В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

УМИРХОНОВ МАСЪУДХОН ТЎРАХОН ЎҒЛИ ҲАСАНЗОДА

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН НОМАЪЛУМ ЧЕГАРАЛИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

УДК: 517.956/.3

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

УМИРХОНОВ МАСЪУДХОН ТЎРАХОН ЎҒЛИ ҲАСАНЗОДА

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН НОМАЪЛУМ ЧЕГАРАЛИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент–2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.4.PhD/FM306 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И. Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгашнинг веб-саҳифасида (http://kengash.mathinst.uz/) ва «ZiyonNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Тахиров Жозил Останович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ашуров Равшан Раджабович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Бабаджанов Базар Атаджанович физика-математика фанлари доктори, доцент
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси ЎзР ФА қошидаги В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил « 27 » декабр соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871) 207-91-40, website: www.mathinst.uz, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (154-рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871) 207-91-40.

Диссертация автореферати 2022 йил « 7 » декабр куни тарқатилди.
(2022 йил « 7 » декабрдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А. Розиков
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К. Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

А.А. Азамов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги Илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Дунё миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий, ҳамда амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда номаълум чегарали гиперболик масалаларни тадқиқ қилишни тақозо этади. Номаълум чегарали масалалар - бу иссиқлик ўтказувчанлиги ва яширин иссиқлик энергияси алмашинуви туфайли соф материалларнинг фазавий алмашишларини моделлаштирадиган ҳаракатланувчи чегарали масалалардир. Ҳаракатланувчи чегаранинг жойлашуви олдиндан маълум бўлмагани ва уни температура билан бирга топиш кераклиги сабабли, бу масалалар чизиқсиз бўлади. Ушбу масалаларни ечиш мураккаб амалиётларни бажариш билан боғлиқ бўлиб, кўплаб янги назарий натижаларга ва мавжуд муаммолар бўйича янги истиқболли ишланмаларга, ҳамда физика, биология ва техникада кенг қўлланиладиган аниқ натижаларга олиб келади.

Ҳозирги вақтда табиий жараёнларни янада адекват тавсифловчи гиперболик тенгламалар ва тенгламалар системалари учун номаълум чегарали математик моделлар қуриш муҳим аҳамият касб этмоқда. Натижада ўрганилаётган йўналиш замонавий амалий математиканинг жадал ривожланаётган қисмига айланиб улгурди. Шунинг учун вақтнинг берилган қийматларида номаълум чегара табиатини ўрганиш ва унинг асосида масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини кўрсатиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда инновацион характердаги фундаментал тадқиқотларга катта эътибор қаратилмоқда. Илм-фан олдида фундаментал тадқиқотларни амалиётга яқинлаштириш вазифаси турибди. Бу вазифани бажаришда гиперболик тенгламалар учун номаълум чегарали масалалар назарияси учун муҳим рол ажратилган. Математика фанининг устувор йўналишлари, яъни дифференциал тенгламалар ва математик физика, амалий математика ва математик моделлаштириш бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш Математика институтининг асосий вазифаларидан биридир[1].

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги №ПҚ-2909 «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида» ги ва 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский

[1]Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон қарори «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»

номидаги математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологияларни ривожлантиришнинг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация иши республика фан ва технологияларни ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Фазалар алмашиши динамикасини назарий жиҳатдан кўриб чиқиш Стефан масаласининг турли хил кўринишларига олиб келади. Стефан масаласининг классик кўриниши эриш ёки қотиш каби фазалар алмашиниш жараёнлари учун ўтган асрда ишлаб чиқилган бўлиб, бу масала номаълум чегарали, қайсики қаттиқ ва суюқ фазаларни ажратиб турувчи ва ҳаракатланувчи, соҳада иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига келтирилади. Фазалар орасидаги чегарада Стефан шарти қаноатлантирилади.

Номаълум чегарали масалалар назарияси асослари (асосан параболик ва эллиптик тенгламалар учун) A.Friedman, L.Rubinstein, J.Cannon, J.Hill, W.Kyner (USA), A.Fasano, M.Primecerio (Italy), А. Мейрманов, И. Данилюк (Россия) ва бошқаларнинг тадқиқот ишларида қурилган ва ривожлантирилган. Стефан масаласига доир кўплаб мақолалар параболик тенгламалар учун умумлашган ечимларни ўрганишга бағишланган. Бу ерда О.Олейник, С.Каменномостская, И.Данилюк, А.Мейрманов, A. Friedman, L.Caffarelli, L.Evans, E.Hanzawa, G.Duvant, A.Visintin ва бошқаларнинг натижаларини алоҳида таъкидлаш жоиз. 1980-йиллар бошларидан номаълум чегарали гиперболик типдаги масалалар ҳам ўрганилиб келинмоқда. Бу масалалар релаксацион хусусиятга эга бўлган муҳитларда иссиқлик тарқалиш жараёнларини тавсифлайди. Номаълум чегарали гиперболик масалаларга доир муҳим натижалар A.Friedman, L.Caffarelli, L.Evans, C.Hill, A.Terracina, А.Мышкис, В.Кирилич, Р. Хубиев, Т. Жўраев, Ж.Тахиров ва бошқаларнинг ишларида олинган.

Сўнгги ўн йилликларда биз ушбу йўналишнинг бошқа турли соҳалардаги номаълум чегарали масалаларга олиб келувчи жараёнларни ўрганиши натижасида тез суръатда кенгаётганини кўрмоқдамиз.Масалан, математик биологияда ва биотиббиётда улар популяциялар ёки ўсимталарнинг ҳаракати фронт чизиғини кўрсатади; суюқлик ва газ механикаси соҳасида кўплаб янги масалалар пайдо бўлди. Ҳозирги вақтда дунёнинг кўпгина етакчи илмий марказларида номаълум чегарали чизиқсиз масалалар бўйича фаол илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда ва улар турли физик, биотиббий ва шунга ўхшаш жараёнларни математик моделлаштиришда кенг қўлланилмоқда. Бу ерда A.Friedman, C.Pao, Y. Du, X.Chen, Z. Lin, C. Li ва бошқа шу соҳада етакчи бўлган олимларларнинг илмий натижаларини алоҳида таъкидлашимиз мумкин. Энди биз ҳам бу кучли илмий оқимга қўшилдик.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган илмий тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти ФА-Атех-2018-149 «Ер усти атмосфераси ва кўп қатламли муҳитларда зарарли моддаларнинг диффузияси ва конвектив кўчишини тадқиқ қилиш учун самарадор ҳисоблаш алгоритмлари ва дастурий мажмуаларни яратиш» (2018-2020) амалий лойиҳаси бўйича ва ОТ-Ф-4-85 «Биология ва экологиянинг замонавий муаммоларини ўрганиш учун чизиқсиз математик моделлар ва самарали ҳисоблаш алгоритмларини ишлаб чиқиш» (2017-2020) фундаментал лойиҳаси, шунингдек, «Медико-биологик ва физик жараёнларнинг математик моделларини ишлаб чиқиш ва такомиллаштириш, тадқиқот, мониторинг ва прогнозлашнинг математик усулларини қуриш» Математика институти илмий тадқиқот йўналиши доирасида тадқиқот режасига мувофиқ амалга оширилди.

Тадқиқотнинг мақсади релаксацион хусусиятга эга бўлган муҳитларда жараёнларнинг математик моделларини қуриш, ривожлантириш ва номаълум чегарали гиперболик масалаларни ечиш методларини ишлаб чиқишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

кўчишнинг релаксацион тенгламаси учун номаълум чегарали масалани тадқиқ этиш ва унинг тўлқинсимон ечимларини қуриш;

суюқлик оқими учун Максвелл масаласини тадқиқ этиш, яни ечиш усулларини ишлаб чиқиш, қидирилаётган функциялар учун априор баҳолар ўрнатиш ва ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги теоремаларини исботлаш;

ёпишқоқ-пластик деформация масаласини тадқиқ этиш;

газо - динамиканинг бир ва икки фазали гиперболик моделларини тадқиқ этиш, яъни вақтнинг маълум қийматларида номаълум чегара табиатини ўрганиш ва ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги теоремаларини исботлаш.

Тадқиқот объекти. Туташ муҳитлар механикаси ва релаксацион хусусиятга эга муҳитлардаги жараёнларнинг турли номаълум чегарали математик моделларидан иборат.

Тадқиқот предмети. Гиперболик ва параболик тегламалар учун номаълум чегарали масалалар назарияси,математик физика тенгламалари ва математик моделлаштириш фанлари.

Тадқиқоднинг усуллари. Диссертацияда математик таҳлил элементлари, дифференциал тенгламалар ва математик физика ва математик моделлаштириш методларидан фойдаланилган**.**

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

кўчишнинг учинчи тартибли релаксацион тенгламаси учун бир қатор муҳим махсусликларга эга номаълум чегарали математик модел қурилган ва тенгламанинг тўлқинсимон ечимининг мавжудлиги исботланган;

номаълум чегара сифатида доимий босим градиенти билан бошқариладиган каналнинг ички ядроси ва ташқи қатламини ажратиб турувчи сирт қараладиган, Максвеллнинг гиперболик телеграф тенгламаси ва Олдройд-Б тенгламасини ўз ичига олувчи масала ягона ечимга эга эканлиги исботланган;

ёпишқоқ-пластик деформация жараёни модели бўлган, коэффициентлари номаълум чегара устида узилувчи гиперболик тенгламалар системасини чизиқли дифференциал оператор бўлган ҳол учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

газо - динамиканинг бир ва икки фазали гиперболик моделлари тадқиқ этилди, яъни вақтнинг берилган ва чексиз қийматларида номаълум чегара табиатини ўрганилди ва ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги теоремалари исботланди.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

гиперболик тенгламалар ва тенгламалар системалари учун номаълум чегарали масалалар кўринишидаги модификация қилинган математик моделлар, шунингдек тавсия этилган тадқиқот методлари релаксацион хусусиятга эга муҳитдаги турли физик жараёнларга қўлланилиши билан изоҳланади;

номаълум чегарали гиперболик масалалар газ-гидродинамика ва ёпишқоқ-пластик деформация масалаларида масса кўчиши жараёнларига қўлланилиши мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, дифференциал тенгламалар ва математик физика, математик моделлаштириш методлари ва амалий математиканинг бошқа янги натижаларидан фойдаланган ҳолда математик фикрлашнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва математик физикада, номаълум чегарали масалалар назариясида ва турли физик жараёнларнинг математик моделларини қуришда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларнинг амалий аҳамияти физика ва биотиббиётдаги жараёнлар моделларини қуришда қўллаш мумкинлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системаси учун номаълум чегарали масалалар бўйича олинган натижалар асосида:

кўчишнинг учинчи тартибли релаксацион тенгламаси учун бир қатор муҳим махсусликларга эга номаълум чегарали математик моделидан МД-758.2022.1.1 рақамли «Тебраниш ва тўйинганлик жараёнларини ўрганиш мақсадида каср тартибли динамикасининг математик моделларини ривожлантириш» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида номаълум чегарали масса алмашинуви масалаларини ечишда фойдаланилган (Камчатка Давлат университетининг 2022 йил 28 ноябрдаги №42-12-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланиши тупроқ-атмосфера тизимида радон узатиш жараёнини таҳлил қилиш имконини берган;

номаълум чегара сифатида доимий босим градиенти билан бошқариладиган каналнинг ички ядроси ва ташқи қатламни ажратиб турувчи сирт қараладиган Максвеллнинг гиперболик телеграф тенгламасини ўз ичига олувчи масала ечимидан ЁОТ-Фтех-2018-149 рақамли «Чизиқсиз чегаравий шартлар билан берилган икки компонентли муҳитларда фильтрация жараёнини математик моделлаштириш» мавзусидаги фундаментал лойиҳада икки компонентли муҳитларда фильтрация системаларининг автомодель ечимларини қуришда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университетининг 2022 йил 8 октабрдаги №04/11-6174-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши чизиқсиз чегаравий шартлар билан берилган икки компонентли муҳитларда фильтрация системаларининг автомодель ечимларнинг вақтнинг чекланмаган қийматларида табиатини аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертация ишининг асосий натижалари 5 та ҳалқаро ва 1 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 12 та илмий иш чоп этилган бўлиб, шулардан, 6 таси Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари (PhD) асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда, жумладан 1 таси хорижий ва 5 таси республика илмий журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 105 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялар ривожланишининг устувор йўналишларига мувофиқлиги кўрсатилган, ушбу диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотларга умумий таҳлил берилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси кўрсатилган, тадқиқотнинг мақсади ва вазифалари келтирилган, тадқиқот объекти ва предмети кўрсатилган, илмий янгилиги ва тадқиқотнинг амалий натижалари тасвирланган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларини амалиётга татбиқ этиш, чоп этилган ишлар ва диссертация тузилиши ҳақида маълумотлар берилган.

Диссертация ишининг «**Гиперболик тенгламалар системаси ва номаълум чегарали масалалар назариясидан баъзи маълумотлар**» деб номланган биринчи бобида тадқиқот натижаларини тақдим этишда фойдаланиладиган баъзи маълум фактлар келтирилган.

Кўриладиган номаълум чегарали барча масалалар чизиқсиз характерга эга бўлганлиги сабабли, ишнинг асосий мақсади априор баҳоларни олиш, ва улар асосида бир қийматли ечилувчанлик ҳақидаги теоремаларни исботлаш (бутун вақт давомида), вақтнинг чегараланмаган қийматларида номаълум чегаралар табиатини ва ечимларнинг айрим хоссаларини ўрганишдан иборатдир.

Диссертациянинг иккинчи боби «**Релаксацион хусусиятга эга муҳитлардаги масалалар**» деб номланиб, кўчишнинг релаксацион тенгламаси учун масалалар ўрганишга бағишланган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида биз кўчишнинг релаксацион тенгламаси учун Флорин типидаги номаълум чегарали масалани ўрганамиз.

Максвелл-Каттанео-Вернотти (МКВ) тенгламасининг энг оддий умумий кўриниши Гюер–Крумхансл (ГК) модели бўлиб, у $\tau q_t + q + k\nabla T - k^2\Delta q = 0$ кўринишга эга бўлади, бу ерда τ-релаксация вақти, k^2-диссипация параметри ва T-температура, q-оқим.

ГК типидаги тенглама $k^2 = 0$ бўлганда МКВ тенгламасини ва $\tau = k^2 = 0$ бўлганда Фурье тенгламасини ўз ичига олади. ГК тенгламасининг бу хусусияти температуранинг тўлқинсимон табиатини ҳам, диффузион табиатини ҳам моделлаштириш имконини беради. Бу q ни йўқотиш учун ички энергия баланси тенгламаси қўлланилганда аниқ кўринади: $\rho c T_t + \nabla \cdot q = 0,$ ρ зичликни ва c иссиқлик сиғимини ҳисобга олсак $\tau T_{tt} + T_t = a\Delta T + k^2\Delta T_t$ тенгликни топамиз, бу ерда $a = \dfrac{k}{\rho c}$ - температура ўтказувчанлик коэффициенти.

$k^2 = \tau a$ бўлган ҳолат Фурьенинг резонанс шарти дейилади, $k^2 < \tau a$ бўлганда жараёнда тўлқинсимон табиат, $k^2 > \tau a$ бўлганда эса диффузион табиат устунлик қилади.

Диссертацияда $a = \dfrac{k^2}{\tau}$ бўлганда $D_H = \{(x,t): 0 < x < s(t), 0 < t \leqslant H\}$ соҳада қуйидаги (1) тенглама учун бошланғич шартсиз ва $s(0) = 0$ бўладиган номаълум чегарали Флорин типидаги коррект чегаравий масалани ўрганамиз

$$T_t + \tau T_{tt} = a(T_{xx} + \tau T_{xxt}). \tag{1}$$

Дастлаб биз $0 < t \leqslant H$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи ва $s(0) = 0,\ s(t) > 0,\ 0 < t < H$ шартларни қаноатлантирувчи $s(t)$ функцияни ва $\bar{D}_H \setminus (0,0)$ соҳада ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлган ва барча $0 \leqslant t \leqslant H$ ларда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи (1) тенгламанинг ечимини топамиз

$$\begin{cases} T_x(0,t) - \alpha T(0,t) = \psi(t), \\ T_x(s(t),t) = 0, \\ T_{xx}(s(t),t) = 0, \\ T(s(t),t) = \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^\eta \bar{q}(s(\xi),\xi)\, d\xi, \end{cases} \tag{2}$$

бу ерда a, τ, α (иссиқлик алмашиш коэффициенти), H - мусбат ўзгармаслар, $\psi(t)$, $\bar{q}(x,t)$-берилган функциялар, бундан ташқари $\psi(0) \neq 0,$ ва $\bar{q}(x,t)$ функция $\{(x,t): 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ t \geqslant 0\}$ соҳада узлуксиз ва $\bar{q}(x,t) < 0$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Шуни таъкидлаш керакки, (1) кўринишдаги тенглама учун Флорин типидаги масала биринчи марта кўрилмоқда.

Қаралаётган Флорин масаласи бир қатор махсус хусусиятлари мавжудлиги билан тавсифланади: $t=0$ бўлганда соҳа $s(0)=0$ нуқтага айланади, яъни номаълум чегара $x=0$ дан бошланади; қидирилаётган $T(x,t)$ функция ва унинг ҳосилалари координата бошида узилишга эга; номаълум чегара учун шартлар ошкормас кўринишда берилган; чегараланмаган вақт оралиғида номаълум чегаранинг табиати номаълум.

Янги $T(x,t)+\tau T_t(x,t)=u(x,t)$ функция киритиб, (1) ва (2) лардан $T(x,t)$ учун қуйидаги масалани оламиз

$$T(x,t)+\tau T_t(x,t)=u(x,t),\quad (x,t)\in D_H,$$
$$T(s(t),t)=\varphi(t),\quad 0\leqslant t\leqslant H,$$

бу ерда $\varphi(t)=\int\limits_0^t d\eta\int\limits_0^\eta \bar{q}(s(\xi),\xi)d\xi$.

Бу масаланинг ечими ($s(t)$, $u(x,t)$ ларни топганимиздан сўнг) қуйидагича бўлади

$$T(x,t)=e^{-\frac{1}{\tau}(t-s^{-1}(x))}\varphi(s^{-1}(x))+\frac{1}{\tau}\int\limits_{s^{-1}x}^{t} e^{-\frac{1}{\tau}(s^{-1}(x)-4)}u(x,\eta)d\eta, \tag{3}$$

бу ерда $s^{-1}(x)$ функция $x=s(t)$ нинг тескари функцияси.

Қуйидаги масалани оламиз: Шундай функцияларни $u(x,t)$, $s(t)$ топингки , $s(t)$ узлуксиз дифференциалланувчи ва $0<t\leqslant H$ бўлганда $s(t)>0$ ва $s(0)=0$, $u(x,t)$ функция ўзининг $u_x(x,t)$ ҳосиласи билан биргаликда $\bar{D}_H\setminus(0,0)$ соҳада узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантиради

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}(x,t),\quad (x,t)\in D_H, \\ u_x(0,t)-\alpha u(0,t)=f(t),\quad 0\leqslant t\leqslant H, \\ u(s(t),t)=\int\limits_0^t q(s(\eta),\eta)d\eta,\quad 0\leqslant t\leqslant H, \\ u_x(s(t),t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant H, \end{cases} \tag{4}$$

бу ерда $f(t)=\tau\psi'(t)+\psi(t),\quad a=1,\quad q(s(t),t)=\tau\bar{q}(s(t),t)+\int\limits_0^t\bar{q}(s(\xi),\xi)d\xi$. Бу масаланинг ечими x ўқидаги l йўқолувчи кесмада берилган бошланғич шартли номаълум чегарали масала ечимининг лимити кўринишида қурилади.

Тадқиқот қуйидаги схема бўйича олиб борилади. Дастлаб берилган масала иккинчи тартибли тенглама учун масалага ўтказилади. Грин функцияси ёрдамида ечимнинг кўриниши топилади. $u(x,t)$ учун баъзи априор баҳолар ўрнатилади, ва шу баҳолардан фойдаланиб ечимнинг ягоналиги исботланади.

Кейинги қадамда бошланғич шартли масала кўрилади, сўнгра у масала Стефан типидаги масалага келтирилади ва уларнинг эквивалентлиги исботланади. Стефан масаласи ечими учун Шаудер типидаги априор баҳолар ўрнатилади ва улар асосида мавжудлик теоремаси исботланади. Шу билан бирга, номаълум чегара учун маълум эгри чизиқлар ёрдамида икки томонлама баҳолар ўрнатилади, бу еса номаълум чегаранинг $t \to 0$ даги табиатини ўрганиш имконини беради.

Ва ниҳоят, вақт чексизга ўсганида номаълум чегара маълум ўзгармас сонга интилиши исботланади.

1-лемма. $f(t)$ *ва* $q(x,t)$ *лар узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлиб,* $f(t) > 0$, $f'(t) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant H$, $q(x,t) < 0$, $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $t \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$ *тенгсизликларни қаноатлантирсин. У ҳолда* D_H *соҳада* $u(x,t) < 0$ *ва* $u_x(x,t) > 0$ *тенгсизликлар бажарилади.*

1-теорема. *Агар 1-лемманинг шартлари ва* $q_x(x,t) < 0$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (4) масаланинг ечими ягонадир.*

2-теорема. *Ушбу* $f(t) > 0$ *тенгсизлик бажарилиб,* $f'(t) > 0$ *ҳосила* $(0,H]$ *оралиқда Гёльдер маъносида узлуксиз бўлсин,* $q(x,t)$ *функция эса ўзининг* $q_x(x,t)$, $q_{xx}(x,t)$, $q_t(x,t)$ *ҳосилалари билан биргаликда* $\{(x,t): 0 \le x \le x_0,\ 0 \le t \le H\}$ *тўртбурчакда узлуксиз бўлиб,* $q(x,t) < 0,$ $q_x(x,t) < 0,$ $q_{xx}(x,t) \le 0,$ $q_t(x,t) \ge 0$ *тенгсизликлар бажарилсин, у ҳолда (4) масаланинг ечими мавжуддир.*

Бундан ташқари $x = s(t)$ номаълум чегара $(0,T]$ интервалда узлуксиз дифференциалланувчи ва $\dot{s}(t) > 0$ ҳосила Гёльдер шартини қаноатлантиради, u_x, u_t, u_{xx}лар эса $\bar{D}_H \setminus (0,0)$ да узлуксиз ва ихтиёрий $\{(x,t): 0 \le x \le s(t),\ 0 < \delta \le t \le H\}$ тўпламда Гёльдер шартини қаноатлантиради.

2-лемма. $\left(U^l(x,t), s_l(t)\right)$ *функциялар жуфти қуйидаги масаланинг ечими бўлсин*

$$\begin{cases} U^l_{xx}(x,t) - U^l_t(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D_{H_l}, \\ U^l(x,0) = \varphi_t'(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ U^l_x(0,t) - \alpha U^l(0,t) = f_l'(t), \quad 0 < t \leqslant H_l, \\ U^l(s_l(t),t) = q(s_l(t),t), \quad 0 \leqslant t \leqslant H_l, \\ U^l_x(s_l(t),t) = -q(s_l(t),t)\dot{s}_l(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant H_l. \end{cases} \tag{5}$$

У ҳолда $\left(u^l(x,t), s_l(t)\right)$, *бу ерда*

$$u^l(x,t) = f_l(t)x + \int_0^x d\xi \int_0^\xi U^l(y,t)dy + (\alpha x + 1)\int_0^t U^l(0,\eta)d\eta + (\alpha x + 1)\varphi_l(0),$$

қуйидаги масаланинг ечими бўлади

$$\begin{cases} u_{xx}^{l} = u_{t}^{l}\left(x,t\right) \in D_{H_l} = \left\{\left(x,t\right): 0 < x < s_l\left(t\right), 0 < t \le H_l\right\}, \\ u^{l}\left(x,0\right) = \varphi_l\left(x\right),\ 0 \le x \le l = s_l\left(0\right), \\ u_{x}^{\,l}\left(0,t\right) - \alpha u^{l}\left(0,t\right) = f_l\left(t\right) = f\left(t\right) + \varepsilon\left(l\right),\ 0 < t \le H_l, \\ u_{x}^{l}\left(s_l\left(t\right),t\right) = 0,\ 0 \le t \le T_l, \\ u^{l}\left(s_l\left(t\right),t\right) = \int\limits_0^t q\left(s_l\left(\eta\right)\ \eta\right)d\eta + \varphi_l\left(l\right), \qquad 0 \le t \le H_l, \end{cases} \tag{6}$$

бу ерда $\varphi_l\left(x\right)$*-чексиз марта дифференциалланувчи функция бўлиб,* $\varphi_l'\left(x\right) \ge 0$, $\varphi_l'''\left(x\right) \ge 0$, $\varphi_l'\left(l\right) = 0$, $\varphi_l''\left(l\right) = q\left(l,0\right)$, $f_l(0) = \varphi_l'(0) - \alpha\varphi_l(0)$ *лар ўринли,* $\varepsilon\left(l\right)$ *эса* l *бўйича монотон ўсувчи функция ва* $l \to 0$ *да* $\varepsilon\left(l\right) \to 0$ *бўлади.*

Кейин, бир қатор леммалар исботланади, уларда қидирилаётган функцияларнинг l бўйича бир ўлчамли априор баҳолари ўрнатилади.

Ва охирида, стандарт ёндашувни қўллаб мавжудлик теоремасининг исботини якунлаймиз. (5) ва (6) масалаларнинг ихтиёрий $[0, H_l]$ оралиқда ечими мавжудлиги исботланади. Олинган натижалардан фойдаланиб, $U^l(x,t)$ ва $U_x^l(x,t)$ функциялар Гёльдер нормаси учун $l \le l_0$ бўйича бир ўлчамли баҳолар оламиз. Бундан $l \le l_0$ бўйича бир ўлчамли $\dot{s}_l(t)$ функциянинг $\left[0, H\right]$ кесмада Гёльдер шартини қаноатлантириши келиб чиқади, ва параболик тенгламалар ечими учун Шаудер типидаги баҳоларга асосланиб $U^l(x,t)$ ва $U_x^l(x,t)$ ҳосилаларнинг l бўйича бир ўлчамли Гёльдер нормалари ихтиёрий $\left\{(x,t):\ 0 < \delta \le t \le T,\ 0 < \delta \le x \le s_l(t)\right\}$ тўпламда чегараланганлигини топишимиз мумкин. Леммаларда ўрнатилган баҳолардан ва Арцел теоремасидан фойдаланиб мавжудлик теоемаси исботини тугатамиз.

Номаълум чегара асимптотикаси ҳақидаги теоремани келтирамиз. Ҳақиқатан, берилган функциялар барча $t > 0$ лар учун аниқланган деб фараз қилиш мумкин. Юқорида олинган натижалардан фойдаланиб, $s(t)$ функция $t > 0$ да қатъий ўсувчи ва чегараланганлиги топилади.

3-теорема. $t \to \infty$ *да* $\dfrac{f(t)}{t} \to +\infty$ *ўринли бўлсин, у ҳолда* $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = s(+\infty) = x_0$ *тенглик бажарилади.*

Иккинчи бобнинг **иккинчи параграфида** релаксация тенгламаси учун тўлқинсимон ечимлар ўрганилган.

Тўлқинсимон ечимлар махсус турга тегишли бўлиб, улар одатда ўтиш жараёнларини тасвирлайди. Ҳаракатланувчи тўлқинлар назариясининг асосий масалалари қаторида биз тўлқинларнинг мавжудлиги, кичик тебранишларга нисбатан тўлқинларнинг барқарорлиги ва глобал барқарорлик ва тўлқин тезлигини аниқлаш масалаларини келтиришимиз мумкин.

Бундай ечимлар ўсувчи ёки камаювчи бўлиб, фазовий муҳитда доимий тезликда тарқалади.

Ушбу тадқиқотда биз релаксацион моделни ўрганиш ва қуйидаги тенгламанинг тўлқин ечимларини қуриш учун янги ёндашувни таклиф қиламиз:

$$cT_x + T_t + \tau T_{tt} = a(T_{xx} + \tau T_{xtt}) - [F(T)]_{tt}. \qquad (7)$$

(7) ни қуйидаги кўринишда ёзамиз

$$a(T_{xx} + \tau T_{xtt}) - \tau T_{tt} = cT_x + T_t + [F(T)]_{tt}, \qquad (8)$$

бу ерда c - кўчиш коэффициенти (тезлиги), $F(T)$ - чизиқсиз функция.

$$T = T(\xi), \quad \xi = x - ct \qquad (9)$$

кўринишидаги ечимлар ҳаракатланувчи тўлқинлар бўлади. (9) ни (8) га қўйсак ξ аргумент (ўзгарувчи) бўйича учинчи тартибли оддий дифференциал тенгламага келамиз

$$(a - \tau c^2)T'' + a\tau c^2 T''' = c^2[F(T)]''. \qquad (10)$$

$T(\xi) = const$ функция (10) нинг тривиал ечими бўлади, шунинг учун

$$\lim_{\xi\to-\infty} T(\xi) = T^-, \quad \lim_{\xi\to+\infty} T(\xi) = T^+, \qquad (11)$$

тенгликлар ўринли бўлсин деймиз, бу ерда $T^- \neq T^+$ ва T^- ва T^+ лар маълум ўзгармаслар**.**

Бизнинг асосий вазифамиз ҳаракатланувчи тўлқин ечимнинг мавжудлигини кафолатлайдиган шартни топишдир.

1-таъриф. *(8) тенгламанинг ҳаракатланувчи тўлқин ечими деб бир ўлчамли фазодаги* R *соҳа бўйлаб* $c > 0$ *доимий тўлқин тезликда тарқаладиган* $T(x,t) = T(x - ct) = T(\xi)$ *кўринишдаги махсус ечимга айтилади.*

Бизнинг ҳолатда тарқалувчи тўлқинларнинг мавжудлик масаласи (10) тенгламанинг (11) ва

$$\xi \to \pm\infty \text{ бўлганда } T'(\xi), \quad T''(\xi) \to 0. \qquad (12)$$

шартларни қаноатлантирувчи $(T(\xi), c)$ ечимини топишдан иборат.

(10)-(12) масалани ечишга киришамиз.

(10) ни ξ дан $+\infty$ гача интервалда интеграллаб , (11) ва (12) ларни ҳисобга олиб, қуйидагини топамиз

$$(a - \tau c^2)T'(\xi) + a\tau c^2 T''(\xi) = c^2[F(T)]'. \qquad (13)$$

Сўнг, (13) ни ξ дан $-\infty$ гача ва ξ дан $+\infty$ гача интеграллаб,

$$(a - \tau c^2)T(\xi) + a\tau c^2 T'(\xi) - c^2[F(T)] - (a - \tau c^2)T^- + c^2[F(T^-)] = 0, \qquad (14)$$

$$(a - \tau c^2)T^+(\xi) - c^2[F(T^+)] - (a - \tau c^2)T(\xi) - a\tau c^2 T'(\xi) + c^2[F(T)] = 0. \qquad (15)$$

ифодаларни топамиз. Шундан сўнг

$$c^2 = \frac{a(T^+ - T^-)}{\tau(T^+ - T^-) + F(T^+) - F(T^-)},$$

$$(a - \tau c^2)T(\xi) + a\tau c^2 T'(\xi) = c^2 F(T) + H, \qquad (16)$$

тенгликларга эга бўламиз, бу ерда $H = \frac{1}{2}\{(a - \tau c^2)(T^- + T^+) - c^2[F(T^-) + F(T^+)]\}$. Шундай қилиб, тўлқин тезлигининг квадрати иккита маълум ҳолатнинг чексизликдаги қийматларидан фойдаланиб топилади. (16) дан навбатдаги дифференциал тенгламани топамиз

$$T' = f(T), \tag{17}$$

бу ерда $f(T) = \dfrac{1}{a\tau c^2}\{(a-\tau c^2)(\dfrac{T^- + T^+}{2} - T) - c^2[\dfrac{F(T^-)+F(T^+)}{2} - c^2 F(T)]\}$.

Таъкидлаш керакки, (17) нинг иккита мувозанат нуқтаси $T = T^-$ ва $T = T^+$ лар бўлади, яъни $f(T^-) = f(T^+) = 0$. (17) ни интеграллаб, ечимнинг ошкормас кўринишини топамиз

$$\xi - \xi_0 = \int_{T_0}^{T} \frac{ds}{f(s)}, \tag{18}$$

бу ерда ξ_0 - доимий сон ва $T(\xi_0) = T_0$.

Диссертациянинг «**Газ-гидродинамиканинг баъзи масалалари ҳақида»** деб номланувчи учинчи боби газ-гидродинамика баъзи муаммоларининг математик моделларини ўрганишга бағишланган.

Учинчи бобнинг **биринчи параграфида** биз номаълум чегарали гиперболик масала кўринишидаги тез оқувчи суюқлик оқими моделини ўрганамиз. Модел бир ўлчамли суюқлик оқимини тасвирлайди. Бу оқим агар кучланиш маълум бир чегарадан юқори бўлса, чизиқсиз ёпишқоқ-эластик суюқлик каби ва агар кучланиш ушбу чегарадан паст бўлса, юқори тезликдаги суюқлик каби ҳаракат қилади.

Бу ҳолатда номаълум чегара каналнинг ички ядроси ва ташқи қатламни ажратувчи сирт бўлади. Умумий масаланинг мураккаблигини ҳисобга олган ҳолда соддалаштирилган вариант қаралади

$$\begin{cases} \theta_{tt} + 2w\theta_t = \theta_{xx} + \beta^2, \quad x \in (s(t), l), \quad t > 0, \\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \theta_t(x,0) = 0, \quad s_0 \le x \le l, \ s(0) = s_0, \ 0 < s_0 < l, \\ \theta(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ \theta(s(t),t) = V_0, \quad t > 0, \\ \theta_x(s(t),t) + \dot{s}\theta_t(s(t),t) = -\beta^2, \quad t > 0 \end{cases} \tag{19}$$

бу ерда β^2, $2w = \dfrac{t_e}{t_r}, t_e = L\sqrt{\dfrac{\rho}{\mu}}, \mu$ - мусбат параметрлар, $\theta(x,t)$ - ёпишқоқ-эластик соҳа майдон тезлиги, V_0 - ички ядро тезлиги.

Маълумки, газ гидродинамикасининг кўплаб математик моделлари сақланиш қонунлари асосига қурилган ва табиий жараёнларни адекват тавсифловчи биринчи тартибли тенгламалар системаларидан иборат.

Ушбу мулоҳазалардан келиб чиқиб масалани эквивалент шаклда биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системаси учун қайта ёзамиз

$$
\begin{cases}
c\rho T_t + q_x = \beta^2, \quad s(t) < x < l, \quad t > 0, \\
\tau q_t + q + kT_x = 0, \;\; s(t) < x < l, \quad t > 0, \\
T(x,0) = T_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x), \quad s_0 \le x \le l, \\
T(l,t) = 0, \quad T(s(t),t) = T_1, \quad t \ge 0, \\
T_x(s(t),t) + \dot{s}(t) T_t(s(t),t) = -\beta^2, \quad t > 0
\end{cases} \tag{20}
$$

Ҳақиқатан, агар (20) масалада $q(x,t)$ ни йўқотсак, у ҳолда тенглама мос бошланғич-чегаравий шартли $T(x,t)$ функция учун (19) масалага ўтади. Агар $c\rho = 1,\;\; \beta^2 = p$ ва $\tau = k = 1$ лар ўринли бўлсин деб фараз қилиб, янги функциялар киритсак

$$
T(x,t) = \frac{u+v}{2}, \; q(x,t) = \frac{1}{2}(u - v), \tag{21}
$$

натижада $u(x,t)$ ва $v(x,t)$ функциялар учун қуйидаги масалага эга бўламиз

$$
u_t + u_x + \frac{1}{2}(u - v) = p, \quad s(t) < x < l, \quad t > 0, \tag{22}
$$

$$
v_t - v_x - \frac{1}{2}(u - v) = p, \quad s(t) < x < l, \quad t > 0, \tag{23}
$$

$$
u(x,o) = \Phi_1(x), \quad v(x,0) = \Phi_2(x), \; s_0 \le x \le l, \tag{24}
$$

$$
u(l,t) + v(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{25}
$$

$$
u(s(t),t) + v(s(t),t) = 2T_1, \quad t > 0, \tag{26}
$$

$$
(u_x(s(t),t) + v_x(s(t),t))(1 - \dot{s}^2(t)) = -\beta^2, \quad t > 0, \tag{27}
$$

$$
(\dot{s} + 1)(v_x(s(t),t) + p) = -p, \quad t > 0. \tag{28}
$$

Бу ерда $\Phi_i(x)(i = 1,2)$ функциялар узлуксиз дифференциалланувчи ва $p > 0,\; T > 0$ тенгсизликлар бажарилади.

Энди қидирилаётган функциялар учун априор баҳолар олинади.

(22) ва (23) тенгламаларнинг характеристикалари $x \pm t = const$ кўринишда бўлганлиги учун, масала корректлиги ва глобал ечимнинг мавжудлигини таъминлашда, аввало, $|\dot{s}(t)| < 1$ баҳони ўрнатишимиз керак.

Агар (27) шартдан фойдалансак, у ҳолда иккита ҳолат бўлиши мумкин

а) $(u_x(s(t),t) + v_x(s(t),t) > 0, \quad (1 - \dot{s}^2(t)) < 0$;

б) $(u_x(s(t),t) + v_x(s(t),t) < 0, \quad (1 - \dot{s}^2(t)) > 0$.

Бизга б) ҳолат мос келади. Агар $(u_x(s(t),t) + v_x(s(t),t) < 0$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $|\dot{s}(t)| < 1$ бўлади. Бизнинг ҳолатда $-1 < \dot{s}(t) < 0$ баҳони ўрнатиш зарур, бу эса $|\dot{s}(t)| < 1$ нинг хусусий ҳолидир. (28) дан кўриниб турибдики, биз $-1 < \dfrac{p}{v_x(s(t),t) + p} < 0$ (ёки $v_x(s(t),t) + p < 0$) тенгсизликни ўрнатишимиз керак.

(22) ва (23) тенгламаларнинг $(s_0, 0)$ ва $(l, 0)$ нуқталардан ўтувчи мос $x - t = s_0$ ва $x + t = l$ характеристикаларидан фойдаланиб D соҳани $D_i, i = \overline{1,4}$

тўртта қисмга бўламиз. $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cup D_3$, $D_2 \cup D_4$, $D_3 \cup D_4$ соҳаларда характеристика бўйлаб интеграллашлар ёрдамида ечимнинг ифодасини топамиз ва улардан қуйидаги леммаларни исботлашда фойдаланамиз.

3-лемма. *Фараз қилайлик* $u, v, s(t)$ *функциялар (22)-(28) масаланинг ечими бўлсин ва* $\Phi_1(x) < -2p$ *ва* $\Phi_2(x) < -2p$ *шартлар бажарилсин, у ҳолда* $v_x(x,t) < -2p$ *ва* $-1 < \dot{s}(t) < 0$ *лар ўринли бўлади.*

4-лемма. *Агар* $|u(x,0)| \le M_1$ *ва* $|v(x,o)| \le M_1$ *тенгсизликлар* $\{(x,t) : s(t) \le x \le l, 0 \le t \le t_1\}$ *соҳада ўринли бўлса, у ҳолда* $|u(x,t)| \le N$ *ва* $|v(x,t)| \le N$ *тенгсизликлар ҳам ўринли бўлади.*

5-лемма. *Фараз қилайлик* $u(x,t)$, $v(x,t)$, $s(t)$ *функциялар (22)-(28) масаланинг ечими бўлсин ва* $-1 < \dot{s}(t) < 0$, $|u(x,t)| \le N$, $|v(x,t)| \le N$, $|u_0'(x)| \le N_0$, $|v_0'(x)| \le N_0$, $0 \le t \le t_1$ *лар бажарилсин. У ҳолда* $|u_x|, |v_x|, |u_t|, |v_t| \le C$*, бу ерда* C *берилганларга боғлиқ ўзгармас сон.*

4-теорема. *Агар 3-5 леммаларнинг шартлари бажарилса, у ҳолда (22) - (28) масаланинг* $u(x,t)$, $v(x,t)$, $s(t)$ *ечими мавжуд ва ягонадир*.

4-теореманинг исботи давомида қўзғалмас нуқта ҳақидаги Шаудер принципидан фойдаланамиз.

Учинчи бобнинг **иккинчи параграфида** биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системаси учун номаълум чегарали масала ўрганилади.

Қуйидаги $\sigma(x,t)$, $\eta(x,t)$, $s(t)$ функцияларни топиш талаб этилсин, бу ерда икки марта узлуксиз дифференциалланувчи $s(t)$ функция $t \ge 0$ да аниқланган ва $s(0) = l$, $\dot{s}(0) = \beta$ лар ўринли, $\sigma(x,t)$, $\eta(x,t)$ функциялар эса D ($D = \{(x,t) : 0 < x < s(t), t \ge 0\}$) соҳада аниқланган бўлиб, $t > 0,\ 0 < x < s(t)$ да қуйидаги тенгламалар системаси ва шартларни қаноатлантиради

$$\begin{cases} \sigma_t + a\eta_x + c\eta = 0, \\ \eta_t + a\sigma_x + c\sigma = 0, \end{cases} \tag{29}$$

$$\sigma(x,0) = \sigma_0(x), \qquad \eta(x,0) = \eta_0(x), \quad x \in [0,l], \tag{30}$$

$$\eta(s(t),t) = \dot{s}(t), \quad \eta(0,t) + \alpha\sigma(0,t) = f(t), \quad t > 0, \tag{31}$$

$$\ddot{s} + \nu\dot{s} = \lambda\sigma(s(t),t) - \lambda F(s(t),t),\ s(0) = l\ \ \dot{s}(0) = \eta_0(l) = \beta, \tag{32}$$

бу ерда $a > 0,\ c > 0,\ \alpha > 0,\ \lambda > 0$ ва $\nu \ge 0$-ўзгармас сонлар, $F(x,t)$ функция эса биринчи чоракда аниқланган бериган функция.

Янги функциялар киритамиз:

$$\begin{cases} u(x,t) = \sigma(x,t) + \eta(x,t), \\ v(x,t) = \sigma(x,t) - \eta(x,t), \end{cases} \tag{33}$$

ва натижада (29) - (32) масала қуйидаги кўринишга ўтади:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + au_x(x,t) + cu = 0, \\ v_t(x,t) - av_x(x,t) - cv = 0, \end{cases} \tag{34}$$

$$u(x,0) = \phi(x) = \sigma_0(x) + \eta_0(x),\ v(x,0) = \psi(x) = \sigma_0(x) - \eta_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{35}$$

$$(1+\alpha)u(0,t) - (\alpha - 1)v(0,t) = 2f(t), \qquad t > 0, \tag{36}$$

$$\dot{s}(t) = \frac{u(s(t),t) - v(s(t),t)}{2}, \qquad t > 0, \tag{37}$$

$$\ddot{s} + \nu\dot{s} = \lambda\frac{u(s(t),t) + v(s(t),t)}{2} - \lambda F(s(t),t), \qquad t > 0, \tag{38}$$

(37) ва (38) ларнинг комбинациясидан топамиз

$$\ddot{s} + (\lambda + \nu)\dot{s} = \lambda e^{-ct}\phi(s(t) - at) - \lambda F(s(t),t), \qquad t > 0, \tag{39}$$

(34) системанинг характеристикалари $\frac{dx}{dt} = \pm a$ дифференциал тенгламанинг интеграл чизиқлари сифатида аниқланади.

Дастлаб қўйилган масаланинг корректлиги ва глобал ечимнинг мавжудлигини таъминлаш мақсадида, номаълум чегара учун икки томонлама баҳолар оламиз.

Фараз қилайлик, $F(x,t)$ функция узлуксиз ва x бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради, ϕ, φ ва f функциялар эса Липшиц шартини қаноатлантиради. Ишнинг давомида, $|F(x,t)| \le F_{\max}$ ва $\lambda F_{\max} \le a(\lambda + \upsilon)$ лар ўринли бўлсин деб оламиз. У ҳолда $M = \frac{a(\lambda + \upsilon) - \lambda F_{\max}}{\lambda}$ мусбат ёки нолга тенг бўлади.

5-теорема. *Агар* $|\phi(x)| \le M$ *бажарилса, у ҳолда* $|\dot{s}(t)| < a,\ t > 0$.

6-теорема. *Агар 5-теорема шартлари бажарилса, у ҳолда (34)-(39) масаланинг ечими мавжуд ва ягонадир.*

Диссертация ишининг «**Туташ муҳитлар механикаси масалалари**» деб номланган тўртинчи боби эластик-пластик деформация ва газ динамикасининг номаълум чегарали икки фазали масалаларини ўрганишга бағишланган.

Тўртинчи бобнинг **биринчи параграфида** эластик-пластик деформациянинг Прандтл-Рейсс тенгламалар системаси кўрилади.

Маълумки, эластик-пластик деформациянинг Прандтл-Реусс тенгламалар системаси қуйидагича кўринишга эга

$$\rho\left(u_t + uu_x\right) + (p - s)_x = 0, \tag{40}$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{41}$$

$$s_t + us_x - \frac{4}{3}\mu u_x = 0, \tag{42}$$

$$|s| \le Y = \frac{2}{3}\sqrt{Y_0^2}, \tag{43}$$

бу ерда $\rho\left(x,t\right)$, $u\left(x,t\right)$-муҳитнинг зичлиги ва тезлиги, $s\left(x,t\right)$-кучланиш, $p = p\left(\rho\right)$-босим, ихтиёрий $0 < \rho < \infty$ ларда $0 < p'\left(\rho\right) < \infty$ ўринли, Y_0-Мизес доимийси, $\mu > 0$-Ламе доимийси.

(42) тенглама эластик муҳитда бажарилади. Пластик муҳитда таърифга кўра $|s| = Y$ бўлади. (40)-(43) тенгламалар системаси учун Коши масаласи қуйидагича қуйилади

$$\rho(x,0)=\rho_0(x), u(x,0)=u_0(x), s(x,0)=s_0(x), -\infty<x<\infty \qquad (44)$$

Биздан (40)-(44) масаладаги физик катталикларни эластик($|s|<Y$) ва пластик($|s|=Y$) соҳаларда ва бу соҳаларни ажратиб турувчи номаълум чегара устида ҳам топиш талаб этилсин.

Масала ечими физик маънога эга бўлиши учун, пластик муҳитда $1\le w(x,t)\le e^{-s_0(x)}$ (бу ерда $w(x,t)=\dfrac{\rho_0}{\rho}$) тенгсизлик бажарилсин деб оламиз.

Маълумки, $\rho(x,t)>0$ учун қаралаётган системанинг характеристикалари ҳақиқий ва турлидир: $\lambda_1=u,\ \lambda_{2,3}=u\pm\sqrt{p'(\rho)+\dfrac{4\mu}{3\rho}}$. У ҳолда таърифга кўра система қатъий гиперболик бўлади. Ўзгарувчилар устида алмаштириш бажарганимиздан сўнг (40)-(44) система $u_t+(p-s)_x=0,\ (ln\rho)_t=-\rho u_x,\ \ s_t=\dfrac{4}{3}\mu\rho u_x,\ \ |s|\le Y$ кўринишга келади.

Фараз қилайлик, бутун деформацияланувчи соҳада $s(x,t)\ge 0$ ва $0\le s_0(x)\le Y,\ \ s_0(0)=Y,\ \ \ddot{s}_0(0)<0$ шартлар бажарилсин.

Баъзи соддалаштиришлардан сўнг, (40)-(44) система учун Коши масаласи коэффициентлари номаълум чизиқ устида узилишга эга бўлган гиперболик тенгламалар системаси учун Коши масаласига келтирилади.

Номаълум чегарали масала: $u(x,t),\ v(x,t)$ ва $x=h_\pm(t)$ функцияларни топиш талаб қилинсин, бу функциялар $h_\pm(t)\in C(t\ge 0)\cap C^1(t>0),\ h'_+(t)>0,$ $h'_-(t)<0,\quad h_\pm(0)=0,\quad u,v\in C(t\ge 0)\cap C^1(t>0,\ x\ne h_\pm(t))$ шартларни ва қуйидаги тенгламаларни қаноатлантирсин

$$\begin{cases} u_t+a(v)v_x=f(x), \\ v_t-u_x=0, & (x,t)\in D_1\cup D_2\ \ (|s|<Y\ \textit{сохада}), \\ 1\le v(x,t)\le e^{-s_0(x)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t+b(v)v_x=0, \\ v_t-u_x=0, & (x,t)\in D_0\ \ (|s|=Y\ \ \textit{сохада}), \\ 0<\dfrac{1}{A}\le v(x,t)\le A<\infty, \end{cases}$$

$$v(h_\pm(t),t)=e^{-s_0(h_\pm(t))},\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=1,\ -\infty<x<\infty,$$

бу ерда $D_1=\{(x,t):-\infty<x<h_-(t),\ t>0\}$, $D_2=\{(x,t):h_+(t)<x<\infty,\ t>0\}$, $D_0=\{(x,t):h_-(t)<x<h_+(t),\ t>0\}$ ва $a(v),\ b(v)$ лар ихтиёрий $v(x,t)$ учун узлуксиз функциялар, A-мусбат ўзгармас сон.

Чизиқли масала. Биринчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли тенгламалар системаси учун қуйидагича масала қаралади

$$\begin{cases} T_{1t}+a_{11}q_{1x}+b_{11}T_1+c_{11}q_1=f_1(x), \\ q_{1t}+a_{12}T_{1x}+b_{12}T_1+c_{12}q_1=g_1(x), \qquad (x,t)\in D_1\cup D_2\,, \\ 1\le q_1(x,t)\le e^{-s_0(x)}. \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} T_{2t}+a_{21}q_{2x}+b_{21}T_2+c_{21}q_2=f_2(x), \\ q_{2t}+a_{22}T_{2x}+b_{22}T_2+c_{22}q_2=g_2(x), \qquad (x,t)\in D_0\,, \\ 0<\dfrac{1}{A}\le q_2(x,t)\le A<\infty. \end{cases} \tag{46}$$

$$q_i(h_\pm(t),t)=exp\{-s_0(h_\pm(t))\},\ q_1(h_\pm(t),t)=q_2(h_\pm(t),t), \tag{47}$$

$$T_1(x,0)=T_0(x),\ q_1(x,0)=q_0(x),\ -\infty<x<\infty, \tag{48}$$

бу ерда $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}\,(i,j=1,2)$-маълум ўзгармас сонлар, $f_i(x), g_i(x), T_0(x), q_0(x)$-берилган функциялардир.

2-изоҳ. *Кейинги қадамларда, маълум дифференциалланувчи функцияларни* $f_j(x),\ g_j(x)(j=3,4),$ $a_i(t), b_i(t)(i=1,2)$ *лар орқали белгилаймиз, ва мураккаб аниқланганлиги учун уларни кўринишини келтирмаймиз, лекин улар устида баъзи чекловлар ўрнатамиз.*

8-теорема. $f_i(x), g_i(x)(i=1,2),$ $T_0(x), q_0(x), s_0(x)$ *функциялар ўзларининг аниқланиш соҳаларида икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин, бундан ташқари* $b_{11}=c_{12}$, $b_{12}=c_{11}$ *ва* $-Y\le s_0(x)\le 0$, $s_0(0)=0$, $x<0$ *да* $\dot{s}_0(x)>0$ *ва* $x>0$ *да* $\dot{s}_0(x)<0$. *У ҳолда (45)-(48) масаланинг ягона ечими мавжуд.*

Тўртинчи бобнинг **иккинчи параграфи** газ динамикасининг икки фазали номаълум чегарали масаласига бағишланган.

Масала математик нуқтаи назардан қуйидагича қурилади: берилган $(b,\phi_1,\psi_1,\phi_2,\psi_2)$ функцияларга мос $\sigma_i(x,t)$, $\eta_i(x,t)$, $i=1,2,$ $s(t)$ функцияларни топиш талаб этилсин. $s(t)$ функция $t\ge 0$, да аниқланган ва икки карра дифференциалланувчи бўлиб $s(0)=0$, $\dot{s}(0)=b$ тенгликлар ўринли бўлсин, $\sigma_i(x,t)$, $\eta_i(x,t)$ функциялар эса D_i $(i=1,2,$ $D_1=\{(x,t):-\infty<x<s(t),t\ge 0\}$, $D_2=\{(x,t):s(t)<x<+\infty,t\ge 0\})$ соҳаларда аниқланган бўлиб қуйидаги тенгламалар системасини ва шартларни қаноатлантирсин

$$\begin{cases} \sigma_{1t}+c\eta_{1x}-\dfrac{\sigma_1+\eta_1}{2}=0, \\ \eta_{1t}+c\sigma_{1x}+\dfrac{\sigma_1+\eta_1}{2}=0, \end{cases} \qquad (x,t)\in D_1, \tag{49}$$

$$\begin{cases} \sigma_1(x,0)=\phi_1(x), \quad \eta_1(x,0)=\psi_1(x), \quad -\infty<x\le 0, \\ c\eta_1(s(t),t)=\dot{s}(t), \qquad t\ge 0, \end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases} \sigma_{2t} + c\eta_{2x} - \dfrac{\sigma_2 - \eta_2}{2} = 0, \\ \eta_{2t} + c\sigma_{2x} - \dfrac{\sigma_2 - \eta_2}{2} = 0, \end{cases} \qquad (x,t) \in D_2, \tag{51}$$

$$\begin{cases} \sigma_2(x,0) = \phi_{(x)}, \quad \eta_2(x,0) = \psi_2(x), \quad 0 \le x < \infty, \\ c\eta_2(s(t),t) = \dot{s}(t), \qquad t \ge 0, \end{cases} \tag{52}$$

$$\mu\ddot{s}(t) = \sigma_1(s(t),t) - \sigma_2(s(t),t), \qquad t \ge 0. \tag{53}$$

Янги функциялар киритсак:

$$\begin{cases} u_i(x,t) = \sigma_i(x,t) + \eta_i(x,t), \\ v_i(x,t) = \sigma_i(x,t) - \eta_i(x,t), \end{cases} \tag{54}$$

$$\begin{cases} f_i(x) = \phi_i(x) + \psi_i(x), \\ g_i(x) = \phi_i(x) - \psi_i(x). \end{cases} \tag{55}$$

У ҳолда (49) – (53) масала қуйидаги кўринишни олади

$$\begin{cases} u_{1t}(x,t) + cu_{1x}(x,t) = 0, \\ v_{1t}(x,t) - cv_{1x}(x,t) - u_1(x,t) = 0, \end{cases} \qquad (x,t) \in D_1, \tag{56}$$

$$. \quad . \tag{57}$$

$$\begin{cases} u_{2t}(x,t) + cu_{2x}(x,t) - v_2(x,t) = 0, \\ v_{2t}(x,t) - cv_{2x}(x,t) = 0, \end{cases} \qquad (x,t) \in D_2, \tag{58}$$

$$\begin{cases} u_2(x,0) = f_2(x), \quad v_2(x,0) = g_2(x), \quad -\infty < x \le 0, \\ \dfrac{c}{2}[u_2(s(t),t) - v_2(s(t),t)] = \dot{s}(t), \qquad t \ge 0. \end{cases} \tag{59}$$

(54) ни ҳисобга олсак (53) дан

$$u_1(s(t),t) - v_2(s(t),t) = \frac{2}{c}\dot{s}(t) + 2\mu\ddot{s}(t) \tag{60}$$

ни топамиз

Фараз қилайлик $\delta \equiv \sup\limits_{-\infty < x \leqslant 0 \leqslant y < +\infty} \frac{1}{2}\left| f_1(x) - g_2(y) \right|$ тенглик ўринли бўлсин.

Масала корректлиги ва глобал ечимнинг мавжудлигини таъминлаш учун, биринчи навбатда, $|\dot{s}(t)| < c$ баҳони ўрнатишимиз зарур.

9-теорема. $u_i(x,t),\ v_i(x,t),\ s(t)(i = 1,2)$ *функчияар (56)-(60) масаланинг ечими бўлиб,* $0 \le \delta < 1,\ \ |b| \le c(1-\delta)$ *тенгсизликларни қаноатлантирсин, у ҳолда* $|\dot{s}(t)| < c,\ t \ge 0$.

10-теорема. *Агар 9-теореманинг шартлари ўринли бўлса, у ҳолда (56)-(60) масаланинг ечими мавжуд ва ягонадир.*

ХУЛОСА

диссертация биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системалари учун номаълум чегарали масалаларга бағишланган бўлиб, ўзида Фурье эффекти бўлмаган ноодатий жараёнларни яхшироқ тушунишга имкон беради ва қуйидаги асосий натижаларга эришилган:

кўчишнинг учинчи тартибли релаксацион тенгламаси учун номаълум чегарали математик модел таклиф қилинган. У бир қатор муҳим махсусликларга эга, яъни бошланғич вақтда соҳа нуқтага айланади, қидирилаётган функция ва унинг ҳосилалари координата бошида узилишга эга ва номаълум чегара учун шарт ошкормас кўринишда берилади;

релаксацион хусусиятга эга муҳитда потенциаллар тарқалиши жараёнини тасвирловчи ҳаракатланувчи тўлқин тенгламаси ечимининг хоссалари ўрганилган;

доимий босим градиенти билан бошқариладиган каналдаги оқим ҳаракати номаълум чегарали масала ҳисобланиб, Максвеллнинг гиперболик телеграф тенгламаси ва учинчи даражали Олдройд-Б тенгламасини ўз ичига олади. Номаълум чегара - бу икки соҳани ажратиб турувчи сиртдир, яъни у каналнинг ички ядроси ва ташқи қатламни ажтариб туради;

бир фазали Стефан типидаги масала газ билан тўлдирилган бир ўлчовли бир учи маҳкамланган цилиндр учун берилган вақтда поршеннинг ҳаракати ва ичкаридаги газнинг ҳолатини ўрганилган;

ёпишқоқ-пластик деформация жараёни модели бўлган, коэффициентлари номаълум чегара устида узилувчи гиперболик тенгламалар системаси учун чизиқли дифференциал оператор бўлган ҳол учун масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги теоремалари исботланган;

Максвелл-Каттанеонинг релаксацион формуласи асосида олинган газо-динамиканинг икки фазали гиперболик модели ўрганилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УМИРХОНОВ МАСЪУДХОН ТУРАХОН УГЛИ ХАСАНЗОДА

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PHD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент–2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за №B2021.4.PhD/FM306.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz/ и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Тахиров Жозил Останович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ашуров Равшан Раджабович** доктор физико-математических наук, профессор
	Бабаджанов Базар Атаджанович доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 27 » декабря 2022 года в 16:00 часов на заседании Научного совета Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871)207-91-40, e-mail: kengash@mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 154). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 7 » декабря 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от « 7 » декабря 2022 года).

У.А. Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.А. Азамов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые во всем мире, в большинстве случаев требуют исследования гиперболических задач со свободными границами. Задачи со свободными границами - это задачи с подвижными границами, которые моделируют фазовые переходы чистых материалов из-за теплопроводности и обмена скрытой тепловой энергией. Поскольку положение движущейся границы заранее неизвестно и будет найдено вместе с температурой, задачи со свободными границами являются нелинейными. Решения этих задач могут демонстрировать очень сложное поведение, приводящее ко многим теоретическим результатам (и многообещающим разработкам по многим еще нерешенным проблемам), а также к точным результатам для широкого спектра приложений в физике и технике.

В настоящее время становится актуальным построение математических моделей со свободными границами для гиперболических уравнений и систем уравнений, более адекватно описывающих природные процессы. В итоге, исследуемое направление превратилось в бурно развивающийся раздел современной прикладной математики. Поэтому изучение поведения свободной границы в определенные моменты времени и установление на его основе существования и единственности решения задачи является одним из целевых научных исследований. В нашей стране большое внимание уделяется фундаментальным исследованиям инновационного характера. Перед наукой стоит задача приблизить фундаментальные исследования к практике. При решении этой задачи ведущую роль призвана сыграть теория задач со свободной границей для гиперболических уравнений. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук, а именно, дифференциальным уравнениям и математической физике, прикладной математике и математическому моделированию, является одной из основных задач и направлением деятельности Института математики[2].

Тема и объект исследования настоящей диссертации соответствуют поручениям, обозначенным в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и №ПП-4387 от 09 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития

---

[2]Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Теоретическое рассмотрение динамики фазовых превращений приводит к различным вариантам задачи Стефана. Классический вариант задачи Стефана, сформулированный ещё в прошлом веке для фазовых переходов типа плавления или затвердевания, сводится к уравнению теплопроводности в области с заранее неизвестной подвижной границей, которая разделяет твердую и жидкую фазы. На межфазной границе выполняется так называемое условие Стефана.

Основы теории задач со свободной границей (в основном для параболических и эллиптических уравнений) были разработаны и развиты в трудах A.Friedman, L.Rubinstein, J.Cannon, J.Hill, W.Kyner (USA), A.Fasano, M.Primecerio (Italy), А.Мейрманова, И.Данилюка (Россия) и других.Большое число работ по задаче Стефана посвящено изучению обобщенных решений для параболических уравнений. Здесь надо отметить результаты О.Олейника, С.Каменомосткой, И. Данилюка, А. Мейрманова, A. Friedman, L.Caffarelli, L.Evans, E.Hanzawa, G.Duvant, A.Visintin и других. Начиная с 1980-х годов появились работы, в которых исследовались гиперболические задачи со свободной границей. Обосновано, что эти задачи описывают процессы переноса в среде с релаксационными свойствами.Значительные результаты по гиперболическим задачам со свободной границей получены в работах A.Friedman, L.Caffarelli, L.Evans, C.Hill, A.Terracina, А.Мышкиса, В.Кирилича, Р. Хубиева, Т.Джураева, Ж. Тахирова и других.

В последние десятилетия мы наблюдаем быстрое расширение предметной области за счет включения важных тем со свободными границами, происходящими из разных областей: в математической биологии и биомедицинских процессах они указывают на движущиеся фронты популяций или опухолей; появилось много новых задач в области механики жидкости и газа. В настоящее время во многих ведущих научных центрах мира активно ведутся научные исследования по гиперболическим задачам со свободной границей и они широко применяются при математическом моделировании различных физических, медико-биологических и сходных с ними процессов. Здесь можно указать на результаты A.Friedman, C.Pao, Y. Du, X.Chen, Z. Lin, C. Li и других. Теперь и мы присоединились к этому бурному потоку.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по прикладному проекту ФА-Атех-2018-149 «Построение эффективных вычислительных алгоритмов и программных комплексов для исследования диффузионного и конвективного переноса вредных веществ в приземном пограничном слое атмосферы и многослойных пористых средах» (2018-2020**)** и фундаментальному проекту ОТ-Ф-4-85 «Разработка нелинейных математических моделей и эффективных вычислительных алгоритмов для исследования современных проблем биологии и экологии» (2017-2020 гг.), а также по научному направлению «Разработка и развитие математических моделей медико-биологических и физических процессов, построение математических методов исследования, мониторинга и прогнозирования» Института математики .

Целью исследования является построение и развитие математических моделей процессов в средах с релаксационными свойствами и разработка методов исследования гиперболических задач со свободной границей.

Задачи исследования:

исследование задачи со свободной границей для релаксационного уравнения переноса и построение ее волновых решений;

исследование задачи Максвелла для течения жидкости, т.е. разработка методов решения, установление априорных оценок искомых функций и доказательство теорем единственности и существования решения;

исследование задачи вязкопластического деформирования;

изучение одно- и двухфазных гиперболических моделей газовой динамики, т.е. изучение поведения неизвестной границы в определенные моменты времени и доказательство существования и единственности решения.

Объект исследования. Различные математические модели со свободной границей процессов в средах с релаксационными свойствами и механики сплошных сред.

Предмет исследования. Теория задач со свободной границей для гиперболических и параболических уравнений ,научные дисциплины уравнения математической физики и математическое моделирование.

Методы исследования. В исследованиях использованы элементы математического анализа, методы дифференциальных уравнений и математической физики, методы математического моделирования.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

построена математическая модель со свободной границей для релаксационного уравнения переноса третьего порядка, обладающая рядом особенностей и доказано существование волнового решения уравнения;

доказана однозначная разрешимость задачи о движении потока в канале, управляемом постоянным градиентом давления, которая представляет собой задачу со свободной границей, разделяющей внутреннее ядро канала и внешний слой, включающую гиперболическое телеграфное уравнение Максвелла и уравнение Олдройда-Б ;

доказана теорема существования и единственности решения задачи для линейной гиперболической системы уравнений с разрывными коэффициентами и неизвестной кривой разрыва, являющейся моделью вязкопластического деформирования;

исследованы одно- и двухфазные гиперболические модели газовой динамики, т. е. изучено поведение неизвестной границы в определенные моменты времени, доказаны теоремы существования и единственности решений.

Практические результаты исследования состоит в следующем:

Модифицированные математические модели в виде задач со свободной границей для гиперболических уравнений и систем, а также предложенные методы исследования могут быть применены при изучении различных физических процессов в средах с релаксационными свойствами;

Гиперболические задачи со свободной границей могут быть использованы при изучении массопереноса в проблемах газо-гидродинамики и вязкопластического деформирования.

Достоверность результатов исследования обоснована при помощи математических рассуждений с применением методов математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений и математической физики, методов математического моделирования и других новых результатов прикладной математики.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической физике, в теории задач со свободной границей и при построении математических моделей различных физических процессов.

Практическая значимость результатов обосновывается возможностью применения при построении и исследовании моделей физических и медико-биологических процессов.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по задачам со свободной границей для систем гиперболических уравнений первого порядка были внедрены в практику по следующим направлениям:

математическая модель со свободной границей для релаксационного уравнения переноса третьего порядка, обладающая рядом особенностей, использовалась в рамках зарубежного гранта МД-758.2022.1.1. «Развитие математических моделей дробной динамики с целью исследования колебательных процессов и процессов с насыщением» (справка № 42-12 Камчатского государственного университета от 28 ноября 2022 г.) при исследовании задач массопереноса с неизвестной границей. Применение научного результата позволило проанализировать процесс переноса радона в системе почва-атмосфера;

решение задачи о течении в канале, управляемом постоянным градиентом давления, представляющей собой задачу со свободной границей, разделяющей внутреннее ядро канала и внешний слой, включающее гиперболическое телеграфное уравнение Максвелла и уравнение Олдройда-Б, использовался в рамках гранта ЁОТ-Фтех-2018-149 «Математическое моделирование процесса фильтрации в двухкомпонентных средах, заданных нелинейными граничными условиями», (справка №04/11-6174

Национального университета Узбекистана, от 8 октября 2022 г.) при построении автомодельных решений систем фильтрации в двухкомпонентных средах. Применение научного результата позволило определить поведение автомодельных решений систем фильтрации в двухкомпонентных средах, заданных нелинейными граничными условиями, для неограниченных значений времени.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были обсуждены на 5 международных и 1 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 6 статей опубликованы в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соисканий ученой степени доктора философии (PhD), в том числе 1 статья опубликована в зарубежном издании и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 105 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности и востребованности темы диссертации, отмечено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, описана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, указаны объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации под названием **«Некоторые сведения из теории систем гиперболических уравнений и задач со свободной границей»**, приведены некоторые известные факты, которые будут использованы при изложении результатов диссертации.

Поскольку рассматриваемые в диссертации задачи со свободной границей являются нелинейными, основная цель состоит в том, чтобы получить априорные оценки, доказать (на их основе) теоремы об однозначной разрешимости в целом (во времени), изучить некоторые свойства решений и поведение свободной границы при неограниченном возрастании времени.

Вторая глава диссертации **«Задачи в средах с релаксационными свойствами»,** посвящена изучению задач для релаксационного уравнения переноса.

В первом параграфе второй главы исследована краевая задача со свободной границей типа Флорина для релаксационного уравнения переноса.

Самым простым обобщением уравнения Максвелла–Каттанео–Вернотти (МКВ) является модель Гайера–Крумхансла (ГК), которая имеет вид $\tau q_t + q + kT_x - k^2 q_{xx} = 0$, где τ-время релаксации, k^2-параметр диссипации, T-температура, q-поток.

Уравнение типа ГК включают уравнение МКВ при $k^2 = 0$ и уравнение Фурье при $\tau = k^2 = 0$. Эта особенность уравнения ГК позволяет моделировать как волнообразную природу температур, так и диффузионную. Это явно проявляется, когда применяется уравнение баланса внутренней энергии для исключения q: $\rho c T_t + q_x = 0$, с учетом плотности ρ и удельной теплоемкости c получаем $\tau T_{tt} + T_t = aT_{xx} + k^2 T_{xxt}$, где $a = \dfrac{k}{\rho c}$ - коэффициент температуропроводности.

Случай $k^2 = \tau a$ называется условием резонанса Фурье, при $k^2 < \tau a$ наблюдается волнообразное поведение, а при $k^2 > \tau a$ преобладает диффузионное поведение.

В настоящей работе в случае $a = \dfrac{k^2}{\tau}$ мы сформулируем и исследуем корректную краевую задачу со свободной границей типа Флорина для уравнения

$$T_t + \tau T_{tt} = a(T_{xx} + \tau T_{xxt}) \tag{1}$$

в области без начального условия $D_H = \{(x,t): 0 < x < s(t), 0 < t \leqslant H\}$, $s(0) = 0$.

Найдем на некотором отрезке $0 < t \leqslant H$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t),\ s(0) = 0,\ s(t) > 0,\ 0 < t < H$, и решение уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}_H \setminus (0,0)$ вместе с производными и для всех $0 \leqslant t \leqslant H$ удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} T_x(0,t) - \alpha T(0,t) = \psi(t), \\ T_x(s(t),t) = 0, \\ T_{xx}(s(t),t) = 0, \\ T(s(t),t) = \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^\eta \bar{q}(s(\xi),\xi)\, d\xi, \end{cases} \tag{2}$$

где a, τ, α (коэффициент теплообмена), H- положительные постоянные, $\psi(t), \bar{q}(x,t)$ - заданные функции, причем $\psi(0) \neq 0$, функция $\bar{q}(x,t)$ определена и непрерывна в полуполосе $\{(x,t): 0 \leqslant x \leqslant x_0, t \geqslant 0\}$ и $\bar{q}(x,t) < 0$.

По-видимому, задача Флорина для уравнения вида (1) рассматривается впервые.

Введя новую функцию $T(x,t) + \tau T_t(x,t) = u(x,t)$, из (1), (2) для $T(x,t)$ получаем задачу

$$T(x,t) + \tau T_t(x,t) = u(x,t), \quad (x,t) \in D_H,$$

$$T(s(t),t)=\varphi(t), \quad 0\leqslant t\leqslant H,$$

где $\varphi(t)=\int\limits_0^t d\eta\int\limits_0^\eta \bar{q}(s(\xi),\xi)d\xi$.

Решение этой задачи (после исследования и нахождения $s(t),\ u(x,t)$) имеет вид

$$T(x,t)=e^{-\frac{1}{\tau}(t-s^{-1}(x))}\varphi(s^{-1}(x))+\frac{1}{\tau}\int\limits_{s^{-1}x}^{t} e^{-\frac{1}{\tau}(s^{-1}(x)-4)}u(x,\eta)d\eta \tag{3}$$

где $s^{-1}(x)$ - обратная, к $x=s(t)$ функция.

Получаем следующую задачу: найти $u(x,t),\ s(t)$ такие, что $s(t)$ непрерывно дифференцируема и $s(t)>0$ на $0<t\leqslant H,\ s(0)=0$, а функция $u(x,t)$ непрерывна вместе с производной $u_x(x,t)$ в $\bar{D}_H\setminus(0,0)$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}(x,t), \quad (x,t)\in D_H, \\ u_x(0,t)-\alpha u(0,t)=f(t), \quad 0\leqslant t\leqslant H, \\ u(s(t),t)=\int\limits_0^t q(s(\eta),\eta)d\eta, \quad 0\leqslant t\leqslant H, \\ u_x(s(t),t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant H, \end{cases} \tag{4}$$

где $f(t)=\tau\psi'(t)+\psi(t),\ a=1,\ q(s(t),t)=\tau\bar{q}(s(t),t)+\int\limits_0^t\bar{q}(s(\xi),\xi)d\xi$. Решения этих задач строятся как предел решений соответствующих задач со свободной границей при наличии начального условия на исчезающем отрезке l оси x.

Исследования проводятся по следующей схеме. Первоначальная задача сводится к задаче для уравнения второго порядка. Находится представление для решения при помощи функции Грина. Устанавливаются некоторые первоначальные априорные оценки для $u(x,t)$, а затем доказывается теорема единственности решения.

Далее рассматривается задача с начальным условием, она сводится к задаче типа Стефана. Доказывается их эквивалентность. Для решения задачи типа Стефана установлены априорные оценки типа оценок Шаудера, и на их основе доказана теорема существования. При этом для неизвестной границы установлены двусторонние оценки при помощи известных кривых, которые дают поведение неизвестной границы при $t\to 0$.

В заключение доказано, что при неограниченном возрастании времени свободная граница стремится к некоторой постоянной.

Лемма 1. *Пусть непрерывно дифференцируемые функции* $f(t)$ *и* $q(x,t)$ *удовлетворяют неравенствам* $f(t)>0,\quad f'(t)>0,\quad 0\leqslant t\leqslant H,\quad q(x,t)<0,$ $0\leqslant x\leqslant x_0,\ t\geqslant 0,\ \alpha\geqslant 0$. *Тогда* $u(x,t)<0,\ u_x(x,t)>0$ *в* D_H.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1 и* $q_x(x,t)<0$. *Тогда решение задачи (2.4) единственно.*

Теорема 2. *Пусть* $f(t)>0$, *производная* $f'(t)>0$ *непрерывна по Гёльдеру на отрезке* $(0,H]$, *а функция* $q(x,t)$ *и ее производные* $q_x(x,t)$, $q_{xx}(x,t)$, $q_t(x,t)$ *непрерывны в прямоугольнике* $\{(x,t): 0\le x\le x_0,\ 0\le t\le H\}$, *причем* $q(x,t)<0$, $q_x(x,t)<0$, $q_{xx}(x,t)\le 0$, $q_t(x,t)\ge 0$. *Тогда решение задачи (4) существует.* При этом неизвестная граница $x=s(t)$ непрерывна дифференцируема на интервале $(0,T]$, $\dot{s}(t)>0$ удовлетворяет условию Гёльдера, производные u_x, u_t, u_{xx} непрерывны в $\bar{D}_H \setminus (0,0)$ и удовлетворяют условию Гёльдера на любом множестве $\{(x,t): 0\le x\le s(t),\ 0<\delta\le t\le H\}$.

Лемма 2. *Пусть пара функций* $\left(U^l(x,t), s_l(t)\right)$ *- является решением задачи*

$$\begin{cases} U^l_{xx}(x,t)-U^l_t(x,t)=0, \quad (x,t)\in D_{H_l}, \\ U^l(x,0)=\varphi_t'(x)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \\ U^l_x(0,t)-\alpha U^l(0,t)=f_l'(t), \quad 0<t\leqslant H_l, \\ U^l(s_l(t),t)=q(s_l(t),t), \quad 0\leqslant t\leqslant H_l, \\ U^l_x(s_l(t),t)=-q(s_l(t),t)\dot{s}_l(t), \quad 0\leqslant t\leqslant H_l, \end{cases} \tag{5}$$

тогда $\left(u^l(x,t), s_l(t)\right)$, *где*

$$u^l(x,t)=f_l(t)x+\int_0^x d\xi\int_0^{\xi}U^l(y,t)dy+(\alpha x+1)\int_0^t U^l(0,\eta)d\eta+(\alpha x+1)\varphi_l(0),$$

является решением задачи

$$\begin{cases} u^l_{xx}=u^l_t(x,t)\in D_{H_l}=\{(x,t): 0<x<s_l(t), 0<t\le H_l\}, \\ u^l(x,0)=\varphi_l(x),\ 0\le x\le l=s_l(0), \\ u_x{}^l(0,t)-\alpha u^l(0,t)=f_l(t)=f(t)+\varepsilon(l),\ 0<t\le H_l, \\ u^l_x(s_l(t),t)=0,\ 0\le t\le T_l, \\ u^l(s_l(t),t)=\int_0^t q(s_l(\eta)\ \eta)d\eta+\varphi_l(l), \qquad 0\le t\le H_l, \end{cases} \tag{6}$$

где $\varphi_l(x)$*-бесконечно дифференцируемая функция, причем* $\varphi'_l(x)\ge 0$, $\varphi'''_l(x)\ge 0$, $\varphi'_l(l)=0$, $\varphi''_l(l)=q(l,0)$, $f_l(0)=\varphi'_l(0)-\alpha\varphi_l(0)$, $\varepsilon(l)$*-монотонно возрастающая функция по* l *и* $\varepsilon(l)\to 0$ *при* $l\to 0$.

Далее доказывается ряд лемм, в которых устанавливаются равномерные по l априорные оценки искомых функций.

И наконец, применяя стандартный подход, завершаем доказательство теоремы существовании. Установлено, что задачи (5) и (6) разрешимы на любом отрезке времени $[0,H_l]$. Из установленных результатов, получаем равномерные по $l \le l_0$ оценки норм Гёльдера для функций $U^l(x,t)$ и $U_x^l(x,t)$. Отсюда следует, что функции $\dot{s}_l(t)$ равномерно по $l \le l_0$ удовлетворяют условию Гёльдера на отрезке $[0,H]$, и на основе известных оценок Шаудера для решений параболических уравнений можно утверждать, что равномерно по l нормы Гёльдера производных $U^l(x,t)$ и $U_x^l(x,t)$ ограничены на любом множестве $\{(x,t):\ 0<\delta \le t \le T,\ 0<\delta \le x \le s_l(t)\}$. Используя оценки, установленные в леммах и теореме Арцела, завершаем доказательство теоремы существования.

Приведем теорему об асимптотике неизвестной границы. Естественно предположить, что заданные функции определены для любых $t>0$.

В силу указанных выше результатов мы можем заключить, что функция $s(t)$ строго монотонна и ограничена при $t>0$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} s(t) = s(\infty) \le x_0 < +\infty$.

Теорема 3. *Пусть* $\dfrac{f(t)}{t} \to +\infty$ *при* $t\to\infty$. *Тогда* $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = s(+\infty) = x_0$.

Во втором параграфе второй главы исследуется волновые решения для релаксационного уравнения.

Волновые решения относятся к специальному типу. Обычно их можно характеризовать как решения, инвариантные относительно переноса в пространстве.

С физической точки зрения бегущие волны обычно описывают переходные процессы. Среди основных вопросов теории бегущих волн отметим проблему существования волн, устойчивости волн по отношению к малым возмущениям и глобальной устойчивости, определение скорости волн.

Такие решения распространяются по пространственной среде на постоянной скорости, распространяющиеся или убывающие по пространственной среде.

Здесь предлагается новый подход исследования релаксационной модели и построению волновых решений для

$$cT_x + T_t + \tau T_{tt} = a(T_{xx} + \tau T_{xtt}) - [F(T)]_{tt}. \tag{7}$$

Перепишем (7) в виде

$$a(T_{xx} + \tau T_{xtt}) - \tau T_{tt} = cT_x + T_t + [F(T)]_{tt}, \tag{8}$$

где c- коэффициент (скорость) переноса, $F(T)$- нелинейная функция. Бегущие волны - это решения вида

$$T = T(\xi), \quad \xi = x - ct, \tag{9}$$

где скорость распространения волны -постоянная величина, которая будет определена ниже. Подстановка (9) в (8) приводит к уравнению ОДУ третьего порядка по переменной ξ, задаваемому формулой

$$(a-\tau c^2)T'' + a\tau c^2 T''' = c^2[F(T)]'', \tag{10}$$

где символ ' обозначает дифференцирование. В оставшейся части этого исследования мы сосредоточимся на решениях бегущей волны уравнения (10), которые соответствуют гетероклиническим связям между двумя постоянными состояниями. Очевидно, что $T(\xi)=const$ является тривиальным решением уравнения (10), поэтому мы предполагаем, что

$$\lim_{\xi\to-\infty} T(\xi)=T^-,\quad \lim_{\xi\to+\infty} T(\xi)=T^+, \tag{11}$$

$T^-\neq T^+$, где T^- и T^+ - известные константы**.**

Наша основная задача - найти ограничения, которая гарантирует существование такого решения с бегущей волной.

Определение 1. *Решением уравнения (8) с бегущей волной называется специальное решение вида* $T(x,t)=T(x-ct)=T(\xi)$ *распространяющейся через одномерная пространственная область* R *при постоянной скорости волны* $c>0$.

В нашем случае проблема существования бегущих волн состоит в том, чтобы найти решения $(T(\xi),c)$ уравнения (10) с условиями (11) и

$$T'(\xi),\quad T''(\xi)\to 0 \ \textit{при}\ \xi\to\pm\infty. \tag{12}$$

Приступаем к решению задачи (10), (11), (12).

Интегрируя (10) в пределах от ξ до $+\infty$ с учетом (11) и (12), находим

$$(a-\tau c^2)T'(\xi)+a\tau c^2T''(\xi)=c^2[F(T)]'. \tag{13}$$

Далее, интегрируя (13) по ξ до $-\infty$ и от ξ до $+\infty$, находим

$$(a-\tau c^2)T(\xi)+a\tau c^2T'(\xi)-c^2[F(T)]-(a-\tau c^2)T^-+c^2[F(T^-)]=0, \tag{14}$$

$$(a-\tau c^2)T^+(\xi)-c^2[F(T^+)]-(a-\tau c^2)T(\xi)-a\tau c^2T'(\xi)+c^2[F(T)]=0. \tag{15}$$

Далее находим $c^2=\dfrac{a(T^+-T^-)}{\tau(T^+-T^-)+F(T^+)-F(T^-)}$,

$$(a-\tau c^2)T(\xi)+a\tau c^2T'(\xi)=c^2F(T)+H, \tag{16}$$

где $H=\dfrac{1}{2}\{(a-\tau c^2)(T^-+T^+)-c^2[F(T^-)+F(T^+)]\}$. Таким образом, квадрат скорости волны получается в терминах двух известных состояний на бесконечности. Из (16) получаем дифференциальное уравнение

$$T'=f(T), \tag{17}$$

где $f(T)=\dfrac{1}{a\tau c^2}\{(a-\tau c^2)(\dfrac{T^-+T^+}{2}-T)-c^2[\dfrac{F(T^-)+F(T^+)}{2}-c^2F(T)]\}$. Отметим, что две очевидные точки равновесия (17) - это $T=T^-$ и $T=T^+$, то есть $f(T^-)=f(T^+)=0$. Интегрируя (17), получаем неявное решение в виде

$$\xi-\xi_0=\int_{T_0}^{T}\frac{ds}{f(s)}, \tag{18}$$

где ξ_0 - константа и $T(\xi_0)=T_0$.

Третья глава диссертации под названием «**О некоторых задачах газо-гидродинамики»** посвящена исследованию математических моделей некоторых проблем газо-гидродинамики.

В **первом параграфе** третьей главы исследуется модель течения жидкости скоростного типа с порогом напряжений в виде гиперболической задачи со свободной границей. Модель описывает одномерный поток жидкости, который ведет себя как нелинейная вязкоупругая жидкость, если напряжение выше определенного порога, и как жидкость скоростного типа, если напряжение ниже этого порога.

Свободная граница-это поверхность, разделяющая две области: внутреннее ядро канала и внешний слой. Ввиду высокой сложности общей проблемы рассматривается упрощенный вариант

$$\begin{cases} \theta_{tt} + 2w\theta_t = \theta_{xx} + \beta^2, \quad x \in (s(t), l), \quad t > 0, \\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \theta_t(x,0) = 0, \quad s_0 \le x \le l, \; s(0) = s_0, \; 0 < s_0 < l, \\ \theta(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ \theta(s(t),t) = V_0, \quad t > 0, \\ \theta_x(s(t),t) + \dot{s}\theta_t(s(t),t) = -\beta^2, \quad t > 0 \end{cases} \tag{19}$$

где β^2, $2w = \dfrac{t_e}{t_r}$, $t_e = L\sqrt{\dfrac{\rho}{\mu}}, \mu$ - положительные параметы, $\theta(x,t)$ - поле скоростей вязкоупругой области, V_0 - скорость внутреннего ядра.

Известно, что многие математические модели газовой гидродинамики построены на основе законов сохранения и состоят из систем уравнений первого порядка, более адекватно описывающих природные процессы.

Исходя из этих соображений, перепишем задачу в эквивалентной форме для гиперболической системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} c\rho T_t + q_x = \beta^2, \quad s(t) < x < l, \quad t > 0, \\ \tau q_t + q + kT_x = 0, \; s(t) < x < l, \quad t > 0, \\ T(x,0) = T_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x), \quad s_0 \le x \le l, \\ T(l,t) = 0, \quad T(s(t),t) = T_1, \quad t \ge 0, \\ T_x(s(t),t) + \dot{s}(t)T_t(s(t),t) = -\beta^2, \quad t > 0 \end{cases} \tag{20}$$

Действительно, если исключить $q(x,t)$ в задаче (20), то уравнения для $T(x,t)$ получаются как в (19) с соответствующими начально-краевыми условиями.Предпологая, что $c\rho = 1$, $\beta^2 = p$ и $\tau = k = 1$и введя новые функции

$$T(x,t) = \frac{u+v}{2}, \; q(x,t) = \frac{1}{2}(u-v). \tag{21}$$

для $u(x,t)$ и $v(x,t)$ получим задачу

$$u_t + u_x + \frac{1}{2}(u-v) = p, \quad s(t) < x < l, \quad t > 0, \tag{22}$$

$$v_t - v_x - \frac{1}{2}(u-v) = p, \quad s(t) < x < l, \quad t > 0, \tag{23}$$

$$u(x,o) = \Phi_1(x), \quad v(x,0) = \Phi_2(x), \; s_0 \le x \le l, \tag{24}$$

$$u(l,t) + v(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{25}$$

$$u(s(t),t)+v(s(t),t)=2T_1, \quad t>0, \tag{26}$$
$$(u_x(s(t),t)+v_x(s(t),t))(1-\dot{s}^2(t))=-\beta^2, \quad t>0, \tag{27}$$
$$(\dot{s}+1)(v_x(s(t),t)+p)=-p, \quad t>0. \tag{28}$$

Предполагается, что функции $\Phi_i(x)(i=1,2)$ непрерывно дифференцируемы и $p>0,\ T>0$.

Далее устанавливаются априорные оценки для искомых функций.

Поскольку характеристики системы (22), (23) имеют вид $x \pm t = const$, то для доказательства корректности и глобальной разрешимости задачи необходимо установить оценку $|\dot{s}(t)|<1$.

Если воспользоваться условиями (27), то возможны следующие случаи

а) $(u_x(s(t),t)+v_x(s(t),t)>0, \quad (1-\dot{s}^2(t))<0$;

б) $(u_x(s(t),t)+v_x(s(t),t)<0, \quad (1-\dot{s}^2(t))>0$.

Случай б) нас устраивает. Если будет установлено, что $(u_x(s(t),t)+v_x(s(t),t)<0$, тогда $|\dot{s}(t)|<1$. В нашем случае необходимо установить оценку $-1<\dot{s}(t)<0$, это частный случай оценки$|\dot{s}(t)|<1$. Из (28) видно, что необходимо доказать неравенство $-1<\dfrac{p}{v_x(s(t),t)+p}<0$ или $v_x(s(t),t)+p<0.$

Область D разделим на четыре части $D_i, i=\overline{1,4}$, с помощью характеристик $x-t=s_0$, $x+t=l$ системы (22), (23) выходящих соответственно из точек $(s_0,0)$ и $(l,0)$.

Далее в областях $D_1 \cup D_2, D_1 \cup D_3$ $, D_2 \cup D_4$, $D_3 \cup D_4$ интегрируя по характеристикам, находим представления для решения, которые будут использованы при доказательстве ниже следующих лемм.

Лемма 3. *Пусть функции* $u,v,s(t)$ *являются решением задачи (22) - (28) и выполнены условия* $\Phi_1(x)<-2p$, $\Phi_2(x)<-2p$, *тогда* $v_x(x,t)<-2p$ *и* $-1<\dot{s}(t)<0$.

Лемма4. *Пусть* $|u(x,0)|\le M_1$, $|v(x,o)|\le M_1$ *в* $\{(x,t): s(t)\le x\le l, 0\le t\le t_1\}$, *тогда выполняются следующие неравенства* $|u(x,t)|\le N, |v(x,t)|\le N.$

Лемма 5. *Пусть функции* $u(x,t)$, $v(x,t)$, $s(t)$ *являются решением задачи (22)-(28) и* $-1<\dot{s}(t)<0$, $|u(x,t)|\le N$, $|v(x,t)|\le N$, $|u_0'(x)|\le N_0$, $|v_0'(x)|\le N_0$, $0\le t\le t_1$. *Тогда* $|u_x|,|v_x,|u_t|,|v_t|\le C$, *где* C *постоянная, зависящая от данных задачи.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия лемм 3-5. Тогда решение* $u(x,t)$, $v(x,t)$, $s(t)$ *задачи (22) - (28) существует и единственно.*

При доказательстве теоремы 4. мы используем принцип Шаудера.

Во **втором параграфе** третьей главы рассматривается задача со свободной границей для гиперболических систем уравнений первого порядка.

Требуется найти функции $\sigma(x,t)$, $\eta(x,t)$, $s(t)$ такие, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определяется для $t \geq 0$, $s(0)=l$, $\dot{s}(0)=\beta$, и функции $\sigma(x,t)$, $\eta(x,t)$ в области D, где $D=\{(x,t): 0<x<s(t), t\geq 0\}$, удовлетворяет следующие системы уравнений и условий при $t>0$; $0<x<s(t)$

$$\begin{cases} \sigma_t + a\eta_x + c\eta = 0, \\ \eta_t + a\sigma_x + c\sigma = 0, \end{cases} \tag{29}$$

$$\sigma(x,0)=\sigma_0(x), \qquad \eta(x,0)=\eta_0(x), \quad x\in[0,l], \tag{30}$$

$$\eta(s(t),t)=\dot{s}(t), \quad \eta(0,t)+\alpha\sigma(0,t)=f(t), \quad t>0, \tag{31}$$

$$\ddot{s}+\nu\dot{s}=\lambda\sigma(s(t),t)-\lambda F(s(t),t),\ s(0)=l,\ s(0)=\eta_0(l)=\beta, \tag{32}$$

где $a>0$, $c>0$, $\alpha>0$, $\lambda>0$ и $\nu\geq 0$ - константы, а функция $F(x,t)$ определена в первом квадранте.

Представляем новые функции:

$$\begin{cases} u(x,t)=\sigma(x,t)+\eta(x,t), \\ v(x,t)=\sigma(x,t)-\eta(x,t), \end{cases} \tag{33}$$

Тогда задача (29) - (32) принимает вид:

$$\begin{cases} u_t(x,t)+au_x(x,t)+cu=0, \\ v_t(x,t)-av_x(x,t)-cv=0, \end{cases} \tag{34}$$

$$u(x,0)=\phi(x)=\sigma_0(x)+\eta_0(x),\ v(x,0)=\psi(x)=\sigma_0(x)-\eta_0(x),\ 0\leq x\leq l, \tag{35}$$

$$(1+\alpha)u(0,t)-(\alpha-1)v(0,t)=2f(t), \qquad t>0, \tag{36}$$

$$\dot{s}(t)=\frac{u(s(t),t)-v(s(t),t)}{2}, \qquad t>0, \tag{37}$$

$$\ddot{s}+\nu\dot{s}=\lambda\frac{u(s(t),t)+v(s(t),t)}{2}-\lambda F(s(t),t), \qquad t>0, \tag{38}$$

Из (37) и (38) находим

$$\ddot{s}+(\lambda+\nu)\dot{s}=\lambda e^{-ct}\phi(s(t)-at)-\lambda F(s(t),t), \qquad t>0, \tag{39}$$

Характеристики для системы (34) имеют вид $\dfrac{dx}{dt}=\pm a$.

Сначала установим двустороннюю оценку для неизвестной границы, которая необходима для корректности и глобальной разрешимости поставленной задачи.

Теорема 5. *Пусть выполняется неравенства* $|\phi(x)|\leq M$, *тогда* $|\dot{s}(t)|<a,\ t>0.$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда решение задачи (34)-(39) существует и единственно.*

Четвертая глава диссертации под названием «Задачи механики сплошных сред» посвящена исследованию задачи упруго-пластического деформирования и двухфазной задачи газодинамики со свободной границей.

В **первом параграфе** четвертой главы рассматривается система уравнении Прандтл-Рейсса упруго-пластического деформирования.

Известно, что система уравнении Прандтл-Рейсса упруго-пластического деформирования имеет вид

$$\rho\left(u_t + uu_x\right) + (p-s)_x = 0, \tag{40}$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \tag{41}$$

$$s_t + us_x - \frac{4}{3}\mu u_x = 0 \tag{42}$$

$$|s| \le Y = \frac{2}{3}\sqrt{Y_0^2}, \tag{43}$$

здесь $\rho(x,t)$, $u(x,t)$-плотность и скорость среды, $s(x,t)$-напряжение, $p = p(\rho)$-давление, причем $0 < p'(\rho) < \infty$ при любых $0 < \rho < \infty$, Y_0-постоянная Мизеса, $\mu > 0$-постоянная Ламе.

Уравнение (42) имеет место в зоне упругого течения, в зоне пластичности по определинию $|s| = Y$. Для системы (40)-(43) исследована задача Коши с начальными условиями

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), u(x,0) = u_0(x), s(x,0) = s_0(x), -\infty < x < \infty \tag{44}$$

Требуется найти распределение физических величин, входящих в (40)-(44), в областях упругости($|s| < Y$) и пластичности($|s| = Y$) и кривую, являющуюся границей раздела этих зон, так чтобы на ней выполнялось условие непрерывности напряжения.

Для того, чтобы решение имело физический смысл, потребуем выполнения в зоне упругости неравенств $1 \le w(x,t) \le e^{-s_0(x)}$, $w(x,t) = \dfrac{\rho_0}{\rho}$.

Для $\rho(x,t) > 0$ характеристические значения исследуемой системы вещественны и различны: $\lambda_1 = u$, $\lambda_{2,3} = u \pm \sqrt{p'(\rho) + \dfrac{4\mu}{3\rho}}$. Тогда по определению система строго гиперболическая. После преобразования независимых переменных по решению система (40)-(44) примет вид $u_t + (p-s)_x = 0$, $(ln\rho)_t = -\rho u_x$, $s_t = \dfrac{4}{3}\mu\rho u_x$, $|s| \le Y$. Предполагается, что $s(x,t) \ge 0$ всюду в области деформирования и $0 \le s_0(x) \le Y$, $s_0(0) = Y$, $\ddot{s}_0(0) < 0$.

После некоторых упрощающих предположений, не ограничивающие, однако, общности рассуждений и определениях выкладок задачи Коши (40)-(44) сведется к задаче Коши для гиперболических систем уравнений с разрывными на неизвестной линии коэффициентами.

Будем искать решение задачи со свободной границей: найти функций $u(x,t)$, $v(x,t)$ и $x = h_{\pm}(t)$ (неизвестная кривая разрыва коэффициентов), таких, что $h_\pm(t)\in C(t\ge 0)\cap C^1(t>0)$, $h'_+(t)>0$, $h'_-(t)<0$, $h_\pm(0)=0$, $u,v\in C(t\ge 0)\cap C^1(t>0,\ x\ne h_\pm(t))$, удовлетворяющие уравнениям и условиям

$$\begin{cases} u_t + a(v)v_x = f(x), \\ v_t - u_x = 0, \qquad\qquad (x,t)\in D_1\cup D_2,\ (\textit{в зоне } |s|<Y), \\ 1\le v(x,t)\le e^{-s_0(x)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t + b(v)v_x = 0, \\ v_t - u_x = 0, \qquad\qquad (x,t)\in D_0,\ (\textit{в зоне } |s|=Y), \\ 0<\dfrac{1}{A}\le v(x,t)\le A<\infty, \end{cases}$$

$$v(h_\pm(t),t)=e^{-s_0(h_\pm(t))},\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=1,\ -\infty<x<\infty$$

где $D_1=\{(x,t):-\infty<x<h_-(t),\ t>0\}$, $D_2=\{(x,t):h_+(t)<x<\infty,\ t>0\}$, $D_0=\{(x,t):h_-(t)<x<h_+(t),\ t>0\}$; $a(v)$, $b(v)$ непрерывны функции для любого $v(x,t)$, A-положительное постоянное.

Линеаризованная задача. Рассматривается задача для линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами первого порядка

$$\begin{cases} T_{1t} + a_{11}q_{1x} + b_{11}T_1 + c_{11}q_1 = f_1(x), \\ q_{1t} + a_{12}T_{1x} + b_{12}T_1 + c_{12}q_1 = g_1(x), \qquad (x,t)\in D_1\cup D_2, \\ 1\le q_1(x,t)\le e^{-s_0(x)}. \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} T_{2t} + a_{21}q_{2x} + b_{21}T_2 + c_{21}q_2 = f_2(x), \\ q_{2t} + a_{22}T_{2x} + b_{22}T_2 + c_{22}q_2 = g_2(x), \qquad (x,t)\in D_0, \\ 0<\dfrac{1}{A}\le q_2(x,t)\le A<\infty. \end{cases} \tag{46}$$

$$q_i(h_\pm(t),t)=exp\{-s_0(h_\pm(t))\},\ q_1(h_\pm(t),t)=q_2(h_\pm(t),t), \tag{47}$$

$$T_1(x,0)=T_0(x),\ q_1(x,0)=q_0(x),\ -\infty<x<\infty, \tag{48}$$

здесь $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}\,(i,j=1,2)$-известные постоянные, $f_i(x), g_i(x), T_0(x), q_0(x)$-заданные функции.

Замечание 2. *В дальнейшем известные гладкие функции будут обозначены через* $f_j(x), g_j(x)\,(j=3,4)$, $a_i(t), b_i(t)\,(i=1,2)$*-и с учетом их громоздкости не приведем их представления, но будем получать на них определенные ограничения.*

Теорема 8. *Пусть функции* $f_i(x), g_i(x)\,(i=1,2)$, $T_0(x), q_0(x), s_0(x)$ *дважды непрерывно дифференцируемые функции в своих областях* *определения, кроме того* $b_{11}=c_{12}$, $b_{12}=c_{11}$ *и* $-Y\le s_0(x)\le 0$, $s_0(0)=0$, $\dot{s}_0(x)>0$ *при* $x<0$ *и* $\dot{s}_0(x)<0$ *при* $x>0$. *Тогда существует единственное решение задачи (45)-(48).*

Второй параграф четвертой главы посвящен двухфазная задача газодинамики со свободной границей.

Математически задачу можно сформулировать следующим образом: соответствующий для заданных данных $(b,\phi_1,\psi_1,\phi_2,\psi_2)$, требуется найти функции $\sigma_i(x,t)$, $\eta_i(x,t)$, $i=1,2$, $s(t)$ такие, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определена при $t\ge 0$, $s(0)=0$, $\dot{s}(0)=b$, а функции $\sigma_i(x,t)$, $\eta_i(x,t)$ в области $D_i\,(i=1,2)$, где $D_1=\{(x,t):-\infty<x<s(t),t\ge 0\}$, $D_2=\{(x,t):s(t)<x<+\infty,t\ge 0\}$, удовлетворяет следующим системам уравнений и условиям

$$\begin{cases}\sigma_{1t}+c\eta_{1x}-\dfrac{\sigma_1+\eta_1}{2}=0,\\ \eta_{1t}+c\sigma_{1x}+\dfrac{\sigma_1+\eta_1}{2}=0,\end{cases}\quad (x,t)\in D_1, \tag{49}$$

$$\begin{cases}\sigma_1(x,0)=\phi_1(x), \quad \eta_1(x,0)=\psi_1(x), \quad -\infty<x\le 0,\\ c\eta_1(s(t),t)=\dot{s}(t), \qquad t\ge 0,\end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases}\sigma_{2t}+c\eta_{2x}-\dfrac{\sigma_2-\eta_2}{2}=0,\\ \eta_{2t}+c\sigma_{2x}-\dfrac{\sigma_2-\eta_2}{2}=0,\end{cases}\quad (x,t)\in D_2, \tag{51}$$

$$\begin{cases}\sigma_2(x,0)=\phi_{(x)}, \quad \eta_2(x,0)=\psi_2(x), \quad 0\le x<\infty,\\ c\eta_2(s(t),t)=\dot{s}(t), \qquad t\ge 0,\end{cases} \tag{52}$$

$$\mu\ddot{s}(t)=\sigma_1(s(t),t)-\sigma_2(s(t),t), \qquad t\ge 0. \tag{53}$$

Введем новый функции:

$$\begin{cases}u_i(x,t)=\sigma_i(x,t)+\eta_i(x,t),\\ v_i(x,t)=\sigma_i(x,t)-\eta_i(x,t),\end{cases} \tag{54}$$

$$\begin{cases}f_i(x)=\phi_i(x)+\psi_i(x),\\ g_i(x)=\phi_i(x)-\psi_i(x).\end{cases} \tag{55}$$

Тогда задача (49)-(53) примет вид

$$\begin{cases}u_{1t}(x,t)+cu_{1x}(x,t)=0,\\ v_{1t}(x,t)-cv_{1x}(x,t)-u_1(x,t)=0,\end{cases}\quad (x,t)\in D_1, \tag{56}$$

$$\begin{cases}u_1(x,0)=f_1(x), \quad v_1(x,0)=g_1(x), \quad -\infty<x\le 0,\\ \dfrac{c}{2}[u_1(s(t),t)-v_1(s(t),t)]=\dot{s}(t), \qquad t\ge 0,\end{cases} \tag{57}$$

$$\begin{cases} u_{2t}(x,t) + cu_{2x}(x,t) - v_2(x,t) = 0, \\ v_{2t}(x,t) - cv_{2x}(x,t) = 0, \end{cases} \quad (x,t) \in D_2, \tag{58}$$

$$\begin{cases} u_2(x,0) = f_2(x), \quad v_2(x,0) = g_2(x), \quad -\infty < x \le 0, \\ \dfrac{c}{2}[u_2(s(t),t) - v_2(s(t),t)] = \dot{s}(t), \quad t \ge 0. \end{cases} \tag{59}$$

Из (53) с учетом (54) получим

$$u_1(s(t),t) - v_2(s(t),t) = \frac{2}{c}\dot{s}(t) + 2\mu\ddot{s}(t), \tag{60}$$

Пусть $\delta \equiv \sup\limits_{-\infty<x\leqslant 0\leqslant y<+\infty} \frac{1}{2}\left| f_1(x) - g_2(y) \right|$. Установим оценку $|\dot{s}(t)| < c$, которая необходимо для корректности и глобальной разрешимости задачи.

Теорема 9. *Пусть* $u_i(x,t)$, $v_i(x,t)$, $s(t) (i = 1,2)$ *являются решением задачи (56)-(60) и выполнены неравенства* $0 \le \delta < 1$, $|b| \le c(1-\delta)$, *тогда* $|\dot{s}(t)| < c$, $t \ge 0$.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы 9. Тогда решение задачи (56)-(60) существует и единственно.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию задач со свободной границей для систем гиперболических уравнений первого порядка, что позволило изучить некоторые не-Фурье эффекты и были получены следующие результаты:

предложена математическая модель со свободной границей для релаксационного уравнения переноса третьего порядка, обладающая рядом особенностей: в начальный момент область вырождается в точку; искомая функция и ее производные имеют точку разрыва при начало координат; условие для свободной границы задано в неявной для этой границы форме;

доказана существование решения бегущей волны уравнения, описывающего процессы переноса потенциала в среде с релаксационными свойствами;

исследована движение потока в канале, управляемом постоянным градиентом давления, что является задачей со свободными границами, включающей гиперболическое телеграфное уравнение Максвелла и уравнение Олдройда-Б третьего порядка. Свободная граница - это поверхность, разделяющая две области: внутреннюю сердцевину канала и внешний слой;

исследована однофазная задача типа Стефана. Рассматривается одномерный цилиндр, заполненный газом и один конец цилиндра закреплен. Задача состоит в том, чтобы описать движение поршня и состояние газа в данный момент времени;

исследована задача для гиперболической системы уравнений с разрывными коэффициентами и неизвестной кривой разрыва, которая определяется в процессе решения задачи вязкопластического деформирования. Доказана теорема существования и единственности решения задачи с линеаризованным дифференциальным оператором;

исследована двухфазная гиперболическая модель газовой динамики, полученная на основе релаксационной формулы Максвелла-Каттанео.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

UMIRKHONOV MASUDKHON TURAKHON UGLI HASANZODA

FREE BOUNDARY PROBLEMS FOR SYSTEMS OF FIRST ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOFHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministersof the Republic of Uzbekistan under number №B2021.4.PhD/FM306.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (http://kengash.mathinst.uz/) and in the webside of "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Takhirov Jozil Ostanovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Babajanov Bazar Atajanovich Doctor of physical and mathematical sciences, docent
Leading organization:	**Samarkand state university**

Defense will take place " 27 " December 2022 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanosky AS RUz (Address:Mirzo Ulugbek str., 81, Tashkent, Uzbekistan, 100170. Phone: (99871) 262-75-44, fax: (99871) 262-73-57, e-mail: nauka@mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at at Institute of Mathematics named after V.I.Romanosky AS RUz (is registered №154). Address:Mirzo Ulugbek str., 81, Tashkent, Uzbekistan, 100170. Phone: (99871) 262-75-44.

Abstract of dissertation sent out on « 7 » December 2022 year.

(Mailing report №2 on « 7 » December 2022 year).

U.A. Rozikov

Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., professor

J.K. Adashev

Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., senior researcher

A.A. Azamov

Chairman of scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is to build and develop mathematical models of processes in media with relaxation properties and to develop methods for studying hyperbolic problems with a free boundary.

The object of the research work are various mathematical models with a free boundary of processes in media with relaxation properties and continuum mechanics.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

a free boundary mathematical model with a number of important features was built for the third-order relaxation transfer equation, and the existence of a wave solution of the equation was proved;

the problem involving Maxwell's hyperbolic telegraph equation and the Oldroyd-B equation, where the surface separating the inner core and the outer layer of a channel controlled by a constant pressure gradient is considered as an free boundary, is proved to have a unique solution;

the existence and uniqueness of the solution for the case where the system of hyperbolic equations, which is a model of the visco-plastic deformation process, and whose coefficients are discontinuous over a free boundary, is a linear differential operator, is proved;

one- and two-phase hyperbolic models of gaso-dynamics were studied, that is, the behavior of the free boundary at given and infinite values of time was studied, and the theorems of the existence and uniqueness of the solution were proved;

Implementations of the research results. The scientific results obtained for free boundary problems for the system of hyperbolic equations of the first order are implemented in the following research projects :

a mathematical model with a free boundary for a third-order relaxation transfer equation, which has a number of features, was used in the grant MD-758.2022.1.1. “Development of mathematical models of fractional dynamics in order to study oscillatory processes and processes with saturation” in the study of mass transfer problems with a free boundary (reference No. 42-12 of Kamchatka State University, dated November 28, 2022). The application of the scientific result made it possible to analyze the process of radon transfer in the soil-atmosphere system;

from the solution of the problem containing Maxwell's hyperbolic telegraph equation, in which the inner core of the channel controlled by a constant pressure gradient and the surface separating the outer layer are considered as a free boundary, YoOT-Ftex-2018-149 on the topic "Mathematical modeling of the filtration process in two-component media given by nonlinear boundary conditions" in the fundamental project, it was used to build automodel solutions of filtration systems in two-component media (reference No. 04/11-6174 of the National University of Uzbekistan dated October 8, 2022). The application of the scientific result made it possible to determine the behavior of automodel solutions of filtration systems in two-component media given by nonlinear boundary conditions at unbounded values of time.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 5 international and 1 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 12 research papers have been published, 6 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the PhD thesis, in addition 1 of them were published in international journals and 5 papers published in national mathematical journals and 6 abstracts.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of the introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The total volume of the thesis is 105 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I, Part I)

1. Тахиров Ж. О., Умирхонов М. Т. О задаче со свободной границей для релаксационного уравнения переноса. // Теоретическая и Математическая Физика. – 2021. Том 209, № 1. – С. 184-202. (3. Scopus. IF=0,324).
2. Takhirov J.O., Umirkhonov M.T. On wave solutions of the relaxation transport equation. // Uzbek Mathematical Journal. – 2022. No 3. –P. 165-169. (01.00.00, №6)
3. Takhirov J. O., Umirkhonov M. T. On a free boundary problem for a Maxwell fluid// Uzbek Mathematical Journal. – 2021, No 3.– P.147-158. (01.00.00, №6)
4. Umirkhonov M.T. Stefan problem for a hyperbolic equation // Uzbek Mathematical Journal. – 2019. No 4. – P. 169-174. (01.00.00, №6)
5. Umirkhonov M.T. On a free boundary problem of elastoplastic deformation // Uzbek Mathematical Journal . – 2019. № 3. – P. 96-103. (01.00.00, №6)
6. Умирхонов М.Т. Двухфазная задача со свободной границей для гиперболического уравнения теплопроводности // Проблемы вычислительной и прикладной математики. –2018, № 6. –С. 115-123.

II бўлим (Часть II, Part II)

7. Takhirov J.O., Umirkhonov M.T. Free-boundary problem for the relaxation equation of transfer. // Proceedings of International scientific conference “Mathematical Physics, Dimensional Systems and Infinite-Dimensional Analysis” Dolgoprudny, Moscow, June 30-July 9, 2021. – P. 189-192.
8. Umirkhonov M.T. On one relaxation version of the nonlinear Maxwell problem. // Proceedings of International scientific conference “Non-local boundary value problems and related problems of mathematical biology, informatics and physics” Nalchik, December 5-9, 2021. – P. 156.
9. Умирхонов М.Т. О волновых решениях для одного класса нелинейных вязкоупругих сред. // Республиканской научной конференции «Сарымсаковские Чтения», Ташкент, 16–18 сентября, 2021. – С. 286.
10. Takhirov A.J., Umirkhonov M.T. On a free boundary problem for a Maxwell fluid // Proceedings of International XI All-Russian scientific conference “Mathematical Modeling and Boundary Value Problems” Samara, May 27–30, 2019. – P. 114-115.
11. Умирхонов М.Т. Двухслойная задача для гиперболического уравнения теплопроводности // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» Нальчик, 22-26 мая, 2018. - С. 252.
12. Умирхонов М.Т. О задаче со свободной границей упруго-пластического деформирования // Тезисы Российско-Французского семинара

«Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» Ханты-Мансийск, 25-29 августа, 2019. – С. 116-117.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
2022 йил 28 ноябрда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги
матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,5. Адади 100 дона. Буюртма № 71/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.