ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ
В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ХОЛТЎРАЕВ ХОЛСАИД ФАЙЗУЛЛАЕВИЧ

ИДЕМПОТЕНТ ЭҲТИМОЛЛИК ЎЛЧОВЛАРИ ФУНКТОРИНИНГ ЧЕКСИЗ ИТЕРАЦИЯЛАРИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси

АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

УДК: 515.12

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of the abstract of doctor of philosophy (PhD) dissertation on physical-mathematical sciences

Холтўраев Холсаид Файзуллаевич
Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторининг чексиз итерациялари 3

Холтураев Холсаид Файзуллаевич
Бесконечные итерации функтора идемпотентных вероятностных мер. 19

Kholturaev Kholsaid Fayzullayevich
Infinite iterations of the functor of idempotent probability measures 35

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works 39

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ
В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ХОЛТЎРАЕВ ХОЛСАИД ФАЙЗУЛЛАЕВИЧ

ИДЕМПОТЕНТ ЭҲТИМОЛЛИК ЎЛЧОВЛАРИ ФУНКТОРИНИНГ ЧЕКСИЗ ИТЕРАЦИЯЛАРИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси

АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.2.PhD/FM15 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва "Ziyonet" Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Заитов Адилбек Атаханович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Нарманов Абдигаппар Якубович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Жиемуратов Рзамурат Есбергенович физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Низомий номидаги Тошкент давлат педагогика университети**

Диссертация ҳимояси Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил "___"_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99878) 227-12-24, факс: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган) (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99878) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2022 йил "____" _______________куни тарқатилди.
(2022 йил "____" ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м. ф. д., академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м. ф. ф. д. (PhD)

А.Я.Нарманов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси
ф.-м. ф. д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Бугунги кунда жаҳон миқёсида илмий-техник тараққиётнинг жадал суръатлар билан ривожланиши фундаментал тадқиқотларнинг, шу жумладан, математиканинг янги соҳаларини ривожлантириш ва олинган натижаларни амалиётга тадбиқ қилишни талаб этмоқда. Математикадаги амалиёт талабларидан келиб чиқадиган кўпгина масалалар оптималлаштириш ва оптимал бошқариш масалаларига келтирилади. Математика, математик физика ва иқтисодиётнинг турли соҳаларида идемпотент ўлчови (Маслов ўлчови) тушунчасининг кўплаб татбиқлари амалда қўлланилмоқда. Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоларининг геометрик ва топологик назарияси бўйича олинган натижалар ҳам назарий, ҳам тадбиқий жиҳатдан аҳамиятли ва замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан биридир.

Ҳозирги кунда жаҳонда дастлабки фазо ва функтор таъсирида олинган фазо, жумладан, идемпотент эҳтимоллик ўлчовларининг функтори таъсирида олинган ҳосилавий фазо орасидаги боғлиқликни аниқлаш масаласи замонавий функторлар назариясининг долзарб масалаларидан бири саналади. Анъанавий математикани сонлар майдони устида квант назарияси каби талқин қилиш мумкин. Унинг “классик аналоги” – идемпотент математика, яъни идемпотент қўшиш амали билан аниқланадиган ярим майдонлар (ва ярим ҳалқалар) устидаги математика ҳам мавжуд. Идемпотент эҳтимолликлар ўлчовига анъанавий математикада эҳтимолликлар ўлчови мос келади. Аммо, натижалар шуни кўрсатадики, эҳтимоллик ўлчовлари ва идемпотент эҳтимоллик ўлчовларининг ўхшаш натижаларини исботлаш учун турли хил усуллар талаб қилинади. Шунинг учун ҳам идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоларининг геометрик ва топологик хоссаларини ўрганиш мақсадли илмий тадқиқотлардан бири ҳисобланади.

Кейинги йилларда мамлакатимизда аниқ ва математик фанларга эътибор сезиларли даражада кучайтирилди, хусусан, функционал анализ, геометрия, топология, оптималлаштириш ва оптимал бошқариш масалаларини тадбиқ қилишга алоҳида эътибор қаратилди. Ушбу соҳада мақсадли илмий изланишларни, хусусан, топологик фазолардаги идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоларининг геометрик ва топологик хоссаларини қўллаш муҳим вазифалардан биридир. Бугунги кунда мамлакатимизда математика соҳасида “Функционал анализ, геометрия ва топология[1]” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари сифатида қаралади. Қарор ижросини таъминлашда топологик фазолардаги идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3582 сонли “Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалий жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги Қарори, 2019 йил 17 июндаги ПҚ-4358-сонли “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги Қарори, 2019 йил 9 июлдаги № ПҚ-4387-сонли “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги Қарори, 2019 йил 8 октябрдаги ПФ-5847-сонли “Ўзбекистон Республикаси Олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV “Математика, механика ва информатика” устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Идемпотент анализ устида дастлабки тадқиқотлар В.П.Масловнинг XX асрнинг 80 йиллари охирида чоп қилинган ишларидан бошланган. XXI асрнинг бошларидан ҳозирги вақтгача идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосини, компактли Хаусдорф фазолар категориясида ҳаракатланувчи идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторини тадқиқ қилиш функторлар назариясининг асосий бўлимларидан бири бўлиб қолмоқда.

Идемпотент функционал анализ В.П.Маслов, В.Н.Колокольцов, Г.Л.Литвинов ва бошқаларнинг ишларида қурилган ҳамда ривожлантирилган. М.Заричный, Т.Радул, Т.Банах, А.Заитов, И.Тожиев, А.Я.Ишметов, O.Hubal, V.Brydun, A.Savchenko, M.Cencelj, D.Repovš ва бошқалар ўз тадқиқотларида категорик усуллардан фойдаланган ҳолда нафақат ушбу назарияни, балки ковариант функторлар назариясини ва умумий топологияни янада ривожлантиришга ўз ҳиссаларини қўшган.

Ўтган асрнинг 80 йилларида Е.Щепин ўз ишида компакт фазолар ва уларнинг узлуксиз акслантиришлари категориясида ҳаракатланувчи функторларнинг айрим хоссаларини ажратиб, шу хоссаларни қаноатлантирувчи функторлар учун нормал функтор тушунчасини киритган. 2010 йилда М.Заричный компакт фазолар ва уларнинг узлуксиз акслантиришлари категориясида $I: Comp \to Comp$ идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторининг категориявий хоссаларини ўрнатган. А.Заитов ва А.Ишметовлар бу функторнинг айрим қисм функторларининг категориявий, топологик ва геометрик хоссаларини исботлашган. А.Заитов идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосида анъанавий метрикалардан фарқ қиладиган метрика таклиф этган. А.Заитов киритган метрика билан идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторининг метрикалашиши ва чексиз итерацияси шу пайтгача ўрганилмаган. Мазкур диссертацияда шу каби очиқ турган муаммолар ўз ечимини топган.

Классик эҳтимоллик ўлчовлари фазоси ва функторининг айрим хоссалари Т.Ф.Джураевнинг ишларида кўрсатилган. Хусусан, унинг ишларида эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг Z-тўпламлари аниқланган. Классик эҳтимоллик ўлчовлари чизиқли бўлиб, идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари чизиқли бўлмайди. Бундай чизиқли бўлмаган фазоларнинг Z-тўпламлари ва уларнинг хоссалари шу пайтгача очиқ муаммолар эди. Бу муаммоларнинг ижобий ечимлари ушбу диссертацияда топилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Тошкент архитектура қурилиш институтининг Математика ва табиий фанлар кафедрасининг бош илмий йўналиши “Ночизиқли анализ, физика ва механиканинг замонавий муаммолари” мавзусидаги, Тошкент давлат педагогика университетининг Ф4-27 “Топологик фазоларда ҳаракатланувчи айрим ковариант функторларнинг топологик ва кардинал хоссалари” мазусидаги ва Ўзбекистон миллий университетининг ОТ-Ф1-096 “Динамик полисистемалар назарияси масалаларини ечиш учун геометрик ва топологик методлар ишлаб чиқиш ҳамда яратиш” мавзусидаги илмий тадқиқотлар лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Компакт Хаусдорф фазоларида идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг геометрик ва топологик хоссаларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

метрикалашадиган компакт тўпламлар учун идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари ва эҳтимоллик ўлчовлари фазолари ўртасида гомеоморфизмларни қуриш;

идемпотент эҳтимолликлар ўлчовларининг функтори ва эҳтимоллик ўлчовлари функторини қуришдаги фарқни исботлаш;

ихтиёрий чексиз компакт тўплам учун идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоси ва Гильберт куби орасидаги боғланишни аниқлаш;

идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторида метрика аниқлаш ва ушбу метриканинг мукаммал метрика эканлигини кўрсатиш.

Тадқиқотнинг объекти идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функтори, унинг итерациялари, идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосида метрика.

Тадқиқотнинг предмети умумий топология, функторлар назарияси, идемпотент математика.

Тадқиқотнинг усуллари Тадқиқот ишида умумий топология, функторлар назарияси, идемпотент анализ усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

метрик компактларда классик эҳтимоллик ўлчовларининг фазоси ва идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоси гомеоморф эканлиги чекли элтувчили ўлчовлар тўпламларининг зичлигидан фойдаланиб кўрсатилган;

чекли дискрет компакт мисолида идемпотент эҳтимоллик ўлчовларининг функтори ва (одатдаги) эҳтимоллик ўлчовлари функтори бир-биридан фарқли эканлиги уч нуқтали дискрет фазо ҳамда унинг икки нуқтали турлича қисмлари орасидаги акслантиришларнинг диагонал кўпайтмаси классик ҳолда топологик жойлаштиришга ўтиши, идемпотент ҳолда эса топологик жойлаштиришга ўтмаслигини кўрсатиш орқали намоён қилинган;

хаусдорф компакт фазо метрикалашишининг идемпотент эҳтимоллик ўлчовларининг функтори орқали ифодаланадган аломати исботланган;

идемпотент эҳтимоллик ўлчовларининг фазосига киритилган метрикани қўллаб, идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторининг мукаммал метрикалашиши кўрсатилган;

метрик компакт фазолар категориясида идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторини кетма-кет қўллашдан ҳосил бўлган тўғри ва тескари чексиз итерациялар қурилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг айрим табиий қисм тўпламлари ажратиб кўрсатилди ва кейинчалик улар Z-тўплам эканлиги исботланган. Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторининг чексиз тўғри ва тескари итерациялари тузилган. Ихтиёрий чексиз метрик компакт X учун $I(X)$ идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг Гильберт куби Q га гомеоморфлиги исботланган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги умумий топология, функторлар назария, идемпотент таҳлил усулларини қўллаш, шунингдек, математик фикрлашнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти маълум шартларни қаноатлантирувчи чизиқли бўлмаган ўлчовларнинг исботланган хоссаларининг функторлар назарияси, ноаниқ (нечёткая) топология ва идемпотент математика бўйича тадқиқотларда қўллаш имконияти мавжудлиги билан баҳоланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти маълум шартларни қаноатлантирувчи чизиқли бўлмаган ўлчовларнинг исботланган хоссаларидан оптималлаштириш ва оптимал бошқаришнинг чизиқли бўлмаган масалаларида фойдаланиш имконияти мавжудлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторининг чексиз итерацияларига оид олинган натижалар асосида:

Компакт метрикалашадиган фазолардаги идемпотент эҳтимоллик ўлчовларининг фазоси ва эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг гомеоморфлиги ҳамда идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторининг мукаммал метрикалашадиган функтор эканлигидан ОТ-Ф4-42 “Ярим аддитив τ-силлиқ ва Радон функционаллар фазоларининг кардинал ва топологик хоссалари” номли давлат лойиҳасида ярим аддитив τ-силлиқ фазоларининг геометрик ва топологик хоссаларига оид категориявий, функториал ҳамда кардинал инвариантларни сақлаш масалаларини ечишда фойдаланилган (Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети томонидан 2022 йил 17 майда берилган 04-11-2822 рақамли маълумотнома). Диссертация натижалари ярим аддитив τ-силлиқ функционаллар функторининг топологик, категорик, геометрик ва кардинал хоссалари бўйича изланиш олиб бориш имконини берган;

Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг геометрик ва топологик хоссалари ҳамда идемпотент эҳтимоллик ўлчови (Маслов ўлчови) иқтисодиётнинг турли соҳаларидаги масалалари бўйича изланишлар олиб боришда, хусусан, ПЗ-20170929173 рақамли “Ўзбекистонда уй-жой фондини бошқариш тизимини такомиллаштириш (Тошкент шаҳри мисолида)” номли лойиҳада уй-жой фонди ўзига хослигидан келиб чиқиб синфлаштиришни геометрик таҳлил қилишга оид масалаларни ечишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан 2022 йил 29 апрелда берилган 89-05-21 рақамли маълумотнома). Диссертация натижалари грант доирасида пайдо бўлган оптималлаштириш ва оптимал бошқариш масалаларини таҳлил этишда юзага келган муаммоларини ҳал қилишга хизмат қилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 7 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан, 3 та халқаро ва 4 та республика, илмий-амалий анжуманларда муҳокама қилинган. Диссертация натижалари Тошкент архитектура қурилиш институти Математика ва табиий фанлар кафедраси семинарида, Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Функционал анализ бўйича Т.А.Саримсоқов номидаги семинарда, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси Математика институти Операторлар назарияси ва унинг тадбиқлари семинарида маъруза қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 24 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 72 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг Республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосидаги топология ҳақида»** деб номланган биринчи боби тўртта параграфдан иборат бўлиб, унда диссертация натижаларини ёритишда керак бўладиган тушунча ва фактлар ёритилган.

Биринчи параграфда умумий топологиядаги баъзи бир тушунчалар ва фактлар келтирилган. Ушбу тушунчаларнинг айримларининг маънолари очиб берилган.

Иккинчи параграфда текис ўлчовли функторларнинг таърифлари ва уларнинг хоссалари берилган.

Учинчи параграфда Маслов деквантизацияси келтирилган.

Тўртинчи параграфда идемпотент эҳтимоллик ўлчовларининг фазоси ва функторини қуриш ҳамда асосий тушунчалар тадқиқ қилинган.

X – компакт (компактли Хаусдорф фазо) бўлсин, $C(X)$ – ундаги узлуксиз акслантиришларнинг «$+$» – қўшиш, «$\cdot$» – кўпайтириш алгебраик амаллар ва $\sup$-норма ёрдамида киритилган Банах алгебраси бўлсин. $C(X)$ да $\oplus$ ва $\odot$ амалларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$(\varphi \oplus \psi)(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}, \qquad x \in X$$

ва

$$(\varphi \odot \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad x \in X,$$

бунда $\varphi, \psi \in C(X)$.

$\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ функционал:

(i) барча $\lambda \in \mathbf{R}$ учун $\mu(\lambda_X) = \lambda$ бўлсин, бунда λ_X – ўзгармас функция;

(ii) барча $\lambda \in \mathbf{R}$ ва $\varphi \in C(X)$ учун $\mu(\lambda_X \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ бўлсин;

(iii) барча $\varphi,\ \psi \in C(X)$ учун $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ бўлсин

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда уни X даги идемпотент эҳтимоллик ўлчови дейилади.

X компактдаги барча идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари тўпламини $I(X)$ орқали белгилаймиз. $I(X)$ ни $\mathbb{R}^{C(X)}$ фазонинг қисм фазоси сифатида қараймиз. $\mu \in I(X)$ идемпотент эҳтимоллик ўлчовининг $\mathbf{R}^{C(X)}$ дан $I(X)$ га сингдирилган топологияси (яъни нуқтали яқинлашиш топологияси) бўйича атрофлар базаси

$$\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle = \{\nu \in I(X) : |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\},$$

кўринишдаги тўпламлар оиласидан иборат, бу ерда $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \ldots, n$, $\varepsilon > 0$. X компакт учун нуқтали яқинлашиш топологияси киритилган $I(X)$ топологик фазо компактдир.

X, Y – компактлар қаралаётган бўлиб, $f:X\to Y$ – уларда аниқланган узлуксиз акслантириш бўлсин. $I(f):I(X)\to I(Y)$ акслантиришни

$$I(f)(\mu)(\psi)=\mu(\psi\circ f)$$

формула орқали аниқлаймиз. Узлуксиз акслантиришлар композицияси узлуксиз бўлганлиги учун $I(f)$ акслантириш узлуксиздир. Шундай қилиб, I конструкция компактларни компактларга, компактларнинг узлуксиз акслантиришларини компактларнинг узлуксиз акслантиришларига ўтказади, яъни I конструкция компактлар ва уларнинг узлуксиз акслантиришлари категорияси $Comp$ да таъсир этувчи функтор ҳосил қилади. Ундан ташқари, I конструкция нормал функтор бўлади.

Қуйидаги муҳим тушунчани қараймиз.

$\mu:C(X)\to\mathbb{R}$ функционал X да аниқланган эҳтимоллик ўлчови дейилади, агар қуйидаги хоссалар ўринли бўлса:

(i) барча $\lambda\in\mathbb{R}$ учун $\mu(\lambda_X)=\lambda$ бўлади (нормалланганлик);

(ii) барча $\lambda\in\mathbb{R}$ ва $\varphi\in C(X)$ лар учун $\mu(\lambda\varphi)=\lambda\mu(\varphi)$ бўлади (биржинслилик);

(iii) барча $\varphi,\psi\in C(X)$ лар учун $\mu(\varphi+\psi)=\mu(\varphi)+\mu(\psi)$ бўлади (аддитивлик).

X компакт учун ундаги барча эҳтимоллик ўлчовлари тўпламини $P(X)$ орқали белгилаймиз.

[6] ишда идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоси $I(X)$ ва ананавий эҳтимоллик ўлчовлари фазоси $P(X)$ орасидаги боғлиқлик қаралган, шу билан бирга I ва P функторларни изоморф эмаслигига доир мисол қурилган.

Ҳар бир X компакт ва ихтиёрий $\mu\in I(X)$ идемпотент эҳтимоллик ўлчови учун унинг элтувчисини аниқлаш мумкин:

$$\operatorname{supp}\mu=\bigcap\left\{A\subset X:[A]=A,\ \mu\in I(A)\right\}.$$

X компакт ва n мусбат бутун сон учун қуйидаги тўпламни аниқлаймиз

$$I_n(X)=\left\{\mu\in I(X):\left|\operatorname{supp}\mu\right|\le n\right\}.$$

Ушбу тўпламни қараймиз

$$I_\omega(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n(X).$$

$I_\omega(X)$ тўплам $I(X)$ да зич бўлади. $\mu\in I_\omega(X)$ элементни чекли элтувчили идемпотент эҳтимоллик ўлчови дейилади.

X компактнинг x нуқтаси учун $\varphi \in C(X)$ даги қиймати $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ тенглик билан аниқланадиган $\delta_x : C(X) \to \mathbf{R}$ функционал Дирак ўлчови дейилади. Ҳар бир Дирак ўлчови идемпотент эҳтимоллик ўлчови бўлади, ваҳоланки, $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\}$. Шуни таъкидлаш жоизки,

$$X \cong \delta(X) = \{\delta_x : x \in X\} = \{0 \odot \delta_x : x \in X\} = I_1(X).$$

муносабатларнинг бажарилиши X фазонинг Хаусдорф компактли фазо эканлигига тенг кучли бўлади.

Ҳар бир μ чекли элтувчили идемпотент эҳтимоллик ўлчови

$$\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus \ldots \oplus \lambda_n \odot \delta_{x_n}$$

кўринишда (ўрин алмаштириш аниқлигида) ягона ифодаланади, бунда $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ тўплам μ нинг элтувчиси, яъни $\operatorname{supp}\mu = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Бу ерда λ_i коэффициентлар

$$\lambda_i > \mathbf{0} \equiv -\infty \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ и } \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_n = \mathbf{1} = 0, \qquad (1.4.1)$$

шартларни қаноатлантиради ва мос равишда x_i нуқтанинг $\max$-plus-барицентрик массаси дейилади, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тушунарлики, μ чекли элитувчили идемпотент эҳтимоллик ўлчови учун $x_i \in \operatorname{supp}\mu$ тегишлилик фақат ва фақат шу нуқтага мос $\max$-plus барицентрик масса $\lambda_i > -\infty$ тенгсизликни қаноатлантирсагина ўринли бўлади.

Диссертациянинг **«Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоларининг геометрик хоссалари»** деб номланган иккинчи боби тўртта параграфдан ташкил топган. Биринчи параграфда эҳтимоллик ўлчовлари фазоси $P(X)$ ва идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоси $I(X)$ гомеоморфлиги келтирилган. Қуйидаги тасдиқ биринчи параграфнинг асосий натижаси бўлади.

Теорема 2.1.1. X ихтиёрий чекли компакт бўлса, у ҳолда $P(X)$ ва $I(X)$ фазолар гомеоморф бўлади.

Бу теоремадан қуйидаги муҳим натижа олинган.

Натижа 2.1.1. Ихтиёрий X метрик компакт учун $P(X)$ ва $I(X)$ фазолар гомеоморф бўлади.

Иккинчи параграфда P ва I функторларнинг изоморф эмаслигини кўрсатувчи мисол қурилган.

Учинчи параграфда идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функтори ёрдамида компактларнинг метрикалашиш аломати келтирилган.

X компакт, n натурал сон, F функтор учун

$$F_n(X) = \{a \in F(X) : |\operatorname{supp} a| \le n\},$$

$$F_n^0(X) = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$$

белгилашларни киритамиз.

Қуйидаги тасдиқ асосий натижани олиш учун муҳим бўлиб, мустақил аҳамиятга эга.

Теорема 2.3.1. Агар τ – саноқсиз кардинал бўлса, у ҳолда $I_3^0(\alpha N_\tau)$ фазо нормал эмас.

Бу теоремадан параграфнинг асосий натижаси келиб чиқади.

Натижа 2.3.1. Айтайлик, X компакт ва $n \geq 3$ бўлсин. Агар $I_n(X) \setminus X$ фазо наслий нормал бўлса, у ҳолда X компакт метрикалашадиган фазо бўлади.

Тўртинчи параграфда идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосидаги Z-тўпламларга оид натижалар келтирилган. Тўртинчи параграфнинг асосий натижалари қуйидаги иккита теорема шаклида баён этилган.

Теорема 2.4.1. A тўплам X компактдаги ихтиёрий тривиал бўлмаган (яъни $A \neq \varnothing$ ва $A \neq X$) ёпиқ қисм тўплами бўлсин. У ҳолда $I(A)$ тўплам идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоси $I(X)$ даги Z – тўплам бўлади.

Теорема 2.4.2. Ихтиёрий X компакт ва ҳар бир натурал $n \in \mathbb{N}$, $n < |X|$ лар учун $I_n(X)$ тўплам $I(X)$ фазонинг Z-тўплами бўлади. Ундан ташқари, $I_\omega(X)$ тўплам $I(X)$ фазода σ-Z – тўплам бўлади.

Диссертациянинг **«Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторининг чексиз итерациялари»** деб номланган учинчи боби иккита параграфдан ташкил топган.

Ушбу бобда биз идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторини компактларда узлуксиз акслантиришлар ёрдамида мукаммал метрикалашишини кўрсатганмиз.

“Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоси ва Гильберт куби” деб номланган биринчи параграфда идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг бир қатор геометрик хоссалари ўрнатилган, хусусан, ихтиёрий чексиз компакт тўплам учун идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг Гильберт куби Q га гомеоморф эканлиги исботланган.

Гильберт куби Q даги метрикани $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} |y_i - x_i|$ тенглик билан қараймиз. f, $g : Q \to Q$ узлуксиз акслантиришлар орасидаги масофани

$$d(f, g) = \max\{d(f(x), g(x)) : x \in Q\}$$

формула орқали киритамиз.

Таъриф 3.1.1. B тўплам Q Гильберт кубининг қисми бўлсин. Агар:

1) берилган $\varepsilon > 0$ учун $d(\eta, id) < \varepsilon$ муносабат ўринли бўладиган $\eta : Q \to Q \setminus B$ узлуксиз акслантириш мавжуд;

2) $Q \setminus B$ тўлдирма l_2 Гильберт фазосига гомеоморф шартлар ўринли бўлса, B тўплам Q Гильберт кубининг чегаравий қисм тўплами дейилади.

Эквивалент таъриф. Q Гильберт кубида зич бўлган B σ-Z – тўплам учун $Q\setminus B\cong l_2$ бўлса, B тўплам Q Гильберт кубининг чегаравий тўплами дейилади.

Q Гильберт кубининг чегаравий тўпламини B(Q) билан белгилаймиз.

Таъриф 3.1.2. X компактнинг ичма-ич жойлашган $X_1\subset X_2\subset\ldots$ – қисм тўпламлари берилган бўлсин. Агар

1) ихтиёрий A компакт (мос равишда, чекли ўлчовли компакт),

2) ихтиёрий $f: A\to X$ узлуксиз акслантириш,

3) A нинг қандайдир m ларда $f\big|_B : B\to X_m$ – жойлаштириш бўладиган ёпиқ B қисми,

4) ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун бирор $n\geq m$ учун $f\big|_B = h\big|_B$ бўладиган $h: A\to X_n$ жойлаштириш топилиб, $d(f,h)<\varepsilon$ бўлса, у ҳолда $\{X_n\}$ тўпламлар системаси компактлар учун (мос равишда, чекли ўлчовли компактлар учун) мукаммал минора дейилади.

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}X_n$ тўплам компактлар учун (мос равишда чекли ўлчовли компактлар учун) скелетоид дейилади.

Агар бу таърифда ҳар бир $n\in\mathbb{N}$ учун X_n тўплам X тўпламдаги Z-бўлса, у ҳолда $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}X_n$ тўплам компактлар (мос равишда чекли ўлчовли компактлар учун) Z-скелетоид дейилади.

Бу таърифдаги X фазо $ANR(\mathcal{M})$ фазо бўлса, унда X ни ихтиёрий компактлар учун (мос равишда чекли ўлчовли компактлар учун) кучли универсал дейилади.

Таъриф 3.1.3. X ва Y топологик фазолар берилган бўлиб, $A\subset X$, $B\subset Y$ бўлсин. Агар шундай $f: X\to Y$ гомеоморфизм топилиб, $f(X)=Y$ ва $f(A)=B$ бўлса, у ҳолда (X,A) жуфтлик (Y,B) жуфтликка гомеоморф дейилади. Бу ҳолат $(X,A)\approx(Y,B)$ каби белгиланади.

Теорема 3.1.1. X – чексиз метрик компакт, $A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots$ – лар X нинг шундай ёпиқ қисм тўпламлар бўлсаки, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ тўплам X да зич ва $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\neq X$ бўлсин. У ҳолда $\left(I(X),\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I(A_i)\right)\approx(Q,B(Q))$ бўлади.

2.4.2 ва 3.1.1 теоремалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа 3.1.2. Ихтиёрий чексиз ўлчовли X компакт учун $(I(X),I_\omega(X))$ ва $(Q,B(Q))$ жуфтликлар гомеоморф бўлади.

X компакт, I функтор ва бўш бўлмаган $A\subset X$ қисм тўплам учун

$$S_I(A)=\{\mu\in I(X):\operatorname{supp}\mu\cap A\neq\varnothing\}.$$

тўпламни аниқлаймиз.

Ушбу теорема параграфнинг муҳим натижаларидан бири ҳисобланади.

Теорема 3.1.2. $S_I(BdQ)$, $S_I(S)$ ва $I(BdQ)$ фазолар компактлар учун скелетоидни ўзида сақлайди.

“Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторининг итерацияси ва метрикалашуви” номли иккинчи параграфнинг асосий натижаларини баён этамиз.

Бу параграфда I функтор текис метрикалашадиган бўлишини текширамиз. X компакт учун ҳар бир $x \in X$ да $\delta_X(x) = 0 \odot \delta_x$ каби аниқланадиган $\delta_X : X \to I(X)$ акслантиришни жойлаштириш бўлади. Бунда $\eta = \{\delta_X : X \in Comp\}$ оила табиий аламаштириш бўлади.

$$I^0(X) = X,\ I^k(X) = I\left(I^{k-1}(X)\right), \qquad k = 1, 2, ..., \qquad \text{ва}$$

$$\delta_{n-1,n} = \delta_{I^{n-1}(X)} : I^{n-1}(X) \to I^n(X).$$

деб олсак, ушбу

$$X \xrightarrow{\delta_{0,1}} I(X) \xrightarrow{\delta_{1,2}} \ldots \xrightarrow{\delta_{n-1,n}} I^n(X) \xrightarrow{\delta_{n,n+1}} I^{n+1}(X) \xrightarrow{\delta_{n+1,n+2}} \ldots \qquad (3.2.1)$$

тўғри кетма-кетлик ҳосил бўлади.

X компаткда ρ метрикани ва

$$\rho_1(\mu_1, \mu_2) = \lim_{n\to\infty} \rho_\omega\left(\mu_{1n},\ \mu_{2n}\right), \qquad \mu_1, \mu_2 \in I(X) \qquad (3.2.2)$$

тенглик билан аниқланадиган $\rho_1 = \rho_I$ метрикалашни тайинлаб оламиз. Бу ерда $\{\mu_{in}\} \subset I_\omega(X)$ кетма-кетлик μ_i га яқинлашади, $i = 1, 2$. $\nu_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} \lambda_j(x) \odot \delta_x \in I_\omega(X)$, $i = 1, 2$, идемпотент ўлчовлар орасидаги $\rho_\omega(\nu_1, \nu_2)$ масофа эса

$$\rho_\omega(\nu_1, \nu_2) = \inf\left\{ \frac{\sum\limits_{(x,y)\in \operatorname{supp}\xi} \mathrm{e}^{\lambda_1(x)+\lambda_2(y)} \cdot \rho(x,y)}{\sum\limits_{x\in\operatorname{supp}\nu_1} \mathrm{e}^{\lambda_1(x)} \cdot \sum\limits_{y\in\operatorname{supp}\nu_2} \mathrm{e}^{\lambda_2(y)}} :\ \xi \in \Lambda_{12} \right\},$$

каби аниқланади, бунда

$$\Lambda_{12} = \Lambda(\nu_1, \nu_2) = \left\{ \xi \in I(X^2) :\ I(\pi_i)(\xi) = \nu_i,\ i = 1,\ 2 \right\},$$

ҳамда $\pi_i : X \times X \to X$ – i -кўпайтувчига проекция.

Бу метрикалаш билан $I^n(X)$ да ҳосил қилинган метрика ρ_n орқали белгиланади.

Лемма 3.2.1. X компакт, ρ ундаги метрика бўлсин. У ҳолда $\delta_X : (X, \rho) \to (I(X), \rho_1)$ акслантириш изометрия бўлади.

Лемма 3.2.2. (X_1,ρ^1), (X_2,ρ^2) компакт метрик фазолар бўлсин. У ҳолда ҳар бир $i:(X_1,\rho^1)\to(X_2,\rho^2)$ изометрик жойлаштириш учун $I(i):(I(X_1),\ \rho_1^1)\to(I(X_2),\ \rho_1^2)$ акслантириш ҳам изометрик жойлаштириш бўлади.

Лемма 3.2.3. X компактда ихтиёрий ρ метрика учун қуйидаги тенглик ўринли

$$\operatorname{diam}(X,\rho)=\operatorname{diam}(I(X),\rho_1).$$

$I^n(X)$ тўпламлар (3.2.1) кетма-кетлигининг лимитини вақтинча $I^+(X)$ орқали белгилаб туриб, $\delta_{n,m}=I^n(X)\to I^m(X)$ жойлаштиришларнинг $m\to\infty$ даги лимитини $\delta_n:I^n(X)\to I^+(X)$ орқали белгилайлик. У ҳолда

$$I^+(X)=\bigcup\{\delta_n(I^n(X)):n\in N\}$$

бўлиб, ундаги ρ_+ метрика $\delta_n(I^n(X))$ қўшилувчилардаги ρ_n метрикалар орқали аниқланади, яъни $x,y\in I^+(X)$ лар учун

$$\rho_+(x,y)=\rho_n(a,b) \tag{3.2.3}$$

каби аниқланади. Бу ерда $\delta_n(a)=x,\ \delta_n(b)=y$.

Қуйидаги иккита тасдиқ параграфнинг асосий натижалари сифатида қайд этилиши мумкин.

Теорема 3.2.1. Функтор I метрикалашади.

Теорема 3.2.2. Идемпотент эҳтимоллик ўлчови функтори I текис метрикалашади. Яъни ихтиёрий $f:(X_1,\rho^1)\to(X_2,\rho^2)$ узлуксиз акслантириш ва (3.2.2) формула ёрдамида киритилган метрикалаштириш учун

$$I^+(f):(I^+(X_1),\ \rho_+^1)\to(I^+(X_2),\ \rho_+^2)$$

акслантириш текис узлуксиз бўлади.

Бу ерда $I^n(X)$ тўпламлар (3.2.1) кетма-кетлигининг лимити $I^+(X)$ орқали, $I^+(X)$ даги (3.2.2) метрикалаштириш орқали ҳосил қилинган метрикани ρ^+ орқали белгиланган.

Энди $\psi=\{\psi_X:X\in Comp\}$ системани қараймиз. Бу система $\psi_X:I^2(X)\to I(X)$ кўринишдаги барча акслантиришлардан ташкил топган. ψ_X акслантиришлар эса $M\in I^2(X)$, $\varphi\in C(X)$ лар учун $\psi_X(M)(\varphi)=M(\tilde{\varphi})$ тенглик билан аниқланади, бу ерда $\tilde{\varphi}:I(X)\to R$ узлуксиз функция бўлиб, $\tilde{\varphi}(\mu)=\mu(\varphi)$ тенглик билан берилади.

X компактни тайинлаймиз ва n натурал сон учун

$$\psi_{n+1,n}=\psi_{I^{n-1}(X)}:I^{n+1}(X)\to I^n(X)$$

деб оламиз.

$$\psi_{n+1,n}\circ\delta_{n,n+1}=id_{I^n(X)}.$$

эканлигини таъкидлаймиз.

X компакт ва I функтор учун ушбу

$$I(X)\xleftarrow{\psi_{2,1}}I^2(X)\xleftarrow{\psi_{3,2}}\ldots\xleftarrow{\psi_{n,n-1}}I^n(X)\xleftarrow{\psi_{n+1,n}}\ldots\ .$$

тескари кетма-кетлик ҳосил бўлади.

Қуйидаги теорема ковариант функторлар назариясида муҳим роль ўйнайди.

Теорема 3.2.3. I мукаммал метрикалашадиган функтор бўлади.

Диссертацияда В.В.Федорчукнинг ишидаги натижаларига таянган ҳолда бобнинг ушбу асосий натижасига эга бўламиз.

Теорема 3.2.4. Биттадан кам бўлмаган нуқтага эга ҳар бир X компакт учун $\left(I^{\omega}(X), \theta(I^{++}(X)), \theta(I^{+}(X))\right)$ учлик $\left(Q, s, \mathrm{rint}\,Q\right)$ учликка гомеоморф бўлади.

Бу ерда

$I^{+}\left(X\right)$ – тўғри кетма-кетликдаги тўпламлар лимити,

$I^{++}\left(X\right)$ орқали $I^{+}\left(X\right)$ метрик фазонинг тўлдирмаси,

$I^{\omega}\left(X\right)$ – тескари кетма-кетликдаги тўпламлар лимити.

$\theta_n : I^{+}\left(X\right)\to I^{n}\left(X\right)$ – табиий проекциялаш,

$\overline{\theta}_n : I^{++}\left(X\right)\to I^{n}\left(X\right)$ – унинг кенгайтмаси,

$\theta=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\theta}_n : I^{++}\left(X\right)\to I^{\omega}\left(X\right)$ – $\overline{\theta}_n$ акслантиришларнинг лимити белгиланган.

ХУЛОСА

Диссертацияда компакт Хаусдорф фазолардаги идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг геометрик ва топологик хоссалари тадқиқ қилинган. Қўйилган масалаларни ҳал этиш учун $I(X)$ идемпотент эҳтимолликлар ўлчови фазосининг топологик ва геометрик хоссалари ўрнатилган. Бу фазога нуқтали яқинлашиш топологиясини ҳосил қилувчи метрика киритилган. Мазкур метрикани қўллаб, I функторини қайта қўллаб, яъни I функторини итерациялаб фазоларнинг тўғри ва тескари кетма-кетликлари қурилган. I функтори мукаммал метрикалашадиган функтор бўлиши ўрнатилган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1) Метрик компактлар учун идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоси ва эҳтимоллик ўлчовларининг фазоси гомеоморф эканлиги кўрсатилган.

2) Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари ва эҳтимоллик ўлчовлари функторлари ҳаттоки чекли фазоларда ҳам бир-бирига изоморф бўлмаслигини кўрсатувчи мисол тузилган.

3) Компакт Хаусдорф фазоларининг метрикалашишининг идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функтори орқали аломати таклиф этилган.

4) Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг Z-тўпламлари қурилган.

5) Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари функторининг тўғри ва тескари итерациялари кетма-кетликлари қурилган.

6) Идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазосининг бир қанча геометрик хоссалари, хусусан, ихтиёрий чексиз X компакт учун $I(X)$ идемпотент эҳтимоллик ўлчовлари фазоси Q Гильберт кубига гомеоморфлиги исботланган.

7) Идемпотент эҳтимоллик ўлчовларининг функтори мукаммал метрикалашадиган функтор бўлиши ўрнатилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ
ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ХОЛТУРАЕВ ХОЛСАИД ФАЙЗУЛЛАЕВИЧ

БЕСКОНЕЧНЫЕ ИТЕРАЦИИ ФУНКТОРА ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

01.01.04 – Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2022

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математи-ческим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.2.PhD/FM15.

Диссертация выполнена в институте Математики имени В.И.Романовского

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Заитов Адилбек Атаханович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Нарманов Абдигаппар Якубович** доктор физико-математических наук, профессор
	Жиемуратов Рзамурат Есбергенович кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Ташкентский государственный педагогический Университет имени Низами**

Защита диссертации состоится «____» _____________2022 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана имена Мирзо Улугбека. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878)227-12-24, факс: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2022 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2022 года).

А. Садуллаев
Председатель научного
совета по присуждению ученых
степеней, д. ф.-м. н., академик

Н. К. Мамадалиев
Ученый секретарь научного
совета по присуждению ученых
степеней, д. ф. ф.-м. н. (PhD)

А. Я. Нарманов
Председатель научного семинара при
Научном совете по присуждению ученых
степеней, д. ф.-м. н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В связи с бурным развитием научно-технического прогресса в мире, требуются разработки новых направлений фундаментальных исследований, в частности математики и внедрения полученных результатов в практику. Многие задачи математики, возникающие из потребностей практики, сводятся к задачам, в оптимизации и оптимального управления. Понятие идемпотентной меры (меры Маслова) находит многочисленные применения в различных областях математики, математической физики и экономики. Использование мер Маслова для моделирования неопределенности в математической экономике может быть настолько же релевантным, насколько и использование классической теории вероятностей. Поэтому результаты, полученные по теории идемпотентных вероятностных мер, имеют и теоретическую, и практическую значимость и эта теория считается одним из важнейших областей современной математики.

В настоящее время в мире, одной из актуальных проблем современной теории функторов является решение задачи о взаимосвязи исходного пространства и производного пространства, получаемого различными функторами, в частности, функтором идемпотентных вероятностных мер. Традиционную математику над числовыми полями можно трактовать как квантовую науку. Имеется и ее «классический аналог» – идемпотентная математика, т. е. математика над полуполями (и полукольцами) с идемпотентным сложением. Идемпотентная математика продвинута весьма далеко. В традиционной математике идемпотентной вероятностной мере соответствует вероятностная мера. Однако, как показывают результаты для доказательства аналогичных результатов для вероятностных мер и идемпотентных вероятностных мер требуются различные друг от друга методы. В связи с этим изучение геометрических и топологических свойств пространств идемпотентных вероятностных мер считается целенаправленным научным исследованием.

В нашей стране усиленное внимание уделено актуальным направлениям в области естественных и точных наук, в частности, особое внимание уделяется приложению методов и результатов в особенности в задачах оптимизации и оптимального управления. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, геометрия и топология»[2]. Развитие теории идемпотентных вероятностных мер на топологических пространствах играет важную роль в обеспечении реализации данного постановления.

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах поорганизации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наукРеспублики Узбекистан».

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан УП–4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» и постановлениями Президента Республики Узбекистан ПП–2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно–исследовательской деятельности», ПП–2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», и ПП–3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов» и ПП–4358 от 17 июня 2019 года «О мерах по коренному совершенствованию системы подготовки востребованных квалифицированных кадров и развитию научного потенциала в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека в 2019-2023 годах», № УП-5847 от 8 октября 2019 года «Об утверждении концепции развития системы высшего образования Республики Узбекистан до 2030 года», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Начало систематических исследований по идемпотентному анализу восходит к работам В. П. Маслова, опубликованным в конце 80 годов XX века. Начиная с XXI века до настоящего времени исследование пространства идемпотентных вероятностных мер, а также функторов идемпотентных вероятностных мер, действующих на категориях компактных Хаусдорфовых пространств является одним из основных разделов теории функторов.

Идемпотентный функциональный анализ был построен в работах В. П. Маслова, В. Н. Колокольцова, Г. Л. Литвинова и других. М. Заричный, Т. Радул, Т. Банах, А. А. Заитов, И. И. Тожиев, А. Я. Ишметов, O. Hubal, V. Brydun, A. Savchenko, M. Cencelj, D. Repovš и другие применяя в своих исследованиях категорные методы, внесли свои вклады для дальнейшего развития не только данной теории, но и теории ковариантных функторов и общей топологии.

В восьмидесятые годы прошлого века Е. Щепин в своих работах выделил ряд естественных свойств функторов, действующих в категории компактов и их непрерывных отображений, и ввел понятие нормального функтора. В 2010 году М. Заричный установил категорные свойства функтора $I : Comp \to Comp$ идемпотентных вероятностных мер на категории компактов и их непрерывных отображений. В 2019 году А. Заитов и А. Ишметов установили категорные, топологические и геометрические свойства некоторых подункторов этого функтора. А.Заитов предлагал метрику на пространстве идемпотентных вероятностных мер. Метризация и итерация функтора идемпотентных вероятностных мер относительно метрики, предложенной А.Заитовым, до сих пор оставались открытыми. В диссертации получены положительные результаты этим проблемам.

Некоторые свойства пространства и функтора классических вероятностных мер показаны в работах Т.Ф.Джураева. В частности, в его работах определены Z-множества пространства вероятностных мер. Классические вероятностные меры являются линейными, а идемпотентные вероятностные меры не являются. Поэтому стояли задачи о выделении Z-множества пространства таких нелинейных функционалов и установлении их свойств. В диссертации получены положительные ответы этим задачам.

Связь диссертационной работы с фундаментальными и прикладными исследованиями, с инновационными проектами, Государственными научно-техническими программами

Диссертационное исследование проводилось в рамках темы «Нелинейный анализ, современные проблемы физики и механики» головного научного направления кафедры Математики и естественных дисциплин Ташкентского архитектурно-строительного института, научно исследовательских грантов Ташкентского государственного педагогического университета Ф4-27 «Исследование топологических и кардинальных свойств некоторых ковариантных функторов, действующих на категориях топологических пространств» и Национального университета Узбекистана ОТ-Ф1-096 «Создание и разработка геометрических и топологических методов для решений задач теории динамических полисистем».

Целью исследования является исследование геометрических и топологических свойств пространства идемпотентных вероятностных мер на компактных хаусдорфовых пространствах.

Задачи исследования:

для метризуемых компактов построить явный вид отображения, являющийся гомеоморфизмом между пространств идемпотентных вероятностных мер и вероятностных мер;

выявить отличие между конструкциями взятия пространства идемпотентных вероятностных мер и пространства вероятностных мер;

для произвольного бесконечного компакта установить гомеоморфность пространства идемпотентных вероятностных мер и гильбертова куба;

построить метризацию функтора идемпотентных вероятностных мер, и установить совершенной метризуемости функтора идемпотентных вероятностных мер.

Объектами исследования являются: функтор идемпотентных вероятностных мер, итерация и метризация функтора идемпотентных вероятностных мер.

Предметами исследования являются: общая топология, теория функторов, идемпотентная математика.

Методы исследования: В диссертации применяются методы общей топологии, теории функторов, идемпотентного анализа.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

используя плотность множеств мер с конечным носителем соответственно в пространствах идемпотентных вероятностных мер и вероятностных мер показано, что для метризуемых компактов пространства идемпотентных вероятностных мер и вероятностных мер гомеоморфны;

построен пример, где соответствующее отображение одному отображению – диагональному произведения двух отображений, отображающих трехточечное дискретное пространство соответственно на различные двухточечные подмножества, образует в классическом случае вложение, а в идемпотентном случае не образует вложение. Откуда вытекает, что конструкции взятия пространства идемпотентных вероятностных мер и пространства вероятностных мер, образуют отличающиеся друг от друга функторы;

дан критерий метризуемости компактных хаусдорфовых пространств на языке функтора идемпотентных вероятностных мер;

применяя метрику на пространстве идемпотентных вероятностных мер, установлена совершенная метризуемость функтора идемпотентных вероятностных мер;

последовательно определяя воздействие функтора идемпотентных вероятностных мер, построены прямая и обратная бесконечные итерации функтора идемпотентных вероятностных мер на категории метризуемых компактов.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

выделены подмножества пространства идемпотентных вероятностных мер, которые образуются естественным способом, и далее установлено, что они являются Z-множествами. Построены бесконечные прямые и обратные итерации функтора идемпотентных вероятностных мер. Доказано, что для произвольного бесконечного компакта X пространство $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер гомеоморфно гильбертову кубу Q.

Достоверность результатов исследования обоснована применением методов общей топологии, теории функторов, идемпотентной математики, а также строгостью математических рассуждений.

Теоретическая и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов работы заключается в том, что установленные свойства нелинейных функционалов, удовлетворяющих определенных условий, дают возможности использования в дальнейших исследованиях по теории функторов, нечеткой топологии и идемпотентной математике.

Практическое значение результатов исследования заключается в том, что установленные свойства нелинейных функционалов, удовлетворяющих определенных условий, позволяют применять их в нелинейных задачах оптимизации и оптимального управления.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в процессе над работой диссертации, внедрены в следующих направлениях:

Гомеоморфность пространств идемпотентных вероятностных мер и вероятностных мер на компактных метризуемых пространствах, а также совершенная метризуемость функтора идемпотентных вероятностных мер, установленные в диссертации, использовались в качестве теоретического обоснования проекта в рамках научных исследований по Государственному гранту ОТ-Ф4-42 «Топологические и кардинальные свойства пространства полуаддитивных τ-гладких функционалов» (Справка под номером 04-11-2822, выданная в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека от 17 мая 2022 года). Результаты диссертации применены в исследованиях категорных, топологических, геометрических и кардинальных свойств функтора полуаддитивных τ-гладких функционалов.

Геометрические и топологические свойства пространства идемпотентных вероятностных мер и идемпотентной вероятностной меры (меры Маслова) применялись в ходе проведения исследований по вопросам различных сфер экономики, в частности, в проекте ПЗ-20170929173 «Оптимизация систем управления жилищного фонда Узбекистана (на примере г. Ташкент)» (Справка под номером 89-05-21 министерства среднего специального образования Республики Узбекистан от 29 апреля 2022 года). Результаты диссертации позволили решить проблем, возникших при анализе вопросов оптимизации и оптимального управления в рамках гранта.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались на 3 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 24 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 2 из них опубликованы в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 72 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертационной работы обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, в соответствии с исследованиями по приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, дан обзор международных научных исследований по теме диссертации, раскрыта степень изученности проблемы и связь с научным направлением, формулированы цели и задачи, а также объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, обосновано достоверность полученных результатов, раскрыты ее теоретическая и практическая значимость, приведен список опубликованных работ, даны сведения об апробации полученных результатов и структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«О топологии пространства идемпотентных вероятностных мер»,** носит вспомогательный характер и посвящена изложению основных определений и вспомогательных фактов по теме данной диссертации. Она состоит из четырех параграфов. В первом параграфе перечислено понятия из общей топологии и теории ковариантных функторов. Расшифровано некоторые из этих понятий.

Во втором параграфе приведено определение понятие равномерно метризуемого функтора.

Третий параграф посвящен Деквантованию Маслова.

В четвертом параграфе построены пространство и функтор идемпотентных вероятностных мер.

Пусть X – компакт (что означает компактное Хаусдорфово пространство), $C(X)$ – банахова алгебра непрерывных функций на X с обычными алгебраическими операциями «$+$», «$\cdot$» и $\sup$-нормой. На $C(X)$ операции $\oplus$ и $\odot$ определим по правилам

$$\left(\varphi \oplus \psi\right)\left(x\right) = \max\left\{\varphi\left(x\right), \psi\left(x\right)\right\}, \qquad x \in X$$

и

$$\left(\varphi \odot \psi\right)\left(x\right) = \varphi\left(x\right) + \psi\left(x\right), \qquad x \in X,$$

где $\varphi, \psi \in C(X)$. Напомним, что функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется идемпотентной вероятностной мерой на X, если он обладает следующими свойствами:

(i) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ (нормированность);

$\left(ii\right)$ $\mu(\lambda_X \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ (однородность);

$\left(iii\right)$ $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ (аддитивность).

Для компакта X обозначим через $I(X)$ множество всех идемпотентных вероятностных мер на X. Рассмотрим $I(X)$ как подпространство пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ – тихоновского произведения числовых прямых. Базу окрестностей идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ относительно индуцированной из $\mathbb{R}^{C(X)}$ в $I(X)$ топологии (т. е., топологии поточечной сходимости) образуют множества вида

$$\left\langle \mu; \varphi_1, ..., \varphi_n; \varepsilon \right\rangle = \left\{ \nu \in I(X) : \left|\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)\right| < \varepsilon, \, i = 1, ..., n \right\},$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, ..., n$, $\varepsilon > 0$. Для компакта X топологическое пространство $I(X)$, снабженное топологией поточечной сходимости, является компактом.

Пусть X, Y – компакты, $f : X \to Y$ – непрерывное отображение. Определим отображение $I(f) : I(X) \to I(Y)$ по формуле

$$I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f).$$

Так как композиция непрерывных отображений непрерывна, то отображение $I(f)$ непрерывно. Таким образом, конструкция I переводит компакты в компакты и непрерывные отображения в непрерывные, то есть I образует функтор, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений. Более того, конструкция I является нормальным функтором.

Напомним ещё следующее важное понятие.

Функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется вероятностной мерой на X, если он обладает следующими свойствами:

(i) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ (нормированность);

(ii) $\mu(\lambda\varphi) = \lambda\mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ (однородность);

(iii) $\mu(\varphi + \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ (аддитивность).

Для компакта X через $P(X)$ обозначим множество всех вероятностных мер на X.

В работе [6] установлено взаимосвязь пространств $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер и $P(X)$ «традиционных» вероятностных мер (т. е. неотрицательных, линейных и нормированных функционалов $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$), а также построен пример, показывающий не изоморфность функторов I и P.

Как уже было отмечено, функтор I идемпотентных вероятностных мер, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений, нормален, то для каждого компакта X и для произвольной идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ определен ее носитель:

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcap\left\{A \subset X : \left[A\right] = A,\ \mu \in I(A)\right\}.$$

Для компакта X и положительного целого числа n определим следующее множество

$$I_n(X) = \left\{\mu \in I(X) : \left|\operatorname{supp}\mu\right| \le n\right\}.$$

Положим

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Множество $I_\omega(X)$ всюду плотно в $I(X)$. Идемпотентную вероятностную меру $\mu \in I_\omega(X)$ называют идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем.

Пусть $x \in X$ – некоторая точка компакта X. Функционал $\delta_x : C(X) \to \mathbb{R}$, определенный по правилу $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$, называется мерой Дирака.

Каждая мера Дирака является идемпотентной вероятностной мерой, причем $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\}$. Отметим, что выполнение следующих соотношений

$$X \cong \delta(X) = \{\delta_x : x \in X\} = \{0 \odot \delta_x : x \in X\} = I_1(X).$$

равносильно хаусдорфовой компактности X.

Каждая идемпотентная вероятностная мера μ с конечным носителем представляется в виде

$$\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus \ldots \oplus \lambda_n \odot \delta_{x_n}$$

единственным способом (с точностью до перестановка местами), где $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – носитель μ, т. е. $\operatorname{supp}\mu = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Здесь коэффициенты λ_i удовлетворяют условиям

$$\lambda_i > \mathbf{0} \equiv -\infty \;\; i = 1, 2, ..., n \text{ и } \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_n = \mathbf{1} = 0, \qquad (1.4.1)$$

и называется $\max$-plus барицентрической массой соответствующих точек x_i, $i = 1, 2, ..., n$. Ясно, что для идемпотентной вероятностной меры μ с конечным носителем включение $x_i \in \operatorname{supp}\mu$ справедливо тогда и только тогда, когда ее $\max$-plus барицентрическая масса $\lambda_i > -\infty$.

Вторая глава диссертации, названная «**Геометрические свойства пространства идемпотентных вероятностных мер**», состоит из четырех параграфов. В первом параграфе представлен гомеоморфизм пространства $P(X)$ вероятностных мер и пространства $I(X)$ идемпотентной вероятности мер. Следующее утверждение является основным результатом первого параграфа.

Теорема 2.1.1. Для произвольного конечного компакта X пространства $P(X)$ и $I(X)$ гомеоморфны.

Из этой теоремы вытекает следующий важный результат.

Следствие 2.1.1. Для произвольного метризуемого компакта X пространства $P(X)$ и $I(X)$ гомеоморфны.

Во втором параграфе на построен пример показывающий, что функторы P и I не являются изоморфными.

В третьем параграфе установлен один из критериев компактов на языке функтора идемпотентных вероятностных мер.

Для компакта X, натурального числа n, функтора F положим

$$F_n(X) = \{a \in F(X) : |\operatorname{supp} a| \le n\},$$

$$F_n^0(X) = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X).$$

Следующее утверждение играет важны роль при получении основного результата параграфа и носит самостоятельный характер.

Теорема 2.3.1. Если τ – несчетный кардинал, то пространство $I_3^0(\alpha N_\tau)$ не нормально.

Наконец, сформулируем основной результат параграфа.

Следствие 2.3.1. Пусть X – компакт и $n \geq 3$. Если пространство $I_n(X) \setminus X$ наследственно нормально, то компакт X метризуем.

Четвёртый параграф главы посвящен Z-множествам пространства $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер. Следующие две теоремы представляют основных достижений параграфа.

Теорема 2.4.1. Для произвольного непустого замкнутого подмножества A компакта X, где $A \neq X$, подпространство $I(A)$ есть Z-множество в $I(X)$.

Теорема 2.4.2. Для произвольного компакта X и каждого натурального $n \in \mathbb{N}$, $n < |X|$, подпространство $I_n(X)$ является Z-множеством в $I(X)$. Следовательно, $I_\omega(X)$ является σ-Z-множеством в $I(X)$.

Третья глава диссертации под названием «**О бесконечных итерациях функтора идемпотентных вероятностных мер**» состоит из двух параграфов.

В этой главе устанавливаем, что функтор идемпотентных вероятностных мер, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений, является совершенно метризуемым.

Первый параграф, названный **«Пространство идемпотентных вероятностных мер и гильбертов куб»**, излагает ряд геометрических свойств пространства идемпотентных вероятностей мер, в частности, в нём доказывается, что для произвольного бесконечного компакта X пространство $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер гомомеорфно Гильбертову кубу Q.

Рассмотрим метрику $d(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} |y_i - x_i|$ на Q. Для непрерывных отображений f, $g : Q \to Q$ положим

$$d(f, g) = \max\{d(f(x), g(x)) : x \in Q\}.$$

Определение 3.1.1. Подмножество B гильбертова куба Q называется граничным множеством, если оно удовлетворяет условиям:

1) для всякого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $\eta : Q \to Q \setminus B$, такое, что $d(\eta, id) < \varepsilon$;
2) дополнение $Q \setminus B$ гомеоморфно гильбертову пространству l_2.

Эквивалентное определение. Всюду плотное в Q σ-Z-множество B называется граничным множеством в Q, если $Q \setminus B \cong l_2$.

Граничное множество гильбертова куба Q обозначают так: $B(Q)$.

Определение 3.1.2. Пусть $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ – башня подмножеств X. Система множеств $\{X_n\}$ называется сильно универсальной башней для компактов (соответственно, для конечномерных компактов), если для

1) любого компакта (соответственно, для любого конечномерного компакта) A,
2) любого непрерывного отображения $f : A \to X$,

3) любого замкнутого подмножества $B \subset A$ такого, что $f\big|_B : B \to X_m$ – вложение для некоторого m;
4) и любого $\varepsilon > 0$ существует вложение $h : A \to X_n$ для некоторого $n \geq m$, такое, что $f\big|_B = h\big|_B$ и $d(f,h) < \varepsilon$.

Множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_n$ называется скелетоидом для компактов (соответственно, для конечномерных компактов).

Если в этом определении для каждого $n \in \mathbb{N}$, множество X_n есть Z-множество в X, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_n$ называется Z-скелетоидом для компактов (соответственно, для конечномерных компактов).

Далее, в этом определении, если X есть $ANR(\mathcal{M})$ пространство, то само пространство X называется сильно универсальным для произвольных компактов (соответственно, для конечномерных компактов).

Определение 3.1.3. Пусть X и Y – топологические пространства, $A \subset X$, $B \subset Y$. Говорят, что пара (X, A) гомеоморфна паре (Y, B), если существует гомеоморфизм $f : X \to Y$ такой, что $f(X) = Y$ и $f(A) = B$. При этом используют обозначение $(X, A) \approx (Y, B)$.

Теорема 3.1.1. Пусть X – бесконечный метризуемый компакт, а $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ – замкнутые подмножества в X, такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ всюду плотно в X и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \neq X$. Тогда имеет место $\left(I(X), \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I(A_i) \right) \approx (Q, B(Q))$.

Следствие 3.1.1. Пусть X – бесконечный метризуемый компакт, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ – замкнутые подмножества в X, такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ всюду плотно в X и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \neq X$. Тогда имеем $I(X) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I(A_i) \approx l_2$.

Из теорем 2.4.2 и 3.1.1 обнаружим, что справедливо

Следствие 3.1.2. Для произвольного бесконечного компакта X пара $(I(X), I_\omega(X))$ гомеоморфна паре $(Q, B(Q))$.

Для, функтора I, компакта X, непустого множества $A \subset X$ положим

$$S_I(A) = \{\mu \in I(X) : \operatorname{supp} \mu \cap A \neq \varnothing\}.$$

Следующий результат является одним из основных результатов параграфа.

Теорема 3.1.2. Пространства $S_I(BdQ)$, $S_I(S)$ и $I(BdQ)$ содержат скелетоид для компактов.

Основные результаты второго параграфа «**Итерация и метризация функтора идемпотентных вероятностных мер**».

В этом параграфе мы проверим, что функтор I является равномерно метризуемым. Для каждого компактного хаусдорфова пространства X

отображение $\delta_X : X \to I(X)$, определяемое как $\delta_X(x) = 0 \odot \delta_x$, $x \in X$, является вложением. Семейство $\eta = \{\delta_X : X \in Comp\}$ является естественным преобразованием. Положим

$$I^0(X) = X\,,\; I^k(X) = I\left(I^{k-1}(X)\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad \text{и}$$

$$\delta_{n-1,n} = \delta_{I^{n-1}(X)} : I^{n-1}(X) \to I^n(X)\,.$$

Возникает следующая прямая последовательность

$$X \xrightarrow{\delta_{0,1}} I(X) \xrightarrow{\delta_{1,2}} \ldots \xrightarrow{\delta_{n-1,n}} I^n(X) \xrightarrow{\delta_{n,n+1}} I^{n+1}(X) \xrightarrow{\delta_{n+1,n+2}} \ldots\,. \qquad (3.2.1)$$

Зафиксируем метрику ρ на компакте X и рассмотрим метризацию $\rho_1 = \rho_I$, определяемую равенством

$$\rho_1(\mu_1, \mu_2) = \lim_{n\to\infty} \rho_\omega\left(\mu_{1n},\, \mu_{2n}\right), \qquad \mu_1, \mu_2 \in I(X)\,, \qquad (3.2.2)$$

где $\{\mu_{in}\} \subset I_\omega(X)$ – последовательности, сходящиеся к μ_i, $i = 1, 2$. Здесь

$$\rho_\omega(\nu_1, \nu_2) = \inf\left\{ \frac{\sum\limits_{(x,y)\in \operatorname{supp}\xi} e^{\lambda_1(x)+\lambda_2(y)} \cdot \rho(x, y)}{\sum\limits_{x\in \operatorname{supp}\nu_1} e^{\lambda_1(x)} \cdot \sum\limits_{y\in \operatorname{supp}\nu_2} e^{\lambda_2(y)}} :\; \xi \in \Lambda_{12} \right\},$$

где $\nu_i = \bigoplus\limits_{j=1}^{n_i} \lambda_j(x) \odot \delta_x \in I_\omega(X)$, $i = 1, 2$,

$$\Lambda_{12} = \Lambda(\nu_1, \nu_2) = \left\{\xi \in I(X^2) :\; I(\pi_i)(\xi) = \nu_i,\; i = 1, 2\right\},$$

а $\pi_i : X \times X \to X$ – проектирование i-сомножитель.

Метрику на $I^n(X)$, порожденную этой метризацией, обозначим ρ_n.

Лемма 3.2.1. Пусть X – компакт с метрикой ρ. Тогда $\delta_X : (X, \rho) \to (I(X), \rho_1)$ – изометрия.

Лемма 3.2.2. Пусть (X_1, ρ^1), (X_2, ρ^2) – компакты. Тогда для каждого изометрического вложения $i : (X_1, \rho^1) \to (X_2, \rho^2)$ отображение $I(i) : (I(X_1),\, \rho_1^1) \to (I(X_2),\, \rho_1^2)$ также является изометрическим вложением.

Лемма 3.2.3. Для любой метрики ρ на компакте X справедливо равенство

$$\operatorname{diam}(X, \rho) = \operatorname{diam}(I(X), \rho_1).$$

Считая пока $I^+(X)$ как предел (3.2.1) в категории множеств, предел вложений $\delta_{n,m} = I^n(X) \to I^m(X)$ при $m \to \infty$ обозначим через $\delta_n : I^n(X) \to I^+(X)$. Тогда

$$I^+(X) = \bigcup\{\delta_n(I^n(X)) : n \in N\},$$

и метрика ρ_+ определяется по метрике ρ_n на слагаемых $\delta_n(I^n(X))$, т. е. для $x, y \in I^+(X)$ имеем

$$\rho_+(x,y) = \rho_n(a,b) \tag{3.2.3}$$

где $\delta_n(a) = x$, $\delta_n(b) = y$.

Следующие два утверждения могут быть перечислены в качестве основных результатов параграфа.

Теорема 3.2.1. Функтор I метризуем.

Теорема 3.2.2. Функтор I идемпотентных вероятностных мер равномерно метризуем. Точнее, для метризации, введенной формулой (3.2.2), и для любого непрерывного отображения $f:(X_1,\rho^1) \to (X_2,\rho^2)$ отображение

$$I^+(f):(I^+(X_1),\, \rho^1_+) \to (I^+(X_2),\, \rho^2_+)$$

является равномерно непрерывным.

Рассмотрим теперь систему $\psi = \{\psi_X : X \in Comp\}$. Система ψ состоит из всех отображений $\psi_X : I^2(X) \to I(X)$, действующих следующим образом. Для функтора I отображение $\psi_X : I^2(X) \to I(X)$ определяется по формуле $\psi_X(M)(\varphi) = M(\tilde{\varphi})$, где $M \in I^2(X)$, $\varphi \in C(X)$, и $\tilde{\varphi}: I(X) \to R$ является непрерывной функцией, определяемой как $\tilde{\varphi}(\mu) = \mu(\varphi)$, $\mu \in I(X)$.

Зафиксируем компакт X, и для натурального n положим

$$\psi_{n+1,n} = \psi_{I^{n-1}(X)} : I^{n+1}(X) \to I^n(X).$$

Отметим, что

$$\psi_{n+1,n} \circ \delta_{n,n+1} = id_{I^n(X)}.$$

Для всякого компакта X и функтора I возникает следующая обратная последовательность

$$I(X) \xleftarrow{\psi_{2,1}} I^2(X) \xleftarrow{\psi_{3,2}} \ldots \xleftarrow{\psi_{n,n-1}} I^n(X) \xleftarrow{\psi_{n+1,n}} \ldots\ .$$

Следующий результат играет важный роль в теории ковариантных функторов.

Теорема 3.2.3. Функтор I совершенно метризуем.

Из установленных выше результатов диссертации и результатов работы В. В. Федорчука, получим основное утверждение главы.

Теорема 3.2.4. Для каждого компакта X, содержащего более одной точки, тройка $\left(I^\omega(X),\, \theta(I^{++}(X)),\, \theta(I^+(X))\right)$ гомеоморфна тройке $\left(Q,\, s,\, \operatorname{rint} Q\right)$.

Здесь

$I^+(X)$ – предел множеств в прямой последовательности,

$I^{++}(X)$ – пополнение метрического пространства $I^+(X)$,

$I^{\omega}\left(X\right)$ – предел множеств в обратной последовательности,

$\theta_n : I^{+}\left(X\right) \to I^{n}\left(X\right)$ – естественное проектирование,

$\overline{\theta}_n : I^{++}\left(X\right) \to I^{n}\left(X\right)$ – его расширение,

$\theta = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\theta}_n : I^{++}\left(X\right) \to I^{\omega}\left(X\right)$ – предел отображений $\overline{\theta}_n$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследовано геометрические и топологические свойства пространства идемпотентных вероятностных мер на компактных хаусдорфовых пространствах. Для решения поставленных задач изучены топологические и геометрические свойства пространства $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер. Введена в это пространство метрика, порождающая топологию поточечной сходимости. С помощью этой метрики построены прямая и обратная последовательности пространств, получающиеся повторным применением, т. е. итерацией функтора I. Установлено, что функтора I является совершенно метризуемым.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1) Показано, что для метризуемых компактов пространства идемпотентных вероятностных мер и вероятностных мер гомеоморфны.

2) Построен пример, показывающий, что функторы взятия пространства идемпотентных вероятностных мер и пространства вероятностных мер отличаются друг от друга даже на конечных множествах.

3) Предложен критерий метризуемости компактных хаусдорфовых пространств на языке функтора идемпотентных вероятностных мер.

4) Построены Z-множества пространства идемпотентных вероятностных мер.

5) Построены бесконечные прямая и обратные итерации функтора идемпотентных вероятностных мер.

6) Установлены ряд геометрические свойства пространства идемпотентных вероятностных мер, в частности, доказано, что для произвольного бесконечного компакта X пространство $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер гомеоморфен гильбертову кубу Q.

7) Установлена совершенная метризуемость функтора идемпотентных вероятностных мер.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

INSTITUT OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKY AT THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

KHOLTURAEV KHOLSAID FAYZULLAYEVICH

INFINITE ITERATIONS OF THE FUNCTOR OF IDEMPOTENT PROBABILITY MEASURES

01.01.04 – Geometry and Topology

ABSTRACT
of dissertation of the doctor of philosophy (PhD) on
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.2.PhD/FM15

The dissertation has been prepared at the Institute of Mathematics named after I.V.Romanovsky

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Zaitov Adilbek Atakhanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Narmanov Abdigappar Yakubovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Zhiemuratov Rzamurat Esbergenovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent
Leading organization:	**Tashkent state pedagogical university named after Nizami**

Defense will take place «____» _____________2022 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 227-12-24, fax: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2022 year

(Mailing report № ___________on «____» _______________2022 year)

A. Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D. F.-M. S., Academician

N. K. Mamadaliyev
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

A. Ya. Narmanov
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D. F.-M. S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to get geometrical and topological properties of the space of idempotent probability measures on compact Hausdorff spaces.

The research object: the functor of idempotent probability measures, and its metrization and iteration.

The research subject: General Topology, Functor Theory, Idempotent Analysis.

Research methods: In the thesis were applied methods of General Topology, Functor Theory and Idempotent Analysis.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

it is shown that for compact metrizable spaces, the spaces of idempotent probability measures and probability measures are homeomorphic;

an example has been built showing that functors of idempotent probability measures and of probability measures differ from each other even on finite sets;

it is offered a criterion for the metrizability of compact Hausdorff spaces in the sense of the functor of idempotent probability measures;

the perfect metrizability of the functor of idempotent probability measures is established;

direct and inverse infinite iterations of the functor of idempotent probability measures on the category of metrizable compacta are constructed.

Implementation of the research results. The results obtained in the process of the dissertation are implemented in the following areas:

The homeomorphism of the spaces of idempotent probability measures and probability measures on compact metrizable spaces, as well as the perfect metrizability of the functor of idempotent probability measures established in the dissertation, were used as a theoretical justification for the project within the framework of scientific research under the State grant OT-F4-42 "Topological and cardinal properties of space of semi-additive τ-smooth functionals" (Certificate no. 04-11-2822 of National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, May 17, 2022). The results of the dissertation are applied in the study of categorical, topological, geometric and cardinal properties of the functor of semi-additive τ-smooth functionals.

The geometric and topological properties of the space of idempotent probability measures and of such measures were used in research on various areas of the economy, in particular, in the project PZ-20170929173 "Optimization of housing stock management systems in Uzbekistan (on the example of Tashkent)" (Certificate no. 89-05-21 of Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan, April 29, 2022). The results of the dissertation gave possibility to solve the problems that arose in the analysis of optimization and optimal management issues within the framework of the grant.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an Introduction, three chapters, Conclusion and Bibliography. The volume of the thesis is 72 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Холтураев Х.Ф. О Z-множествах пространства идемпотентных вероятностных мер // Математические заметки. Том 111. Выпуск 6. – М., 2022. – С. 904-920. DOI https://doi.org/10.4213/mzm13342 (3. Scopus, Cite Score IF=0,72).

2. Kholturaev Kh.F. Geometrical properties of the space of idempotent probability measures // Applied General Topology, 2021. Vol 22. – № 2. – P. 399-415. DOI https://doi.org/10.4995/agt.2021.15101 (3. Scopus, Cite Score IF=0,64).

3. Холтураев Х.Ф. Скелетоиды для компактов пространства идемпотентных вероятностных мер // Бюллетень Института математики, 2020. ISSN 2181-9483. – № 4. – С. 120-127 (01.00.00. № 6).

4. Холтураев Х.Ф. Об одном критерии метризуемости компактов и функтор идемпотентных вероятностных мер // Бюллетень Института математики, 2020. ISSN 2181-9483. – № 6. – С. 59-64 (01.00.00. № 6).

5. Заитов А.А., Холтураев Х.Ф. О гомеоморфности пространства идемпотентных вероятностных мер и Гильбертова куба // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, 2015. – № 3. – С. 5-7 (01.00.00. № 7).

6. Заитов А.А., Холтураев Х.Ф. О взаимосвязи функторов P вероятностных мер и I идемпотентных вероятностных мер // Узбекский математический журнал, 2014. – № 4. – С. 36-45 (01.00.00. № 6).

II бўлим (2 часть; part 2)

7. Kholturayev Kh.F. Perfect metrizability of the functor of idempotent measures / International Online Conference. Algebraic and Geometric Methods of Analysis. – Odessa, Ukraine, 2021. May 25-28. – P. 75-76.

8. Холтураев Х.Ф. Равномерная метризуемость функтора идемпотентных вероятностных мер / National University of Uzbekistan, Holon Institute of Technology of Israel. Abstracts of the international online conference. Frontier in mathematics and computer science. – Tashkent, 2020. October 12-15. – P. 124.

9. Kholturaev Kh.F. On Z-sets of the space of idempotent probability measures / STEMM abstracts of Uzbek-Israel joint International conference. Science-Technology-Education-Mathematics-Medicine. – Bukhara-Samarkand-Tashkent, 2019. May 13-17. – P. 85-86.

10. Kholturaev Kh.F. On Max-plus-Milutin spaces / Abstracts of the International Conference “Modern Problems of Geometry and Topology and Their Applications”. – Tashkent, Uzbekistan, 2019. November 21-23. – P. 53-54.

11. Заитов А.А., Холтураев Х.Ф. Функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и метризуемость компактов /

Internatonal scientific conference “Algebraic and geometric methods of analysis”. Book of abstracts. – Odessa, Ukraine, 2018. May 30 – June 4. – P. 100-101.

12. Заитов А.А., Холтураев Х.Ф. О подмножествах пространства идемпотентных вероятностных мер и абсолютные ретракты / Материалы Международной конференции “Топологическая алгебра и теоретико-множественная топология”, посвящённая 80-летию профессора А.В.Архангельского. – Москва, 2018. 23-28 август. – С. 74-76.

13. Заитов А.А., Холтураев Х.Ф. Структура некоторых подмножеств пространства идемпотентных вероятностных мер / Материалы Международной конференции “Топологическая алгебра и теоретико-множественная топология”, посвящённая 80-летию профессора А.В.Архангельского. – Москва, 2018. 23-28 август. – С. 85-87.

14. Заитов А.А., Холтураев Х.Ф. Скелетоиды для компактов пространства идемпотентных вероятностных мер / “Mathematical analysis and its application to mathematical physics” International scientific conference. – Samarkand, Uzbekistan, 2018. September 17-20. Part II. – P. 97-99.

15. Холтураев Х.Ф. О псевдометрике на пространстве идемпотентных вероятностных мер / Тезисы докладов Международной научной конференции “Алгебра, анализ и квантовая вероятность”. – Ташкент, 2015. 10-12 сентября. – С. 84-86.

16. Zaitov A.A., Kholturaev Kh.F. On perfect metrizability of the functor of idempotent probability measures / The V Congress of Turkic World Mathematicians. – Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan, 2014. June 5-7. – P. 233.

17. Zaitov A.A., Kholturaev Kh.F. On connection between functors P and I / Материалы Международной конференция “Applied and geometrical analysis”. – Samarkand, Uzbekistan, 2014. September 22-25. – P. 29-30.

18. Zaitov A.A., Kholturayev Kh.F. On a base of the space of idempotent probability measures / “Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар” мавзусидаги Республика миқёсидаги илмий онлайн конференция материаллари тўплами. – Термиз, 2020. 21-23 октябрь. – Б. 44-47.

19. Заитов А.А., Холтураев Х.Ф. Z-подмножества пространства идемпотентных вероятностных мер / Тезисы докладов Республиканской научной конференции “Проблемы современной топологии и её приложения”. – Ташкент, 2018. 11-12 сентября. – С. 132-133.

20. Заитов А.А., Холтураев Х.Ф. $\max$-plus-выпуклое подмножество пространства идемпотентных вероятностных мер, являющееся G_δ-множеством / Тезисы докладов Республиканской научной конференции “Проблемы современной топологии и её приложения”. – Ташкент, 2018. 11-12 сентября. – С. 132-133.

21. Холтураев Х.Ф. Естественная равномерная структура на пространстве вероятностных мер с компактными носителями / Turin Polytechnic university in Tashkent. Abstracts of the Republic scientific conference with participation foreign scientists. Modern problems of dynamical systems and their applications. – Tashkent, 2017. May 1-3. – P. 257-258.

22. Заитов А.А., Холтураев Х.Ф. Max-plus version of Fubini theorem. / Материалы Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ “Актуальные вопросы Геометрии и её приложения”. – Ташкент, 2014. 27-28 октября. – С. 102-106.

23. Холтураев Х.Ф. Об аффинном представлении идемпотентных вероятностных мер / Материалы Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ “Современные проблемы дифференциалных уравнений и их приложения”. – Ташкент, 2013. 21-23 ноября. – С. 333-336.

24. Холтураев Х.Ф. On perfect metrizability of the functor of idempotent probability measures / Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Операторные алгебры и смежные проблемы”. – Ташкент, 2012. 12-14 сентября. – С. 35-37.

Автореферат "ЎзМУ хабарлари" журнали таҳририятида
таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Бичими: 84x60 ^{1}/16. "Times New Roman" гарнитураси.
Рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи: 2.75. Адади: 100 дона. Буюртма: №

Гувоҳнома №
"Tipograff" МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.