой топологии.

Известно, что для того, чтобы поверхности уровня субмерсии порождало слоение, они должны быть линейно связными. Необходимые и достаточные условия для этого не изучены. Кроме того, не изучены достаточные условия того, чтобы слоение, порожденной римановой субмерсией, было

[13] Maria Falcitelli, Stere Ianus, Anna Maria Pastore. Riemannian Submersions and Related Topics. World Scientific Pub Co Inc. June 25, 2004, 292 p.

расслоением. Задача, рассматриваемаявданной диссертации, о том,что обладает ли счетной базой слоеная компактная открытая топология и то, что является ли топологической группой группа диффеоморфизмов слоеного многообразия является по отношению к слоеной компактной открытой топологии до сих пор достаточно не исследована, что характеризует актуальность темы диссертации.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами Связь диссертационной работы с фундаментальными и прикладными исследованиями, с инновационными проектами, Государственными научно-техническими программами.

Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследовательского проекта Ф4-04 «Геометрия и топология слоёных многообразий», Национального университета Узбекистана (2012-2016 гг.).

Целью исследования является изучение геометрии и топологии слоений, порождённых субмерсиями, а также изучение структуры группы диффеоморфизмов слоеных многообразий.

Задачи исследования:

Решение задачи о необходимом и достаточном условии линейной связности поверхностей уровня субмерсий, определенных на полном римановом многообразии;

Выявить условие, при котором слоение на полном римановом многообразии, порожденное субмерсией является расслоением;

Установление методов нахождения дифференциальных инвариантов субмерсий относительно однопараметрических групп преобразований;

Доказательство того, что группа диффеоморфизмов слоеных многообразий является топологической группой относительно слоеной компактно открытой топологии.

Объектами исследования являются: субмерсия, риманова субмерсия, слоение, порожденное субмерсией, группа диффеоморфизмов слоеных многообразий, слоеная компактно открытая топология на группе диффеоморфизмов слоеных многообразий.

Предметами исследования являются: слоение, группа диффеоморфизмов слоеных многообразий, риманова субмерсия, топология на группе диффеоморфизмов слоеных многообразий.

Методы исследования: В диссертации применяются методы римановой геометрии, теории слоений, дифференциальной геометрии.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

- Доказано, что база субмерсии на полном римановом многообразии должна быть односвязной, чтобы поверхности уровня субмерсии была линейно связной;

- Доказано, что слоение, порожденное римановой субмерсией на полном римановом многообразии нулевой секционной кривизны, которое содержит прямые в произвольном направлении, является вполне геодезическим;

- С помощью трех векторных полей Киллинга, заданных на плоскости, построена риманова субмерсия на трехмерном евклидовом пространстве, которая порождает одномерное слоение постоянной кривизны и постоянного кручения;

-показано семейство открытых множеств в группе диффеоморфизмов слоеного многообразия, образующих счетную базу слоеной компактно-открытой топологии

- Используя тот факт, что группа диффеоморфизмов обладает счетной базой относительно слоистой компактно-открытой топологии, методом последовательностей доказано, что эта группа является топологической группой.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

результаты исследования по геометрии римановых субмерсий применяются для установления нахождения связей между римановыми слоениями, а также для различных задач римановой и дифференциальной геометрии.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов римановой геометрии, дифференциальной топологии и дифференциальной геометрии, а также строгостью математических рассуждений

Теоретическая и практическая значимости результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что доказано группа диффеоморфизмов слоеного многообразия является топологической группой относительно слоеной компактно-открытой топологии, групповые операции являются непрерывными отражениями в слоеной компактно-открытой топологии, и что группа диффеоморфизмов содержит под- группы, являющиюся группами Ли.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты исследования по геометрии слоений, порожденных субмерсиями, служат основой для изучения связей между геометрией слоев и геометрией слоеного могообразия, для описания геометрии поверхностных уровня и для решения нелокальных задач дифференциальной топологии.

Внедрение результатов исследования.

Полученные в диссертации результаты по геометрии субмерсий на многообразиях были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Полученные в диссертации результаты о том, что группа диффеоморфизмов слоеных многообразий является топологической группой, а некоторые подгруппы группы этой группы являются группами Ли позволили исследовать кардинальные инварианты топологических групп в фундаментальном проекте ОТ-Ф4-42- “Кардинальные и топологические свойства пространства полуаддитивных $\tau-$гладких и Радоновых функционалов”, выполненных в 2017-2020 гг в Национальном университет Узбекистана (Справка Национального университета Узбекистана №01/10-11-4890 от 26 асгуста 2022 г). Применение научных результатов позволило определить связи между топологическими, алгебраическими и функциональными инвариантами топологических пространств, в частности позволили нахождение кардианлых инвариантов топологических групп.

Полученные в диссертации результаты о том, что группа диффеоморфизмов слоеных многообразий является топологической группой, а некоторые подгруппы группы этой группы являются группами Ли позволили в решить задачи о геометрии динамических систем научно-исследовательских проектах Министерства образования и науки Российской федерации в рамках государственного задания «№ 075-00232-20-01, проект FEWS-2020-0010, «Развитие теории и методов управлени и стабилизации динамических системи», проект РФФИ 20-01-00293, «Качественные методы в задачах теории управления и теории дифференциальных игр с нефиксированным терминальным моментом» (Справка Удмуртского государственного университета, № 7873-8093/31 от 30 августа 2022г). Применение научных результатов позволило изучить геометрии динамических систем. В частности, полученные результаты о геометрии субмерсий дала возможность установить, что, если поверхности уровня субмерсии является интегральной поверхностью динамических систем некоторые подгруппы группы диффеоморфизмов слоеного многообразия оставляет инвариантными траектории динамических систем. Кроме того, результаты по геометрии слоений позволили установить геометрию фазового пространства динамических систем.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались на 6 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 17 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 3 из них опубликованы в зарубежных журналах и 3 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 82 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и список использованной литературы.

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы и связь с научным направлением Национального университета Узбекистан.

Первая глава диссертации, названная «Группа диффеоморфизмов многообразий» состоит из трех параграфов. В этой главе диссертации приведены необходимые понятия и определения для изложения результатов диссертации

Первый параграф этой главы посвящен векторным полям и секционной кривизне многообразий.

Пусть M-гладкое многообразие размерности n. Через точку $x \in M$ проходит бесконечно много кривых, множество $T_x M$ всех касательных векторов этих кривых в данной точке x образуют n мерное векторное пространство $T_x M$. Пространство $T_x M$ называется касательным пространством многообразия M в точке x. Если в каждом касательном пространстве $T_x M$ задана скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$, гладко зависящее от $x \in M$, то говорят что на многообразии задана риманова метрика. Многообразие с римановой метрикой называется римановой многообразием.

Определение 1.1.4 Говорят, что на гладкое многообразие M задано векторное поле X, если каждой точке $x \in M$ сопоставлен некоторый вектор $X_x \in T_x M$.

Пусть X – гладкое векторное поле на многообразии M. Гладкая кривая $\varphi:(a,b) \to M$ называется интегральной кривой векторного поля X, если для каждого $t \in (a,b)$ имеет место равенство: $\dot{\varphi}(t) = X(\varphi(t))$. Для точки $x \in M$ интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$, обозначим через $X^t(x)$.

Рассмотрим отображение

$$\nabla: V(\mathrm{M}) \times \mathrm{V(M)} \to \mathrm{V(M)} : (\mathrm{u,X}) \to \nabla_u X \tag{1.1.10}$$

производной векторного поля X в точке p в направлении данного вектора u определённой в локальных координатах (U,h) равенством

$$(\nabla_u X)_p = \left(u^i \frac{\partial \overline{X}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial \overline{X}^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p , \tag{1.1.11}$$

где, $\overline{X}^j = X^j \circ h$, X^j-координатные функции поля X.

Утверждение 1.1.1. Отображение (1.1.10) обладает следующими свойствами:

а) $\nabla_{au+bv} X = a\nabla_u X + b\nabla_v X$;

б) $\nabla_u (aX + bY) = a\nabla_u X + b\nabla_u Y$;

с) $\nabla_u (f X) = (u f) X_x + f(x) \nabla_u X$.

Определение 1.1.9. Отображение (1.1.10) называется связностью. Здесь uf - производная функции f в направлении вектора u. $\nabla_u X$ называют ковариантной производной векторного поля X в направлении вектора u.

Определение 1.1.10. Связность ∇ называют симметричной (или связностью без кручения), если для любых гладких векторных полей X,Y на M выполняется следующая равенство

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \qquad (1.1.12)$$

Определение 1.1.11. Связность ∇ называется римановой, или просто римановой связностью Леви-Чевита, если для любых гладких векторных полей X,Y,Z на M выполняется равенство

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.. \qquad (1.1.13)$$

Известна следующая теорема:

Теорема 1.1.4. На любом римановом многообразии M существует, притом единственная, симметричная риманова связность.

Тензор кривизны R связности Леви-Чевита ∇ определяется как отображение

$$R{:}V(M)\times V(M)\times V(M)\to V(M)$$

по формуле $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$, где $[X,Y]$ - скобка Ли векторных полей X,Y.

Определение 1.1.12. Кривизной Римана называют отображение $k{:}T_pM\times T_pM\to R$ действующие по правилу

$$k(u,v){:}=\langle R(u,v)v,u\rangle \; . \qquad (1.1.14)$$

Из (1.1.14) видно, что отображение k симметрично, и квадратично по каждому из своих двух аргументов.

Пусть u,v-линейно независимые векторные поля, σ- двумерная плоскость, порождённая парой u,v. Плоскости σ сопоставим действительное число K_σ:

$$K_\sigma = \frac{\langle R(u,v)v,u\rangle}{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2}\,, \qquad (1.1.15)$$

где $\langle u,v\rangle$-скалярное произведение, определённое римановой метрикой g. Величина K_σ называется секционной кривизной по отношению к плоскости или кривизной в двумерном направлению σ.

Многообразие называется многообразием неотрицательной кривизны, если $K_\sigma \ge 0$ для всех σ. Известно, что гауссова кривизна двумерного многообразия совпадает с секционной кривизной в двумерном направлении.

Второй параграф содержит необходимые сведения из теории дифференцируемых отображений.

Определение 1.2.7. Отображение $f:M\to B$ называется отображением максимального ранга если $rank_x f = \min(n,m)$, где $n=\dim M, m=\dim B$ для любого $x\in M$.

Определение 1.2.8. Отображение $f:M\to B$ максимального ранга при $n\le m$ называется погружением.

Определение 1.2.9. Отображение $f:M\to B$ максимального ранга при $n>m$ называется субмерсией**.**

Для субмерсий известна следующая теорема.

Теорема 1.2.1. Пусть $f: M \to B$-субмерсия, где M–многообразие размерности n, B– многообразие размерности m. Тогда для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $L_p = f^{-1}(p) = \{q \in M : f(q) = p\}$ является многообразием размерности $(n - m)$.

Пусть $f: M \to B$-субмерсия, $p \in B$. Тогда множество $L_p = \{q \in M : f(q) = p\}$ называется слоем над точкой является p.

Обозначим через $T_q L$ - касательное пространство слоя L_p в точке $q \in L_p$, $H_q F$ -ортогональное дополнение подпространства $T_q L$. Каждое векторное поле X можно представить в виде: $X = X^v + X^h$, где $X^v \in TF$, $X^h \in HF$. Если $X^h = 0$ (соответственно $X^v = 0$), то поле X называется вертикальным (соответственно горизонтальным) векторным полем. (по другому вектор $v \in T_q M$ называется вертикальным, если он касается слоя L_p в точке q, $f(q) = p$. Если вектор $v \in T_q M$ ортогонален к $T_q L$, то он называется горизонтальным вектором) Для любого вектора $u \in T_p B$ и любой точки $q \in L_p$ существует единственный вектор $h \in H_q F$ такой, что $df_p(h) = u$. Вектор h называют горизонтальным поднятием вектора u в точку q. Для векторного поля X на B векторное поле $\bar{X}$ на M, значение которого в каждой точке q является горизонтальным подъёмом вектора $X_{f(q)}$ называется горизонтальным поднятием векторного поля X.

Определение 1.2.10. Если дифференциал df субмерсии $f: M \to B$ сохраняет длину горизонтальных векторов, то f называется римановой субмерсией.

Простыми примерами римановых субмерсий является ортогональная проекция.

Третий параграф посвящен группе диффеоморфизмов многообразий.

Определение 1.3.1.Гладкое отображение $f: M \to N$ называется диффеоморфизмом, если оно взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1}: N \to M$ также является гладким.

Таким образом отображение называется диффеоморфизмом если

1) f дифференцируемое отображение;

2) существует обратное отображение f^{-1} и оно также дифференцируемо.

Пусть M гладкое многобразие размерности n. Обозначим через $Diff(M)$ множество диффеоморфизмов многообразия M на себя. Эта множество является группой относительно суперпозиции отображений. Под умножением элементов $f, g \in Diff(M)$ понимается суперпозиция: $f \circ g(x) = f(g(x))$. Единичным элементом этой группы является тождественное отображение: $I(x)=x$. Обратным элементом к диффеоморфизму $f\in Diff(M)$ является обратное отображение $f^{-1}\in Diff(M)$.

На множестве $Diff(M)$ вводится топология, которое называется компактно открытой топологией. Напомним определение компактно открытой топологии.

Пусть K - компактное подмножество многообразия M, U - открытое подмножество многообразия M. Положим

$$[K,U]=\{f\in Diff(M): f(K)\subset U\}.$$

Семейство множеств вида $[K,U]$ для всевозможных компактных подмножеств K и для всевозможных открытых подмножеств U образует предбазу некоторой топологии. Эта топология называется компактно открытой топологией. Известно, что множество $Diff(M)$ с этой топологией является хаусдорфовым топологическим пространством со счетной базой.

Группа диффеоморфизмов гладких многообразий имеет большое значение в дифференциальной геометрии и в анализе. Основополагающими работами в этой области являются исследования В.И. Арнольда, А.М. Лукацкий, Х. Омори. Интенсивное развитие теории групп диффеоморфизмов началась после работ В. И. Арнольда[14] в которых было показано,что движения идеальной несжимаемой жидкости являются геодезическими на группе диффеоморфизмов, которые сохраняет элемент объема.

Более того, группа $Diff(M)$ с компактно открытой топологией являеся топологической группой.

Напомним определение топологической группы.

Определение -1.3.2. Группа G, которая одновременно является топологическим пространством, называется топологической группой, если умножение элементов группы $(f,g)\in G\times \mathrm{G}\to f\cdot g\in \mathrm{G}$ и операция взятия обратного элемента $f\in G\to f^{-1}\in \mathrm{G}$ являются непрерывными.

Из результатов работы А.Нарманова и А.Шарипова[15] вытекает, что группа диффеоморфизмов $Diff(M)$ многообразия M является топологической группой относительно компактно открытой топологии.

Вторая глава диссертации, названная **«Геометрия слоений, порожденных субмерсиями»,** состоит из трёх параграфов**.** В этой главе диссертации исследованы геометрия римановых субмерсий.

В первом параграфе получено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого поверхности уровня римановой субмерсии являются линейно связными множествами.

---

[14] Arnold V. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimenzion infnite et ses applications a l'hidrodynamique des uides parfaits// Ann. Inst. Fourier. 1966. 16, № 1. P. 319–361.

[15] A. Narmanov and A. Sharipov, On the group of foliation isometries, Methods Funct. Anal. Topology 15 (2009), 195–200.

Теорема-2.1.2. Пусть $\pi: M \to B$ - риманова субмерсия, M - где полное односвязное многообразие. Тогда для каждой точки $q \in B$ слой $\pi^{-1}(q)$ линейно связен тогда и только тогда, когда многообразие B является односвязным.

Во втором параграфе получено достаточное условие, при выполнении которого риманова субмерсия порождает слоение, которое является расслоением. Отметим, что расслоение является более старым обьектом геометрии чем слоения. Слои расслоения являются взаимно диффеоморфными.

Напомним понятие расслоения.

Субмерсия $\pi: M \to B$ класса C^r ($r \geq 1$) называется C^r – расслоением, если существуют $n-m$ — мерное многообразие N и открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия B, удовлетворяющее следующим условиям:

1. для каждой точки $p \in B$ подмногообразие $\pi^{-1}(p)$ диффеомеорно многообразию N;
2. для каждого U_α существует диффеоморфизм

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times N$$

такой, что

$$\varphi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times N, p \in U_\alpha.$$

В работе[16] доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.1. Пусть M — гладкое связное полное риманово многообразие. Если $\pi: M \to B$ — риманова субмерсия, то она является расслоением. Кроме того, если слоение F, порожденное этой субмерсией, явлется вполне геодезическим слоением, то все слои взаимно изометричны.

Напомним понятие прямой на многообразии M. Геодезическая линия $\gamma: R \to M$ называется прямой, если $\gamma:[a,b] \to M$ — кратчайшая линия для каждого сегмент $[a,b] \subset R$.

Геодезическая линия $\gamma:[0,+\infty] \to M$ называется лучом, если сужение $\gamma:[a,b] \to M$ является кратчайшей каждого сегмента $[a,b] \subset [0,+\infty]$. Известно, что всякое некомпактное риманово многообразие содержит луч.

Предположим, что для каждого направления $v \in T_p M$ существует прямая, проходящая через точку p в направлении вектора v для любой точки $p \in M$. При этом предположении доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.2. Пусть M – гладкое связное полное риманово многообразие нулевой секционной кривизны и

$$\pi: M \to B \qquad (2,2.3)$$

является римановой субмерсией. Тогда слоение F, порожденное этой субмерсией является вполне геодезическим римановым слоение с изометричными слоями.

---

[16] Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc.11 (1960), 236-242.

Во третьем параграфе этой главы построена риманова субмерсия на трехмерном евклидовом пространстве, которая порождает одномерное слоение постоянной кривизны и постоянного кручения. Напомним, что векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическое группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий[17]. Рассмотрим следующие векторные поля на плоскости $R^2(x_1, x_2)$ с декартовыми координатами (x_1, x_2):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}. \qquad (2.3.1)$$

Нетрудно показать, что для каждой точки $p(x_1, x_2) \in R^2$, орбита $L(p)$, проходящая через точку $p(x_1, x_2)$ совпадает со всей плоскостью т.е. $L(p) = R^2$. Этот факт позволяет нам определить субмерсию

$$\pi : R^3 \to R^2 \qquad (2.3.2)$$

используя векторные поля X_1, X_2, X_3, положив

$$\pi(t_1, t_2, t_3) = X_3^{t_3}(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)...)),$$

где O — начало системы координат (x_1, x_2). Так как орбита $L(O) = R^2$, для каждой точки $(x_1, x_2) \in R^2$ существуют точки $(t_1, t_2, t_3) \in R^3$ такие, что $\pi(t_1, t_2, t_3) = (x_1, x_2)$.

Теорема 2.3.1. На плоскости R^2 существует риманова метрика g, такая, что субмерсия (2.3.2) является римановой и слои слоения, порожденного этой субмерсией являются кривыми постоянной кривизны и постоянного кручения.

Третья глава диссертации, названной «Группа диффеоморфизмов слоеных многообразий» состоит из трех параграфов.

В первом параграфе этой главы изучается группа диффеоморфизмов слоеного многообразия.

Пусть (M, F) гладкое многообразие M размерности n, на котором задано гладкое k- мерное слоения F (где $0<k<n$).

Определение 3.1.1. Если при диффеоморфизме $f: M \to M$ образ $f(L_\alpha)$ любого слоя L_α слоения F является слоем слоения F, то отображение $f: M \to M$ называется C^r- диффеоморфизмом слоеного многообразия и пишется в виде $f:(M,F) \to (M,F)$.

Следующий пример показывает, что понятие диффеоморфизм слоеного многообразия определено корректно.

Пример 3.1.1. Пусть $M = R^2(x, y)$ - евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y). Слои L_α слоения F задаются уравнениями $y = \alpha = const$.

[17] A. Narmanov and S. Saitova, On the geometry of orbits of killing vector fields, Differential Equations 50 (2014), 1582–1589.

Тогда гомеоморфизм плоскости $\phi : R^2 \to R^2$ определенный формулой

$$\phi(x,y)=\left(x+y,\ y^{\frac{1}{3}} \right)$$

является диффеоморфизмов на каждом слое слоения F, но не является диффеоморфизмом плоскости.

Обозначим через $Diff_F(M)$ - множество всех диффеоморфизмов слоеного многообразия (M,F). Группа $Diff_F(M)$ является подгруппой $Diff(M)$ и оно является топологической группой в компактно-открытой топологии.

Мы исследуем группу $Diff_F(M)$ с топологией, которая зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n-мерным слоением. Если коразмерность слоения равна n, то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью.

Пусть $\{K_\lambda\}$ - семейство всех компактных множеств, где каждое множество K_λ является подмножеством некоторого слоя слоения F, $\{U_\beta\}$ - семейство всех открытых множеств на M.

Рассмотрим для каждой пары (K_λ, U_β) совокупность всех отображений $f \in Diff_F(M)$, для которых $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Эту совокупность отображений обозначим через

$$[K_\lambda, U_\beta] = \{ f : M \to M \mid f(K_\lambda) \subset U_\beta \}.$$

Известно, что семейство всевозможных конечных пересечений множеств вида $[K_\lambda, U_\beta]$ образуют базу некоторой топологии. Эту топологию назовьем слоеной компактно открытой топологией или коротко $F-$ компактно открытой топологией. Эта топология впервые введена и изучена в работе профессора А.Я.Нарманова и А.С.Шарипова[18]. Там же показано, что с этой топологией множество $Diff_F(M)$ является хаусдорфовым пространством.

Так как в определении слоеной компактно открытой топологии компактные множества K_λ являются подмножествами слоев, а в определении компактно открытой топологии рассматривается произвольные компактные подмножества многообразия M, слоеная компактно открытая топология слабее обычной компактно открытой топологии.

Основными результатами первого параграфа являются следующая лемма, которая показывает, что слоеная компактно открытая топология обладает счетной базой и теорема 3.1.1.

Лемма 3.1.1. Множество $Diff_F(M)$ с $F-$ компактно открытой топологией является топологическим пространством со счетной базой.

[18] A. Narmanov and A. Sharipov, On the group of foliation isometries, Methods Funct. Anal. Topology 15 (2009), 195–200.

Теорема 3.1.1. Пусть (M,F) — гладкое слоеное многообразие. Тогда группа $Diff_F(M)$ с F - компактно открытой топологией является топологической группой.

Второй параграф посвящен группе изометрий слоеного многообразия. Исследование группы изометрий риманова многообразия (M, g) является одним из основных классических задач римановой геометрии.

Обозначим через $I(M)$ группу всех изометрий риманова многообразия (M, g)размерности n с римановой метрикой g. Структура группы $I(M)$ зависит от фиксированной римановой метрики g. Известно, что для "плохих" римановых метрик группа $I(M)$ может быть очень бедной. Известны примеры, когда группа $I(M)$ состоит из одного элемента.

Американские математики S.B. Myers, N. Steenrod показали[19], что группа изометрий $I(M)$ с компактно - открытой топологией имеет естественную структуру группы Ли.

Исследование группы изометрий слоеных многообразий является новой задачей в теории слоеных многообразий. Понятие изометрии слоения было введено профессором А.Я. Нармановым в работе[20]. Группа изометрий слоеного многообразия является подгруппой группы диффеоморфизмов слоеного многообразия.

Определение 3.2.1. Диффеоморфизм $\varphi:(M,F)\to(M,F)$ называется изометрией слоеного многообразия (M,F), если ограничение отображения φ на каждый слой слоения F является изометрией, то есть для каждого слоя L_α отображение $\varphi: L_\alpha \to f(L_\alpha)$ является изометрией между многообразиями L_α и $\varphi(L_\alpha)$.

Пример 3.2.1. Пусть $M = R^2(x,y)$ - евклидова плоскость с декартовыми координатами (x,y).

Рассмотрим слоение F, слои которого задаются уравнениями $x^2 - y = \alpha = const$. Тогда изометрия плоскости $\phi: R^2 \to R^2$ определенной формулой

$$\phi_\lambda(x,y) = (x, y+\lambda)$$

является изометрией слоеной плоскости (R^2, F), для каждого $\lambda \in R$. Оно отображает каждый слой L_α на слой $L_{\alpha-\lambda}$.

В этом разделе мы изучаем некоторые диффеоморфизмы слоеных многообразий, когда слоение порождено субмерсиями специального вида.

Рассмотрим субмерсию $\pi: R^{n+1} \to R^1$, определенную формулой

$$\pi(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n), \quad (3.2.1)$$

---

19 Myers S. and Steenrod N. The Group of Isometries of a Riemannian Manifold. Annals of Mathematics Second Series. 40(2), 1939, pp. 400-416.

20 A. Narmanov and A. Sharipov, On the group of foliation isometries, Methods Funct. Anal. Topology 15 (2009), 195–200.

где $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ – дифференцируемая функция.

Субмерсия (3.2.1) порождает слоение F на R^{n+1}, коразмерности один. Слои слоения F на R^{n+1}, определяемое субмерсией (3.2.1), являются поверхностями уровня этой субмерсии.

Теорема 3.2.1. Диффеоморфизм $\varphi : R^{n+1} \to R^{n+1}$, определяемый формулой

$$\varphi_\lambda(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1} + \lambda\pi) \quad (3.2.2)$$

является изометрией слоеного многообразия (R^{n+1}, F) при $\lambda \neq -1$.

Теорема 3.2.2. Пусть F — слоение R^{n+1}, определенное субмерсией (3.2.1). Тогда множество диффеоморфизмов

$$G_\Lambda = \{\varphi_\lambda : \lambda \in R^1, \lambda \neq -1\}, \quad (3.2.8)$$

является подгруппой группы $Diff_F\, R^{n+1}$.

Лемма 3.2.1. Множество G_Λ является одномерной группой Ли.

Теорема 3.2.3. Предположим, что для векторного поля

$$V = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

имеем, что $V(f) = 0$. Тогда поток векторного поля

$$X = V + \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

состоит из диффеоморфизмов слоеного многообразия (F, R^{n+1}), порожденного субмерсией (3.2.1). Если поле V является полем Киллинга, то поток векторного поля X состоит из изометрий слоеного многообразия (R^{n+1}, F).

В третьем параграфе рассмотрим некоторые дифференциальные инварианты субмерсий относительно однопараметрических групп преобразований.

В программе Эрлангена Феликс Клейна[21] одной из основных проблем геометрии состоит в построении инвариантов геометрических объектов относительно действия группы, определяющая эту геометрию.

Пусть G – группа Ли преобразований многообразия M

Определение 3.3.1. Функция $F(x)$ называется инвариантом группы преоб-разований группы G, если $F(x) = F(h \cdot x)$ для каждого элемента $h \in G$.

Рассмотрим субмерсию

$$H : R^m \to R^1, \quad (3.3.6)$$

т. е. дифференцируемую функцию максимального ранга.

Положим

$$(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3, ..., x^n, y^1, y^2, y^3, ..., y^n, z^1, z^2, z^3, ..., z^l),$$

[21] Felix Klein. A comparative review of recent researches in geometry, trans. M. W. Haskell, Bull. New York Math. Soc. 2, (1892-1893), 215-249.

декартовы координаты в R^m, где $2n+l=m$.

Пусть X - векторное поле, которое порождает группу G однопараметрических преобразований. Предположим, что $X(H)=0$, т.е. функция является инвариантом нулевого порядка. Известно, что функция является инвариантом группы G тогда и только тогда, когда $X(H)=0$.

Если мы хотим найти дифференциальные инварианты группы G, в качестве инварианта можно использовать функцию $H(x,y,z)$.

Рассмотрим функционально независимые функции $F_i(x,y)$, $i=1,2,3,...,2n$. которые являются решениями следующего уравнения

$$X_H(F_i)=1. \tag{3.3.10}$$

Мы введем криволинейную систмеу координат в пространстве $(x;y;z)$ пологая $s_i=F_i(x,y)$, $z_j=z_j$, где $i=1,2,3,...,2n$, $j=1,2,3,...,l$. Используя нетрудные подстановки, можно убедиться, что в переменных (s,z) векторное поле (3.3.8) имеет следующий вид

$$X=\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial s_i}.$$

Как показано работе[22]. применяя оператор дифференцирования $D=\sum_{1}^{2n}D_{s_i}$ к первому интегралу H системы можно получить дифференциальные инварианты высоких порядков. В результате мы получим следующую теорему:

Теорема 3.3.3. Полные производные D^kH функции H порядка k являются дифференциальными инвариантами порядка k.

Теперь покажем эту процедуру на примере. Мы рассмотрим субмерсию

$$H(x,y,z)=x^2+y^2-z \text{ , где } m=3,\ n=1,\ l=1. \tag{3.3.11}$$

Рассмотрим группу, для которой векторное поле

$$X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$$

является образующим. Нетрудно проверить, что $X(H)=0$. Из уравнений (3.3.10) находим, что

$$F_1=\arctan\frac{y}{x},\ F_2=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+z.$$

Мы заменим переменные в пространстве (x,y,z) , положив

$$s_i=F_i(x,y),\ z=z,$$

где $i=1,2$. В новой системе координат векторное поле (3.3.3) имеет следующую форму

[22]Шарипов Х.Ф. Дифференциальные инварианты субмерсий относительно групп преобразований. Диссертация доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам. Ташкент, 2021.

.

$$X=\frac{\partial}{\partial s_1}+\frac{\partial}{\partial s_2}.$$

В результате небольших вычислений имеем следующий дифференциальный инвариант второго порядка

$$K=\frac{4}{(1+4x^2+4y^2)^2},$$

который представляет собой гауссову кривизну поверхности уровня субмерсии в точке (x,y,z).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению геометрии слоений, порожденных субмерсиями.

Основными результатами диссертации являются следующие:

•Получено необходимое и достаточное условие, которое гарантирует линейную связность поверхностей уровня субмерсии;

•Получено достаточное условие, которое гарантирует, чтобы слоение, порожденное субмерсией было расслоением;

•Построена субмерсия на трехмерном евклидовом пространстве, которая порождает одномерное слоение постоянной кривизны и постоянного кручения;

•Доказано, что группа диффеоморфизмов слоеного многообразия с слоеной компактно открытой топологией является топологической группой;

•Построена подгруппа группы изометрий слоеного многообразия, которая является группой Ли;

•Построен метод нахождения дифференциальных инвариантов относительно однопараметрических групп преобразований.

Все результаты диссертационной работы являются новыми и могут быть использованы при дальнейших исследованиях по теории векторных полей, по геометрии сингулярных слоений, и в других разделах современной геометрии.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

ABDISHUKUROVA GUZAL MAQSUD QIZI

GEOMETRY OF FOLIATIONS GENERATED BY SUBMERSIONS

01.01.04 – Geometry and topology

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.3.PhD/FM749.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor: **Sharipov Anvarjon Solievich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dosent

Official opponents: **Zaitov Adilbek Atakhanovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Rakhimov Abdugafur Abdumadjidovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Leading organization: Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

Defense will take place «____» _____________2022 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2022 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2022 year)

A. Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliyev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, PhD.F.-M.S.

R.B.Beshimov
Deputy chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Dosent

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study the geometry and topology of foliations generated by submersions, as well as to study the structure of the group of diffeomorphisms of foliated manifolds.

The object of the research work is: submersion, Riemannian submersion, foliation generated by submersion, diffeomorphism group of foliated manifolds, foliated compact open topology on the diffeomorphism group of foliated manifolds.

Scientific novelty of the research work is as follows:

The scientific novelty of the research is as follows:

A necessary and sufficient condition is shown under which the level surfaces of submersions are path-connected sets;

A sufficient condition for a Riemannian manifold is shown under which a submersion generates a bundle whose fibers are totally geodesic submanifolds.

It is proved that the foliated compactly open topology on the group of diffeomorphisms of foliated manifolds has a countable base;

It is proved that the diffeomorphism group of foliated manifolds with foliated compact open topology is a topological group.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation on the geometry of foliations were used in the following research projects:

The scientific results of Abdishukurova's dissertation on the topic "Geometry of layers generated by submersions" for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) were used in the fundamental project OT-F4-42- “Cardian and topological properties of the space of semi-additive and Radon functionals”, completed in 2017-2020 (Certificate of the National University of Uzbekistan No. 01/10-11-4890 dated August 26, 2022). The results obtained in the dissertation made it possible to establish a connection between topological, algebraic and functional invariants of topological spaces.

The results of research on the group of diffeomorphisms of foliated manifolds in the dissertation work of Abdishukurova Guzal Maksud kizi "Geometry of foliations generated by submersions" were used in research projects of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the state assignment "No. 075-00232-20-01, project FEWS-2020-0010, "Development of the theory and methods of control and stabilization of dynamic systems",20-01-00293, "Qualitative methods in problems of control theory and the theory of differential games with non-fixed terminal moment" in solving problems of geometries of dynamic systems (Certificate of the Udmurt State University, No. 7873-8093/31 dated August 30, 2022). The application of the scientific results of this thesis made it possible to establish the geometry of the phase space of dynamical systems.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introducetion, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 82 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Абдишукурова Г.М. Нарманов А.Я. О геометрии римановых субмерсий. Uzbek Mathematical journal. 2016, №2, pp.3-8. (01.00.00; №6).
2. Abdishukurova G, Narmanov A, Sharipov X. Differential Invariants of One Parametrical Group of Transformations. Mathematics and Statistics.2020, 8(3): 347-352. (Scopus, Cite Score IF=0.28)
3. Abdishukurova G.M., Narmanov A.Ya. Diffeomorphisms of foliated manifolds. Metods of Functional Analysis and Topology. 2021, Vol. 27 no. 1, pp. 1-9. (Scopus, Cite Score IF=0.3)
4. Шарипов А. С. Абдишукурова Г. М. О некоторых свойствах группы изометрий слоеных многообразий. Бюллетень Института математики 2022, Vol. 5, №2, стр.91-96
5. A.Ya.Narmanov,G.M.Abdishukurova. The stability of completely control-lable systems. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32.Вып. 1. С. 81–93. (Scopus, Cite Score IF=1,0)
6. G.M.Abdishukurova. On the Geometry of Riemannian Submersions. Uzbek Mathematical journal. 2022, Volume 66, Issue 3, pp. 5-9. (01.00.00; №6).

II бўлим (2 часть; part 2)

7. Narmanov A. Ya., Abdishukurova G. M. The stability of completely controllable systems. Всероссийская конференция с международным участием “Теория управления и математическое моделирование” (СТММ-2022), посвященная памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. 13-17 июня 2022, стр. 154-157. Ижевск,Россия
8. Шарипов А.С., Абдишукурова Г.М. Об одной группе изометрий слоеных многообразий. “Геометрические методы в теории управления и математической физике”. III Международная научная конференция, посвященная памяти профессора М.Т.Терёхина. 16-стр, Рязань, 26-30 апреля, 2021 г.
9. Abdishukurova G.M., Narmanov A.Ya. On the geometry of submersions. International Scientific Conference “Algebraic and Geometric Meth-ods of Analysis”, pp. 3-4. 26-30 may 2020. Odessa, Ukraine.
10. Narmanov A.Ya., Abdushukurova G.M. On the group of diffeomorphisms of foliated manifolds. Всероссийская конференция с междуна-

родным “Теория управления и математическое моделирование” (CTMM-2020), посвященная памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. 15-19 июнь 2020, стр. 359-360. Ижевск, Россия

11. Шарипов А.С., Абдишукурова Г.М. О некоторых свойствах изометрий слоеных многообразий. International Online Conference "Fronter in mathematics and computer science". October 12-15, 2020, Tashkent, стр. 226-227

12. Narmanov A.Ya., Abdishukurova G.M. Diffeomorphisms of foliated manifolds. International Online Conference "Fronter in mathematics and computer science”, October 12-15, 2020, Tashkent, pp. 4-5

13. Абдишукурова Г.М. О топологии слоев римановых субмерсий. Научная конференция с участием зарубежных ученых "Проблемы современной топологии и ее приложения, 11-12 май 2017, Ташкент, с 110-111

14. Абдишукурова Г.М. О геометрии римановых субмерсий. "Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения”. Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых, 15-17 декабрь 2017, Ташкент, с. 272-273.

15. Нарманов А.Я., Абдишукурова Г.М. О структуре множеств достижимости. "Табиий фанларнинг фундаментал ва амалий муаммолари". Республика илмий-амалий конференцияси, 23-октябрь 2019, Тошкент, 420-422 б.

16. Нарманов А.Я., Абдишукурова Г.М. О геометрии римановых субмерсий. Республиканская научно-практическая конференция "Статистика и ее применения". 16-17 октабрь 2015, Ташкент, с 250-252

17. Нарманов А.Я.,Абдишукурова Г.М. О связности поверхностей уровня субмерсий. Математик физика ва замонавий анализнинг турдош масалалари. Республика илмий-амалий анжумани, 26-27 ноябрь 2015, Бухоро, 115-117 б.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари «ЎзМУ хабарлари» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: 08.11.2022 йил