

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БОЗАРОВ БАХРОМЖОН ИЛХОМОВИЧ

**УЧ ЎЛЧОВЛИ ФАЗО СФЕРАСИДА ОПТИМАЛ КУБАТУР
ФОРМУЛАЛАР**

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-
mathematical sciences**

Бозаров Бахромжон Илхомович

Уч ўлчовли фазо сферасида оптимал кубатур формулалар 5

Бозаров Бахромжон Илхомович

Оптимальные кубатурные формулы на сфере трёхмерного
пространства 21

Bozarov Bakhromjon Ilkhomovich

Optimal cubature formulas on a sphere of three-dimensional space. 40

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works 43

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ЎЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БОЗАРОВ БАХРОМЖОН ИЛХОМОВИЧ

**УЧ ЎЛЧОВЛИ ФАЗО СФЕРАСИДА ОПТИМАЛ КУБАТУР
ФОРМУЛАЛАР**

**01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)**

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида В2019.1.PhD/FM308 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Республикаси фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) ва «Ziyonet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:

Ҳаётов Абдулло Раҳмонович

физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар:

Утеулиев Ниятбай

физика-математика фанлари доктори, профессор

Нуралиев Фарход Абдуганиевич

физика-математика фанлари доктори

Етакчи ташкилот:

Самарқанд давлат университети

Диссертация химояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019/FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг «___» _____ 2022 йил соат ___ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2022 йил «___» _____ кун тарқатилди.
(2022 йил «___» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

М.М. Арипов

Илмий даражалар берувчи

Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

З.Р. Раҳмонов

Илмий даражалар берувчи

Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

Р.Д. Алоев

Илмий даражалар берувчи

Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида геология, геофизика, океаншунослик ва бошқа амалий фанларнинг кўплаб масалалари ҳамда математика ва физика-механикадаги кўплаб илмий изланишлари уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функцияларни интеграллашга келтирилади. Сфера устида аниқланган функцияларни тақрибий интеграллашда оптимал кубатур формулалар ва тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалар куриш масалалари ушбу тадқиқотнинг объекти ҳисобланади. Шунинг учун бундай интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг самарали усуллари ишлаб чиқиш, функцияларнинг турли синфларида тригонометрик вазнли интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг янги алгоритмларини яратиш ҳамда уларнинг хатоликларини баҳолаш ҳисоблаш математикасининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги вақтда жаҳонда уч ўлчовли фазо сфераси устида аниқланган функцияларни тақрибий интеграллашда оптимал кубатур формулалар куриш муҳим аҳамият касб этмоқда. Хусусан, тригонометрик вазнли интегралларни тақрибий ҳисоблашда оптимал квадратур формулалар куриш, уларнинг хатоликларини баҳолаш кенг татбиқ этилмоқда. Маълумки, икки ўлчовли сферадаги функцияларни тақрибий интеграллашда умумлашган тўғри-тўртбурчаклар ва Гаусс квадратур формулаларини турли ўзгарувчилар бўйича кетма-кет қўллаш кутилган натижага олиб келмайди. Шу сабабли, сферадаги функцияларнинг ва кучли тебранувчи функцияларининг интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун Соболев фазосида оптимал кубатур формулалар ва тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалар куриш мақсадли илмий тадқиқотлардан бири ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган геология, геофизика, океаншунослик масалаларини сонли-аналитик ечиш ва компьютер томографияси тасвирларини эффе́ктив қайта тиклаш каби долзарб йўналишларга катта эътибор қаратилмоқда. Хусусан, сфера устида аниқланган функцияларнинг интегралларини тақрибий ҳисоблашда Соболев фазоларида қурилган оптимал кубатур формулалар ва тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулаларнинг хатоликларини баҳолаш бўйича муҳим натижаларга эришилди. «Функционал анализ, алгебра, дифференциал тенгламалар, математик физика, математик моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика»¹ каби устувор йўналишлар бўйича халқаро стандартлар даражасидаги илмий изланишлар олиб бориш ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятининг асосий вазифаларидан бири ҳисобланади. Қарор ижросини таъминлашда квадратур ва кубатур формулалар куриш, уларнинг хатоликларини баҳолаш муҳим аҳамиятга эга.

¹ Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПҚ-4708-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги, 2022 йил 28 январдаги ПФ-60 сонли «2022-2026 йилларга мўлжалланган Янги Ўзбекистоннинг тараққиёт стратегияси тўғрисида»ги фармонлари, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Маълумки амалий масалаларнинг кўпчилиги хусусан, геоматематика, тўлқинлар назарияси, тасвирларни қайта тиклаш, электродинамика ва компьютер томографиясида тригонометрик вазнли интеграллар кенг кўламда қўлланилади. Фурье интеграллари тригонометрик вазнли интеграллардан муҳимлари ҳисобланади. Чунки Фурье алмаштиришларига асосланган усуллар фан ва техниканинг кўплаб соҳаларида амалий жиҳатдан қўлланилади. Ундан ташқари, Фурье коэффициентлари улардаги частота ўзгарувчисининг етарлича катта қийматларида кучли тебранувчи интеграллар бўлиши маълум. Шунинг ҳам таъкидлаш керакки, бундай интегралларни сонли ҳисоблашда стандарт усуллардан фойдаланиш қулай эмас. Шунинг учун, бундай интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун махсус усулларни ишлаб чиқиш талаб қилинади. Кучли тебранувчи тригонометрик интеграллаш учун дастлабки сонли интеграллаш учун дастлабки формула Л.Н.Г. Филон томонидан олинган. Ундан сўнг турли типдаги кучли тебранувчи функцияларнинг интегралларини сонли ҳисоблаш учун Филон типдаги, Кленшев-Куртис-Филон типдаги, Левин типдаги ва бошқа махсус эффектив методлари ишлаб чиқилди. Яқинда, турли Гильберт фазоларида Фурье коэффициентлари ва интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун Соболев усулига асосланган Сард маъносидаги оптимал квадратур формулалар қурилди ва улар компьютер томографияси тасвирларини катта аниқликда тиклашга қўлланилди.

Таъкидлаш жоизки, амалиётда кўплаб масалалар сфера устида функцияларни интеграллашга олиб келинади. Уч ўлчовли фазо сферасида

аниқланган функцияларни тақрибий интеграллаш учун турли усуллар мавжуд. Жумладан, уч ўлчовли фазодаги сферада аниқланган функцияларни интеграллаш учун Гаусс ва Чебышев усуллари келтириш мумкин. Гаусс усули билан биринчи бўлиб, яъни бирлик сферада жойлашган икосаэдрнинг учлари ва ёқларининг ўрталари орқали аниқланган сферадаги нуқталарда бир ўзгарувчи функцияларни интеграллашда Л.А.Люстерник ва В.А.Диткин ва маълум сондаги тугун нуқталарда А.Д.Мак-Лорен кубатур формулалар учун натижалар олган.

Уч ўлчовли фазодаги бирлик сферада кўпёқларни буришларга нисбатан инвариант нуқталарнинг чекли группаси ёрдамида кубатур формулаларни куришнинг умумий назарияси С.Л.Соболев томонидан таклиф этилган. Сўнгра бу назария асосида А.Д.Мак-Лорен, А.Х.Строуд, И.П.Мысовских, Ғ.Н.Салихов, В.И.Лебедев, С.И.Коняев, Э.А.Шамсиев, Ҳ.Ху, F.Dai ва бошқалар илмий изланишлар олиб боришган. Сфера устида аниқланган функцияларнинг интегралларини ва тригонометрик вазнли интегралларини тақрибий ҳисоблашда кенг тарқалган усуллар бу турли Гильберт ва банах фазоларида квадратур ва кубатур формулалардир. Ушбу йўналишдаги илмий ишлар L.N.G.Filon, Y.L.Luke, E.A.Filin, K.Atkinson, E.Novak, F.Dai, Y.Xu, Ph.Rabinowitz, С.Л.Соболев, И.П.Мысовских, Ғ.Н.Салихов, М.И.Исраилов, Ҳ.М.Шадиметов, Э.Шамсиев, Б.Эшдавлатов, С.А.Бахромов, А.Р.Ҳаётов, Н.Д.Болтаев, С.С.Бабаев ва бошқаларнинг илмий ишларида ёритилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти ЎЗР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти илмий-тадқиқот режаларининг ОТ-Ф4-86 «Гильберт фазоларида дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун оптимал методлар ишлаб чиқиш» мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Соболев фазоларида уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функцияларни тақрибий интеграллаш учун оптимал кубатур формулалар ва тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалар куришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функцияларнинг интегралини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал кубатур формула куриш масаласини тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулаларни куриш масаласига келтириш;

Соболев фазосида тригонометрик вазнли квадратур формулалар учун хатолик функционалининг нормасини ҳисоблаш ва квадратур формулаларнинг ушбу нормага энг кичик қиймат берадиган коэффициентларини топиш;

Тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалардан уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функцияларнинг интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал кубатур формулалар куришда фойдаланиш;

Курилган тригонометрик вазли оптимал квадратур формулаларни компьютер томографиясининг тасвирларни қайта тиклашга тадбиқларини ўрганиш;

Тадқиқотнинг объекти – сфера устида аниқланган функция интеграллари учун оптимал кубатур формулалар, тригонометрик вазли интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулалар, квадратур формулаларнинг хатолигини баҳолашдан иборат.

Тадқиқотнинг предмети – Экстремал функциялар, уч ўлчовли фазо бирлик сферасида функцияларнинг интегралли, Фурье коэффицентларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар ва вазли оптимал квадратур формулалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, умумлашган функциялар назарияси, дискрет аргументли функциялар назариясининг усулларида фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги:

Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида тригонометрик вазли квадратур формулалар учун хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган;

тригонометрик вазли оптимал квадратур формулалар коэффицентларининг ошкор кўриниши топилган;

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функцияларнинг интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун тригонометрик вазли оптимал квадратур формула ёрдамида оптимал кубатур формулалар курилган;

курулган тригонометрик вазли оптимал квадратур формулалар компьютер томографиясининг тасвирларини қайта тиклаш учун тадбиқ этилган;

Тадқиқотнинг амалий натижаси қуйидагилардан иборат:

вазли оптимал квадратур формула ёрдамида кўёш энергетик курилмалари учун янги типдаги параболоцилиндрик концентраторларни яратиш иссиқлик жараёнларини ифодаловчи математик моделлар ечимларини сонли ҳисоблаш схемалари курилган;

сфера устида аниқланган функцияларни тақрибий интеграллаш учун курилган оптимал кубатур формула ёрдамида геология ва геофизика масалаларини ечиш учун янги алгоритмлар курилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончилиги квадратур формулалар назарияси, ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар назариясининг методларини қўлланилганлиги, ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти Соболев фазоарида тригонометрик вазли интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулаларни курилганлиги ва шу асосда уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функциялар интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал кубатур формулалар билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти қурилган оптимал квадратур ва кубатур формулалар геология ва геофизика масалаларини ечишда қўлланилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функцияларнинг интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун қурилган оптимал кубатур формулалар ва тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалар бўйича олинган илмий натижалар асосида:

сферада аниқланган функцияларнинг интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун қурилган тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулаларидан ОТ-Ф-3-19 – “Энергия ўзгаришининг иссиқлик цикллари асосланган қуёш энергетик қурилмалари учун янги типдаги параболоцилиндрик концентраторларнинг модул тизимларини яратиш бўйича фундаментал тадқиқотларни ривожлантириш” фундаментал лойиҳасида қуёш энергетик қурилмалари учун янги типдаги параболоцилиндрик концентраторларни яратиш иссиқлик жараёнларини ифодаловчи математик моделлар ечимларини оптимал яқинлаштиришда фойдаланилган (Фарғона политехника институтининг 2021 йил 17 июлдаги 01-1370 сонли маълумотномаси). Натижада, бу аэродинамиканинг мураккаб физик жараёнларини ифодалашда маълум интегро-дифференциал тенгламаларни ҳосил қилиш, уларни тақрибий интеграллаш ва хатолигини баҳолаш имконини берган;

Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функцияларнинг интеграллари учун кубатур формулалар ва тригонометрик вазнли интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун қурилган оптимал квадратур формулалар ОТ-Атех-2018-340 рақамли “Икки тезликли муҳит динамикасининг амалий геофизик масалаларини назарий ва сонли тадқиқ этиш” мавзусидаги амалий лойиҳасида икки тезликли муҳит динамикасини ифодаловчи модел тенгламаларни ечимларини етарлича катта аниқликда ҳисоблашда фойдаланилган (Қарши давлат университетининг 2021 йил 22 декабрдаги 04/6538 сонли маълумотномаси). Натижада, бу геология ва геофизика масалаларини ечиш учун янги алгоритмлар қуриш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, 13 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 7 та халқаро ва 6 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши.

Диссертация мавзуси бўйича жами 20 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши.

Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 97 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертациянинг кириш қисмида мавзунинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқотнинг мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, ишнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг “Тригонометрик вазли оптимал квадратур формулаларни куриш масаласи” биринчи боби кириш характерига эгадир.

Бу бобда функцияларнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ Соболев фазоси, сфера устида аниқланган функцияларнинг интеграллари, Фурьенинг синус ва косинус алмаштиришлари, ҳамда ушбу ишда фойдаланиш учун зарур бўладиган маълум таърифлар, теоремалар ва формулалар ҳақида маълумотларни келтирилган. Шу билан бирга уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функцияларни интеграллаш ва даврий функцияларни Фурье қаторига ёйишда Фурье коэффициентларини ҳисоблаш учун олдин курилган кубатур ва квадратур формулалар билан таништирилган.

Бу бобнинг биринчи параграфида функционал фазолар, сфера устида аниқлаган функциялар, Фурьенинг синус ва косинус алмаштиришлари ҳақида маълумотлар берилган. Яъни, $L_2^{(m)}(0,1)$ бу $(m-1)$ -тартибли ҳосиласигача абсолют узлуксиз ва m -тартибли умумлашган ҳосиласи квадрати билан жамланувчи функцияларнинг Соболев фазосидир. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода ψ ва φ элементлар орасида скаляр кўпайтма куйидагича аниқланган

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \psi^{(m)}(x) \varphi^{(m)}(x) dx. \quad (1)$$

Шунингдек, $\varphi \in L_2^{(m)}(0,1)$ функциянинг (1) скаляр кўпайтмага мос нормаси ушбу кўринишда киритилган

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m)}(0,1)} = \left[\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Ушбу диссертацияда уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган, квадрати билан интегралланувчи функциялар синфи учун оптимал кубатур формулалар курилган. Шунинг учун уч ўлчовли фазодаги бирлик сфера тушунчаси ва унда аниқланган функцияларнинг интеграллари ҳақида маълумотлар келтирилган. Аввало уч ўлчовли фазода нуқталарни декарт координаталар системасидан сферик координаталар системасига ўтиш учун маълумотлар берилган. Булар асосида куйидаги кўринишдаги каррали интегрални ҳисоблаш масаласига олиб келинган

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) |J| d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (3)$$

Бу (3) интегралнинг биринчи ўзгарувчиси θ учун умумий ҳолда тригонометрик вазнли квадратур формулалар қурилган. Иккинчи ϕ ўзгарувчиси учун умумлашган тўғри-тўртбурчаклар формуласидан фойдаланилган ҳолда кубатур формула қурилган.

Юқоридаги (3) интегрални тақрибий ҳисоблашда интеграл остидаги $F(\theta, \phi)$ функциянинг ϕ ўзгарувчи бўйича даврий эканлигини эътиборга олиб, θ ўзгарувчига нисбатан даврий ёки даврий эмаслигига қараб мос равишда қуйидаги ҳолларни қараш мумкин.

1) Фараз қилайлик, (3) интеграл остидаги $F(\theta, \phi)$ функция θ ва ϕ ўзгарувчилар бўйича даврий функция бўлсин, бунда θ ўзгарувчи бўйича $\varphi(x)$ даврий функциялар учун $p(x)$ вазнли қуйидаги

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=1}^N C[\beta]\varphi[\beta]$$

оптимал квадратур формуладан фойдаланиш мумкин. Кейин, иккинчи φ ўзгарувчи бўйича қуйидаги умумлашган тўғри-тўртбурчаклар формуласидан фойдаланиш мумкин

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{\beta=1}^N hf(a+h\beta),$$

бу ерда $h = \frac{b-a}{N}$, N - бирор натурал сон.

2) Агар (3) интеграл остидаги $F(\theta, \phi)$ функция θ ўзгарувчи бўйича даврий бўлмаса, бу ўзгарувчи бўйича қуйидаги синус вазнли оптимал

$$\int_0^\pi \sin(\theta)F(\theta, \phi)d\theta \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta]F(h\beta, \phi)$$

квадратур формуладан фойдаланиш мумкин. Бу кўринишидаги квадратур формулалар учун ушбу ишнинг иккинчи бобида тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалар қурилган. Фараз қилайлик, $F(\theta, \phi)$ функция ϕ ўзгарувчи бўйича даврий функция бўлсин, унда ϕ ($0 \leq \phi < 2\pi$) ўзгарувчи бўйича тақрибий интегрални умумлашган тўғри-тўртбурчаклар формуласидан фойдаланган ҳолда ҳисоблаш мумкин. Натижада, биз уч ўлчовли фазодаги сферада аниқланган функцияларнинг интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал кубатур формулага эга бўламиз.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалар Фурье қаторидаги коэффицентларни ва Фурье алмаштиришларини ҳисоблашда ишлатилгани учун, Фурье қатори ва Фурье алмаштиришлари тушунчаларини келтириб ўтилган.

Шунинг учун ушбу диссертацияда уч ўлчовли фазодаги сферада аниқланган функцияларни интеграллаш ва Фурье коэффицентларини ҳисоблаш учун умумий ҳолда қуйидаги кўринишдаги тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалар қуриш масаласи қаралган

$$\int_0^1 \sin(2\pi\omega x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta]\varphi[\beta] \quad (4)$$

ва

$$\int_0^1 \cos(2\pi\omega x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_c[\beta]\varphi[\beta]. \quad (5)$$

Бу ерда $C_s[\beta]$ ва $C_c[\beta]$ лар мос равишда синус ва косинус вазнли квадратур формулаларнинг коэффициентлари, $[\beta] = h\beta$, $h = \frac{1}{N}$, N - бирор натурал сон ва $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида диссертациянинг асосий натижаларини исботлаш учун керак бўладиган формулалар ва таърифлар берилган. Хусусан, дискрет аргументли функция тушнчаси ва унинг устида бажариладиган амаллар аниқланган.

Бу бобнинг тўртинчи параграфида уч ўлчовли фазодаги сферада аниқланган функцияларнинг интегралларини ҳисоблаш учун ва тригонометрик вазнли квадратур формулалар учун олдин қурилган кубатур ва квадратур формулаларнинг баъзи натижалари таништирилган.

Диссертациянинг «Тригонометрик вазнли оптимал квадратур формуланинг коэффициентлари» деб номланувчи иккинчи бобида $L_2^{(m)}(0,1)$ Соболев фазосида $\sin(2\pi\omega x)$ ва $\cos(2\pi\omega x)$ вазнли интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун Сард маъносидаги оптимал квадратур формулалар қуриш масаласи ечилган. Иккинчи бобнинг биринчи параграфида (4) кўринишидаги квадратур формула қурилган.

Яъни, (4) квадратур формулани мос равишда қуйидаги

$$\ell_s(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)\sin(2\pi\omega x) - \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta]\delta(x - [\beta]) \quad (6)$$

хатолик функционали билан бирга қараймиз.

Юқорида берилган (6) хатолик функционалида $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ бу $[0,1]$ кесманинг характеристик функцияси, $\delta(x)$ Диракнинг дельта – функцияси.

Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (6) хатолик функционали аниқланган бўлиши учун қуйидаги шартларни талаб қилиш зарур

$$(\ell_s, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1. \quad (7)$$

Бу ердан, (4) кўринишидаги квадратур формула мавжуд бўлиши учун $N \geq m-1$ шарт бажарилиши керак.

Бундай ҳолда (4) квадратур формуланинг хатолиги мос равишда

$$\ell_s(\varphi) = (\ell_s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell_s(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \sin(2\pi\omega x)\varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta]\varphi[\beta] \quad (8)$$

кўринишларга эга бўлади.

Хар бир квадратур формула учун Коши-Шварц тенгсизлигига асосан

$$|(\ell_s, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{L_2^{(m)}} \cdot \|\ell_s\|_{L_2^{(m)}}$$

(4) квадратур формуланинг (8) хатолигининг баҳоси $L_2^{(m)}$ фазога тегишли тайин φ элемент учун (4) квадратур формула хатолигининг абсолют қиймати

$L_2^{(m)*}$ кўшма фазодаги ℓ_s хатолик функционали нормаси билан баҳоланади. Шундай қилиб, $L_2^{(m)}$ функциялар фазосида (4) квадратур формула хатолигининг юқоридан баҳоси (6) хатолик функционалининг нормаси билан ҳисобланади.

Бу (6) хатолик функционали нормасини тугун нуқталарни фиксирлаган ҳолда, коэффицентлар бўйича минималлаштириш Сард масаласи дейилади ва олинган формула Сард маъносидаги оптимал квадратур формула дейилади. Бу масала биринчи бўлиб Сард томонидан ўрганилган.

Бу параграфнинг асосий мақсади $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида тригонометрик вазли интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун (4) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формулани куришдан иборат. Бу дегани мос равишда

$$\|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}} = \inf_{C_s[\beta]} \|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}} \quad (9)$$

қийматга эришувчи $C_s[\beta]$ коэффицентларни топишдан иборат.

Шундай қилиб, (4) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формула куришда қуйидаги масалаларни кетма-кет ечишимиз керак.

1-масала. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (4) квадратур формуланинг (6) хатолик функционалининг нормасини ҳисоблаш.

2-масала. (9) қийматга эриштирувчи $C_s[\beta]$ коэффицентларни топиш.

1-масалани ечишда, яъни $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (6) хатолик функционалининг нормасини топиш учун

$$(\ell_s, \psi_{\ell_s}) = \|\psi_{\ell_s}\|_{L_2^{(m)}} \cdot \|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}}$$

тенгликни қаноатлантирувчи ℓ_s хатолик функционалининг экстремал функциясида фойдаланамиз.

$L_2^{(m)}$ фазосида ℓ_s функционалнинг $\psi_{\ell_s}(x)$ экстремал функцияси қуйидаги кўринишга эга

$$\psi_{\ell_s}(x) = (-1)^m \ell_s(x) * G_m(x) + P_{s,m-1}(x) \quad (10)$$

бу ерда

$$G_m(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2 \cdot (2m-1)!},$$

у ушбу $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} G_m(x) = \delta(x)$ тенгламанинг ечими, $P_{s,m-1}(x)$ бу $(m-1)$ даражали бирор кўпхад, ва $*$ - свёртка амали. Экстремал функция тушунчасини Соболев томонидан киритилган ва $L_2^{(m)}$ фазода у томонидан (10) кўринишда экани кўрсатилган.

Маълумки, $L_2^{(m)*}$ фазода ихтиёрий чизиқли ℓ_s функционал учун қуйидаги тенглик ўринли

$$\|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}}^2 = (\ell_s, \psi_{\ell_s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell_s(x) \left((-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \ell_s(x) G_m(x-y) dy \right) dx.$$

Бу тенгликни (6) функционалга қўллаб, (7) ни ҳисобга олиб, қуйидагини оламиз

$$\begin{aligned} \|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}}^2 = & (-1)^m \left(\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_s[\beta] C_s[\gamma] \frac{|\beta - \gamma|^{2m-1}}{2 \cdot (2m-1)!} - \right. \\ & - 2 \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta] \int_0^1 \sin(2\pi\omega x) \frac{|x - \beta|^{2m-1}}{2 \cdot (2m-1)!} dx + \\ & \left. + \int_0^1 \int_0^1 \sin(2\pi\omega x) \sin(2\pi\omega y) \frac{|x - y|^{2m-1}}{2 \cdot (2m-1)!} dx dy \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Шундай қилиб 1 масала ечилди.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида, юқорида берилган алгоритмдан фойдаланиб, (4) кўринишдаги оптимал квадратур формула коэффициентлари учун ошкор формулалар олинган ва қуйидаги исботланган.

Теорема 1. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (4) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формуланинг, $\omega \in \square$ ва $\omega h \notin \square$ бўлганда, коэффициентлари учун қуйидаги кўринишлар ўринли

$$\begin{aligned} C_s[0] &= h \left[\frac{1}{2\pi\omega h} - K_{m,\omega} \frac{\cos(\pi\omega h)}{2 \sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k - n_{s,k} q_k^N}{q_k - 1} \right], \\ C_s[\beta] &= h \left[K_{m,\omega} \sin(2\pi\omega[\beta]) + \sum_{k=1}^{m-1} (m_{s,k} q_k^\beta + n_{s,k} q_k^{N-\beta}) \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ C_s[N] &= h \left[-\frac{\cos(2\pi\omega)}{2\pi\omega h} + K_{m,\omega} \frac{\cos(2\pi\omega - \pi\omega h)}{2 \sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{-m_{s,k} q_k^N + n_{s,k} q_k}{q_k - 1} \right], \end{aligned}$$

бу ерда $[\beta] = h\beta$, q_k лар $(2m-2)$ – даражали Эйлер – Фробениус кўпхадни $E_{2m-2}(x)$ нинг $|q_k| < 1$ шартни қанлатлантирувчи илдизлари,

$$K_{m,\omega} = \frac{(2 - 2 \cos(2\pi\omega h))^m \cdot (2m-1)!}{(2\pi\omega h)^{2m} \left(2 \sum_{k=0}^{m-2} a_{k,2m-2} \cos(2\pi\omega h(m-1-k)) + a_{m-1,2m-2} \right)},$$

$a_{k,2m-2}$ лар $E_{2m-2}(x)$ кўпхаднинг коэффициентлари, $m_{s,k}$ ва $n_{s,k}$ лар қуйидаги чизиқли тенгламалар системасидан аниқланади

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k - (-1)^j n_{s,k} q_k^{N+1}}{(q_k - 1)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) &= -\frac{(-1)^j j! \cos\left(\frac{\pi j}{2}\right)}{(2\pi\omega h)^{j+1}} - \\ &- \frac{(1 + (-1)^j) K_{m,\omega} e^{2\pi i \omega h}}{2i(e^{2\pi i \omega h} - 1)^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i \omega h}), \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k^{N+1} - (-1)^j n_{s,k} q_k}{(1 - q_k)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) &= \frac{j! \cos\left(2\pi\omega + \frac{\pi j}{2}\right)}{(2\pi\omega h)^{j+1}} - \end{aligned}$$

$$-\frac{(e^{2\pi i\omega} + (-1)^j e^{-2\pi i\omega})K_{m,\omega} e^{2\pi i\omega h}}{2i(1 - e^{2\pi i\omega h})^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i\omega h}), j=1,2,\dots,m-1.$$

Теорема 2. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (4) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формуланинг, $\omega h \in \square$ ва $\omega \neq 0$ бўлганда, коэффициентлари учун қуйидаги кўринишлар ўринли

$$C_s[0] = h \left[\frac{1}{2\pi\omega h} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k - n_{s,k} q_k^N}{q_k - 1} \right],$$

$$C_s[\beta] = h \left[\sum_{k=1}^{m-1} (m_{s,k} q_k^\beta + n_{s,k} q_k^{N-\beta}) \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$C_s[N] = h \left[-\frac{1}{2\pi\omega h} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{-m_{s,k} q_k^N + n_{s,k} q_k}{q_k - 1} \right],$$

бу ерда $[\beta] = h\beta$, q_k лар $(2m-2)$ – даражали Эйлер – Фробениус кўпхати $E_{2m-2}(x)$ нинг $|q_k| < 1$ шартни қаноатлантирувчи илдизлари, $m_{s,k}$ ва $n_{s,k}$ лар қуйидаги чизиқли тенгламалар системасидан аниқланади

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k - (-1)^j n_{s,k} q_k^{N+1}}{(q_k - 1)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = -\frac{(-1)^j j! \cos(\frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}}, \quad j=1,2,\dots,m-1,$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k^{N+1} - (-1)^j n_{s,k} q_k}{(1 - q_k)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = \frac{j! \cos(2\pi\omega + \frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}}, \quad j=1,2,\dots,m-1.$$

Бу бобнинг иккинчи параграфида $\cos(2\pi\omega x)$ вазни оптимал квадратур формулани қуриш келтирилган бўлиб, у иккинчи бобнинг биринчи параграфида берилган метод каби қурилган. Бу квадратур формуланинг коэффициентлари топилган ва қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 3. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (5) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формуланинг, $\omega \in \square$ ва $\omega h \in \square$ бўлганда, коэффициентлар учун қуйидаги тенгликлар ўринли

$$\mathring{C}_c[0] = h \left[\frac{K_{m,\omega}}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k - n_{c,k} q_k^N}{q_k - 1} \right],$$

$$\mathring{C}_c[\beta] = h \left[K_{m,\omega} \cos(2\pi\omega[\beta]) + \sum_{k=1}^{m-1} (m_{c,k} q_k^\beta + n_{c,k} q_k^{N-\beta}) \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\mathring{C}_c[N] = h \left[\frac{\sin(2\pi\omega)}{2\pi\omega h} - \frac{K_{m,\omega}}{2} \frac{\sin(2\pi\omega - \pi\omega h)}{\sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{-m_{c,k} q_k^N + n_{c,k} q_k}{q_k - 1} \right]$$

бу ерда $[\beta] = h\beta$, q_k лар $(2m-2)$ – даражали Эйлер – Фробениус кўпхати $E_{2m-2}(x)$ нинг $|q_k| < 1$ шартни қаноатлантирувчи илдизлари, $K_{m,\omega}$ катталиқ Теорема 1 да аниқланган, $m_{c,k}$ ва $n_{c,k}$ лар қуйидаги чизиқли тенгламалар системасидан аниқланади

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k - (-1)^j n_{c,k} q_k^{N+1}}{(q_k - 1)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = \frac{(-1)^j j! \sin\left(\frac{\pi j}{2}\right)}{(2\pi\omega h)^{j+1}} - \frac{(1 - (-1)^j) K_{m,\omega} e^{2\pi i\omega h}}{2(e^{2\pi i\omega h} - 1)^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i\omega h}), \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k^{N+1} - (-1)^j n_{c,k} q_k}{(1 - q_k)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = -\frac{j! \sin\left(2\pi\omega + \frac{\pi j}{2}\right)}{(2\pi\omega h)^{j+1}} - \frac{(e^{2\pi i\omega} - (-1)^j e^{-2\pi i\omega}) K_{m,\omega} e^{2\pi i\omega h}}{2i(1 - e^{2\pi i\omega h})^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i\omega h}), \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Теорема 4. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (5) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формуланинг, $\omega h \in \square$ ва $\omega \neq 0$ бўлганда, коэффициентлар учун қуйидаги кўринишлар ўринли

$$C_c[0] = h \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k - n_{c,k} q_k^N}{q_k - 1} \right],$$

$$C_c[\beta] = h \left[\sum_{k=1}^{m-1} (m_{c,k} q_k^\beta + n_{c,k} q_k^{N-\beta}) \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$C_c[N] = h \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{-m_{c,k} q_k^N + n_{c,k} q_k}{q_k - 1} \right],$$

бу ерда $[\beta] = h\beta$, q_k лар $(2m-2)$ – даражали Эйлер – Фробениус кўпхадиди $E_{2m-2}(x)$ нинг $|q_k| < 1$ шартни қанлатлантирувчи илдизлари, $m_{c,k}$ ва $n_{c,k}$ лар қуйидаги чизикли тенгламалар системасидан аниқланади

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k - (-1)^j n_{c,k} q_k^{N+1}}{(q_k - 1)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = \frac{(-1)^j j! \sin\left(\frac{\pi j}{2}\right)}{(2\pi\omega h)^{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k^{N+1} - (-1)^j n_{c,k} q_k}{(1 - q_k)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = \frac{j! \sin\left(2\pi\omega + \frac{\pi j}{2}\right)}{(2\pi\omega h)^{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида хусусий ҳолларда фойдаланиш учун (4) ва (5) оптимал квадратур формулаларнинг коэффициентлари берилган.

Диссертациянинг «Уч ўлчовли фазодаги сферада аниқланган функцияларни тақрибий интеграллаш учун оптимал кубатур формула ва тригонометрик вазли квадратур формулаларнинг тадбиқлари» деб номланувчи учинчи бобнинг биринчи параграфида сфера устида аниқланган функцияларни тақрибий интеграллаш учун оптимал кубатур формулалар берилган. Қурилган оптимал кубатур формулалардан фойдаланиб маълум функцияларнинг интеграллари тақрибий ҳисобланган.

Бу бобнинг иккинчи параграфида қурилган тригонометрик вазли оптимал квадратур формулалардан шуни кўриш мумкинки, $\omega \in \square$ бўлганда

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазода Н.Д.Болтаев ва бошқаларнинг ишида аниқланган коэффициентларини келиб чиқади. Косинус вазли (5) оптимал квадратур формулада $\omega \rightarrow 0$ Х.М.Шадиметов томонидан қурилган вазни бир бўлган оптимал квадратур формулаларнинг коэффициентлари келиб чиқади. С.С.Бабаев томонидан $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазода $\omega \in \square$ бўлган ҳол учун оптимал квадратур формулалар қурилган. Бундан ташқари $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида А.Р.Ҳаётов, Soomin Jeon, Chang-Ock Lee ва Х.М.Шадеметовлар томонидан қурилган оптимал квадратур формулалар компьютер томографиясида тасвирларни қайта тиклаш масалаларига татбиқ қилинган.

Ушбу бобнинг биринчи параграфида биринчи бобда келтирилган (3) тенгликнинг ўнг қисми бўлган

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta F(\theta, \phi) d\theta d\phi \quad (12)$$

интегралдаги $F(\theta, \phi)$ функциянинг берилиши билан бу интеграл остидаги ифода θ ва ϕ ўзгарувчиларга нисбатан даврий ёки даврий эмас деб қараш мумкин.

Бизга маълумки, (12) ифода қуйидаги тартибда кетма-кет ҳисобланиши мумкин

$$I_1(\phi) = \int_0^{\pi} \sin(\theta) F(\theta, \phi) d\theta \quad (13)$$

ва

$$I = \int_0^{2\pi} I_1(\phi) d\phi. \quad (14)$$

Бу параграфда уч ўлчовли фазодаги сферада аниқланган функцияларнинг интегралини тақрибий ҳисоблашда тайин бир функциялар олиб қурилган кубатур формулалар ёрдамида сонли натижаларни ҳисобланган.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида қурилган оптимал квадратур формулалар классик маънодаги квадратур формулалар билан таққосланган. Умумлашган трапециялар формуласи чизиқли функцияга аниқ бўлганлиги сабабли, тригонометрик вазли квадратур формулани ҳам чизиқли функцияга аниқ бўлган $m = 2$ ҳолида қараймиз.

Мисол 1. Қуйидаги интегрални ҳисобланг $\int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x) dx$.

Берилган мисолни умумлашган Ньютон-Котес формуласи

$$\int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x) dx \cong \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i^2 \sin(2\pi\omega x_i) + x_{i+1}^2 \sin(2\pi\omega x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad (15)$$

билан тақрибий ҳисоблаймиз. Бу умумлашган трапециялар формуласига айнан тенг.

Дастлаб, бу интегрални аниқ қийматини I билан белгилаб оламиз

$$I = \int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x) dx.$$

Берилган мисолни умумлашган Ньютон-Котес формуласининг чизиқли квадратур формуласи билан ҳисобланган тақрибий қийматини

$$A_r = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i^2 \sin(2\pi\omega x_i) + x_{i+1}^2 \sin(2\pi\omega x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

деб белгилаймиз.

Ньютон – Котес формуласи хатолигининг абсолют қиймати бу интеграл ва квадратур йиғинди орасидаги айирманинг абсолют қиймати билан аниқланади. Яъни,

$$|I - A_r| = \left| \int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x) dx - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i^2 \sin(2\pi\omega x_i) + x_{i+1}^2 \sin(2\pi\omega x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) \right|. \quad (16)$$

Жадвал 1. $N = 1, 10, 100, 1000$ ва $\omega = 1.1, 10.1, 100.1, 1000.1$ бўлганда умумлашган трапециялар формуласининг хатолигини абсолют қийматларини ўзгариши келтирилган.

	$\omega = 1.1$	$\omega = 10.1$	$\omega = 100.1$	$\omega = 1000.1$
	$ I - A_r $	$ I - A_r $	$ I - A_r $	$ I - A_r $
$N = 1$	3.874936(-1)	3.063506(-1)	2.951759(-1)	2.940213(-1)
$N = 10$	5.701761(-3)	1.641521(-1)	1.529774(-1)	1.518228(-1)
$N = 100$	5.639861(-5)	4.407336(-4)	1.529774(-1)	1.504333(-1)
$N = 1000$	5.639251(-7)	4.376634(-6)	4.278453(-5)	1.504194(-1)

Жадвал 1 да келтирилган натижалардан кўринадикки умумлашган трапециялар формуласи $N \geq \omega$ ҳолда яқинлашади.

Энди юқоридаги мисолни иккинчи бобда қурилган $\sin(2\pi\omega x)$ вазнли оптимал квадратур формула билан тақрибий ҳисоблаймиз, яъни

$$\int_0^1 \sin(2\pi\omega x) \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta] \varphi[\beta]. \quad (17)$$

Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида бу квадратур формуланинг оптимал коэффициентлари учун юқорида келтирилган Теорема 1 ўринли. Умумлашган трапециялар формуласи билан таққослаш учун (17) оптимал квадратур формуланинг чизиқли функцияга аниқ бўлган $m = 2$ бўлганда қараймиз.

Юқоридаги мисолдан кўринадикки, тригонометрик вазнли квадратур формулада берилган функция $\varphi(x) = x^2$ га тенг. Бундан қуйидагини оламиз

$$\int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta] [\beta]^2.$$

Ҳосил бўлган тригонометрик вазнли квадратур формуланинг ўнг қисмини

$$A_{opt} = \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta] [\beta]^2$$

каби белгилаймиз. Бунда квадратур формула хатолигининг абсолют қиймати

$|I - A_{opt}|$ га тенг бўлади.

Жадвал 2. $N = 1, 10, 100, 1000$ ва $\omega = 1.1, 10.1, 100.1, 1000.1$ бўлганда юқоридаги тригонометрик вазли оптимал квадратур формуланинг хатолигини абсолют қийматларини ўзгариши келтирилган.

	$\omega = 1.1$	$\omega = 10.1$	$\omega = 100.1$	$\omega = 1000.1$
	$ I - A_{opt} $	$ I - A_{opt} $	$ I - A_{opt} $	$ I - A_{opt} $
$N = 1$	1.114784(-2)	1.444594(-4)	1.484368(-6)	1.488425(-8)
$N = 10$	3.025851(-5)	6.946015(-6)	8.425457(-8)	8.578893(-10)
$N = 100$	2.843105(-8)	3.005545(-8)	7.045133(-9)	8.440393(-11)
$N = 1000$	2.845974(-11)	2.842208(-11)	3.003591(-11)	7.055061(-12)

Шундай қилиб, жадвал 2 даги сонли натижалардан кўринадики тригонометрик вазли оптимал квадратур формула ω ўзгарувчининг етарлича катта қийматларида ҳам яқинлашувчи бўлади.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида Фурье интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун қурилган тригонометрик вазли оптимал квадратур формулаларни компьютер томографияси тасвирларни филтрлаб орқага проекциялаш усули ёрдамида қайта тиклашга қўлланилишини кўриб чиқилган. Маълумки, сигналларни таҳлил қилиш ва тасвирларни қайта ишлаш каби амалий масалалар Фурье интегралларини ҳисоблашга олиб келинади. Масалан, Радон алмаштириши билан компьютер томографиясида тасвирларни қайта тиклаш масаласини кўришимиз мумкин. Бунда $\omega \in \square$ бўлганда қуйидаги кўринишдаги

$$I(\phi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \phi(x) dx \quad (18)$$

интегралларни тақрибий ҳисоблаш талаб этилади. Бунда ω етарлича катта бўлса (18) интеграл кучли тебранувчи дейилади ва бундай интегралларни хар доим ҳам аниқ қийматини топиб бўлмайди. Шунинг учун, уларни тақрибий ҳисоблашга тўғри келади. Бу интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг стандарт усуллари доимо ҳам яхши натижа бермайди. Демак, кучли тебранувчи функцияларнинг интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун махсус методлар ишлаб чиқиш талаб этилади. Биринчи бўлиб, Файлон 1928 йили эффектив усулни тақдим этган. Кейинги йилларда кучли тебранувчи функцияларни интегралларини ҳисоблаш учун турли усуллари ишлаб чиқилди. Масалан, Файлон усулига асосланган усуллар, Кленшов-Куртис-Файлон усули, Левин усули, асимтотик ёйиш усули. Охириги йилларда $L_2^{(m)}$ ва $W_2^{(m, m-1)}$ Гильберт фазоларида ω нинг турли қийматларида Х.М.Шадиметов, Г.В.Милованович, А.Р.Ҳаётов, Н.Д.Болтаев ва С.С.Бабаевлар Фурье коэффициентларини ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар қуриш бўйича илмий изланишлар олиб боришган. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (18) кўринишидаги интеграл учун ушбу

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \phi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \phi[\beta] \quad (19)$$

кўринишидаги оптимал квадратур формула А.Р.Ҳаётов, С.Жеон, Ч.-О.Ли, Х.М.Шадиметовларнинг ишларида қурилган. Муаллифлар томонидан (19) оптимал квадратур формула компьютер томографияси тасвирларини қайта тиклашга қўлланилган.

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазода Фурье интеграллари учун берилган (19) оптимал квадратур формулани

$$e^{2\pi i \omega x} = \cos(2\pi \omega x) + i \sin(2\pi \omega x)$$

тенгликдан фойдаланиб, иккинчи бобда келтирилган $\sin(2\pi \omega x)$ ва $\cos(2\pi \omega x)$ вазнли оптимал квадратур формулалар ёрдамида қуриш мумкин. Шунинг учун уларнинг коэффициентларидан (19) оптимал квадратур формула учун олинган коэффициентларни келиб чиқишини кўриш қийин эмас. Яъни,

$$C[0] = C_c[0] + iC_s[0],$$

$$C[\beta] = C_c[\beta] + iC_s[\beta], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$C[N] = C_c[N] + iC_s[N].$$

ХУЛОСА

Диссертация иши уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функциялар интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал кубатур формулалар ва тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалар қуришга бағишланган.

Изданишнинг асосий натижалари куйидагилардан иборат.

1. Уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функцияларнинг интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал кубатур формулалар қуриш алгоритми берилган.
2. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулаларни қурилган.
3. Тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулаларнинг коэффициентларини ошкор кўриниши топилган.
4. Уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган функцияларнинг интегралларини ҳисоблаш учун оптимал кубатур формулалар қурилган;
5. Тригонометрик вазнли квадратур формулаларнинг умумий ҳолдаги коэффициентларидан хусусий ҳоллардаги коэффициентлари ҳисобланган.
6. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода $m=1$ бўлганда уч ўлчовли фазо сферасида аниқланган баъзи функциялар интегралларини қурилган кубатур формула ёрдамида тақрибий ҳисобланган.
7. Қурилган тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалар компьютер томографиясида тасвирларни қайта тиклашга татбиқ қилинган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

БОЗАРОВ БАХРОМЖОН ИЛХОМОВИЧ

**ОПТИМАЛЬНЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА СФЕРЕ
ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА**

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2022

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № В2019.1.PhD/FM308.

Диссертация выполнена в Институте математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель: **Хаётов Абдулло Рахмонович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Утеулиев Ниетбай**
доктор физико-математических наук, профессор
Нуралиев Фарход Абдуганиевич
доктор физико-математических наук

Ведущая организация: **Самаркандский государственны университет**

Защита диссертации состоится « ____ » _____ 2022 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № ____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан « ____ » _____ 2022 года.
(протокол рассылки № _____ от « ____ » _____ 2022 года).

М.М.Арипов
Председатель Научного совета по присуждению
ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению ученой степени доктора
наук, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире, проводимых решения проблем, возникающих в результате многих научных и практических исследований, основаны на интегрирования функций в трехмерную сферу. Приближенные вычисления таких интегралов применяются в геологии, геофизике, океанографии и многих других областях. Поэтому научные исследования математиков и физико-механиков направлены на разработку методов приближенного решения интегралов на сфере. Один из этих методов основан на построении кубатурных и квадратурных формул. Интегрирование функций по сфере интерпретируется в терминах интегрирования с весом тригонометрических функций. Поэтому были разработаны эффективные методы приближенного вычисления таких весовых интегралов. Одной из важных задач вычислительной математики остается разработка новых алгоритмов построения приближенных вычислений интегралов с тригонометрическим весом в различных классах функций и оценки их погрешностей.

В настоящее время одним из важных вопросов в мировой вычислительной математике является построения оптимальных кубатурных формул для приближенного вычисления интегралов на трехмерной сфере в разных пространствах дифференцируемых функций. Следует также отметить, что эта задача тесно связана с численно-аналитическими вычислениями интегралов с тригонометрическим весом. В связи с этим: целью исследования является построение асимптотических оптимальных, оптимальных по порядку и оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов с тригонометрическим весом, а также оценка их ошибок в различных пространствах Гильберта и Банаха.

В нашей стране большое внимание уделяется актуальным направлениям с фундаментальными и практическими приложениями, в частности, направлению вычислительной математики. Так как, оптимальная кубатурная формула, построенная в пространствах Соболева для приближенного вычисления интеграла функций и сильных осциллирующих функций, определенных на сфере, и оптимальные квадратурные формулы с тригонометрическими весами, были получены значительные результаты при построении и оценке их погрешности. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетном направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» в деятельности Института математики имени В.И.Романовского АН РУз, является одной из основных задач². Для обеспечения выполнения постановления важно построить квадратурные и интерполяционные

² Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

формулы, а также интерполяционные сплайн функции и оценить их погрешностей.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП – 4947 от 07 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», №УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», в постановлениях №ПП – 2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №ПП – 2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП – 3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП – 4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Известно, что квадратурные и кубатурные формулы являются основным инструментом для численного решения дифференциальных и интегральных уравнений. Разработка новых алгоритмов построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в различных пространствах с одновременной оценкой их ошибок в различных гильбертовых пространствах на основе алгебраических и вариационных подходов является одной из важных задач. Нахождение минимума нормы функционала погрешности функций, заданных в пространстве различных функций, является вопросом оптимизации формул для приближенной интегрирование в вариационном подходе. Имеются задача С.М. Никольского, заключающаяся в минимизации нормы функционала погрешности по коэффициентам и по узлам, и задача А. Сарда, заключающаяся в минимизации нормы функционала погрешности по коэффициентам при фиксированных узлах. Решения задач Никольского и Сарда называются оптимальной квадратурной формулой в смысле Никольского и в смысле Сарда, соответственно. Мы не останавливаемся на задаче С.М. Никольского. Обзор исследований по ней см., например, в работах С.М.Никольского, Н.П. Корнейчука, А.А. Женсыкбаева и других.

Существуют различные методы приближенного интегрирования функций, определенных в сфере трехмерного пространства. В частности, можно привести методы Гаусса и Чебышева для интегрирования функций, определенных в сфере в трехмерном пространстве.

Первым с методом Гаусса, то есть при интегрировании функций с одной переменной в точках сферы, определяемых концами и серединой концов икосаэдра, расположенного в единичной сфере, является Л.А.Люстерник и В.А.Диткин и узел в определенном количестве в точках А.Д.МАК-Лорен получил результаты для кубатурных формул.

Общая теория кубатурных формул с использованием конечной группы инвариантных точек, образованных поворотом многогранников в единичной сфере в трехмерном пространстве предложена С.Л.Соболевым 1962 году. Затем на основе этой теории А.Д.МАК-Лорен, А.Х.Штрауд, И.П.Мисовских, Г.Н.Салихов, В.И.Лебедев, С.И.Коняев, Е.А.Шамсиев, Ю.Сюй, Ф.Дай и другие провели научные исследования.

Известно, что многие практические вопросы, в частности тригонометрические весовые интегралы, широко используются в геоматематике, теории волн, реконструкции изображений, электродинамике и компьютерной томографии. Существуют алгебраические, скорее всего, теоретико-численные и функциональные подходы к построению формул численного интегрирования. Из распространенных методов приближенного вычисления интегралов функций, определенных на сфере, и интегралов с тригонометрическими весами, это квадратурные и кубатурные формулы в различных пространствах Гильберта и Банаха. Научные работы в этом направлении освещаются в научных работах L.N.G.Filon, Y.L.Luke, E.A.Filin, K.Atkinson, E.Novak, F.Dai, Y.Xu, Ph.Rabinowitz, С.Л.Соболев, И.П.Мысовских, Г.Н.Салихов, М.И.Исраилов, Х.М.Шадиметов, Э.Шамсиев, Б.Эшдавлатов, С.А.Бахромов, А.Р.Хаётов Н.Д.Болтаев, С.С.Бабаев и других.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательской организации, в котором выполняется диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках проекта планов научных исследований Института математики им. В.И. Романовского №ОТ-Ф4-86 «Разработка оптимальных методов приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений в пространствах гильберта».

Целью исследования в пространствах Соболева построение оптимальных кубатурных формул и оптимальных квадратурных формул с тригонометрическими весами для приближенного вычисления интегралов функций в сфере трехмерного пространства.

Задачи исследования.

Задача о построении оптимальной кубатурной формулы для приближенного вычисления интеграла функций, определенных в сфере трехмерного пространства;

Приводя к вопросу о построении оптимальных квадратурных формул с тригонометрическим весом;

Нахождение общего представления о норме функционала погрешности оптимальных квадратурных формул с тригонометрическим весом и определение их коэффициентов;

Использование тригонометрических взвешенных оптимальных квадратурных формул при построении оптимальной кубатурной формулы

для приближенного вычисления интеграла функций, определенных в сфере трехмерного пространства;

Исследование применения построенных оптимальных квадратурных формул с тригонометрическим весом для восстановления изображений в компьютерной томографии;

Приближенное вычисление интеграла функций, определенных в сфере, с использованием построенной кубатурной формулы;

Объект исследования состоит из интеграла функций, определенных на сфере, квадратурные формулы для приближенного вычисления тригонометрических весовых интегралов, норм функционала погрешности квадратурной формулы.

Предмет исследования состоит из интеграла функций в единичной сфере трехмерного пространства, оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления коэффициентов Фурье и весовых оптимальных квадратурных формул.

Методы исследования. В исследовательской работе использованы методы вычислительной математики и функционального анализа, а также теории обобщенных функций, функций дискретного аргумента.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ была вычислена норма функционала погрешности оптимальных квадратурных формул с тригонометрическим весом;

найден явный вид коэффициентов оптимальной квадратурной формулы с тригонометрическими весами;

чтобы аппроксимировать интегралы функций, определенных в трехмерной пространственной сфере в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, строится оптимальная кубатурная формула с использованием оптимальной квадратурной формулы с тригонометрическим весом;

при $m = 1$ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, интегралы функций, определенных в сфере трехмерного пространства, вычисляются приближенно с использованием построенной кубатурной формулы;

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

Используя построенную оптимальную кубатурную формулу, интеграл функций, определенных в сфере трехмерного пространства, вычислена приближенно;

Оптимальная квадратурная формула с тригонометрическим весом, построенная для интегралов Фурье, использовалась при восстановлении методом обратной проекции путем фильтрации изображений компьютерной томографии.

Достоверность результатов исследования основана на применении методов теории квадратурных формул, вычислительной математики,

функционального анализа, теории функций дискретных аргументов, а также строгости математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется алгоритмом построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов с тригонометрическим весом в пространствах Соболева.

Практическая значимость результатов исследования строится на оптимальных квадратурных формулах, которые служат для аппроксимации интегралов функций в сфере трехмерного пространства, а также интегралов с тригонометрическими весами.

Внедрение результатов исследования. В научном исследовании фундаментального гранта ОТ-Ф-3-19 оптимальных квадратурных формул с тригонометрическими весами, построенных для приближенного вычисления интегралов функций, определенных в сфере, было использовано создание новых типов параболосилиндрических концентраторов для устройств солнечной энергии в оптимальном приближении решений математических задач. модели, представляющие тепловые процессы (№ 01-1370 справка Ферганского политехнического института от 17 июля 2021 г.). Применение научного результата позволило прогнозировать тепловые процессы, происходящие в устройствах;

Оптимальные квадратурные формулы в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$, построенные для приближенного вычисления интеграла функций, определенных в трехмерном пространстве, и тригонометрических весовых интегралов ОТ-Атех-2018-340 в численном практическом проекте, в котором при интегрировании функций, определенных в сфере в трехмерном пространстве, была произведена замена на сферическую систему координат и получена оптимальная квадратурная формула. Построенная оптимальная кубатурная формула позволила построить новые алгоритмы для решения задач геологии и геофизики с приближенным вычислением функций, определенных на сфере. (№04/6538 справка КарГУ от 22 декабря 2021 года).

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 13 научно-практических конференциях, в том числе, на 7 международных и 6 республиканской научно-практической конференции.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 20 научные работы, из них 7 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 2 опубликована в зарубежном журнале и 5 в республиканских научных изданиях.

Объем и структура диссертации. Диссертация содержит 97 страниц и состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертации обосновывается актуальность и необходимость темы, указывается соответствие исследования приоритетным направлениям развития республиканской науки и техники, представлен обзор зарубежных исследований по теме, уровень изученности проблемы, описаны цель, задачи, объект и предмет исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлена информация о внедрении результатов исследований, опубликованных работах и структуре диссертации.

Первая глава диссертации носит вводный характер.

В этой главе мы предоставляем информацию о пространстве функций Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$, интегралах функций, определенных на сфере, заменах Фурье синуса и косинуса, а также некоторых определениях, теоремах и формулах, которые будут необходимы для использования в этой работе. В то же время интегрирование функций, определенных в трехмерной пространственной сфере, и распределение периодических функций в ряд Фурье вводятся с помощью ранее построенных кубатурных и квадратурных формул для вычисления коэффициентов Фурье.

В первом параграфе этой главы содержится информация о функциональных пространствах, функциях, определенных на сфере, а также о преобразованиях Фурье синуса и косинуса. То есть $L_2^{(m)}(0,1)$ это пространство функций Соболева, абсолютно непрерывное с точностью до производной порядка $(m-1)$ и обобщенной производной m -порядка интегрируются с квадратом. Скалярное произведение между элементами ψ и φ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется следующим образом

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \psi^{(m)}(x) \varphi^{(m)}(x) dx. \quad (1)$$

Кроме того, норма функции $\varphi \in L_2^{(m)}(0,1)$, соответствующая скалярному произведению (1) определяется в виде

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m)}(0,1)} = \left[\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

В этой диссертации построена оптимальная кубатурная формула для класса функций, интегрирующихся с квадратом, заданного в сфере трехмерного пространства. Поэтому дается информация о концепции единичной сферы в трехмерном пространстве и об интегралах функций, определенных в ней. Сначала приводятся данные о переходе точек в трехмерном пространстве из декартовой системы координат в сферическую систему координат. На основании этого сводится задача вычисления кратного интеграла в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) |J| d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (3)$$

Для первой переменной этого интеграла (3) построены в общем случае квадратурные формулы с тригонометрическими весами. Кубатурная формула была построена с использованием обобщенной прямоугольной формулы для второй переменной.

При приближенном вычислении вышеуказанного интеграла (3), учитывая, что функция под интегралом $F(\theta, \phi)$ является периодической по переменной ϕ , следующие случаи могут быть рассмотрены соответственно, в зависимости от того, является ли она периодической или непериодической по переменной θ .

1) Предположим, что функция $F(\theta, \phi)$ при интеграле (3) является периодической функцией для переменных θ и ϕ , здесь можно использовать оптимальную квадратурную формулу для периодических функции с весом $p(x)$ по переменной θ

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta]\varphi[\beta].$$

Затем можно использовать следующую обобщенную формулу прямоугольников для второй переменной ϕ

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{\beta=1}^N hf(a+h\beta),$$

где $h = \frac{b-a}{N}$, N - натуральное число.

2) Если функция $F(\theta, \phi)$ при интеграле (3) не является периодической по переменной θ , то оптимальная квадратурная формула может быть использован для следующего веса синуса для этой переменной

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta)F(\theta, \phi)d\theta \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta]F(h\beta, \phi).$$

Для квадратурных формул этого вида оптимальные квадратурные формулы с тригонометрическими весами построены во второй главе данной работы. Предположим, что функция $F(\theta, \phi)$ является периодической функцией от переменной ϕ , в которой приближенный интеграл от переменной ϕ ($0 \leq \phi < 2\pi$) может быть вычислен с использованием обобщенной формулой прямоугольников. В результате мы получаем оптимальную кубатурную формулу для приближенного вычисления интегралов заданных функций на сфере в трехмерном пространстве.

Во втором параграфе первой главы вводятся понятия рядов Фурье и подстановок Фурье, поскольку оптимальные квадратурные формулы с тригонометрическими весами используются для вычисления коэффициентов и подстановок Фурье в рядах Фурье.

Поэтому в данной диссертации рассматривается задача построения оптимальных квадратурных формул с тригонометрическим весом в общем

виде для интегрирования определенных функций на сфере в трехмерном пространстве и вычисления коэффициентов Фурье

$$\int_0^1 \sin(2\pi\omega x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta]\varphi[\beta] \quad (4)$$

и

$$\int_0^1 \cos(2\pi\omega x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_c[\beta]\varphi[\beta]. \quad (5)$$

Здесь $C_s[\beta]$ и $C_c[\beta]$ коэффициенты квадратурной формулы для весов синуса и косинуса соответственно, $[\beta] = h\beta$, $h = \frac{1}{N}$, N - натуральное число и $\omega \in \square$.

В третьем параграфе первой главы приведены формулы и определения, необходимые для доказательства основных результатов диссертации. В частности, дается понятие функции дискретного аргумента и выполняемых над ней операций.

В четвертом параграфе этой главы представлены некоторые результаты ранее построенных кубатурных и квадратурных формул для вычисления интегралов определенных функций на сфере в трехмерном пространстве и для квадратурных формул с тригонометрическим весом.

Во второй главе диссертации названной «Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы с тригонометрическим весом» решается задача построения оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда для приближенного вычисления весовых интегралов $\sin(2\pi\omega x)$ и $\cos(2\pi\omega x)$ в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$. В первом параграфе второй главы построена квадратурная формула вида (4).

То есть следует согласно квадратурной формуле (4) рассмотрим функционал погрешности

$$\ell_s(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)\sin(2\pi\omega x) - \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta]\delta(x - [\beta]). \quad (6)$$

В данном случае $C_s[\beta]$ коэффициенты квадратурной формулы, $[\beta] = h\beta$, $h = \frac{1}{N}$, N - натуральное число, $\omega \in \square$, $\omega \neq 0$, $\varphi \in L_2^{(m)}(0,1)$, $L_2^{(m)}(0,1)$ это пространство функций Соболева, абсолютно непрерывное с точностью до производной порядка $(m-1)$ и обобщенной производной m -порядка интегрируются с квадратом.. Норма в этом пространстве вводится следующим образом

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m)}(0,1)} = \left(\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{и } \int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx < \infty.$$

В приведенной выше функционала погрешности (6) $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Для определения функционала погрешности (6) в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ должны быть выполнены следующие условия

$$(\ell_s, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1. \quad (7)$$

Следовательно, условие $N \geq m-1$ должно быть выполнено для того, чтобы квадратурная формула (4) существовала.

В этом случае погрешность квадратурной формулы (4) имеет вид

$$\ell_s(\varphi) = (\ell_s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell_s(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 \sin(2\pi\omega x) \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta] \varphi[\beta]. \quad (8)$$

На основании неравенства Коши-Шварца

$$|(\ell_s, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{L_2^{(m)}} \cdot \|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}}$$

для каждой квадратурной формулы (4) оценка погрешности квадратурной формулы (8) для фиксированного элемента φ , принадлежащего пространству $L_2^{(m)}$, модуль погрешности квадратурной формулы (4) оценивается функциональной нормой ошибки ℓ_s в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}$. Таким образом, верхнее оценка погрешности квадратурной формулы (4) в пространстве функций $L_2^{(m)}$ вычисляется по норме функционала погрешности (6).

Минимизация нормы функционала погрешности (6) по коэффициентам с узлом, фиксирующим точки, называется проблемой Сарда, и полученная формула называется оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда. Этот вопрос впервые изучил Сард.

Основная цель этого параграфа - построить оптимальную квадратурную формулу (4) с тригонометрическим весом в смысле Сарда для приближенного вычисления интегралов в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Это означает соответственно, чтобы найти коэффициенты $C_s[\beta]$, удовлетворяющие равенству

$$\|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}} = \inf_{C_s[\beta]} \|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}}. \quad (9)$$

Таким образом, при построении оптимальной квадратурной формулы (4) в смысле Сарда мы должны последовательно решать следующие задачи.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности (6) квадратурной формулы (4) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Задача 2. Найти коэффициенты $C_s[\beta]$, удовлетворяющие равенству (9)

При решении задачи 1, т.е. найти норму функционала погрешности (6) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ мы используем экстремальную функции функционала погрешности ℓ_s , удовлетворяющую равенству

$$(\ell_s, \psi_{\ell_s}) = \|\psi_{\ell_s}\|_{L_2^{(m)}} \cdot \|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}}$$

Экстремальная функция $\psi_{\ell_s}(x)$ функционала ℓ_s в пространстве $L_2^{(m)}$ имеет следующий вид

$$\psi_{\ell_s}(x) = (-1)^m \ell_s(x) * G_m(x) + P_{s,m-1}(x) \quad (10)$$

здесь

$$G_m(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2 \cdot (2m-1)!},$$

это решение уравнения $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} G_m(x) = \delta(x)$, $P_{s,m-1}(x)$ - многочлен степени $(m-1)$, а $*$ - операция свёртки. Понятие экстремальной функции было введено и найдено Соболевым.

Известно, что следующее равенство имеет место для произвольного линейного функционала ℓ_s в пространстве $L_2^{(m)*}$

$$\|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}}^2 = (\ell_s, \psi_{\ell_s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell_s(x) \left((-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \ell_s(x) G_m(x-y) dy \right) dx.$$

Применяя это равенство к функционалу (6) с учетом (7), получаем следующее

$$\begin{aligned} \|\ell_s\|_{L_2^{(m)*}}^2 = & (-1)^m \left(\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_s[\beta] C_s[\gamma] \frac{|\beta - \gamma|^{2m-1}}{2 \cdot (2m-1)!} - \right. \\ & - 2 \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta] \int_0^1 \sin(2\pi\omega x) \frac{|x - [\beta]|^{2m-1}}{2 \cdot (2m-1)!} dx + \\ & \left. + \int_0^1 \int_0^1 \sin(2\pi\omega x) \sin(2\pi\omega y) \frac{|x - y|^{2m-1}}{2 \cdot (2m-1)!} dx dy \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Таким образом задача 1 решена.

В первом параграфе второй главы с использованием алгоритма, приведенного выше, формулы для оптимальных коэффициентов квадратурной формулы (4) получены и доказаны следующие.

Теорема 1. В пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ справедливы следующие равенства для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы(4) в смысле Сарда, при $\omega \in \square$ и $\omega \notin \square$

$$C_s[0] = h \left[\frac{1}{2\pi\omega h} - K_{m,\omega} \frac{\cos(\pi\omega h)}{2 \sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k - n_{s,k} q_k^N}{q_k - 1} \right],$$

$$C_s[\beta] = h \left[K_{m,\omega} \sin(2\pi\omega[\beta]) + \sum_{k=1}^{m-1} (m_{s,k} q_k^\beta + n_{s,k} q_k^{N-\beta}) \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$C_s[N] = h \left[-\frac{\cos(2\pi\omega)}{2\pi\omega h} + K_{m,\omega} \frac{\cos(2\pi\omega - \pi\omega h)}{2 \sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{-m_{s,k} q_k^N + n_{s,k} q_k}{q_k - 1} \right],$$

где $[\beta] = h\beta$, q_k корни многочлена Эйлера – Фробениуса $E_{2m-2}(x)$ степени $(2m-2)$ удовлетворяющие условию $|q_k| < 1$,

$$K_{m,\omega} = \frac{(2 - 2\cos(2\pi\omega h))^m \cdot (2m-1)! \cdot (-1)^m}{(2\pi\omega h)^{2m} \left(2 \sum_{k=0}^{m-2} a_{k,2m-2} \cos(2\pi\omega h(m-1-k)) + a_{m-1,2m-2} \right)},$$

$a_{k,2m-2}$ коэффициенты полинома $E_{2m-2}(x)$, $m_{s,k}$ и $n_{s,k}$ определяются из следующей системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k - (-1)^j n_{s,k} q_k^{N+1}}{(q_k - 1)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) &= -\frac{(-1)^j j! \cos(\frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}} - \\ &- \frac{(1 + (-1)^j) K_{m,\omega} e^{2\pi i \omega h}}{2i(e^{2\pi i \omega h} - 1)^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i \omega h}), \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k^{N+1} - (-1)^j n_{s,k} q_k}{(1 - q_k)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) &= \frac{j! \cos(2\pi\omega + \frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}} - \\ &- \frac{(e^{2\pi i \omega} + (-1)^j e^{-2\pi i \omega}) K_{m,\omega} e^{2\pi i \omega h}}{2i(1 - e^{2\pi i \omega h})^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i \omega h}), \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Теорема 2. В пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ справедливы следующие равенства для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы (4) в смысле Сарда, при $\omega h \in \square$ и $\omega \neq 0$

$$\begin{aligned} C_s[0] &= h \left[\frac{1}{2\pi\omega h} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k - n_{s,k} q_k^N}{q_k - 1} \right], \\ C_s[\beta] &= h \left[\sum_{k=1}^{m-1} (m_{s,k} q_k^\beta + n_{s,k} q_k^{N-\beta}) \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ C_s[N] &= h \left[-\frac{1}{2\pi\omega h} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{-m_{s,k} q_k^N + n_{s,k} q_k}{q_k - 1} \right], \end{aligned}$$

где $[\beta] = h\beta$, q_k корни многочлена Эйлера – Фробениуса $E_{2m-2}(x)$ степени $(2m-2)$ удовлетворяющие условию $|q_k| < 1$, $m_{s,k}$ и $n_{s,k}$ определяются из следующей системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k - (-1)^j n_{s,k} q_k^{N+1}}{(q_k - 1)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) &= -\frac{(-1)^j j! \cos(\frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k} q_k^{N+1} - (-1)^j n_{s,k} q_k}{(1 - q_k)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) &= \frac{j! \cos(\frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Во втором параграфе этой главы представлена конструкция квадратурной формулы с весом $\cos(2\pi\omega x)$, которая построена как метод, описанный в первом параграфе второй главы. Найдены коэффициенты этой квадратурной формулы и даны следующие теоремы.

Теорема 3. В пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ справедливы следующие равенства для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы (2.48) в смысле Сарда, при $\omega \in \square$ и $\omega \notin \square$

$$\begin{aligned} \mathring{C}_c[0] &= h \left[\frac{K_{m,\omega}}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k - n_{c,k} q_k^N}{q_k - 1} \right], \\ \mathring{C}_c[\beta] &= h \left[K_{m,\omega} \cos(2\pi\omega[\beta]) + \sum_{k=1}^{m-1} (m_{c,k} q_k^\beta + n_{c,k} q_k^{N-\beta}) \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ \mathring{C}_c[N] &= h \left[\frac{\sin(2\pi\omega)}{2\pi\omega h} - \frac{K_{m,\omega}}{2} \frac{\sin(2\pi\omega - \pi\omega h)}{\sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{-m_{c,k} q_k^N + n_{c,k} q_k}{q_k - 1} \right] \end{aligned}$$

где $[\beta] = h\beta$, q_k корни многочлена Эйлера - Фробениуса $E_{2m-2}(x)$ степени $(2m-2)$ удовлетворяющие условию $|q_k| < 1$,

$$K_{m,\omega} = \frac{(2 - 2\cos(2\pi\omega h))^m \cdot (2m-1)! \cdot (-1)^m}{(2\pi\omega h)^{2m} \left(2 \sum_{k=0}^{m-2} a_{k,2m-2} \cos(2\pi\omega h(m-1-k)) + a_{m-1,2m-2} \right)},$$

$a_{k,2m-2}$ коэффициенты полинома $E_{2m-2}(x)$, $m_{c,k}$ и $n_{c,k}$ определяются из следующей системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k - (-1)^j n_{c,k} q_k^{N+1}}{(q_k - 1)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) &= \frac{(-1)^j j! \sin(\frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}} \\ &- \frac{(1 - (-1)^j) K_{m,\omega} e^{2\pi i \omega h}}{2(e^{2\pi i \omega h} - 1)^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i \omega h}), \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k^{N+1} - (-1)^j n_{c,k} q_k}{(1 - q_k)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = - \frac{j! \sin(2\pi\omega + \frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}}$$

$$- \frac{(e^{2\pi i \omega} - (-1)^j e^{-2\pi i \omega}) K_{m,\omega} e^{2\pi i \omega h}}{2i(1 - e^{2\pi i \omega h})^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i \omega h}), \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Теорема 4. В пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ справедливы следующие равенства для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы (2.48) в смысле Сарда, при $\omega h \in \square$ и $\omega \neq 0$

$$\begin{aligned} C_c[0] &= h \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k - n_{c,k} q_k^N}{q_k - 1} \right], \\ C_c[\beta] &= h \left[\sum_{k=1}^{m-1} (m_{c,k} q_k^\beta + n_{c,k} q_k^{N-\beta}) \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ C_c[N] &= h \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{-m_{c,k} q_k^N + n_{c,k} q_k}{q_k - 1} \right], \end{aligned}$$

где $[\beta] = h\beta$, q_k корни многочлена Эйлера - Фробениуса $E_{2m-2}(x)$ степени $(2m-2)$ удовлетворяющие условию $|q_k| < 1$, $m_{c,k}$ и $n_{c,k}$ определяются из следующей системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k - (-1)^j n_{c,k} q_k^{N+1}}{(q_k - 1)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = -\frac{(-1)^j j! \sin(\frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k} q_k^{N+1} - (-1)^j n_{c,k} q_k}{(1 - q_k)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = \frac{j! \sin(2\pi\omega + \frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

В третьем параграфе второй главы приведены коэффициенты оптимальных квадратурных формул (4) и (5) для использования в частных случаях.

Первый параграф третьей главы, названной «Применения оптимальной кубатурной формулы и квадратурных формул с тригонометрическим весом для приближенного интегрирования функций, определенных на сфере в трехмерном пространстве» диссертации, дает оптимальные кубатурные формулы для приближенного интегрирования функций, определенных на сфере. Построенные оптимальные кубатурные формулы аппроксимируются в конкретных функциях.

Из оптимальных квадратурных формул с тригонометрическим весом, построенных во втором параграфе этой главы, видно, что при $\omega \in \mathbb{R}$ выводятся коэффициенты, определенные в работе Н.Д. Болтаева и др., в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. В оптимальной квадратурной формуле (5) с весом косинус при $\omega \rightarrow 0$ выводятся коэффициенты оптимальной квадратурной формулы с весом один, построенной Х. М. Шадиметовым. С. С. Бабаев построил оптимальные квадратурные формулы для случая, когда $\omega \in \mathbb{R}$ в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Кроме того, для компьютерной томографии были применены оптимальные квадратурные формулы, построенные А.Р.Хаётовым, Soomin Jeon, Chang-Ock Lee и Х.М.Шадиметовым в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Учитывая функцию $F(\theta, \phi)$ в интеграле

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta F(\theta, \phi) d\theta d\phi \quad (12),$$

который является правой частью уравнения (3), приведенного в первом параграфе этой главы, выражение под этим интегралом можно считать периодическим или непериодическим по переменным θ и ϕ .

Как известно, выражение (12) может быть вычислено последовательно в следующем порядке

$$I_1(\phi) = \int_0^\pi \sin(\theta) F(\theta, \phi) d\theta \quad (13)$$

а также

$$I = \int_0^{2\pi} I_1(\phi) d\phi. \quad (14)$$

В этом параграфе численные результаты были рассчитаны с использованием кубатурных формул, которые используются для вычисления интеграла функций, заданных на сфере в трехмерном пространстве.

Оптимальные квадратурные формулы, построенные во втором параграфе третьей главы, сравниваются с квадратурными формулами в классическом смысле. Поскольку обобщенная формула трапеций точна к линейной функции, мы рассматриваем квадратурную формулу с тригонометрическим весом, также точную к линейной функции в случае $m = 2$.

Пример 1. Вычислить следующий интеграл $\int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x) dx$.

Аппроксимируем данный пример обобщенной формулой Ньютона-Котеса

$$\int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x) dx \cong \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i^2 \sin(2\pi\omega x_i) + x_{i+1}^2 \sin(2\pi\omega x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad (15).$$

Это в точности эквивалентно обобщенной формуле трапеций.

Сначала обозначим точное значение этого интеграла через A

$$I = \int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x) dx.$$

Обозначим приближенное значение обобщенной формулы Ньютона-Котеса, вычисленное по формуле линейных квадратур данного примера, через

$$A_{tr} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i^2 \sin(2\pi\omega x_i) + x_{i+1}^2 \sin(2\pi\omega x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Абсолютное значение погрешности формулы Ньютона-Котеса определяется абсолютной величиной разности между интегралом и квадратурной суммой. То есть,

$$|I - A_{tr}| = \left| \int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x) dx - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i^2 \sin(2\pi\omega x_i) + x_{i+1}^2 \sin(2\pi\omega x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) \right|. \quad (16)$$

Таблица 1. Изменение абсолютных значений погрешности обобщенной формулы трапеций при $N = 1, 10, 100, 1000$ и $\omega = 1.1, 10.1, 100.1, 1000.1$.

	$\omega = 1.1$	$\omega = 10.1$	$\omega = 100.1$	$\omega = 1000.1$
	$ I - A_{tr} $	$ I - A_{tr} $	$ I - A_{tr} $	$ I - A_{tr} $
$N = 1$	3.874936(-1)	3.063506(-1)	2.951759(-1)	2.940213(-1)
$N = 10$	5.701761(-3)	1.641521(-1)	1.529774(-1)	1.518228(-1)
$N = 100$	5.639861(-5)	4.407336(-4)	1.529774(-1)	1.504333(-1)
$N = 1000$	5.639251(-7)	4.376634(-6)	4.278453(-5)	1.504194(-1)

Из результатов, представленных в таблице 1, видно, что формула обобщенных трапеций сходится при $N \geq \omega$.

Теперь аппроксимируем приведенный выше пример взвешенной оптимальной квадратурной формулой с весом $\sin(2\pi\omega x)$, построенной во второй главе, т.е.

$$\int_0^1 \sin(2\pi\omega x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta]\varphi[\beta]. \quad (17)$$

В пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ приведенная выше теорема 1 верна для оптимальных коэффициентов этой квадратурной формулы. Для сравнения с формулой обобщенных трапеций (17) рассмотрим оптимальную квадратуру формулы при $m = 2$, точную на линейную функцию.

Из приведенного выше примера видно, что функция, заданная в квадратурной формуле с тригонометрическим весом, равна $\varphi(x) = x^2$. Отсюда получаем следующее

$$\int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta][\beta]^2.$$

Обозначим левую часть полученной квадратурной формулы с тригонометрическим весом через

$$I = \int_0^1 x^2 \sin(2\pi\omega x)dx,$$

а ее правую часть через

$$A_{opt} = \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta][\beta]^2.$$

В этом случае абсолютная величина погрешности квадратурной формулы равен $|I - A_{opt}|$.

Таблица 2. Изменение абсолютных значений погрешности приведенной выше оптимальной квадратурной формулы с тригонометрическим весом при $N = 1, 10, 100, 1000$ и $\omega = 1.1, 10.1, 100.1, 1000.1$.

	$\omega = 1.1$	$\omega = 10.1$	$\omega = 100.1$	$\omega = 1000.1$
	$ I - A_{opt} $	$ I - A_{opt} $	$ I - A_{opt} $	$ I - A_{opt} $
$N = 1$	1.114784(-2)	1.444594(-4)	1.484368(-6)	1.488425(-8)
$N = 10$	3.025851(-5)	6.946015(-6)	8.425457(-8)	8.578893(-10)
$N = 100$	2.843105(-8)	3.005545(-8)	7.045133(-9)	8.440393(-11)
$N = 1000$	2.845974(-11)	2.842208(-11)	3.003591(-11)	7.055061(-12)

Таким образом, из численных результатов в таблице 2 видно, что абсолютное значение погрешности оптимальной квадратурной формулы с тригонометрическим весом приближается при $N \geq \omega$ и $N < \omega$.

Из них мы приходим к следующему выводу, из таблицы 1 видно, что приближенное вычисление интегралов по квадратурным формулам с тригонометрическим весом в классическом понимании не дает достаточной

точности при больших значениях ω . Однако, даже при $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$ погрешность приближенного расчета оптимальной квадратурной формулой с тригонометрическим весом (4), построенной во второй главе работы, видна из таблицы 2.

В третьем параграфе третьей главы рассматривается применение оптимальных квадратурных формул с тригонометрическим весом, построенных для приближенного вычисления интегралов Фурье, к восстановлению компьютерно-томографических изображений методом фильтрации обратной проекции. Как известно, что практические задачи, такие как анализ сигналов и обработка изображений, приводят к вычислению интегралов Фурье. Например, мы можем видеть проблему восстановления изображения в компьютерной томографии с преобразованием Радона.

В этом случае при $\omega \in \mathbb{R}$ требуется приближенно вычислить интегралы вида

$$I(\phi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \phi(x) dx. \quad (18)$$

В этом случае, если ω достаточно больше, (18) называется сильным осциллирующим и такие интегралы не всегда могут иметь точное значение. Поэтому необходимо их вычислить приближенно. Стандартные методы приближенного вычисления этих интегралов не всегда дают хорошие результаты. Поэтому необходимо разработать специальные методы приближенного вычисления интегралов сильно осциллирующих функций. Файлон был первым, кто представил эффективный метод расчета в 1928 году. В последние годы были разработаны различные другие методы вычисления интегралов сильно осциллирующих функций. Например, методы, основанные на методе Файлона, методе Кленшова-Кертиса-Фейлона, методе Левина, методе асимптотического распространения. В последние годы Х. М. Шадиметов, Г. В. Милованович, А. Р. Хаётов, Н. Д. Болтаев и С. С. Бабаев провели научные исследования по построению оптимальных квадратурных формул для вычисления коэффициентов Фурье в пространствах Гильберта $L_2^{(m)}$ и $W_2^{(m,m-1)}$, при различных значениях ω . Оптимальная квадратурная формула вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \phi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \phi[\beta] \quad (19)$$

для интеграла вида (18) в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ построена в работах А. Р. Хаётова, С. Джеона, Ч.-О. Ли, Х. М. Шадиметова. Авторы применили оптимальную квадратурную формулу (19) для восстановления изображений компьютерной томографии.

Данная оптимальная квадратурная формула (19), для интеграла Фурье в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, может быть построена с использованием равенства

$$e^{2\pi i \omega x} = \cos(2\pi \omega x) + i \sin(2\pi \omega x)$$

и оптимальных квадратурных формул с весами $\sin(2\pi\omega x)$ и $\cos(2\pi\omega x)$, представленных во второй главе. Поэтому нетрудно видеть, что из их коэффициентов получаются оптимальные коэффициенты, полученные для квадратурной формулы (19). То есть,

$$C[0] = C_c[0] + iC_s[0],$$

$$C[\beta] = C_c[\beta] + iC_s[\beta], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$C[N] = C_c[N] + iC_s[N].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению оптимальных кубатурных формул заданных в сфере трехмерной пространственной и оптимальных квадратурных формул с тригонометрическими весами для приближенного вычисления интегралов функций.

Основные результаты исследования заключаются в следующем.

1. Дан алгоритм построения оптимальных кубатурных формул для приближенного вычисления интегралов от функций, определенных в сфере трехмерного пространства.
2. В пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ построены оптимальные квадратурные формулы с тригонометрическими весами.
3. Найдены явные виды коэффициентов оптимальных квадратурных формул с тригонометрическими весами.
4. Построены оптимальные кубатурные формулы для вычисления интегралов от функций, определенных в сфере трехмерного пространства;
5. Коэффициенты в частных случаях вычисляются из коэффициентов общего случая квадратурных формул с тригонометрическими весами.
6. Интегралы некоторых функций, заданных в сфере трехмерного пространства при $m=1$ в пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$, вычислены построенной кубатурной формулой.
7. Исследовано применение построенных оптимальных квадратурных формул с тригонометрическими весами в компьютерной томографии для восстановления изображений.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

BOZAROV BAKHROMJON ILKHOMOVICH

**OPTIMAL CUBATURE FORMULAS ON A SPHERE OF THREE-
DIMENSIONAL SPACE**

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF
PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2019.1.PhD/FM308.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website <http://ik-fizmat.nuu.uz/> and the «ZiyoNet» Information and educational portal <http://www.ziyo.net.uz/>.

Scientific supervisor:

Hayotov Abdullo Rakhmonovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor

Official opponents:

Uteuliev Nietbay

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor

Nuraliev Farkhod Abduganievich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,

Leading organization:

Samarkand State University

Defense will take place «_____» _____ 2022 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc/03/30/12/2019/FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №_____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «_____» _____ 2022 year
(Mailing report № _____ on «_____» _____ 2022 year)

M.M.Aripov

Chairman of Scientific Council on award
of scientific degrees, D.F.M.S., Professor

Z.R.Rakhmonov

Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.M.S.

R.D.Aloev

Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The aim of the study is to construct the optimal lattice cubature formula that are exact on polynomial functions in the classes of differentiable functions, and to calculate the norms of their error functionals.

The object of the research is cubature and quadrature formulas, discrete analogs of linear differential operators, error functionals, Hilbert spaces.

The scientific novelty of the research work is as follows:

the existence and uniqueness of optimal cubature formulas for calculating integrals of certain functions in a three-dimensional space sphere are studied;

algorithm for constructing optimal cubature formulas for the approximate calculation of integrals of given functions in a three-dimensional space sphere;

constructed optimal quadrature formulas with trigonometric weights in $L_2^{(m)}(0,1)$ space;

the disclosure of the coefficients of optimal quadrature formulas with trigonometric weights is found;

optimal cubature formulas for calculating integrals of given functions in a three-dimensional space sphere are constructed;

the coefficients of trigonometric weighted quadrature formulas were calculated from the general coefficients of particular cases;

for $m=1$ in $L_2^{(m)}(0,1)$ spaces, the integrals of functions defined in the three-dimensional space sphere were approximated by the constructed cubature formula;

Implementation of the research results. In the scientific study of the fundamental grant OT-F-3-19 of optimal quadrature formulas with trigonometric weights, constructed for the approximate calculation of integrals of functions defined in a sphere, the creation of new types of parabolosylindrical concentrators for solar energy devices in the optimal approximation of solutions to mathematical problems was used. models representing thermal processes (No. 01-1370 certificate of the Fergana Polytechnic Institute dated July 17, 2021). The application of the scientific result made it possible to predict the thermal processes occurring in devices;

Optimal quadrature formulas in Sobolev space, built for the approximate calculation of the integral of functions defined in three-dimensional space, and trigonometric weighted integrals OT-Atex-2018-340 in a numerical practical project in which, when integrating functions defined in a sphere in three-dimensional space, change to a spherical coordinate system and the optimal quadrature formula is obtained. The constructed optimal cubature formula made it possible to construct new algorithms for solving problems of geology and geophysics with an approximate calculation of functions defined on a sphere. (No. 04/6538 certificate of KarSU dated December 22, 2021).

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 97 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Hayotov A.R., Bozarov B.I., Abduganiev A. Optimal formula for numerical integration on two-dimensional sphere // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2018, no 3, pp 80-89. (01.00.00; №6).
2. Bozarov B.I. An optimal quadrature formula with $\sin x$ weight function in the Sobolev space // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2019, no 4, pp 47-53. (01.00.00; №6).
3. Bozarov B.I. Optimal quadrature formulas with the trigonometric weight in the Sobolev space // Bulletin of the Institute of Mathematics, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics. – Tashkent, 2020. no 4. pp.1-10. (01.00.00; №17).
4. Hayotov A.R., Bozarov B.I. An optimal quadrature formulas with the trigonometric weight in the Sobolev space // AIP Conference Proceeding, 2365, 020022 (2021), 16 July. **(3. Scopus, IF:=0.4)**.
5. Bozarov B.I. An optimal quadrature formula in the Sobolev space // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2021, no 3, pp 46-59. (01.00.00; №6). (01.00.00; №6).
6. Hayotov A.R., Bozarov B.I. Optimal quadrature formula with cosine weight function // Problems of Computational and Applied Mathematics. – Tashkent, 2021, no 4, -pp. 106-118. (01.00.00; №9).
7. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Bozarov B.I. Optimal quadrature formulas for oscillatory integrals in the Sobolev space. Journal of inequalities and applications. Springer. Article number: 103 (2022). **(3. Scopus, IF: = 2.021)**.

II бўлим (Часть II; Part II)

8. Hayotov A.R., Bozarov B.I., Abduganiev A. Optimal quadrature formula with weight $\sin(x)$ in Sobolev space $L_2^{(2)}(0, \pi)$ // Of the VI International scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology AI – Khorezmiiy 2018”, – Tashkent, 2018, 13-15 september, pp 71-72.
9. Bozarov B.I. A weight optimal quadrature formula in $L_2^{(2)}(0, \pi)$ space // STEMM, International scientific conference Tashkent-Samarkand, 2019, 13-17 may, pp. 33-34.
10. Bozarov B.I. On an optimal quadrature formula with weight $\cos(2\pi\omega x)$ in the Sobolev space. // Non-classical equations of mathematical physics, - Tashkent, 2019, 24-26 october, pp.245.
11. Бозаров Б.И. Оптимальная квадратурная формула для вычисления интегралов на двумерной сфере. // Республика илмий-амалий конференция «XXI asr – intelektual yoshlar asri» Тошкент, 29 март, 2019. С. 306.

12. Hayotov A.R., Bozarov B.I. An optimal quadrature formula with $\sin(2\pi\omega x)$ weight in the Sobolev space // International Conference “Modern problems of differential equations and related branches of Mathematics”, Ferghana, March 12-13, 2020. pp. 269-270.
13. Bozarov B.I. On an optimal quadrature formula with weight $\cos(2\pi\omega x)$ in the Sobolev space // Bukhara State University “Current issues in mathematics, physics and information technology”, 2020. Bukhara, April 15, pp.156.
14. Bozarov B.I. On an optimal quadrature formula with weight $\cos(2\pi\omega x)$ in the Sobolev space // National University of Uzbekistan Scientific Online Conference of young scientists “Modern Problems of Mathematics and Applied Mathematics” dedicated to the 100th anniversary of Academic S.Kh.Sirojiddinov. Tashkent, May, 21, 2020. pp 231-233.
15. Bozarov B.I. Optimal quadrature formulas with trigonometric weight functions in the Sobolev space. // National University of Uzbekistan “The International Conference Inverse and ill-Posed Problems”. Tashkent, August, 24-25, 2020. pp 20-22.
16. Bozarov B.I. On an optimal quadrature formula with weight $\sin(2\pi\omega x)$ in the Sobolev space. // “Modern problems of mathematics: problems and solutions” Termiz, October, 21-23, 2020. pp 339.
17. Hayotov A.R., Bozarov B.I. Numerical integration formulas on a sphere. // International Scientific Conference "Actual problems of stochastic analysis", dedicated to the 80th anniversary of academician Sh.K. Formanov. Tashkent, February 20-21, 2021, pp. 476.
18. Bozarov B.I. Optimal quadrature formulas for Fourier sine and cosine integrals and their application to reconstruction of Computed Tomography images. // International Scientific and Practical Conference "Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies", Bukhara, Uzbekistan, 15 april, 2021, 201-202 pp.
19. Hayotov A.R., Bozarov B.I. Integration defined functions on the unite sphere. // Of the VIII International scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology AI – Khorezmiy 2021”, – Ferghana, 2021, 15-17 november, pp 71-72.
20. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р., Бозаров Б.И. Тригонометрик вазнли оптимал квадратур формулалар билан Фурье коэффициентларини ҳисоблаш. Интеллектуал мулк агентлиги. – Тошкент. №. DGU 11043, 12.05.2021.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Бичими 60x84 1/16. Ризограф босма усули. Times гарнитураси.

Шартли босма табоғи: 2,75. Адади 100. Буюртма № 13.
Баҳоси келишилган ҳолда.

«ЎзР Фанлар Академияси Асосий кутубхонаси» босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100170, Тошкент ш., Зиёлилар кўчаси, 13-уй.