ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.19.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ИСМОИЛОВ ШЕРЗОДБЕК ШОКИРЖОН ЎҒЛИ

ИЗОТРОП ФАЗОДА СИРТЛАР НАЗАРИЯСИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022 йил

УДК: 514.125+514.127

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.19.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ИСМОИЛОВ ШЕРЗОДБЕК ШОКИРЖОН ЎҒЛИ

ИЗОТРОП ФАЗОДА СИРТЛАР НАЗАРИЯСИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.3.PhD/FM750 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Артикбаев Абдуллаазиз** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Тужилин Алексей Августинович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Заитов Адилбек Атаханович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Низомий номидаги Тошкент давлат педагогика университети**

Диссертация ҳимояси Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.3/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99878) 227-12-24, факс: (+99878) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99878) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2022 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2022 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К. Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

А.Я.Нарманов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д.

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда ярим евклид фазода замонавий геометрия масалаларини тадқиқ қилишга келтирилади. Ярим евклид фазоларидан бўлган изотроп фазо ўз-ўзига қўшма эканлигидан, сиртларнинг геометрик характеристикаларини тадқиқ қилиш ва қўшма акслантиришда сақланувчи инвариантларни аниқлаш муҳим аҳамиятга эга. Изотроп фазо геометрияси физиканинг нисбийлик назарияси ва квант механикаси бўлимларининг масалаларини ҳал қилишда муҳим рол ўйнайди. Шунинг учун изотроп фазода чизиқ ва сиртлар геометрик характеристикаларга доир олинган натижалар ҳам назарий, ҳам тадбиқий жиҳатдан аҳамиятли ва замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан ҳисобланади.

Ҳозирги кунда жаҳонда изотроп фазонинг чизиқ ва сиртни дифференциал инвариантларини, изотроплик ҳосил қилган ҳоллари геометриясини, сиртлар назариясини, аввалдан берилган катталикларга кўра сиртни тенгламасини топиш масалаларини тадқиқ қилиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: изотроп фазо харакатидан ҳосил бўладиган геометрик инвариантларни топиш, мертика ажралган холда сиртларнинг дифференциал характеристикалари аниқлаш, берилган геометрик характеристикалари бўйича чизиқ ва сиртларни тиклаш, махсус олинган метрикага боғлиқ классик масалаларини тадқиқ этиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда, айниқса кейинги йилларда фундаментал фанлар, жумладан илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган геометрия ва топологиянинг замонавий йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, сўнгги йилларда ноевклид фазолар геометриясида сиртлар назарияси масалаларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Галилей, изотроп ва Минковиский фазоларида чизиқ ва сиртларнинг берилган геомерик характеристикага эга бўлган сирт ёки чизиқларнинг мавжудлик ва ягоналигига доир салмоқли натижаларга эришилди. Математика фанларининг устувор йўналишлари ҳисобланган “алгебра ва функционал анализ, дифференциал тенгламалар ва математик физика, динамик системалар назарияси, геометрия ва топология, эҳтимоллар назарияси, ва математик моделлаштириш” ихтисосликлар бўйича илмий тадқиқотларни халқаро стандартлар даражасида олиб боришнинг асосий вазифалари ва йўналишлари этиб белгиланди[1]. Бу борада дифференциал тенгламалар, комплекс анализ, геометрия ва топология масалаларини хал этишда изотроп фазода сиртлар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги № ПФ-4947 “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантриш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисидаги” Фармони, 2017 йил 17 февралдаги № ПК-2789-сон

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

«Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги № ПҚ-3682 "Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисидаги"ги, 2019 йил 9 июлдаги № ПҚ-4387 "Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, ЎзР ФА В.И. Романовский номидаги математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Изотроп фазонинг геометрияси мажруҳ матрикали фазо геометриясига ҳосдир. Дастлаб изотроп фазо геометриясига оид ишлар XX асрнинг бошларида пайдо бўлган. Б.А.Розенфельднинг монографиясида псевдоевклид фазо ва яримевклид фазо геометрияси, яъни мажрух метрикали фазоларнинг таърифлари берилган. Уч ўлчовли изотроп фазода эгри чизиқ ва сиртлар геометрияси К. Штурбекер томонидан ўрганилган. Изотроп фазо яримевклид фазоларидан хисобланади. А.Артикбаев ва Д.Д.Соколовларнинг монографияси тадқиқотларининг бир қисмида яримевклид фазода сиртни берилган ташқи эгрилигига кўра тиклаш масаласини хал қилинган.

Изотроп фазода чизиқ ва сиртлар назариясини Х.Сачс, Б. Павковис, Д. Палман, И.Каменарович, Х.Браунер каби олимлар томонидан тадқиқ этилган. М.С.Лоне ва М.К.Карасенлар тўла ва ўрта эгрилиги ўзгармас бўлганда ёки минимал бўлган кўчирма сиртларни мавжудлиги масаласини кўришган. М.Айдин ва М.Эргутлар ишларида изотроп фазода сиртни тўла эгрилиги берилганда бир жинсли тенглама билан аниқланувчи сиртни топиш масаласини, иқтисодиётдаги ишлаб чиқариш функциясини топиш масаласи ўртасида ўзаро боғлиқлик борлиги кўрстилган. Ўзбекистонда яримевклид фазо геометрияси билан А.Артикбаев, Э.К. Курбанов, Б.М.Султоновлар томонидан илмий изланишлар олиб борилган, аммо уларнинг ишлари Галилей геометриясига бағишланган, Галилей геометрияси изотроп фазонинг геометриясидан фарқ қилади.

Маълумки изотроп фазода сиртнинг хар бир нуқтасида иккита нормал вектор мавжутлиги К. Штурбекер томонидан айтилан. Бу нормал векторларга боғлиқ аниқланган геометрик катталиклар хам ўзаро фарқ қилади, лекин улар ўртасида ўзаро боғлиқлик бўлиши керак. Аммо, иккита нормалга мос сиртнинг геометрик характеристикалари ўртасида ўзаро мослик аниқланмаган. Бундан ташқари сиртни ихтиёрий тўла эгрилиги берилганда сиртни тиклаш масаласи фақат ҳусусий ҳоллардагина ҳал этилган, умумий холда ечилмаган. Ушбу диссертацияда кўрилган сиртни ўрта эгрилигини иккита нормал бўйича топилганда ўзаро тенг бўлиши, сиртнинг ташқи, шартли ташқи ва тўла эгрилиги бўйича ситрни мавжутлиги, сиртни ихтиёрий тўла ва ўрта эгрилик функцияси берилганда сирт тенгламасини топиш масаласи жуда муҳим бўлсада, бу масала ҳанузгача атрофлича тадқиқ этилмаган. Бу бизнинг мавзумизнинг долзарблигини белгилайди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг МРУ-10/2017 “Бошқарув ва дифференциал ўйинлар назариясини ривожлантиришнинг геометрик ва аналитик усулларини ишлаб чиқиш” ва МРУ-ОТ-9/2017 “Кўп ўлчовли комплекс анализ” мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқот мақсади изотроп фазода сиртлар назариясини ўрганиш ва қўшма сиртнинг геометрик характеристикалари билан боғлиқ тўла геометрия масалаларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқот вазифалари:

кўп ўлчовли изотроп фазода чизиқ ва сиртлар геометрик характеристикаларини топиш;

изотроп сферага нисбатан қўшма сиртни аниқлаш;

махсус нормал ва Евклид нормал аналоги ёрдамида аниқланган қўшма сиртнинг геометрик характеристикалари ўртасида ўзаро боғлиқликни аниқлаш;

изотроп фазосида берилган дифференциал характеристикаларга кўра сиртларни мавжудлик масаласини ечиш.

Тадқиқот объектини изотроп фазосида сиртлар, сиртларнинг дифференциал характеристикалари, изотроп фазосининг ҳаракати, изотроп сферага нисбатан қўшма сирт ташкил этади.

Тадқиқот предметини фазонинг мажрух метрикаси, сирт нуқтаси атрофидаги соҳа, қўшма сирт, изотроп фазода сиртнинг тўла ва ўрта эгрилиглари ташкил этади.

Тадқиқот усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, дифференциал геометрия, дифференциал тенгламалар, функционал анализ ва топологиянинг замонавий усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

кўп ўлчамли изотроп фазо чизиқ ва сиртлар геометрик характеристикалари махсус нормал ва евклид нормал аналоги орқали аниқланган ва ҳисоблаш формулаларини махсус нормалдан фойдаланилган холда топилган;

изотроп сферани кесувчи текисликка нуқтани мос қўйиш орқали қўшмалик аниқланиб, бу қўшмалик ёрдамида сфера ичида жойлашган сиртга, сферага нисбатан қўшма сирт тенгламаси топилган;

қўшма сиртнинг тўла эгрилигининг берилган сиртнинг тўла эгрилигига кўпайтмаси бирга тенг эканлиги, махсус нормал ва Евклид нормал аналоги ёрдамида аниқланган қўшма сиртнинг ўрта эгрилигиклари ўзаро тенг эканлиги исботланган;

сиртнинг ташқи эгрилиги, шартли ташқи эгрилиги ва тўла эгрилиги бўйича сиртнинг мавжудлик масалалари ўзаро эквивалент эканлиги ҳақидаги теорема исботланган ва берилган геометрик характеристикаларига кўра сиртларнинг ошкор тенгламалари топилган.

Тадқиқотларнинг амалий натижалари изотроп фазода сиртлар назариясини тадқиқ қилиш натижалари дифференциал тенламаларнинг замонавий масаласи бўлган Монж-Ампер тенгламасини ечишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Дифференциал геометрия, дифференциал тенгламалар, дифференциал топология ва функционал анализнинг усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқотнинг илмий аҳамияти изотроп фазодаги сиртнинг ташқи эгрилиги, шартли ташқи эгрилиги ва тўла эгрилиги бўйича сиртнинг мавжудлик масалалари ўзаро эквивалент эканлиги исботлашда қўлланилгани билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти изотроп фазода сиртларнинг геометрик характеристикалари ва бу фазонинг ҳаракати тадқиқ қилиниши, олинган натижаларни дифференциал тенгламалар, комплекс анализда ва айрим тўла геометрия масалаларининг ечимини физик масалаларига қўлланилиши мумкинлиги билан изохланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Изотроп фазода сиртлар назарияси бўйича олинган натижалар асосида:

Изотроп фазосида сферага нисбатан қўшма акслантириш, бу акслантириш ёрдамида хосил бўлган сирт ва унинг геометрик характеристикаларига доир натижалар ФЗМВ-20160914085438 “Яримўтказгичли қоришмалар ва кучли лигерланган яримўтказгичлар энергетик спектрларини тад-қиқ қилиш” мавзусидаги фундаментал лойиҳасининг физик жараёнларда энергияни минималлаштириш масаласини ечишда қўлланилган (Наманган муҳандислик технология институтининг 2022 йил 16 сентабрдаги № 1927-024 рақамли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши изотроп фазонинг қўшма акслантиришидан фойдаланилган холатда Лагранж функциясидан гамильтониан функцияга ўтиб энергияни минималлаштириш масаласини ҳал қилиш имконини берган;

Изотроп фазода харакатини аниқловчи носимеметрик матрицалар тасирида сақланувчи сиртнинг геометрик характеристикалари бўйича олинган натижалар ОТ-Ф4-04(05)-сонли шартномага асосан бажарилган “Спектрал усулни матрицавий ночизиқли эволюцион тенгламаларни ечишга татбиқлари; Юрак-қон томир тизими биомеханикаси” мавзусидаги фундаментал лойиҳасининг матрицавий ночизиқли эволюцион тенгла-маларни ечишда қўлланилган (Урганч Давлат Унверситетининг 2022 йил 5 сентабрдаги 04-

196/10 рақамли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ноортоганал ва носимметрик матрицалар билан боғлиқ бўлган ночизиқли тенгламалар, изотроп фазонинг харакати ва бу фазога тегишли сиртларнинг хоссаларини ифода этувчи тўла эгрилик, нормал эгрилик, хамда мусбат аниқланмаган метрикаларга боғлиқ эканлиги ночизиқли дифференциал тенгламаларини ечишга, ечим хоссаларини геометрик усулда аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 14 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан, 8 та халқаро ва 6 та республика, илмий-амалий анжуманларда муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 21 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 91 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Изотроп фазодаги асосий тушунчалар”** деб номланувчи биринчи боби учта параграфдан иборат. Диссертациянинг ушбу бобида изотроп фазо, сиртлар назарияси, ва изотроп фазода сиртнинг асосий геометрик характеристикалари хақида асосий тушунчалар берилган. Бундан ташқари, баъзи олинган натижалар исботлари билан тақдим этилган.

A_{n+1} аффин фазосида $Ox_i\ (i=1...n+1)$ координаталар системаси бўлсин. $\vec{X}(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ ва $\vec{Y}(y_1,y_2,...,y_{n+1})$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги формула бўйича аниқлансин

$$(\vec{X},\vec{Y})=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \text{если } \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\neq 0\\ x_{n+1}y_{n+1} & \text{если } \sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0\end{cases} \tag{1.1.1}$$

Таъриф 1.1.4. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси (1.1.1) формула билан аниқланган A_{n+1} аффин фазо R^n_{n+1} изотроп фазо дейилади.
(1.1.1) скаляр кўпайтма мажрух скаляр кўпайтма дейилади.

Тасдиқ 1.1.1. R^n_{n+1} изотроп фазоси $(n+2)-$ўлчовли ${}^1R_{n+2}$ Минковский фазосининг қисм фазоси бўлади .

R^n_{n+1} фазода A ва B нуқталар орасидаги масофа қуйидаги формула бўйича хисобланади

$$|AB|=\begin{cases} |AB|_1=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2} & \text{если } \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}\neq 0 \\ |AB|_2=|y_{n+1}-x_{n+1}| & \text{если } x_i=y_i \quad (i=\overline{1..n}) \end{cases} \qquad (1.1.2)$$

Изотроп фазо аффин фазоси бўлганлиги учун (1.1.2) формула билан аниқланган масофани сақловчи аффин алмаштириши мавжуд. Бу алмаштириш R^n_{n+1} изотроп фазонинг харакати деб аталади ва ушбу формула билан берилади:

$$X'=A\cdot X+B \qquad A=\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 0\\ & A_E & & & \vdots\\ & & & & 0\\ \hline h_1 & h_2 & \dots\ h_{n-1} & h_n & 1\end{array}\right). \qquad (1.1.3)$$

бу ерда $A_E=(a_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ - R_n евклид фазо харакат матрицаси, $B^T=\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{n+1}\end{pmatrix}$ вектор бўйича параллел кўчириш ва $\begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n & 1\end{pmatrix}$ координата бўйича сирпантириш.

R^n_{n+1} да қуйидаги вектор тенглама билан берилган регуляр сиртни қарайлик

$$\vec{r}(u_1,u_2,...,u_n)=\left(x_i(u_1,u_2,...,u_n)\,|\,(u_1,u_2,...,u_n)\in D\subset R_n,\ i=\overline{1.(n+1)}\right). \qquad (1.2.6)$$

Сиртнинг биринчи квадратик формасини қуйидагича аниқлаймиз:

$$I_1=dr^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}du_idu_j \qquad (1.2.8)$$

бу ерда g_{ij} - биринчи квадратик форма коэффициенти ва $g_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_j}$ ифода билан хисобланади. Агар $d\vec{r}-$вектор Ox_{n+1} ўқига параллел бўлиб қолса, биринчи квадратик форма $I_1=0$ бўлади. Бунда қўшимча биринчи квадратик форма аниқланади

$$I_2=dr^2=dx_{n+1}. \qquad (1.2.9)$$

Икки векторнинг (1.1.1) скаляр кўпайтмасининг биринчи қисми нолга тенг бўлса, бу икки вектор отрогонал дейилади. Ox_{n+1} ўқи бўйича йўналган

$\vec{e}_{n+1}$ – вектор, R_{n+1}^n фазодаги барча Ox_{n+1} ўқига параллел бўлмаган векторларга ортогонал бўлади.

Шининг учун $\overrightarrow{n_m} = \vec{e}_{n+1}$ вектор барча текисликлар учун нормал вектор бўлади. Бундан келиб чиқадики (1.2.7) сиртнинг урунма текислигининг нормали $\overrightarrow{n_m}$ вектор билан мос тушади. Бу $\overrightarrow{n_m}$ векторни махсус нормал деб атаймиз.

Баъзи масалаларни хал қилишда қулайлик учун сиртнинг нормалини қуйидагича аниқлаймиз

$$\vec{n} = \frac{[\overrightarrow{r_{u_1}}, \overrightarrow{r_{u_2}}, ..., \overrightarrow{r_{u_n}}]}{\left|[\overrightarrow{r_{u_1}}, \overrightarrow{r_{u_2}}, ..., \overrightarrow{r_{u_n}}]\right|}. \qquad (1.2.10)$$

Бу нормал Евклид нормалини аналогидир.

Евклид фазоси каби сиртнинг иккинчи квадратик формасини иккинчи тартибли дифференсиал $d^2\vec{r}$ ни нормал векторга скаляр кўпайтмаси сифатида аниқланади. Биз сиртнинг иккита нормали $\vec{n}$ – нормал ва $\overrightarrow{n_m}$ – махсус нормалларни қараётганлигимиз сабабли иккинчи квадратик форма нормал векторга боғлиқ равишда қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$II = (d^2\vec{r}, \vec{N}) = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} du_i du_j , \qquad (1.2.11)$$

бу ерда $D_{ij} = (r_{u_i u_j}, n)$ иккинчи квадратик форма коэффициенти, у қуйидагича хисобланади:

1. Агар $\vec{N} = \overrightarrow{n_m}$ бўлса, $D_{ij} = \dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial u_i \partial u_j}$,
2. Агар $\vec{N} = \vec{n}$ бўлса, $D_{ij} = (\overrightarrow{r_{u_i u_j}}, \vec{n})$ хисобланади.

Хусусий холда, сиртнинг тенгламаси қуйидагича берилган бўлсин

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (1.2.12)$$

бу ерда $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R_n$, у холда

$$II = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} du_i du_j . \qquad (1.2.13)$$

Регуляр Φ_1 ва Φ_2 – сиртларни қарайлик.

Теорема 1.2.1. Агар Φ_1 ва Φ_2 регуляр параметрланган сиртнинг би-ринчи квадратик формаси пропорционал бўлса $I_{\Phi_1} = \lambda(u_1, u_2, ..., u_n) I_{\Phi_2}$, биринчи сирт иккинчисига мос координаталар бўйича акслантириш конформ бўлади.

Тескари, агар Φ_1 ва Φ_2 сиртларнинг бир хил координатадаги нуқтада конформ мослик бўлса, у холда биринчи квадратик формалари ўзаро пропорционал бўлади $I_{\Phi_1} = \lambda(u_1, u_2, ..., u_n) I_{\Phi_2}$.

Сиртнинг текислик билан кесимини кўриб чиқайлик. F сиртни π текислик билан кесимида хосил бўлган эгри чизиқни γ_n нормал кесим деб аталади.

Таъриф 1.3.1. Сиртнинг τ йўналишдаги k_P нормал эгрилиги деб γ_n чизиқнинг P нуқтадаги эгрилигига айтилади.

R_{n+1}^n изотроп фазода иккинчи сферани, барча йўналишлари бўйича нормал эгрилиги ўзгармас бўлган сирт сифатида аниқланади. Бу сирт

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 . \tag{1.3.2}$$

тенглама билан берилади.

Таъриф 1.3.2. R_{n+1}^n изотроп фазода (1.3.2) тенглама билан берилган сирт изотроп сфера дейилади.

Изотроп фазода метрик сфера деб маълум бир нуқтадан тенг узоқлик-даги нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади. Бундай тарзида аниқланган, маркази координаталар бошида бўлган бирлик сфера қуйидаги тенгламага ега бўлади

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2 , \tag{1.3.3}$$

бу сферани биз R_{n+1}^n изотроп фазода метрик сфера деб атаймиз.

Сиртнинг асосий геометрик характеристкалари ўрта ва тўла эгриликлардир. Ўрта эгрилик қуйидагича хисобланади

$$H = \frac{\sum\limits_{k,\alpha=1}^{n} D_{k\alpha} g^{k\alpha}}{n}, \tag{1.3.7}$$

ва тўла эгрилик еса

$$K = \frac{\det\left|\left(D_{ij}\right)_{i,j=\overline{1.n}}\right|}{\det\left|\left(g_{ij}\right)_{i,j=\overline{1.n}}\right|} . \tag{1.3.8}$$

Тасдиқ 1.3.1. Изотроп фазода (1.2.12) сиртнинг тўла эгрилиги нормал ва махсус нормал бўйича хисобланганда ўзаро тенг бўлади, яъни $K = K_m$.

Диссертациянинг **“R_{n+1}^n изотроп фазода сиртларнинг қўшмалиги”** деб номланувчи иккинчи боби учта параграфдан иборат. Диссертациянинг ушбу бобида изотроп сфера ичида жойлашган сиртга қўшма сирт аниқланди ва ўрганилди. Сиртнинг тўла эгрилиги ва унинг қўшма тасвирининг тўла эгрилиги ўртасида боғлиқлик топилди.

Бирлик (1.3.2) тенглама билан берилган изотроп сферани қарайлик ва Ox_{n+1} ўқига параллел бўлмаган

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i + C \tag{2.1.1}$$

тенглама билан берилган $n-$ўлчовли текислик бу изотроп сфера билан кесишсин. Энди (1.3.2) сферанинг (2.1.1) текислик билан кесимини айрим хоссаларини келтирамиз.

Лемма 2.1.2. Изотроп фазода изотроп сферанинг (2.1.1) текислик билан кесими хар доим эллиписоид бўлади.

Изотроп сферанинг (2.1.1) текислик билан кесимини Γ билан белгилайлик. Γ кесимдаги нуқталарда изотроп сферага уринувчи $n-$ ўлчовли текисликлар тўпламини $\{\pi\}$ орқали белгилаймиз.

Теорема 2.1.1. Γ тўпламнинг нуқталарида изотроп сферага уринувчи барча $\{\pi\}$ текисликлар бир нуқтада кесишади.

Агар кесувчи текислик (2.1.1) тенглама билан берилган бўлса, бу Γ кесимдаги нуқталарда изотроп сферага уринувчи текисликлар $(A_1, A_2, ..., A_n, -C)$ координатали нуқтада кесишади.

Таъриф 2.2.1. $(A_1, A_2, ..., A_n, -C)$ нуқтани изотроп сферага нисбатан (2.1.1) текисликка қўшма нуқта деб аталади.

R^n_{n+1} да F сирт

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2.2.1}$$

тенглама билан берилган бўлсин.

Биз $\{H\}$ билан $f(x_1, x_2, ..., x_n) = H$ сатх сиртлари изотроп сфера ва $x_{n+1} = H$ текислик кесими бўлган Γ билан устма-уст тушган сиртлар тўпламини белгилаймиз. Бундан ташқари $\{H\}$ сиртлар изотроп сфера ичига тегишли ва қавариқ бўлишини талаб қиламиз, сиртлар $x_{n+1} = 0$ текисликнинг D соҳасига бир қийматли проекцияланади.

Лемма 2.2.1. Араг (2.1.1) регуляр сирт бўлса, уринма текислигига қўшма нуқта

$$\{ f'_{x_1}; \quad f'_{x_2}; \quad \dots \; ; \quad f'_{x_n}; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f'_{x_i} - f \}. \tag{2.2.2}$$

координатага ега бўлади.

Таъриф 2.2.2. F^* сиртни F сиртга изотроп сферага нисбатан, қўшма сирт деб атаймиз.

Натижа 2.2.1. Агар F регуляр булса, F^* сирт тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x_i^* = f'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \quad i = \overline{1.n} \\ x_{n+1}^* = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Теореме 2.2.1. Агар сирт $F \in \{H\}$ бўлса, у холда F^* сирт $D^* \subset D$ соҳага бир қийматли проексияланувчи қавариқ сирт бўлади.

Изотроп фазо ўз-ўзига қўшма бўлганлиги сабабли, проектив қўшмалик мавжуд. Сферани ташқи қисмидан ички қисмига акслантирувчи қўшмаликни аниқлаш мумкин. Бунда изотроп сферани кесиб ўтмайдиган текисликка сферани ички қисмидан нуқта мос қўямиз.

Агар $F \in \{H\}$ ва F^* - регуляр сирт бўлса, қуйидаги теорема бажарилади.

Теореме 2.2.2. F^* сиртнинг қўшма образи F сиртга мос келади, яъни $F^{**} = F$.

Лемма 2.3.1. Уч ўлчовли фазода сиртнинг тўла эгрилиги $K = 0$ бўлса, унинг қўшма образи нуқта ёки эгри чизиқ бўлади.

Лемма 2.3.2. Сирт ва унинг қўшма образининг иккинчи квадратик формалари ўртасида қуйидаги боғлиқлик мавжуд:

$$II = (-1)^{n+2} II^*.$$

Натижа 2.3.1. Уч ўлчовли фазода сирт ва унинг қўшма образининг иккинчи квадратик формалари тенг, яъни $II = II^*$.

Теорема 2.3.1. F сиртнинг тўла эгрилиги K ва F^* қўшма сиртнинг K^* тўла эгрилигига кўпайтмаси бирга тенг бўлади, яъни $K \cdot K^* = 1$.

Энди уч ўлчовли изотроп фазода қўшма сиртлар учун бажариладиган баъзи хоссаларни кўриб чиқайлик. Сиртни $\vec{n}_m(0,0,1)$ махсус нормалга нисбатан ўрта эгрилигини аниқлаймиз. Бу ўрта эгриликни махсус ўрта эгрилик деб атаймиз ва H_m билан белгилайлик.

Теорема 2.3.2. Кўшма сиртнинг нормал ва махсус нормалга кўра аниқланган ўрта эгриликлари ўзаро тенг бўлади $H^* = H_m^*$.

Биз F сирт, унинг қўшма образи F^*, $Z_1 = f_u(u,v)$ ва $Z_2 = f_v(u,v)$ сиртларни кўриб чиқайлик.

Ω билан қуйидаги детерминантни белгилаймиз:

$$\Omega = \begin{vmatrix} f_{uuu} & f_{uvv} \\ f_{uuv} & f_{vvv} \end{vmatrix} = f'''_{uuu} f'''_{vvv} - f'''_{uuv} f'''_{uvv} \ . \qquad (2.3.9)$$

Теорема 2.3.3. Агар $\Omega = 0$ бўлса, F^* сиртнинг махсус эгрилигини F, Z_1 ва Z_2 сиртларнинг махсус эгрилиги орқали ифодалаш мумкин.

Қуйидаги тенглама билан берилган $\{\Phi\}$ синфини ўрганайлик

$$\Phi : \{z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{31}x + 2a_{32}y + a_{33}\} \qquad (2.3.10)$$

Натижа 2.3.2. Агар $\Phi_0 \in \{\Phi\}$ бўлса, унинг тўла ва махсус тўла эгриликлари тенг, ва улар нолга тенг бўлади.

Натижа 2.3.3. Кўшма акслантиришда F нинг асимтотик йўналишига F^* нинг асимтотик йўналиши мос келади.

Лемма 2.3.6. Сиртнинг $M \in F$ нуқтаси ва унинг қўшма образи $M^* \in F^*$ нуқта бир нормал текисликка тегишли бўлади.

Теорема 2.3.4. Агар F минимал сирт бўлса қўшма акслантириш конформ акслантириш бўлади.

Диссертациянинг учинчи боби **«Берилган геометрик характеристикаларга кўра сиртни тиклаш ва Монж-Ампер тенгламасини ечиш»** деб номланиб учта параграфдан иборат. Диссертатциянинг мазкур бобида изотроп фазода тўла геометриянинг баъзи муоммолари ўрганилган. Сиртни ташқи эгрилигига кўра, шартли ташқи эгрилигига кўра ва тўла эгрилигига кўра тиклаш масалалари ўзаро эквивалент эканлиги исботланган. Монж-Ампер тенгламасининг ошкор ечимлар синфи берилди. Тўла эгрилиги берилганда кўчирма сиртлар синифи учун сирт тенгламаси топилган.

Умумий холда кўчирма сиртнинг вектор тенгламасини

$$\vec{r}(u,v) = \vec{\alpha}(u) + \vec{\beta}(v), \qquad (3.1.1)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $\vec{\alpha}(u)$; $\vec{\beta}(v) -$ вектор тенглама.

1-холат. Агар сирт изотроп фазода Oxy текислигига бир қийматли проексияланиб, ва қуйидаги тенглама билан берилган бўлса

$$\vec{r}(u,v) = u\cdot\vec{i} + v\cdot\vec{j} + (f(u)+g(v))\cdot\vec{k}. \tag{3.1.2}$$

Мос равишда, қўшма сиртнинг тўла ва ўрта эгрилиги қуйидагинга тенг

$$K^* = \frac{1}{f''_{uu}(u)\cdot g''_{vv}(v)}, \tag{3.1.3}$$

$$H^* = \frac{f''_{uu}(u)+g''_{vv}(v)}{f''_{uu}(u)g''_{vv}(v)}. \tag{3.1.4}$$

2-холат. Агар кўчирма сирт Oxz текислигига ўзаро бир қийматли проексияланса. Еслатиб ўтамиз, бу текислик Галлий текислиги бўлади. У холда кўчирма сиртнинг вектор тенгламаси қуйидагича бўлади

$$\vec{r}(u,v) = u\cdot\vec{i} + (f(u)+g(v))\cdot\vec{j} + v\cdot\vec{k}. \tag{3.1.5}$$

Мос равишда бу холат учун қўшма сиртнинг тўла ва ўрта эгрилиги қуйидагинга тенг

$$K^* = \frac{g'^4_v(v)}{f''_{uu}(u)\cdot g''_{vv}(v)}, \tag{3.1.6}$$

$$H^* = \frac{f''_{uu}(u)g'^3_v(v) + g'_v(v)g''_{vv}(v)\left(1+f'^2_u(u\right)}{2f''_{uu}(u)g''_{vv}(v)} \tag{3.1.7}$$

3-холат. Агар сирт Oyz текислигига бир қийматли проексияланганда ва параметирлашни махсус тарзида танланганда сирт тенгламаси қуйидагича бўлсин:

$$\vec{r}(u,v) = \frac{1}{2}\left(f(u)+g(v), u-v+\pi, u+v\right). \tag{3.1.8}$$

Мос равишда 3-холат учун қўшма сиртнинг тўла ва ўрта эгрилиги қуйидагинга тенг

$$K^* = \frac{\left(f'_u(u)+g'_v(v)\right)^4}{16f''_{uu}(u)\cdot g''_{vv}(v)}, \tag{3.1.10}$$

$$H^* = \frac{\left(f'_u(u)+g'_v(v)\right)\left(f''_{uu}(u)\left(1+g'^2_v(v)\right)+g''_{vv}(v)\left(1+f'^2_u(u)\right)\right)}{16f''_{uu}(u)\cdot g''_{vv}(v)}. \tag{3.1.11}$$

$f(u)$ и $g(v)$ фунциялар ушбу шартларни қаноатлантирсин $f'(u)+g'(v)\neq 0$ ва $f'(u)\neq const,\quad g'(v)\neq const$.

М.С.Лоне ва М.К.Карасен ишларида сиртни тиклаш масаласини кўчирма сиртлар учун $H^* = const$ бўлган холда хал қилган.

Биз бу масалани қўшма сиртнинг $H^* -$ ўрта эгрилиги махсус берилган функциялар бўлган холда хал қиламиз.

Агар

$$H^* = \varphi(u) + \psi(v) \tag{3.1.12}$$

функция $D\subset R_2$ соҳада аниқланган ва $\varphi(u)$, $\psi(v)$ функциялар узликсиз бўлсин.

1-холат учун қуйидаги теорема ўринли бўлади:

Теорема 3.1.1. Агар сирт (3.1.2.) кўринишга эга бўлиб F^* сиртнинг ўрта эгрилиги берилган бўлса, сирт тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

1. $H^*=0$ бўлса, F сирт тенгламаси

$\vec{r}_\lambda(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+(\frac{\lambda}{2}u^2-\frac{\lambda}{2}v^2+C_1u+C_2v+C)\vec{k}$ кўринишда бўлади.

2. $H^*=C_0 \quad (C_0\neq 0,\ C_0=const)$ бўлса, F сирт тенгламаси

$\vec{r}_\lambda(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+(\frac{u^2}{2\lambda}+\frac{v^2}{2(2C_0-\lambda)}+C_1u+C_2v+C)\vec{k}$ кўринишда бўлади.

3. $H^*=\varphi(u)+\psi(v)$, бўлса, F сирт тенгламаси

$$\vec{r}_\lambda(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+\left(\int\left[\int\frac{du}{\lambda+2\varphi(u)}\right]du+\int\left[\int\frac{dv}{2\psi(v)-\lambda}\right]dv+C_1u+C_2v+C\right)\vec{k} \quad (3.1.13)$$

кўринишда бўлади.

Иккинчи холатдаги, яъни (3.1.5) тенглама билан берилган сиртлар учун қўшма сиртнинг ўрта эгрилиги берилганда сиртни мавжудлик масаласини қарайлик, бу масала фақат $H^*=0$ ва $H^*=C\ (C=const)$ бўлганда ечими М.К.Каракенли ва М.С.Лоненинг ишларида бор.

Лемма 3.1.1. Агар $H^*=\psi(v)$ бўлса, F сиртнинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\vec{r}_\lambda(u,v)=u\cdot\vec{i}+\left(-\lambda\ln\left|\cos\left(\frac{u}{\lambda}+C_1\right)\right|+\int\mu(v)dv+C_2\right)\cdot\vec{j}+v\cdot\vec{k}. \quad (3.1.15)$$

Бу ерда $\mu(v)$ функция $\mu'(v)\left(2\psi(v)-\lambda\mu(v)\right)-\mu^3(v)=0$ дифференциал тенгламанинг ечими.

Учинчи холатда, сирт (3.1.8) тенглама билан ифодаланадиган сиртлар синфига тегишли бўлса, қўшма сиртнинг ўрта эгрилиги

$$H^*=\left(\eta(u)+\mu(v)\right)\left(\xi(u)+\rho(v)\right), \quad (3.1.16)$$

шаклида бўлганда сиртнинг мавжудлик масаласи ечимга эга бўлади, яъни қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 3.1.3. Қўшма сиртнинг ўрта эгрилиги (3.1.16) шакилда берилганда, $\eta(u),\mu(v),\xi(u),\rho(v)$ функциялар

$$\frac{1+\eta(u)}{\eta'(u)}=16\xi(u),\quad \frac{1+\mu(v)}{\mu'(v)}=16\rho(v)$$

шартларни қаноатлантирса, (3.1.8) шаклдаги тенгламага эга бўлган сирт мавжуд.

Қўшма сиртнинг тўла эгрилиги берилган бўлса сиртни тенгламасини топиш масаласини қарайлик.

$$K^*=\varphi(u)\cdot\psi(v)\neq 0 \quad (3.2.1)$$

функция $D\subset R_2$ соҳада аниқланган ва бу ерда $\varphi(u),\ \psi(v)$ -узлуксиз ва нолдан фарқли функциялар бўлсин.

Биринчи хол учун қуйидаги лемма ўринли:

Лемма 3.2.1. Агар $K^* = \varphi(u)\psi(v)$ функция берилган бўлса, у холда қўшма акслантиришдаги образининг тўла эгрилиги берилган функцияга тенг бўлган

$$\vec{r_\lambda}(u,v) = u\cdot\vec{i} + v\cdot\vec{j} + \left(\int\left[\int\frac{1}{\lambda\cdot\varphi(u)}du + C_1\right]du + \int\left[\int\frac{\lambda}{\psi(v)}dv + C_2\right]dv + C\right)\cdot\vec{k} \quad (3.2.2)$$

тенглама билан аниқланувчи сирт мавжуд. Бу ерда C_1, C_2, C - ўзгармас сонлар ва $\varphi(u),\ \ \psi(v)\in C^2(D)$.

Теорема 3.2.1. Агар сирт 1-холда ва $K^* = C_0 = \mathrm{co}nst \neq 0$ бўлса, у холда сирт тенгламаси қуйидагича:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (\frac{C_o}{2}u^2 + \frac{1}{2C_0}v^2 + C_1u + C_2v + C)\vec{k}.$$

Агар (3.2.1) бўлса, у холда сирт тенгламаси (3.2.2) формула билан берилади.

Агар қўшма сиртнинг тўла эгрилиги $K^* = K^*(u,v) \neq \varphi(u)\psi(v)$ ўзгарувчилари бўйича ажралувчи бўлмаса, у холда кўчирма сиртлар тўпламида масаланинг ечими мавжуд емас.

Натижа 3.2.1. Агар K - (3.2.1) шакилда берилса, у холда $D = \{a \le x,\ b \le y : a,b \in R\}$ соҳада тўла эгрилиги $K -$ бўлган сирт мавжуд ва тенгламаси қуйидагича

$$F : \left\{\left(x, y, \lambda\int_a^x (x-t)\varphi(t)dt + \frac{1}{\lambda}\int_b^y (y-\xi)\psi(\xi)d\xi\right) : (x,y)\in D\right\}.$$

Иккинчи холдаги сирт учун қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 3.2.2. Агар $K^* = \varphi(u)\psi(v)$ функция берилган бўлса, қўшма акслантиришдаги образининг тўла эгрилиги берилган функцияга тенг бўлган

$$\vec{r_\lambda}(u,v) = u\cdot\vec{i} + \left(\int\left[\int\lambda\varphi(u)du + C_1\right]du + \int\left[-\frac{1}{\frac{3}{\lambda}\int\frac{1}{\psi(v)}dv + C_2}\right]dv + C\right)\cdot\vec{j} + v\cdot\vec{k}$$

(3.2.6)

тенглама билан аниқланувчи сирт мавжуд. Бу ерда C_1, C_2, C - ўзгармас сонлар ва $\varphi(u),\ \ \psi(v)\in C^2(D)$.

Учинчи холдаги сирт учун қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 3.2.3. Агар $K^* = \varphi(u)\psi(v)$ функция берилган бўлса, қўшма акслантиришдаги образининг тўла эгрилиги берилган функцияга тенг бўлган

$$\vec{r_\lambda}(u,v) = \frac{1}{2}\left(\int\left[\int\frac{16\lambda^4}{\varphi(u)}du + C_1\right]du + \int\left[\int\frac{16\lambda^4}{\psi(v)}dv + C_2\right]dv + C\right)\cdot\vec{i} + \frac{1}{2}(u - v + \pi)\cdot\vec{j} + \frac{1}{2}(u+v)\cdot\vec{k}$$

(3.2.7)

тенглама билан аниқланувчи сирт мавжуд. Бу ерда C_1, C_2, C - ўзгармас сонлар ва $\varphi(u),\ \ \psi(v)\in C^2(D)$.

Уч ўлчовли изотроп фазосида сиртни ташқи ва тўла эгрилигига оид баъзи масалаларни кўриб чиқамиз. Бу ўрганилаётган масалалар Монж-Ампер тенгламасининг ечими билан боғлиқ. Биз Монж-Ампер тенгламаси ечимларининг геометрик маъносига эътибор қаратамиз.

Агар F регуляр сирт $z=f(x,y)$ тенглама билан берилган бўлса, унинг тўла эгрилиги

$$K=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2. \quad (3.3.1)$$

формула билан хисобланади.

Агар сирт регуляр сирт бўлса, у холда сферик акслантириш бир қийматли бўлади. Изотроп фазода $M\subset F$ нуқталар тўплами метрик сферига сферик акслантирилганда мос равишда M' нуқталар тўплами хосил бўлади.

Таъриф 3.3.1. Изотроп фазода $M\in F$ тўпламнинг ташқи эгрилиги деб метрик сферадаги M' тўпламнинг $S(M')$ (мера) юзасига айтилади.

Изотроп фазода $M\subset F-$ тўплам ва унинг изотроп сферага нисбатан қўшма акслантиришдаги $M^*\subset F^*-$ тўплам образи бўлсин.

Таъриф 3.3.2. Изотроп фазода $M\in F$ тўпламнинг шартли ташқи эгрилиги деб $M^*\subset F^*$ тўпламнинг $\mu_F(M)=S(M^*)$ (мера) юзасига айтилади.

Евклид фазода сиртни тўла эгрилиги функцияси $K(u,v)$ берилганда ёки $\omega_F(M)$ ташқи эгрилиги функцияси берилганда сиртни мавжудлик ва ягоналик масаласи каралади. Изотроп фазода бу масалаларга учунчи масала хам қўшилади, яъни $\mu_F(M)$ шартли ташқи эгрилик функцияси бўйича сиртни тиклаш масаласи. Аммо бу масалалар ўртасида ўзаро алоқалар мавжуд, қуйидаги теоремада ифодаланган.

Теорема 3.3.1. Сиртни тўла эгрилиги бўйича, ташқи эгрилиги бўйича ва шартли ташқи эгрилиги бўйича тиклаш масалалари изотроп фазода ўзаро эквивалент бўлади.

Изотроп фазо харакати ва Монж-Ампер тенгламасининг ечими билан боғлиқ бази тасдиқларни келтирамиз.

Айта оламизки, агар $z=f(x,y)$ функция (3.3.1) Монж-Ампер тенгламасининг ечими бўлса, у холда $z=f(x,y)+C_1x+C_2y+C$ функция ҳам ечими бўлади.

Лемма 3.3.1. Изотроп фазода $z=f(x,y)+C_1x+C_2y+C$ функция билан аниқланган сиртни, изотроп фазо харакати ёрдамида $z=f(x,y)$ сирт орқали хосил қилинади.

Натижа 3.3.1. $f(x,y)=\dfrac{a}{2}(x^2-y^2)+C_1x+C_2y+C$ сирт доимий ўзгармас манфий тўла эгриликка ега сирт.

Теорема 3.3.2. Агар U сиртнинг тўла эгрилиги нолга тенг бўлса, $\chi=\chi(U)$ сиртнинг ҳам тўла эгрилиги нолга тенг бўлиши учун у қўйидаги шартни қаноатлантириши зарур ва етарли

$$U_x'^2U_{yy}''+U_{xx}''U_y'^2-2U_x'U_y'U_{xy}''=0, \quad (3.3.5)$$

бу ерда $\chi(U)\in C^2$.

Натижа 3.3.2. $U(x,y)=C_1x+C_2y+C$ функция теоремадаги (3.3.5) шартни қаноатлантиради. Бундан $\chi=\chi(C_1x+C_2y+C)$ сиртниг тўла эгрилиги нолга тенг бўлади.

Икки регуляр $U(x,y)$ ва $V(x,y)$ сиртларнинг йиғиндиси бўлган $z(x,y)$ фунцияни кўриб чиқайлик, яъни

$$z(x,y)=U(x,y)+V(x,y)\,. \tag{3.3.6}$$

Ушбу $z(x,y)$, $U(x,y)$ ва $V(x,y)$ сиртларнинг тўла эгриликлари орасида ўзаро муносабатни текширамиз. Сиртларнинг тўла эгрилкларини мос равишда K, K_1, ва K_2 билан белгилаб олайлик.

Теорема 3.3.3. Агар $U(x,y)$ ва $V(x,y)$ функциялар

$$U_{xx}V_{yy}+U_{yy}V_{xx}-2U_{xy}V_{xy}=0 \tag{3.3.7}$$

Дифференсиал тенгликни қаноатлантирса. У холда $z(x,y)$ сиртнинг тўла эгрилиги бу фунцсияларнинг тўла эгриликлар йиғиндисига тенг бўлади:

$$K=K_1+K_2\,.$$

Натижа 3.3.3. Агар $U(x,y)$ ва $V(x,y)$ функциялар Коши-Риман шартини қаноатлантирса, у холда функциялар (3.3.7) шартни қаноат-лантиради.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация изотроп фазода сиртлар назариясини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Изотроп фазо Миновский фазосини қисм фазоси эканлиги исботланган;
2. Берилган сирт ва унинг қўшма образининг иккинчи квадратик формалари тенглиги исботланган;
3. Қўшма сиртнинг евклид нормал анолиги ва махсус нормал ёрдамида аниқланган ўрта эгриликлари ўзаро тенглиги исботланган;
4. Сиртни ташқи эгриликка, шартли ташқи эгриликка ва тўла эгриликка кўра тиклаш масалалари ўзаро эквивалентлиги исботланган;
5. R_3^2 изотроп фазода берилган тўла ва ўрта эгрикликларга кўра сиртнинг мавжудлик хақидаги теоремелери исботланган;
6. Монж-Ампер тенгламасининг ечимининг геометрик хоссалари изотроп фазо харакати ёрдамида топилган;
7. Изотроп фазода хақиқий сиртлар учун Коши-Риман шарти аналоги топилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.19.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ИСМОИЛОВ ШЕРЗОДБЕК ШОКИРЖОН УГЛИ

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.04 – Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2022 год

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2022.3.PhD/FM750.

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Артикбаев Абдуллаазиз** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Тужилин Алексей Августинович** доктор физико-математических наук, профессор
	Заитов Адилбек Атаханович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами**

Защита диссертации состоится «____» ____________2022 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, института Математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» ______________2022 года.
(протокол рассылки №________ от «____» ______________2022 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К. Мамадалиев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

А.Я.Нарманов
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые на мировом уровне, в большинстве случаев сводятся к исследованию проблемы современной геометрии в полуевклидовом пространстве. Изучение геометрических характеристик поверхностей в изотропном пространстве и определение инвариантов, сохраняющихся при двойственном отображении, в силу того, что изотропное пространство самодвойственное, имеют важное значение. Изотропная пространства играет важную роль в решении современных вопросов из разделов теории относительности физики и квантовой механики. Поэтому результаты, полученные в области геометрии поверхностей в изотропном пространстве, являются как теоретически, так и практически значимыми и считаются одним из актуальных направлений современной математики.

В настоящее время в мире интенсивно развиваются научные исследования по геометрии изотропного пространства. В этом пространстве все большее значение приобретают задачи современной геометрии: теория поверхностей в изотропном пространстве, дифференциальные инварианты линии и поверхности, изучение геометрии изотропных частей. В связи с этим нахождение геометрических инвариантов, возникающих в результате изотропного пространственного движения, определение дифференциальных характеристик поверхностей в случае вырожденной метрики, восстановление линий и поверхностей по заданным геометрическим характеристикам и изучение в этом пространстве классических задач геометрии, связанных со специально полученной метрикой, являются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране особое внимание уделяется современным направлениям геометрии и топологии, имеющим фундаментальное научное и практическое применение математики. Поэтому, в последние годы особое внимание уделяется изучению вопросов теории поверхностей в геометрии неевклидовых пространств. То есть решались вопросы существования и единственности линий или поверхностей с заданными характеристиками в Галилевом, изотропном и Минковиском пространства. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математики наук на уровне международных стандартов по важным направлениям специальности «Алгебра, теория динамических систем, геометрия и топология и т.д.» рассматривается как важная задача фундаментальных исследований[2]. В связи с этим развитие теории поверхностей в изотропном пространстве является важным вопросом при решении задач дифференциальных уравнений, комплексного анализа, геометрия и топология.

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», и в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы.

Геометрия изотропного пространства относится к геометрии пространств с вырожденными метриками. Первоначально работы по геометрии изотропного пространства появились в начале XX века. В монографии Б.А. Розенфельда даны определения псевдоевклидова пространства и полуевклидовой пространственной геометрии, т.е. пространства с вырожденной метрикой. Дифференциальную геометрию кривых и поверхностей в трехмерном изотропном пространстве изучал К. Штурбекер. Изотропное пространство является одним из полуевклидовых пространств. Часть исследования монографии А.Артыкбаев и Д.Д.Соколовым посвящена решению задачи восстановления поверхности в полуевклидовом пространстве в соответствии с заданной внешней кривизной. В изотропном пространстве полная кривизна поверхности будет связана с оператором Монжа-Ампера, А.Артикбаев доказал существование и единственность решения уравнения Монжа-Ампера в невыпуклой области в пространстве Галиллея

Теорию линий и поверхностей в изотропном пространстве исследовали такие ученые, как H. Sachs, B. Pavkovic, D. Palman, I. Kamenarovic, H. Brauner. M.С.Лоне и M.К.Каракен рассмотрены задача существования поверхности переноса, когда полная и средняя кривизны поверхности постоянны и задача нахождения уравнений минимальных поверхностей. В Узбекистане геометрией полуевклидовых пространств занимались А.Артикбаев, Э.К. Курбанов, и Б.М. Султонов. Однако, работы этих авторов связаны в основном галилеевым пространством, которое вполне отличается от геометрии изотропного пространства.

К. Штурбекером было введено, что изотропном пространстве в каждой точке поверхности существует два вектора нормали. Геометрические величины, определяемые этими векторами нормалей, отличаются друг от друга, но между ними должна быть взаимосвязь. Однако соответствия между геометрическими характеристиками поверхностей соответствующие двум векторам нормали не установлено. Кроме того, задача восстановления поверхности при заданной произвольной полной кривизны поверхности решено только в частных случаях, а в общем случае нет. Хотя задача нахождения средней кривизны поверхности по двум нормалям, существования поверхности по внешней, условной внешней и полной кривизне, а также нахождение уравнения поверхности при заданной произвольной полной и средней кривизны поверхности, рассматриваемая в данной диссертации, очень важна, но эта задачи не изучено. Это показывает актуальность нашей темы.

Связь темы диссертации с научно – исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация.

Исследование выполнено в соответствии с планами научно-исследовательского проекта МРУ-ОТ-9/2017 «Многомерный комплексный анализ» и научно-исследовательских работ по теме МРУ-10/2017 «Развитие геометрических аналитических методов в задачах теории управления и дифференциальных играх» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Цель исследования является изучение теории поверхностей в изотропном пространстве и решения задач геометрии в целом, связанных с геометрическими характеристиками двойственной поверхности.

Задачи исследования:

найти геометрических характеристик линий и поверхностей в многомерном изотропном пространстве;

определение двойственной поверхности относительно изотропной сферы;

определить связь между геометрическими характеристиками двойственной поверхности, определяемыми с помощью особой нормали и аналога евклидовой нормали;

решение задачи восстановления поверхностей по заданным дифференциальным характеристикам в изотропном пространстве.

Объект исследования: поверхности в изотропном пространстве, дифференциальные характеристики поверхностей, движения изотропного пространства, двойственная поверхность относительно сферы.

Предмет исследования: вырожденная метрика поверхности, область вокруг точки поверхности, двойственная поверхность, средняя и полная кривизны поверхностей изотропного пространства.

Методы исследования: в исследовательской работе использовались современные методы математического анализа, дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений, функционального анализа и топологии.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

определены геометрические характеристики линий и поверхностей по особой нормали и аналога евклидовой нормали в многомерном изотропном пространстве, и найдены формулы для их вычисления;

определена двойственность с помощью сопоставления точку к плоскости пересекающей изотропную сферу, и с помощью этой двойственности найдено уравнение двойственной поверхности к поверхности, содержащейся внутри изотропной сферы;

доказано равенство единице произведения полной кривизны двойственной поверхности на полную кривизну заданной поверхности и равенство средних кривизн двойственных поверхностей, найденных с помощью специальной нормали и аналога Евклидовой нормали;

доказана эквивалентность задач о существовании поверхностей по внешней кривизне, условной внешней кривизне и полной кривизне поверхности и найдены явные уравнения поверхностей по заданным геометрическим характеристикам.

Практические результаты исследования: исследованы свойства поверхностей изотропном пространства применены при доказательстве существования решения уравнения Монжа-Ампера, являющейся современной проблемой дифференциального уравнения.

Достоверность результатов исследования. Обоснованы современными методами математики и известными результатами дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что доказана, эквивалентность задачи существования поверхности по внешней кривизне, по условной внешней кривизне и по полной кривизне.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что геометрические характеристики поверхностей изотропного пространство и свойства движение использована при решении дифференциальных уравнении, комплексном анализе и решения некоторых задач геометрии в целом.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по теория поверхностей в изотропном пространстве использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Результаты, двойственного отображения относительно сферы в изотропном пространстве, и поверхность плученная в этом отображении, и его геометрические характеристики, были использованы в фундаментальном проекте ФЗМВ-20160914085438 – “Исследование энергетические спектры полупроводниковых соединений и сильно лигированных полупроводников.” (Справка № 1927-024 Наманганский инженерно-технологический институт от 16 сентября 2022 г.). В результате использования двойственного отображения изотропного пространства можно было рассмотреть вопрос минимизации энергии путем перехода от функции Лагранжа к функции Гамильтона;

Полученные результаты о сохранении геометрических характеристик поверхности под действием несимметричных матриц, определяющих движение изотропного пространства были использованы в решение матричных нелинейных эволюционных уравнений фундаментального проекта ОТ-Ф4-04(05)- «Приложения спектрального метода к решению матричных нелинейных эволюционных уравнений; Биомеханика сердечно-сосудистой системы» (Справка № 04-196/10 Ургенчский государственный университет от 5 сентября 2022 г.). В результате нелинейные уравнения, связанные с не ортогональными и не симметричными матрицами, движений изотропного пространства и свойства поверхностей, принадлежащих этому пространству, зависящаяся от полной кривизны, нормальной кривизны что позволило решать нелинейные дифференциальные уравнения, а также определять свойства решения геометрическим путем.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации обсуждались на 8 международных и 6 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 21 научная работа, из них 7 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 3 опубликованы в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 91 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названа **«Основные понятия в изотропного пространства R_{n+1}^{n}», состоит из трёх параграфов.** В этой главе диссертации приведены основные сведения о изотропном пространстве, теории поверхностей, основные геометрические характеристики поверхности рассматриваемых в изотропном пространстве. Кроме того, приведены доказательства некоторых утверждений.

Пусть $Ox_i \ (i=1...n+1)$ система координат в аффинном пространстве A_{n+1}. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{X}(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ и $\overrightarrow{Y}(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ определим по формуле

$$(\vec{X},\vec{Y})=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i & если \ \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\neq 0\\ x_{n+1}y_{n+1} & если \ \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=0\end{cases} \qquad (1.1.1)$$

Определение 1.1.4. Аффинное пространство A_{n+1}, в котором скалярное произведение векторов вычисляется по формула (1.1.1), называется изотропным пространством R_{n+1}^{n}.

Скалярное произведение (1.1.1) называется вырожденным скалярным произведением.

Утверждение 1.1.1. Изотропное пространство R_{n+1}^{n} является подпространством, $(n+2)-$мерного пространства Минковского ${}^{1}R_{n+2}$.

Расстояние между точками A и B в пространстве R_{n+1}^{n} вычисляется по формуле

$$|AB|=\begin{cases}|AB|_1=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2} & если \ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}\neq 0\\ |AB|_2=|y_{n+1}-x_{n+1}| & если \ x_i=y_i \ \ (i=\overline{1..n})\end{cases} \qquad (1.1.2)$$

.

Так как изотропное пространство R_{n+1}^{n} аффинное пространство, то существует аффинное преобразование координат сохраняющее расстояние, определяемое формулой (1.1.2). Это преобразования называется движением изотропного пространства R_{n+1}^{n} и задается формулой

$$X'=A\cdot X+B \qquad\qquad A=\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 0\\ & A_E & & & \dots\\ & & & & 0\\ \hline h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} \ \ h_n & 1\end{array}\right). \qquad (1.1.3)$$

где $A_E=(a_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ - матрица движения в евклидовом пространствам R_n, $B^T=\begin{pmatrix}b_1 & \dots & b_{n+1}\end{pmatrix}$ вектор параллельного переноса и $\begin{pmatrix}h_1 & \dots & h_n & 1\end{pmatrix}$ координаты скольжения.

В R_{n+1}^{n} рассмотрим регулярную поверхность, заданную векторным уравнением

$$\vec{r}(u_1,u_2,...,u_n)=\left(x_i(u_1,u_2,...,u_n)\,|\,(u_1,u_2,...,u_n)\in D\subset R_n,\ i=\overline{1.(n+1)}\right). \qquad (1.2.6)$$

По аналогии с евклидовым пространством определяется первая квадратичная форма поверхности:

$$I_1=dr^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}du_idu_j \qquad (1.2.8)$$

где g_{ij} - коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и $g_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_j}$. Когда вектор $d\vec{r}-$ параллельна оси Ox_{n+1}, то первая квадратичная форма $I_1 = 0$. Тогда определяется дополнительная первая квадратичная форма:

$$I_2 = dr^2 = dx_{n+1}^2. \qquad (1.2.9)$$

Если определим ортогональность двух векторов, как скалярное произведение, первая часть которой равна нулю, то по формуле (1.1.1), получим вектор $\vec{e}_{n+1}$ – направленный по оси Ox_{n+1}, будет ортогональным всем векторам пространства R_{n+1}^n не параллельных оси Ox_{n+1}.

Поэтому вектор $\overrightarrow{n_m} = \vec{e}_{n+1}$, является нормалью ко всем плоскостям пространства. Следовательно, нормаль касательной плоскости поверхности (1.2.7) - всегда совпадает с вектором $\overrightarrow{n_m}$. В дальнейшем, мы будем называть этот вектор $\overrightarrow{n_m}$ особой нормалью.

Для решения некоторых задач нам будет удобным определить нормаль поверхности по формуле

$$\vec{n} = \frac{[\overrightarrow{r_{u_1}}, \overrightarrow{r_{u_2}}, ..., \overrightarrow{r_{u_n}}]}{\left|[\overrightarrow{r_{u_1}}, \overrightarrow{r_{u_2}}, ..., \overrightarrow{r_{u_n}}]\right|}. \qquad (1.2.10)$$

Это нормаль является аналогом евклидовой нормали.

По аналогии евклидова пространства определяется вторая квадратичная форма поверхности, равная скалярному произведению вектора дифференциала второго порядка $d^2\vec{r}$ на нормаль поверхности. Так как мы рассматриваем две нормали поверхности, $\overrightarrow{n_m}$ особой нормаль и $\vec{n}$ нормаль, имеем следующие виды вторых квадратичных форм

$$II = (d^2 r, \vec{N}) = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} du_i du_j, \qquad (1.2.11)$$

здесь D_{ij} – коэффициент второй квадратичной формы и вычисляется:

1) Если $\vec{N} = \overrightarrow{n_m}$, то $D_{ij} = \dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial u_i \partial u_j}$

2) Если $\vec{N} = \vec{n}$, то $D_{ij} = (r_{u_i u_j}, \vec{n})$

В частности, если поверхность задана уравнением

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (1.2.12)$$

где $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R_n$, то

$$II = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_i \partial x_j} du_i du_j. \qquad (1.2.13)$$

Пусть Φ_1 и Φ_2 –регулярные поверхности.

Теорема 1.2.1. Если регулярные поверхности Φ_1 и Φ_2 параметризованы так, что коэффициенты их первых квадратичных форм пропорциональны $I_{\Phi_1} = \lambda(u_1, u_2, ..., u_n) I_{\Phi_2}$, то отображение одной поверхности на другую, при котором сопоставляются точки с одинаковыми координатами, конформно.

Обратно, если поверхности Φ_1 и Φ_2 параметризованы так, что соответствие точек с одинаковыми координатами конформно, то первые квадратичные формы поверхностей пропорциональны $I_{\Phi_1} = \lambda(u_1, u_2, ..., u_n) I_{\Phi_2}$.

Рассмотрим сечение поверхности с плоскостью. Сечению поверхности F с плоскостью π, то есть нормальную сечению обозначим γ_n.

Определение 1.3.1. Нормальной кривизной k_p поверхности в направлении τ называется кривизна кривой γ_n в точке P.

В изотропном пространстве R_{n+1}^n определяется сфера, как поверхность нормальная кривизна по всем направлением постоянна. Такой поверхностью является поверхность заданная уравнением

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ . \qquad (1.3.2)$$

Определение 1.3.2. Поверхность, заданная уравнением (1.3.2) называется изотропной сферой пространства R_{n+1}^n.

В изотропном пространстве метрическую сферу можно определить, как геометрическое место точек равноудаленных от заданной точки. Определенная таким образом единичная сфера с центром в начале координат имеет уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2 \qquad (1.3.3)$$

Эту сферу называем метрической сферой изотропного пространства R_{n+1}^n .

Средняя и полная кривизна основные геометрические характеристики поверхности. Средняя кривизна поверхности (1.2.6) вычисляется следующим образом

$$H = \frac{\sum_{k,\alpha=1}^{n} D_{k\alpha} g^{k\alpha}}{n}, \qquad (1.3.7)$$

а полная кривизна

$$K = \frac{\det\left|\left(D_{ij}\right)_{i,j=\overline{1.n}}\right|}{\det\left|\left(g_{ij}\right)_{i,j=\overline{1.n}}\right|}. \qquad (1.3.8)$$

Утверждение 1.3.1. Полные кривизны поверхности (1.2.12), определяемые по нормали и особой нормали, взаимно равны $K = K_m$.

Вторая глава диссертации, названная **«Двойственность поверхностей в изотропном пространстве R_{n+1}^n», состоит из трёх параграфов.** В этой главе определяется и исследуется двойственная поверхность к заданной поверхности, содержащейся внутри изотропной сферы. Определена связь между полными кривизнами поверхности и ее двойственного образа.

Рассмотрим изотропную сферу единичного радиуса, заданную уравнением (1.3.2) и $n-$мерную плоскость пространства R^n_{n+1}, не параллельную оси Ox_{n+1}, заданную уравнением

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i + C \tag{2.1.1}$$

пересекающую эту изотропную сферу.
Приведем некоторые свойства сечения сферы (1.3.2) с плоскостью (2.1.1).

Лемма 2.1.2. Сечение изотропной сферы изотропного пространства с плоскостью (2.1.1), всегда является эллипсоидом.

Обозначим через $\Gamma-$сечение изотропной сферы с плоскостью (2.1.1).

Множество касательных $n-$мерных плоскостей изотропной сферы в точках сечения Γ обозначим через $\{\pi\}$.

Теорема 2.1.1. Все касательные плоскости из $\{\pi\}$ изотропной сферы в точках множества Γ пересекаются в одной точке.

Если плоскость пересекающая изотропную сферу, сечением которой образуется множество Γ, задана уравнением (2.1.1), то касательные плоскости к изотропной сфере в точках множество Γ пересекаются в точке с координатами $(A_1, A_2, ..., A_n, -C)$.

Определение 2.2.1. Точку $(A_1, A_2, ..., A_n, -C)$ назовем двойственной точкой плоскости (2.1.1), относительно изотропной сферы.

Пусть в R^n_{n+1} задана поверхность F с уравнением

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2.2.1}$$

Обозначим через L поверхность уровня $x_{n+1} = H$ $(H = const)$ поверхности F.

Рассматриваем класс выпуклых поверхностей $\{H\}$, у которых поверхность уровня $f(x_1, x_2, ..., x_n) = H$ и пересечение плоскости $x_{n+1} = H$ со изотропной сферой совпадают с множества Γ, причем поверхности класса $\{H\}$ содержатся во внутренней области изотропной сферы и однозначно проектируется на область D плоскости $x_{n+1} = 0$.

Лемма 2.2.1. Если поверхность (2.2.1) регулярна, то двойственная точка касательной плоскости имеет координаты

$$\{f'_{x_1};\ f'_{x_2};\ \dots;\ f'_{x_n};\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f'_{x_i} - f\}. \tag{2.2.2}$$

Определение 2.2.2. Поверхность F^* назовём двойственной поверхностью к поверхности F относительно изотропной сферы.

Следствие 2.2.1. Если поверхности F- регулярна, то F^* является поверхностью и задается уравнением

$$\begin{cases} x_i^* = f'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = \overrightarrow{1.n}) \\ x_{n+1}^* = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Теореме 2.2.1. Если поверхность из $F \in \{H\}$, то поверхность F^* также является выпуклой поверхностью однозначно проектирующейся в область $D^* \subset D$.

Так как изотропное пространство самодвойственное, существует проективная двойственность. Можно определить двойственное отображение поверхности из внешней части сферы к внутреннему. При этом плоскостям, не пересекающим изотропную сферу, сопоставляется точка внутренней части изотропной сферы.

Если $F \in \{H\}$ и F^* существует, то справедлива следующая теорема.

Теореме 2.2.2. Двойственной образ поверхности F^* совпадает с поверхностью F, т.е. $F^{**} = F$.

Лемма 2.3.1. Когда полная кривизна поверхности $K = 0$, его двойственный образ является точкой или кривой в трехмерном изотропном пространстве.

Лемма 2.3.2. Между вторыми квадратичными формами поверхности и её двойственным образом существует следующее отношение:

$$II = (-1)^{n+2} II^*.$$

Следствие 2.3.1. В трехмерном пространства вторые квадратичные формы поверхности и её двойственного образа между собой равны, то есть $II = II^*$.

Поверхность F задана уравнением (2.2.1) и K ее полная кривизна отлична от нуля, K^* полная кривизна двойственной поверхности F^* к поверхности F относительно изотропной сферы.

Для полной кривизны поверхности и его двойственной поверхности справедлива следующая.

Теорема 2.3.1. Произведение полной кривизны K поверхности F и полной кривизна K^* двойственней поверхности равна единицу $KK^* = 1$.

Теперь определим формулу средней кривизны поверхности относительно особой нормали поверхности $\vec{n}_m(0,0,1)$. Эту среднюю кривизну назовем особой средней кривизной поверхности.

Теорема 2.3.2. Средняя кривизна определенная относительно нормали и особой нормали равны, т.е. $H_m^* = H^*$.

Рассмотрим поверхность F и ее двойственную поверхность F^*, также поверхности заданные уравнениями $Z_1 = f_u(u,v)$ и $Z_2 = f_v(u,v)$.

Обозначим через Ω следующий определитель

$$\Omega = \begin{vmatrix} f_{uuu} & f_{uvv} \\ f_{uuv} & f_{vvv} \end{vmatrix} = f'''_{uuu} f'''_{vvv} - f'''_{uuv} f'''_{uvv} \ . \qquad (2.3.9)$$

Теорема 2.3.3. Если $\Omega = 0$, то особая полная кривизна поверхности F^* выражается через особыми полными кривизнами поверхностей F, Z_1 и Z_2.

Изучаем класс поверхностей $\{\Phi\}$ заданных уравнением

$$\Phi : \{z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{31}x + 2a_{32}y + a_{33}\}. \qquad (2.3.10)$$

Следствие 2.3.2. Если $\Phi_0 \in \{\Phi\}$, то его полная и особая полная кривизны равны, отличны от нуля.

Следствие 2.3.3. При двойственном отображении асимптотическому направлению поверхности F – соответствует асимптотическое направление F^*.

Теорема 2.3.4. Если F - минимальная поверхность, то двойственное отображение будет конформным.

В третьей главе диссертации, названной **«Восстановление поверхности с заданной геометрической характеристикой и решение уравнения Монжа-Ампера» состоит из трех параграфов.** В этой главе изучается некоторые задачи геометрии «в целом» в изотропном пространстве. Доказана эквивалентность следующих задач: проблемы существования поверхности относительно внешней кривизны, условной внешней кривизны и полной кривизны. Выявлен класс решений уравнения Монжа-Ампера. Найдены уравнения поверхности, обладающей заданной функцией полной кривизны в этом классе поверхностей переноса.

В общем поверхность переноса задается векторным уравнением:

$$\vec{r}(u,v) = \vec{\alpha}(u) + \vec{\beta}(v) \tag{3.1.1}$$

где $\vec{\alpha}(u)$; $\vec{\beta}(v)$ – векторные уравнения.

1-Случай. Когда поверхность однозначно проектируется на плоскости Oxy в изотропном пространстве:

$$\vec{r}(u,v) = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + (f(u) + g(v)) \cdot \vec{k}. \tag{3.1.2}$$

Соответственно, полная и средняя кривизна двойственной поверхности

$$K^* = \frac{1}{f''_{uu}(u) \cdot g''_{vv}(v)}, \tag{3.1.3}$$

$$H^* = \frac{f''_{uu}(u) + g''_{vv}(v)}{f''_{uu}(u) g''_{vv}(v)}. \tag{3.1.4}$$

2-Случай. Когда поверхность переноса взаимно однозначно проектируется, на плоскость Oxz. Напомним, что плоскость является галлиевой плоскостью. Тогда векторное уравнение поверхности переноса имеет вид:

$$\vec{r}(u,v) = u \cdot \vec{i} + (f(u) + g(v)) \cdot \vec{j} + v \cdot \vec{k}. \tag{3.1.5}$$

Соответственно полная и средняя кривизна двойственной поверхности переноса

$$K^* = \frac{g_v'^4(v)}{f''_{uu}(u) \cdot g''_{vv}(v)}, \tag{3.1.6}$$

$$H^* = \frac{f''_{uu}(u) g_v'^3(v) + g'_v(v) g''_{vv}(v)\left(1 + f_u'^2(u)\right)}{2 f''_{uu}(u) g''_{vv}(v)} \tag{3.1.7}$$

3-Случай. Когда поверхность однозначно проектируется на плоскость Oyz и параметры выбраны специальным образом:

$$\vec{r}(u,v)=\frac{1}{2}\Big(\big(f(u)+g(v)\big)\vec{i}+(u-v+\pi)\vec{j}+(u+v)\vec{k}\Big). \qquad (3.1.8)$$

Соответственно полная и средняя кривизна двойственной поверхности переноса

$$K^*=\frac{\big(f_u'(u)+g_v'(v)\big)^4}{16f_{uu}''(u)\cdot g_{vv}''(v)}, \qquad (3.1.10)$$

$$H^*=\frac{\big(f_u'(u)+g_v'(v)\big)\Big(f_{uu}''(u)\big(1+g_v'^2(v)\big)+g_{vv}''(v)\big(1+f_u'^2(u)\big)\Big)}{16f_{uu}''(u)\cdot g_{vv}''(v)}\ . \qquad (3.1.11)$$

При условии $f'(u)+g'(u)\neq 0$ и $f'(u)\neq cons,\quad g'(u)\neq cons$.

В работе М.С.Лоне и М.К.Карасен задача существования поверхностей переноса решена, когда $H^*=const$.

Мы эту задачу решаем, когда задана средняя кривизна H^* его двойственной поверхности является конкретно заданная функция.

Пусть

$$H^*=\varphi(u)+\psi(v) \qquad (3.1.12)$$

Функция, определенная на области $D\subset R_2$ и $\varphi(u),\ \psi(v)$-непрерывные функции.

В 1-случае справедлива следующая теорема:

Теорема 3.1.1. H^*- средняя кривизна поверхности F^*, то уравнение поверхности (3.1.2) имеет вид:

1) $H^*=0$, то поверхность F имеет уравнение $\vec{r_\lambda}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+(\frac{\lambda}{2}u^2-\frac{\lambda}{2}v^2+C_1u+C_2v+C)\vec{k}$.

2) $H^*=C_0\ \ (C_0\neq 0,\ C_0=const)$, то поверхность F имеет уравнение $\vec{r_\lambda}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+(\frac{u^2}{2\lambda}+\frac{v^2}{2(2C_0-\lambda)}+C_1u+C_2v+C)\vec{k}$.

3) $H^*=\varphi(u)+\psi(v)$, то поверхность F имеет уравнение

$$\vec{r_\lambda}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+\left(\int\left[\int\frac{du}{\lambda+2\varphi(u)}\right]du+\int\left[\int\frac{dv}{2\psi(v)-\lambda}\right]dv+C_1u+C_2v+C\right)\vec{k}. \ (3.1.13)$$

Во втором случае получаем следующую теорему.

Задача существования поверхности по заданной средней кривизней двойственной поверхности, во втором случае, т.е. поверхность принадлежит в классе поверхностей заданной уравнением (3.1.5), имеет решение только тогда, когда $H^*=0$ и $H^*=C\ (C=const)$.

Лемма 3.1.1. Если $H^*=\psi(v)$, то уравнение поверхности F для второго случая имеет вид:

$$\vec{r_\lambda}(u,v)=u\cdot\vec{i}+\left(-\lambda\ln\left|\cos\left(\frac{u}{\lambda}+C_1\right)\right|+\int\mu(v)dv+C_2\right)\cdot\vec{j}+v\cdot\vec{k}, \qquad (3.1.15)$$

где $\mu(v)$ решение уравнения $\mu'(v)\big(2\psi(v)-\lambda\mu(v)\big)-\mu^3(v)=0$.

В третьем варианте, когда поверхность рассматривается в классе функций заданных уравнением (3.1.8), задача существования поверхности по заданной средней кривизной двойственной поверхности имеет решение когда

$$H^* = \left(\eta(u) + \mu(v)\right)\left(\xi(u) + \rho(v)\right). \qquad (3.1.16)$$

Теорема 3.1.3. Когда H^* средняя кривизна двойственной поверхности заданная функцией (3.1.16), существует поверхность заданная уравнением типа (3.1.8), если функции $\eta(u), \mu(v), \xi(u), \rho(v)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1+\eta(u)}{\eta'(u)} = 16\xi(u), \quad \frac{1+\mu(v)}{\mu'(v)} = 16\rho(v).$$

Пусть

$$K^* = \varphi(u) \cdot \psi(v) \neq 0 \qquad (3.2.1)$$

функция, определенная в области $D \subset R_2$ и $\varphi(u)$, $\psi(v)$ - непрерывные функции, отличные от нуля.

В 1-случае справедлива следующая лемма:

Лемма 3.2.1. Если дано функция $K^* = \varphi(u)\psi(v)$, то существует поверхность

$$\vec{r}_\lambda(u,v) = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + \left(\int \left[\int \frac{1}{\lambda \cdot \varphi(u)} du + C_1 \right] du + \int \left[\int \frac{\lambda}{\psi(v)} dv + C_2 \right] dv + C \right) \cdot \vec{k} \qquad (3.2.2)$$

для которого она является полной кривизной, двойственного отображения, где C_1, C_2, C - постоянные числа и $\varphi(u), \quad \psi(v) \in C^2(D)$.

Теорема 3.2.1. Когда поверхность 1-случая и $K^* = C_0 = const \neq 0$, то поверхность имеет уравнение:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (\frac{C_o}{2}u^2 + \frac{1}{2C_0}v^2 + C_1 u + C_2 v + C)\vec{k}$$

Если полная кривизна двойственной поверхности задается (3.2.1), то уравнение поверхности задается формулой (3.2.2).

Если полная кривизна поверхности $K^* = K^*(u,v) \neq \varphi(u)\psi(v)$, заданная в виде произвольной не разделяющейся переменными функцией, то задача не имеет решения.

Следствие 3.2.1. Если K^* задаетса виде (3.2.1), то существует поверхность переноса F, в области $D = \{a \leq x, b \leq y : a,b \in R\}$ для которого K является полной кривизной. Причем

$$F : \left\{ \left(x, y, \lambda \int_a^x (x-t)\varphi(t)dt + \frac{1}{\lambda}\int_b^y (y-\xi)\psi(\xi)d\xi \right) : (x,y) \in D \right\}.$$

Теорема 3.2.2. Если дана функция $K^* = \varphi(u)\psi(v)$ то существует поверхность

$$\vec{r_\lambda}(u,v)=u\cdot\vec{i}+\left(\int\left[\int\lambda\varphi(u)du+C_1\right]du+\int\left[-\frac{1}{\frac{3}{\lambda}\int\frac{1}{\psi(v)}dv+C_2}\right]dv+C\right)\cdot\vec{j}+v\cdot\vec{k} \quad (3.2.6)$$

для которой функция K^* является полной кривизной двойственного отображения, где $C_{1,}\,C_{2,}\,C,$-произволение числа и $\varphi(u),\quad \psi(v)\in C^2(D)$.

Теорема 3.2.3. Если дана функция $K^*=\varphi(u)\psi(v)$, то существует поверхность

$$\vec{r_\lambda}(u,v)=\frac{1}{2}\left(\int\left[\int\frac{16\lambda^4}{\varphi(u)}du+C_1\right]du+\int\left[\int\frac{16\lambda^4}{\psi(v)}dv+C_2\right]dv+C\right)\cdot\vec{i}+\frac{1}{2}(u-v+\pi)\cdot\vec{j}+\frac{1}{2}(u+v)\cdot\vec{k} \quad (3.2.7)$$

для которой K^* является полной кривизной, двойственного отображения, где $C_1,C_2,C-$произволение, постоянные числа и $\varphi(u),\quad \psi(v)\in C^2(D)$.

Можно ввести аналог внешней кривизны поверхности в изотропном пространстве, мы назовем этот аналог условной внешней кривизной.

Мы рассмотрим некоторые задачи, связанные с внешней и полной кривизной поверхности в изотропном пространстве R_3^2. Изучаемые задачи связаны с решением уравнения Монжа-Ампера. Мы уделяем основное внимание геометрическому смыслу решению уравнения Монжа-Ампера.

Если поверхность F однозначно проектирующаяся на Oxy регулярная поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$ то её полная кривизна вычисляется по формуле

$$K=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2. \quad (3.3.1)$$

Когда поверхность регулярна, сферическое отображение будет однозначным. Множеству точек $M\subset F$ соответствует некоторое множество точек M' на метрической сфере изотропного пространства.

Определение 3.3.1. Площадь (меру) $S(M')$ множества M' на метрической сфере изотропного пространства назовем внешней кривизной множества $M\in F$ и обозначим её $\omega_F(M)=S(M')$.

Пусть $M\subset F$ поверхность изотропного пространства и $M^*\subset F^*$его двойственный образ, то есть множество соответствующее по двойственности относительно изотропной сферы.

Определение 3.3.2. Площадь (меру) множества $M^*\subset F^*$ назовем условной внешней кривизной множества $M\subset F$ и обозначим $\mu_F(M)=S(M^*)$.

В Евклидовом пространстве – рассматривается задача о существовании и единственности поверхности по заданной функции полной кривизны $K(u,v)$ и по заданной функции внешней кривизны $\omega_F(M)$. В изотропном пространстве к этим задачам можно добавить третью задачу о существовании поверхности по заданной функции условной кривизне $\mu_F(M)$. Но можно установить связь между этими задачами, которая формулируется в следующей теореме.

Теорема 3.3.1. Задачи существования поверхности по полной кривизне, по внешней кривизне и по условной внешней кривизне в изотропном пространстве являются эквивалентными.

Приведем некоторые утверждения, связанные с решением уравнения Монжа-Ампера и движением изотропного пространства.

Лемма 3.3.1. Поверхность определяемая функцией $z = f(x, y) + C_1 x + C_2 y + C$, получается движением изотропного пространства от поверхности $z = f(x, y)$.

Следствие 3.3.1. Поверхность $f(x, y) = \dfrac{a}{2}(x^2 - y^2) + C_1 x + C_2 y + C$ также является седловой поверхностью постоянной отрицательной кривизны.

Теорема 3.3.2. Для того чтобы полная кривизна поверхности $\chi = \chi(U)$ била равна нулю, необходимо и достаточна $U = U(x, y)$ имела полную кривизну равную нулю и выполнялось условие

$$U_x'^2 U_{yy}'' + U_{xx}'' U_y'^2 - 2U_x' U_y' U_{xy}'' = 0, \qquad (3.3.5)$$

где $\chi(U) \in C^2$ любая функция.

Следствие 3.3.2. Функция $U(x, y) = C_1 x + C_2 y + C$ удовлетворяет условию теоремы. Значит функции $\chi = \chi(C_1 x + C_2 y + C)$ имеют нулевую полную кривизну.

Рассмотрим функцию $z = z(x, y)$, являющая суммой двух регулярных функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$, то есть

$$z(x, y) = U(x, y) + V(x, y). \qquad (3.3.6)$$

Исследуем связь между полными кривизнами поверхностей $z(x, y)$, $U(x, y)$ и $V(x, y)$. Полные кривизна поверхностей обозначим через K, K_1, K_2.

Теорема 3.3.3. Если функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ удовлетворяет следующую дифференциальному равенству

$$U_{xx} V_{yy} + U_{yy} V_{xx} - 2U_{xy} V_{xy} = 0, \qquad (3.3.7)$$

то полная кривизна поверхности $z(x, y)$ является суммой полной кривизны этих поверхностей,

$$K = K_1 + K_2.$$

Следствие 3.3.3. Если функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ удовлетворяют условию Коши-Римана то они удовлетворяют условию (3.3.7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению теории поверхности в изотропном пространстве.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказано, что изотропная пространства является подпространством пространства Минковского;
2. Доказана равенства вторых квадратичных форм заданной поверхности и двойственной поверхности;
3. Доказано, что равенство средних кривизн двойственных поверхностей, найденных с помощью специальной нормали и аналога Евклидовой нормали;
4. Доказано эквивалентность задач существования поверхности по внешней кривизне, по условной внешней кривизне и по полной кривизне.
5. Доказано, что теорема о существовании поверхности по заданной полной и средней кривизной в изотропном пространстве R_3^2.
6. Используя движение изотропного пространства изучена геометрическая свойства решении уравнения Монжа-Ампера.
7. Найдена аналог условии Коши-Римана для действительных поверхностей изотропного пространства.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

ISMOILOV SHERZODBEK SHOKIRJON UGLI

SURFACE THEORY IN ISOTROPIC SPACE

01.01.04 – Geometry and topology

ABSTRACT
OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2022 year

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.3.PhD/FM750.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Artikbaev Abdullaaziz** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Tuzhilin Alexey Avgustinovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Zaitov Adilbek Atakhanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Leading organization:	**Tashkent state pedagogical university named after Nizami**

Defense will take place «____» _____________2022 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.3/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 227-12-24, fax: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2022 year
(Mailing report № ___________on «____» ______________2022 year)

A. Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K. Mamadaliyev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

A.Ya.Narmanov
Chairman of Scientific Seminar
under Scientific Council on award
of scientific degrees, D.F.-M.S.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is the study of the theory of surfaces in isotropic space and the solution of problems of geometry "in the large" associated with the geometric characteristics of the dual surface.

The object of the research work is surfaces in isotropic space, differential characteristics of surfaces, motions of isotropic space, dual surface with respect to the sphere.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

the geometric characteristics of lines and surfaces with respect to a special normal and an analogue of the Euclidean normal in a multidimensional isotropic space are determined, and formulas for calculating;

defined duality by mapping a point to a plane intersecting an isotropic sphere, by using this dual surface to a surface contained within an isotropic sphere;

it is proved that the product of the total curvature of the dual surface by the total curvature of given surface is equal to one, the mean curvatures of dual surface found using a special normal and an analogue of the Euclidean normal are equal to;

the equivalence of the problems of the existence of surfaces with respect to the external curvature and total curvature of the surface is proved and explicit equations of surfaces with respect to given geometric characteristics are found.

Implementation of the research results. The results obtained were used in the following research projects:

The results, the dual mapping relative to the sphere in isotropic space, and the resulting surface in this reflection, and its geometric characteristics, was used to solve the problem of energy minimization in the physical processes of the fundamental project. ФЗМВ-20160914085438 - “Investigation of the energy spectra of semiconductor compounds and heavily alloyed semiconductors.” (Namangan Institute of Engineering and Technology, Uzbekistan, certificate № 1927-024 dated September 16, 2022). As a result, in the case of using the dual reflection of an isotropic space, it was possible to consider the issue of minimizing the energy by passing from the Lagrange function to the Hamilton function;

The results obtained on the preservation of the geometric characteristics of the surface under the action of asymmetric matrices that determine the movement in isotropic space were used in the solution of matrix nonlinear evolution equations of the fundamental project OT-Ф4-04(05)- "Application of the spectral method to the solution of matrix nonlinear evolution equations ; Biomechanics of the cardiovascular system” (Urgench State University, Uzbekistan, certificate № 04-196/10 dated September 5, 2022). As a result, nonlinear equations associated with non-orthogonal and non-symmetric matrices, the motion of an isotropic space, and the properties of surfaces belonging to this space depend on the total curvature, and positive indefinite metric, which made it possible to solve nonlinear differential equations, as well as to determine the properties of the solution by geometric way.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 91 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Ismoilov Sh.Sh., Geometry of the Monge - Ampere equation in an isotropic space // Uzbek mathematical journal, Volume-66, Issue-2, 2022, pp. 66-77, (01.00.00; №6).
2. Artikbaev A. Ismoilov Sh.,Sh., Special mean and total curvature of a dual surface in isotropic spaces // International electronic journal of geometry, Volume-15, Issue-1, 2022, pp. 1-10. (3.Scopus, Cite Score IF=0.3)
3. Artikbayev A. Ismoilov Sh.Sh., Surface recovering by a give total and mean curvature in isotropic space // Palestine journal of mathematics, Volume-11, Issue-3, 2022, pp. 351-361. (3.Scopus, Cite Score IF=0.2) s
4. Исмоилов Ш.Ш. Свойства двойственной поверхности в многомерном изотропном пространстве, Physical and mathematical sciences. 2022; Volume 3, Issue 1, Tashkent, pp.47-58. (№35. CroccRef IF(SJIF)=5.1).
5. Artikbayev A. Ismoilov Sh.Sh., The dual surfaces of an isotropic space // Bulletin of the Institute of Mathematics, Volume - 4, Issue-4, 2021, pp. 1-8. (01.00.00; №6).
6. Sultanov B., Ismoilov Sh.Sh, Cyclic surfaces in pseudo-euclidean space // International Journal of Statistics and Applied Mathematics, Volume-5, Issue-1, 2020, pp. 28-31. (№ 12. Index Copernicus. IF(RJIF=0,53)).
7. Артикбаев А. Исмоилов Ш.Ш., Сечение сферы с плоскостью в изотропном пространстве, Scientific journal of Samarkand state university, № 5\123, 2020, стр. 84-89. (01.00.00; №2).

II бўлим (2 часть; part 2)

8. Исмоилов Ш.Ш., О существование решение уравнения Монжа-Ампера внутри сферы изотропного пространства // Тезисы международной конференции Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий, Ташкент, 14-15 ноябрь, 2019 г, стр. 123-124.
9. Артикбаев А., Исмоилов Ш.Ш., О применение решения уравнение Монжа-Ампера в экономике // Тезисы международной конференции Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий, Ташкент, 14-15 ноябрь, 2019 г, стр. 98-99.
10. Исмоилов Ш.Ш., Средняя и полная кривизна поверхности в изотропного пространства // Тезисы докладов международной научной конференции на тему Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики, Фергана, 12-13 март, 2020, стр. 308-311.
11. Artikbaev A., Ibodillaeva N.M., Ismoilov Sh., Non-euclidean geometry and existence of the solutoin of the Monj-Ampere equation // Abstracts of the International Scientific online conference "Frontier in mathematics and computer science". Tashkent, october 12-15, 2020, pp. 60-62.

12. Artikbaev A. Ismoilov Sh., Recovery of the surface by total curvature in isotropic space // Математиканинг замонавий масалалари:муаммолар ва ечимлар мавзусидаги республика миқёсидаги илмий онлайн конференция материаллари тўплами, Термиз, 21-23 октябр, 2020, стр. 34-36.
13. Исмоилов Ш.Ш., Движения изотропного пространства и решения уравнения Монж-Ампера // Proceeding of scientific conference "Actual problems of stochastic analysis" Tashkent, 20-21 февраль, 2021, pp. 304-305.
14. Ismoilov Sh., Special mean and total curvature of a dual surface in isotropic space // Abstracts of the International conference "Algebraic and geometric methods of analysis", Odesa, Ukraine, may 25-28, 2021, pp. 57-58.
15. Artikbaev A., Ismoilov Sh., Existence of a dual surface for a given metric // Abstracts of the International scientific conference "Problems of Modern Mathematics" 70-th anniversary of A.A. Borubaev, june 16-19, 2021, Bishkek, Kyrgyzstan, p. 28.
16. Артикбаев А., Исмоилов Ш.Ш., Двойственные поверхности (n+1)-мерного изотропного пространства // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых Сарымсаковские чтения, Ташкент, Узбекистан, 16–18 сентября 2021, стр 74-76.
17. Исмоилов Ш.Ш., Существование поверхности в изотропном поверхностей с заданной средней кривизной двойственного образа // Классическая и современная геометрия , Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Атанасяна, Москва, Россия, 1–4 ноября, 2021, стр. 78-80.
18. Ismoilov Sh., The dual reflection in an isotropic space preserves the asymptotic direction // Collection materials of the Republican scientific and practical conference "Theoretical foundations and applied problems of modern mathematics", Andijan, March 28, 2022, pp. 348-350.
19. Исмоилов Ш.Ш., Свойства двойственной поверхности в многомерном изотропном пространстве // O'zbekiston Milliy universiteti talabalar va ilmiy tadqiqotchilarining ilmiy konferensiyasi, Toshkent, 28-aprel, 2022, стр. 191-193.
20. Ismoilov Sh., Relation between geodesic mapping and dual mapping in isotropic space // Abstracts of the International scientific and practical conference "Modern problems of applied mathematics and information technology", Bukhara, may 11-12, 2022, pp. 92-93.
21. Ismoilov Sh., Theorems on a surface in isotropic space // Abstracts of the conference "New theorems of young mathematicians-2022", Namangan, Uzbekistan, may 13-14, 2022, pp. 39-41.