В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХОДЖАМУРАТОВА ИНДИРА АЗАТОВНА

УНИВЕРСАЛ АЛГЕБРАЛАРНИНГ АЛГОРИТМИК ТАСВИРЛАРИ УСТИДА ҲИСОБЛАНУВЧИ САНАЛУВЧИ ТОПОЛОГИК ФАЗОЛАР

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

УДК: 510.5+510.6

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХОДЖАМУРАТОВА ИНДИРА АЗАТОВНА

УНИВЕРСАЛ АЛГЕБРАЛАРНИНГ АЛГОРИТМИК ТАСВИРЛАРИ УСТИДА ҲИСОБЛАНУВЧИ САНАЛУВЧИ ТОПОЛОГИК ФАЗОЛАР

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.1.PhD/FM594 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Касимов Надимулла Хабибуллаевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Файзрахманов Марат Хайдарович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Худойбердиев Аброр Хакимович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	С.Л.Соболев номидаги Математика институти (Россия)

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2023 йил « 10 » январ соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174,Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (155-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871) 207-91-40.

Диссертация автореферати 2022 йил « 26 » декабр куни тарқатилди.
(2022 йил « 26 » декабрдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

Б.А.Омиров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Ҳозирги кунда абстракт моделларнинг самарали алгоритмик тасвирларини топиш ва уларни алгебраик хоссаларини ўрганиш алгоритмлар назариясида ва «Computer Science» фанларида долзарб муаммолардан бири ҳисобланади. Математика ва табиий фанларда универсал алгебралар ниҳоятда катта аҳамиятга эга ва шунинг учун ҳам универсал алгебраларни алгоритмик ва алгебраик хоссаларини ўрганиш эҳтиёжи ошиб бормоқда. Универсал алгебраларни алгоритмик, топологик ва алгебраик хоссалари назарий информатикада самарали ва кенг қўлланилиши назарда тутилмоқда. Универсал алгебраларни муҳим синфлари учун яхши ва самарали алгоритмик тасвирлари топилса улар ҳам математик мантиқ нуқтаи назаридан янги натижаларни ёритади, ҳам Computer Science фанларида амалга оширилади (жумладан, маълумотларнинг абстракт турларида, алгебраик спецификациялашда, объектга мўлжалланган дастурлашда).

А.И.Мальцев томонидан фақат чекли индексли нолдан фарқли конгруэнцияга эга бўлган чекли ҳосил қилинган алгебраларнинг барча позитив нумерлашлари ҳисобланувчи бўлиши кўрсатилган, бу эса умумий ҳолда (чекли ҳосил қилинганлик шартисиз) бу тасдиқ ўринли бўладими деган саволни қўйди. Бевосита ажралмайдиган, артин конгруэнцияли ва трансляцион деярли тўлалик ҳоссаларига эга барча ҳисобланувчи ажралувчи тасвирга эга алгебралар T_4 −фазолар ҳисобланади. Ажралувчи тасвирлар учун, бу ҳоссаларга эга бўлган барча нумерлашлар ҳисобланувчи саналувчи ажралувчи бўлади, яъни Π_2^0 синфида ётади. Лекин, $\Pi_2^0 \setminus \Pi_1^0$ айирмасида ётадиган минималлик шартига эга алгебраларнинг ажралувчи тасвирларининг мавжудлиги саволи узоқ вақтлардан бери очиқ қолиб келмоқда.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга долзарб йўналишлардан бири бўлган алгоритмлар назарияси ва математик мантиқнинг структуравий назариясини тадқиқ этишга алоҳида эътибор кучайтирилди. Маълумки, алгоритмлар назариясининг асосий синфлари ҳисобланувчи ажралувчи алгебралардир. Фиксирланган универсал алгебралар учун унинг ҳар хил алгоритмик тасвирларини топиш ва улар орасидаги муносабатларни ўрганиш муаммоси классик ҳисобланиб, ҳусусан, яхши тасвирларнинг (масалан ҳисобланувчи) мавжудлиги ва уларнинг сони (яъни ягоналиги, ҳисобланувчи изоморфизм аниқлигигача). Охирги йилларда универсал алгебраларнинг яхши алгоритмик тасвирларини топишга оид салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра, алгоритмлар назарияси ва ҳисобланувчилик назарияси» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1].

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги 292-сон қарори

Қарорнинг ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида чекли шартли ҳисобланувчи ажралувчи универсал алгебраларнинг алгоритмик тасвирларини аниқлаш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. А.И. Мальцев томонидан киритилган нумерланган алгебра тушунчаси – нумерлаш назарияси ва универсал алгебралар назариясидаги марказий тушунчалардан бири ҳисобланади. Бу йўналишда, энг аввало, замонавий математик мантиқнинг кенг ривожланган бўлими ҳисобланган конструктив ва позитив алгебраларни алоҳида ажратиб кўрсатиш керак. Нумерлаш назариясида ажралиш тушунчасини қўллаш ғояси В.А.Успенски ва А.Нероудуга тегишли бўлса, бу тушунча А.И.Мальцев ва Ю.Л.Ершов ишларида ривожландирилган. Алгоритмлар назариясида ажралишнинг классик шарти ҳисобланувчи ажралиш шарти ҳисобланади.

Бу факт алгебраларнинг ажралувчи нумерлашга эга бўлишининг аҳамиятли эканини кўрсатади, яъни улар орасида ҳисобланувчи саналувчи ажралувчи алгебралар фундаментал роль ўйнайди, чунки нумерланган алгебра фақат ва фақатгина ҳисобланувчи саналувчи ажралувчи нумерланган алгебралар билан аппроксимирланган бўлса ажралувчи бўлади. Ю.Л. Ершов томонидан ажралувчи нумерлашларнинг анча умумийроқ тушунчаси киритилган.

Юқорида айтилган синфлардан олинган нумерланган моделлар ҳақида натижаларнинг ва ҳар ҳил исботлаш методларида принципиал умумий ҳулосалар кам эмас, шу билан бирга жуда кучли ҳоссаларнинг ростлиги нумерлаш эквивалентликларининг мураккаблигига боғлиқ эмас. Вазиятга кенгроқ қараганда бу фактлар ҳисобланувчи ажралувчи нумерланган алгебралар назарияси нуқтаи назаридан қарасак аниқ кўринади. Ушбу назария асосида ва доирасида бир қатор табиий саволлар ечилади, жумладан маълумотларнинг абстракт турларида ва ҳисобланувчи тасвирланувчи моделлар назариясида А.И.Мальцев, В.Баур, Д.Бергстр ва Д.Такер, С.Камин ишлари билан боғлиқ бир қатор саволлар юзага келади. Д.Бергстр ва Д.Такер барча чекли сигнатурага эга бўлган ҳисобланувчи тасвирланувчи чекли ҳосил қилинган алгебраларнинг эквационал спецификация билан бойитилганини исботлаган. Н.Х.Касимовнинг ишларида ҳисобланувчи ажралувчи алгебраларнинг бир қанча кучлироқ эффектив, структуравий ва топологик ҳоссалари ўрганилган ва бу турдаги алгебраларнинг муҳим типлари кўрсатилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация иши Волга федерал округи илмий ва ўқув математика марказининг ривожланиш дастурини амалга ошириш доирасида амалга оширилди (02.02.2022 дан 31.12.2023 йилдаги 075-02-2022-882-сонли шартнома). Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади бевосита ажралмайдиган ва транляцион деярли тўла универсал алгебраларнинг топологик хоссаларини исботлаш ва ажралувчи алгоритмик тасвирларини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

трансляцион деярли тўла универсал алгебралар тушунчасини киритиш ва уларнинг классик чекли бўлган алгебралар билан муносабатини аниқлаш;

трансляцион деярли тўла универсал алгебраларнинг барча хаусдорф тасвирлари негативлигини кўрсатиш;

T_1 ажралувчи, лекин хаусдорф бўлмаган трансляцион деярли тўла универсал алгебрага мисол қуриш ва артин панжарали конгруэнцияли бевосита ажралмайдиган алгебранинг мавжуд эканлигини исботлаш;

барча T_1 ажралувчи тасвирлари ҳисобланувчи бўладиган содда алгебрани топиш;

барча чексиз сондаги синфларга эга бўлган эквивалентликларнинг ҳисобланувчи саналувчи фазолари модули бўйича компакт бўладиган чексиз кенгайтмаси топиш.

Тадқиқотнинг объекти. Ҳисобланувчи саналувчи фазолар, универсал алгебра.

Тадқиқотнинг предмети. Ҳисобланувчилик назарияси, алгоритмлар назарияси, универсал алгебралар ва топологик фазолар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда топологик фазолар назарияси, алгебра ва математик мантиқ усуллари ва универсал алгебралар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

трансляцион деярли тўла универсал алгебралар тушунчаси киритилган ва уларнинг классик чекли бўлган алгебралар билан муносабати топилган ҳамда трансляцион деярли тўла универсал алгебраларнинг барча Хаусдорф тасвирлари негатив бўлиши исботланган;

ажралувчи Хаусдорф бўлмаган трансляцион деярли тўла ва Артин панжарали конгруэнцияли бевосита ажралмайдиган универсал алгебранинг мавжудлиги исботланган;

барча T_1 ажралувчи тасвирлари ҳисобланувчи бўладиган содда алгебранинг мавжудлиги исботланган;

барча чексиз сондаги синфларга эга бўлган эквивалентликларнинг ҳисобланувчи саналувчи фазолари модули бўйича компакт бўладиган чексиз кенгайтмаси мавжуд эканлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Диссертация иши назарий характерга эга. Унинг натижаларини маълумотларнинг абстракт базаси ва нумерланган алгебралар назариясида қўлланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги натижалар алгебралардаги маълум методлар ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлигига асосланганлиги, олинган натижалар алгебраик кўпхилликларининг маълум натижалари ва тадқиқ этиш усулларидан қатъий фойдаланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар универсал алгебралар назариясида универсал алгебраларнинг ажраладиган алгоритмик тасвирларини топиш учун фойдаланилади ҳамда назарий информатика моҳиятан ажраладиган универсал алгебралар бўлган маълумотлар тузилмаларининг спецификацияси доирасидаги масалаларни ўрганишда қўлланилади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган натижалар чеклилик шартлари билан ажраладиган универсал алгебраларга тегишли. Қисман, трансляцион деярли тўла алгебраларнинг ҳар қандай Ҳаусдорфф тасвирларининг негативлиги уларнинг мос мантиқий-математик тилларда адекват тавсифларини қуриш имконини беради.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Универсал алгебраларнинг алгоритмик тасвирлари устида ҳисобланувчи саналувчи топологик фазолар бўйича натижалар асосида:

барча чексиз сондаги синфларга эга бўлган эквивалентликларнинг ҳисобланувчи саналувчи фазолари модули бўйича компакт бўладиган чексиз кенгайтмасидан ОТ-4-27 рақамли «Йордан учликлари олдкўшма фазолари, сиғимлар фазолари тавсифлари ва функцияларни голоморф давом эттириш» мавзусидаги фундаментал лойиҳада JBW-алгебраларнинг олдкўшма фазоларини ва диффереициаллашларини топишда фойдаланилган (Қорақалпоқ давлат университетининг 2022 йил 25 августдаги №01-22-04/376-сонли маълумотномаси). Илмий натижани қўлланиши JBW-алгебраларнинг олдкўшма фазоларини ва чексиз ўлчамли марказий регуляр алгебраларнинг диффереициаллашларини таснифлаш имконини берган;

трансляцион деярли тўла универсал алгебралар классик чекли бўлган алгебралар билан муносабатидан ва трансляцион деярли тўла универсал алгебраларнинг барча хаусдорф тасвирлари негатив бўлишидан 18-11-00028 рақамли «Алгебраик структуралар ва ҳисобланувчилик» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида ҳисоблаш алгебраик структураларида тўпламларнинг табиий синфларини аниқлаш муаммолари билан боғлиқ моделлар назарияси ва структураларнинг чегараланган фрагментларини алгоритмик ҳал қилиш масалаларида фойдаланилган (Қозон Федерал унинверситетининг 2022 йил 6 июлдаги №НП-07/9-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижаларни қўлланиши ҳисобланувчи ажралувчи алгебраларнинг негатив тасвирларини топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 5 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 14 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та илмий мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 85 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган бўлиб тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ҳамда диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Ҳисобланувчи саналувчи ажралувчи нумерланган алгебралар»** деб номланувчи биринчи бобида, эквивалентликлар ва алгебраларнинг алгоритмик тасвирлари, ҳисобланувчи саналувчи фазолар назарияларидан зарур тушунчалар ва ёрдамчи натижалар келтирилган. Ажралувчи ва ҳисобланувчи ажралувчи нумерлашларнинг характеристикалари таснифланган.

Агарда ω натурал сонлар тўпламини ω натурал сонлар тўпламига акслантирадиган барча тўплам буйича аниқланган функциянинг ҳисобловчи алгоритми мавжуд бўлса, унга ҳисобланувчи дейилади. ω натурал сонлар тўпламининг характеристик функцияси ҳисобланувчи бўладиган қисм тўпламларига ҳисобланувчи дейилади. Бу таърифлар табиий ҳолда ω натурал сонлар тўпламининг декарт даражали қисм тўпламлари ва кўп ўзгарувчили функциялар учун ҳам ўринли бўлади. ω натурал сонлар тўпламининг қисм тўплами шу тупламга мос ҳисобланувчи функцияънинг аниқланиш соҳаси бўлса ҳисобланувчи саналувчи дейилади.

Шунга тенг кучли (формалрок), агарда тўплам қандайдир алгоритм орқали ҳосил қилинса, унга ҳисобланувчи саналувчи дейилади. Бу таърифлар табиий ҳолда кўп ўринли муносабатлар учун ҳам ўринли бўлади.

Шуни таькидлаш жоизки, барча ҳисобланувчи тўпламлар ҳисобланувчи саналувчи бўлади, шунингдек, алгоритмлар назариясининг фундаментал факти ҳисобланувчи бўлмаган ҳисобланувчи саналувчи тўпламларнинг мавжудлиги.

1-таъриф. Агарда шундай ψ қисман – ҳисобланувчи функция мавжуд бўлиб, $(\forall x)\left[W_x \subset A \Rightarrow \left[\psi(x) \text{аникланган} \,\&\, \psi(x) \in A - W_x\right]\right]$ тенглик ўринли бўлса, A тўпламга *маҳсулдор тўплам* дейилади. ψ функцияси A тўплам учун *маҳсулдор функция* дейилади («маҳсулдорлик» термини Деккерга тегишли.)

Биз учун тўлдирувчиси маҳсулдор тўплам бўлган ҳисобланувчи саналувчи тўпламлар алоҳида қизиқиш уйғотади. Бунақа тўпламлар Пост буйича ижодкорли (ёки креатив) тўпламлар деб аталади.

2-таъриф. Агар

1. A ҳисобланувчи саналувчи;

2. $\overline{A}$ маҳсулдор тўплам бўлса A - тўпламга *ижодкорли (ёки креатив)* тўплам дейилади

3-таъриф. Агар A сонли чексиз ва шунинг билан бирга ҳеч қандай чексиз ҳисобланувчи саналувчи тўплам унинг таркибига кирмайдиган тўпламга *иммун тўплам* дейилади. Демак, иммун тўпламлар ҳисобланувчи саналувчи ҳам, маҳсулдор тўплам ҳам бўла олмайди.

4-таъриф. Агар

1. A ҳисобланувчи саналувчи;

2. $\overline{A}$ чексиз;

3. $(\forall B)$[[B чексиз ва ҳисобланувчи саналувчи] $\Rightarrow B \cap A \neq \varnothing$] бўлса, A тўпламга содда тўплам дейилади.

Тўлдирувчиси иммун тўплам бўладиган ҳисобланувчи саналувчи сонли A тўпламни содда тўплам деб атаймиз.

Айтайлик N – саноқлидан кўп бўлмаган тўплам бўлсин. Сюрьектив $\nu\colon \omega \longrightarrow N$ акслантиришга N тўпламнинг нумерлаши дейилади, ν нумерлашнинг нумерлаш эквивалентлигига (яъни $\{\langle x, y\rangle \vee \nu x = \nu y\}$ тўплам) шу нумерлашнинг ядроси дейилади. Бунда (N, ν) жуфтлик нумерланган тўплам дейилади.

5-таъриф. Агар

$$\{\langle x, y\rangle | y \in \nu x, x \in \omega, \nu x \in \Re\}$$

тўплам ҳисобланувчи тўплам бўлса, ҳисобланувчи тўпламлар оиласи $\Re$ нинг ν нумерлашига тўлиқ ҳисобланувчи дейилади

Айтайлик, η -ихтиёрий эквивалентлик бўлсин.

η эквивалентликнинг характеристик транверсали ($tr(\eta)$деб белгиланади) деб, η-синфлардаги энг кичик бўлган барча сонлар тўпламига айтилади, яъни $tr(\eta)=\{x \mid \forall y(x=y(\mathrm{mod}\eta)\rightarrow x\leq y)\}$.

Σ сигнатурали универсал А алгебранинг θ конгруэнцияси деб, барча муносабат ва операцияларни сақловчи А даги ихтиёрий эквивалентликка айтилади, яъни

$$\forall f\in\Sigma\ \ \forall\bar{x}=\bar{y}(mod\ \theta)\ \Rightarrow f(\bar{x})=f(\bar{y})(mod\ \theta).$$

Агар алгебра тривиал бўлмаган (нуллик $id\ A$ ва бирликдан A^2 бошқа) конгруэнцияларга эга бўлмаса, у ҳолда унга конгруэнц-содда алгебра дейилади.

6-таъриф. Агар ҳисобланувчи Σ–операциялар оиласи I ва асосий ω тўпламли шундай ҳисобланувчи $(\omega;I)$ Σ–алгебра мавжуд бўлса, Σ сигнатурали А универсал алгебрага (кейинги қаторларда - фақат алгебра) η эквивалентлик устида аниқланган дейилади, яъни η фактор алгебраси η конгруэнцияси буйича А га изоморф бўлган $(\omega;I)$ ҳисобланувчи алгебранинг конгруэнцияси бўлади. (яъни $A\cong(\omega/\eta;I)$).

Агар нумерланган (A,μ) алгебрадан нумерланган (B,ν) алгебрага φ гомоморфизм номерларда ҳисобланувчи функция орқали берилса, унга ҳисобланувчи дейилади, яъни шундай f ҳисобланувчи функция мавжуд бўлиб, $\varphi\mu=\nu f$ тенглик бажарилса.

7-таъриф. Агар А алгебранинг ҳисобланувчи (ҳисобланувчи саналувчи, тўлдирувчиси ҳисобланувчи саналувчи) ядроли нумерлаши мавжуд бўлса, унга ҳисобланувчи (позитив, негатив) тасвирланувчи дейилади.

Агар N тўпламининг N_0 қисм тўпламининг барча ν-номерлари ҳисобланувчи (ҳисобланувчи саналувчи) бўлса, N_0 тўпламга ν–ҳисобланувчи (ν-ҳисобланувчи саналувчи) дейилади, яъни N_0 ($\nu^{-1}N_0=\{x\vee\nu x\in N_0\}$) нинг тўлиқ ν -акси. (N,ν) нумерланган тўпламнинг чекли сондаги ҳисобланувчи (ҳисобланувчи саналувчи) қисм тўпламлари кесишмаси ҳисобланувчи (ҳисобланувчи саналувчи) бўлади, шунинг учун N тўпламнинг ҳисобланувчи (ҳисобланувчи саналувчи) қисм тўпламлар оиласи N да табиий топологияни ташкил этади, яъни ҳисобланувчи (ҳисобланувчи саналувчи) топология деб атаймиз, унга мос топологик фазога ҳисобланувчи (ҳисобланувчи саналувчи) топологик фазо дейилади.

Айтайлик (M,μ) ва (N,ν) −нумерланган тўпламлар ва $F\colon M\longrightarrow N$ акслантириш бўлсин. Агар F га шундай ҳисобланувчи f функция топилиб, $F\mu=\nu f$ тенглик бажарилса, у ҳолда F морфизм деб аталади. Бошқача қилиб айтганда, M тўпламдаги барча элементларнинг ихтиёрий μ-номери орқали N тўпламдаги шу элементларнинг F −образининг ν-номерини ҳисоблаш мумкин бўлса, унга морфизм дейилади. Умумий нумерлаш назариясида қараладиган барча акслантиришлар морфизмлар ҳисобланади.

Агар $\alpha\subseteq\omega$ тўплам ҳар бир сон билан бирга уларнинг η – эквивалент бўлган элементларини ҳам ўз ичига олса, α тўпламга η – ёпиқ (топологик маънода эмас!) дейилади, яъни $x\in\alpha\wedge x=y(mod\eta)\rightarrow y\in\alpha$.

1-тасдиқ. Ихтиёрий нумерланган алгебрадаги амаллар ҳисобланувчи (ҳисобланувчи саналувчи) тўпламлар орқали ҳосил қилинган фазода узлуксиз бўлади.

8-таъриф. Агарда η эквивалентликнинг ҳар хил синфлардаги барча жуфтликлари мос η-ёпиқ ҳисобланувчи (ҳисобланувчи саналувчи) тўплам билан ажиратилса, бу эквивалентликга ҳисобланувчи (ҳисобланувчи саналувчи) ажралувчи дейилади.

9-таъриф. Агарда А алгебранинг ихтиёрий ҳар ҳил a_0, a_1 элементлари учун шундай (B, ν) К$-$ алгебра топилиб ва $\varphi: A \longrightarrow B$ гомоморфизм морфизм бўлиб, a_0, a_1 элементларнинг образлари бир-биридан фарқ қиладиган бўлса (яъни $\varphi(a_0) \neq \varphi(a_1)$), (A, μ) нумерланган алгебрага К-алгебралар билан аппроксимирланувчи дейилади.

1-теорема. Нумерланган алгебра фақат ва фақатгина негатив алгебралар билан аппроксимирланувчи бўлсагина ҳисобланувчи ажралувчи бўлади.

Диссертациянинг иккинчи боби «**Алгебраларнинг чеклилик шарти билан ажралувчи тасвирлари**» деб номланиб, бу бобда трансляцион деярли тўла универсал алгебраларнинг барча хаусдорф тасвирлари негатив бўлиши, T_1-ажралувчи Хаусдорф бўлмаган тасвирга эга Артин панжарали конгруэнцияли бевосита ажралмайдиган алгебранинг мавжуд эканлиги ва барча T_1- ажралувчи тасвирлари ҳисобланувчи бўладиган содда алгебранинг мавжудлиги исботланган, T_1-ажралувчи, лекин Хаусдорф бўлмаган трансляцион деярли тўла универсал алгебрага мисол қурилган.

Биринчи параграфда ажралиш аксиомаларининг асосий таърифлари ва уларнинг негатив тасвирларининг ҳоссалари келтирилган.

10-таъриф. Агарда нумерлаш эквивалентликларининг модуллари буйича ҳар ҳил бўлган натурал сонларнинг барча жуфтликлари учун, иккинчи сонни ичига олмайдиган биринчи соннинг ҳисобланувчи саналувчи атрофи ва биринчи сонни ичига олмайдиган иккинчи соннинг ҳисобланувчи саналувчи атрофи мавжуд бўлса (бу сонларнинг кесишмайдиган ҳисобланувчи саналувчи атрофлари топилса; барча элементлар ва шу ҳисобланувчи саналувчи фазонинг ёпиқ тўпламининг кесишмайдиган ҳисобланувчи саналувчи атрофлари мавжуд бўлса; барча ёпиқ тўпламлар жуфтликларининг кесишмайдиган ҳисобланувчи саналувчи атрофлари топилса), у ҳолда бундай нумерлашга T_1-ажралувчи (T_2- ажралувчи; T_3- ажралувчи; T_4- ажралувчи) дейилади

Айтайлик $T_i -$ стандарт топологик аксиомалардан бири ($i \in \{0,1,2,3,4\}$) ва $\nu -$ А алгебранинг нумерлаши бўлсин.

11-таъриф. Агарда А тўпламда ҳисобланувчи саналувчи (ҳисобланувчи) $ker(\nu)$-ёпиқ тўпламлар орқали ҳосил қилинган топология T_i аксиомасини қаноатлантирса, ν нумерлашга T_i-ажралувчи (T_i-ҳисобланувчи ажралувчи) дейилади.

12-таъриф. Агарда конгруэнциянинг чексиз қатъий камаювчи (мос ўсувчи) занжири мавжуд бўлмаса, алгебранинг конгруэнция панжарасига Артин (Нётер) панжара дейилади.

Артин конгруэнцияли панжарага эга энг оддий мисол олдингисини топиш $P = \langle \omega, n \rangle$ алгебраси ҳисобланади, бу ерда p(n+1)=n, p(0)=0 (унинг ихтиёрий конгруэнцияси $\langle 0,1\rangle$ жуфтликни ўз ичига олади).

2-тасдиқ. Олдингисини топиш алгебрасининг барча T_2-ажралувчи нумерлашлари негатив тасвирланувчи бўлади.

Иккинчи параграфда Артин панжарали конгруэнцияга эга бўлган алгебраларнинг T_1-ажралувчи нумерлашларнинг ҳоссалари ўрганилган.

3-тасдиқ. P алгебра учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

(1) P Нётер бўлмаган Артин панжарали конгруэнцияга эга;

(2) P алгебрасининг панжара конгруэнцияси $\omega + 1$ га изоморф бўлади;

(3) P алгебрасининг қисм алгебраларининг панжараси ҳам $\omega + 1$ га изоморф бўлади;

(4) Барча нуль эмас θ конгруэнция буйича P/θ фактор-алгебралар P га изоморф бўлади;

(5) P алгебрасининг автоморфизмлар группаси тривиал бўлади.

Иккинчи бобнинг учунчи параграфида трансляцион деярли тўла универсал алгебраларнинг барча Хаусдорф тасвирлари негатив бўлиши ва барча T_1- ажралувчи тасвирлари ҳисобланувчи бўладиган содда алгебранинг мавжудлиги исботланган,

13-таъриф. Агарда алгебранинг ҳар хил элементларидан тузилган барча тартибланган жуфтликлари ихтиёрий бошқа ҳар хил элементлардан олинган тартибланган жуфтликка мос трансляция орқали ўтса, у ҳолда бундай алгебрага трансляцион тўлиқ алгебра дейилади.

4-тасдиқ. Барча бўлиниш халқалари трансляцион тўлиқ алгебра бўлади.

14-таъриф. Агарда алгебранинг шундай ҳар хил элементларидан тузилган тартибланган жуфтликлари топилиб, ихтиёрий бошқа ҳар хил элементлардан олинган тартибланган жуфтликка мос трансляция орқали ўтса, у ҳолда бундай алгебрага трансляцион деярли тўлиқ алгебра дейилади.

2-теорема. Трансляцион деярли тўла алгебраларнинг барча T_2-ажралувчи нумерлашлари негатив тасвирланувчи бўлади.

1-натижа. Трансляцион деярли тўла алгебраларнинг барча позитив тасвирланувчи нумерлашлари ҳисобланувчи бўлади.

2-натижа. Ихтиёрий бўлиниш халқасининг барча ажралувчи нумерлашлари негатив тасвирланувчи бўлади.

5-тасдиқ. Позитив ва негатив эквивалентликлар текис ҳисобланувчи саналувчи T_2-ажралувчи бўлади.

$\varphi(x,x,z) = z,\ \varphi(x,z,z) = x$ тенгликни қаноатлантирадиган алгебрага Мальцев алгебраси деймиз, бу ерда $\varphi -$ берилган алгебра сигнатурасидаги термал кўпҳад ҳисобланади.

Қуйидаги $M = (\omega; f)$ алгебрани қараймиз, бунда $x = y$ бўлса $f(x,y,z) = z$ ва $x \neq y$ бўлса $f(x,y,z) = x$ бўлади. M – алгебранинг Мальцев алгебраси эканлиги аниқ.

6-тасдиқ. M алгебраси содда, лекин трансляцион деярли тўла бўлмаган алгебра бўлиб унинг барча T_1-ажралувчи нумерлаши ҳисобланувчи бўлади.

Тўртинчи параграфда T_1-ажралувчи Хаусдорф бўлмаган тасвирга эга Артин панжарали конгруэнцияли бевосита ажралмайдиган алгебранинг мавжуд эканлиги ва T_1-ажралувчи, лекин Хаусдорф бўлмаган трансляцион тўла олди универсал алгебрага мисол қурилган.

3-теорема. Негатив тасвирланувчи бўлмаган T_1-ажралувчи нумерланган бевосита ажралмайдиган алгебра мавжуд.

3-натижа. Негатив тасвирланувчи бўлмаган T_1-ажралувчи нумерланган конгруэнцияси артин панжарали бевосита ажралмайдиган алгебра мавжуд.

4-натижа. Негатив тасвирланувчи бўлмаган T_1 $-$ажралувчи нумерланган трансляцион деярли тўлиқ алгебра мавжуд.

Диссертациянинг учинчи боби **«Тасвирларнинг компактли кенгайтмалари, маҳсулдорлик турининг ҳоссалари ва негатив эквивалентликлар устида алгебралар»** деб номланиб, бу бобда барча чексиз сондаги синфларга эга бўлган эквивалентликларнинг ҳисобланувчи саналувчи фазолари модули бўйича компакт бўладиган чексиз кенгайтмаси мавжуд эканлиги исботланди.

Агарда η-ёпиқ тўплам чексиз (чекли) сондаги η-эквивалентлик синфлардан ташкил топган бўлса, унга η-чексиз (η-чекли) дейилади. Ҳудди шунингдек, агар тўпламнинг тўлдирувчиси чексиз (чекли) сондаги η-эквивалентлик синфлардан ташкил топган бўлса, унга кочексиз (кочекли) тўплам деймиз.

η_0 эквивалентлик кенгайтмаси деб η_0 эквивалентликни ўз ичига олган ихтиёрий η_1 эквивалентликка айтилади, яьни $\eta_0 \subseteq \eta_1$.

1-лемма. Агар $\alpha - \eta_1$-ёпиқ тўплам бўлиб, η_1 эквивалентлик η_0 эквивалентликнинг кенгайтмаси бўлса, у ҳолда α η_0-ёпиқ ҳам бўлади.

4-теорема. ω натурал сонлар тўпламидаги барча чексиз эквивалентликлар ҳисобланувчи саналувчи (ҳисобланувчи) фактор – фазоси модули бўйича компакт бўладиган чексиз кенгайтмага эга.

1-эслатма. Компактли бўлган ҳисобланувчи саналувчи η^*-фазо компакт бўлмаслиги ҳам мумкин.

Ихтиёрий $\alpha \in \omega$ тўплам учун ω натурал сонлар тўпламида аниқланган $\eta(\alpha)$ эквивалентлик деб қуйидаги эквивалентликни белгилаймиз:

$$\eta(\alpha) = \alpha^2 \cup id\omega.$$

$\alpha \subseteq \omega$ тўплам устида аниқланган ҳисобланувчи саналувчи (ҳисобланувчи) фазо деб, ҳисобланувчи саналувчи (ҳисобланувчи) $\eta(\alpha)$-фазога айтамиз ва $X_{eff}(\alpha)$ (мос равишда $X_{comp}(\alpha)$) деб белгилаймиз.

7-тасдиқ. Ихтиёрий $\alpha \subseteq \omega$ тўплам учун қуйидагилар тенг кучли:

(1) α тўпламнинг тўлдирувчиси иммун тўплам ёки чекли тўплам бўлади;

(2) $X_{comp}(\alpha)$ фазо - компакт;

(3) барча $\eta(\alpha)-$алгебра финит аппроксимирланувчи.

8-тасдиқ. (1) Агар α тўпламнинг тўлдирувчиси иммун тўплам бўлса, у ҳолда барча $\eta(\alpha)$-алгебра финит аппроксимирланувчи;

(2) агар $X_{eff}(\alpha)$-компакт бўлса, у ҳолда α тўпламнинг тўлдирувчиси иммун тўплам бўлади;

(3) шундай тўлдирувчиси иммун бўлган $\alpha \subseteq \omega$ тўплам мавжуд бўлиб, $X_{eff}(\alpha)$-фазо дискрет бўлади.

15-таъриф. Агарда шундай ψ қисман ҳисобланувчи функция мавжуд бўлиб, барча $W_x \subseteq \alpha$ учун $\psi(x)$ қиймат аниқланган ва $W_x \subseteq W_{\psi(x)} \subseteq \alpha \wedge W_{\psi(x)} \backslash W_x \neq \emptyset$ тенглик бажарилса $\alpha \subseteq \omega$ тўпламга яриммаҳсулдор тўплам дейилади. Маълумки, яриммаҳсулдор тўпламлар синфи маҳсулдор тўпламлар синфининг ҳусусий кенгайтмаси ҳисобланади.

16-таъриф. Агарда шундай қисман ҳисобланувчи ψ функция мавжуд бўлиб, ўзининг характеристик x индекси билан берилган барча ҳисобланувчи $R_x \subseteq \alpha$ тўпламлар учун $\psi(x)$ қиймат аниқланган ва $\psi(x) \in \alpha \backslash R_x$ бўлса α тўпламга ҳисобланувчи – маҳсулдор тўплам дейилади.

Маҳсулдор тўпламлар, яриммаҳсулдор тўпламлар, ҳисобланувчи-маҳсулдор тўпламлар ва ҳисобланувчи саналувчи чексиз тўпламлар синфларини мос П, $Semi -$ П, $Comp -$ П, $Eff - Inf$ орқали белгилаймиз.

9-тасдиқ. П $\subset Semi -$ П $\subset Comp -$ П $\subset Eff - Inf$. Барча ўз ичига олиш амаллари ҳусусий ҳисобланади.

5-теорема. Трансляцион тўла универсал алгебра ихтиёрий негатив эквивалентлик устида тасвирланади.

5-натижа. Трансляцион деярли тўла универсал алгебра ихтиёрий негатив эквивалентлик устида тасвирланади.

ХУЛОСА

Диссертация ишида универсал алгебраларнинг ажралувчи тасвирларидан ҳосил қилинган топологик фазолари ўрганилди ва ажралувчи эквивалентликлар устида чекли бўлиш шарти билан аниқланган алгебраларнинг тасвирланиши ҳақидаги саволлар ва бу фазоларнинг муҳимроқ синф остиларини (қисман ҳисобланувчи саналувчи) ажралувчи, позитив ва негатив тасвирланишларни қўшган ҳолда тадқиқот иши олиб борилди.

Диссертация ишида қуйидаги асосий натижалар олинди:

1. Трансляцион деярли тўла универсал алгебралар тушунчаси киритилди ва уларнинг классик чекли бўлган алгебралар билан муносабати ўрганилди;
2. Трансляцион деярли тўла универсал алгебраларнинг барча Хаусдорф тасвирлари негатив бўлиши исботланди;
3. T_1-ажралувчи, лекин Хаусдорф бўлмаган трансляцион деярли тўла универсал алгебрага мисол қурилди;
4. T_1-ажралувчи Хаусдорф бўлмаган тасвирга эга артин панжарали конгруэнцияли бевосита ажралмас алгебранинг мавжуд эканлиги исботланди;
5. Барча T_1- ажралувчи тасвирлари ҳисобланувчи бўладиган содда алгебранинг мавжудлиги исботланди;
6. Барча чексиз сондаги синфларга эга бўлган эквивалентликларнинг ҳисобланувчи саналувчи фазолари модули бўйича компакт бўладиган чексиз кенгайтмаси мавжуд эканлиги исботланди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ХОДЖАМУРАТОВА ИНДИРА АЗАТОВНА

ЭФФЕКТИВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА НАД АЛГОРИТМИЧЕСКИМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

01.01.06 – Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PHD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.1.PhD/FM594.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Касымов Надимулла Хабибуллаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Файзрахманов Марат Хайдарович** доктор физико-математических наук
	Худойбердиев Аброр Хакимович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Институт математики им. С.Л.Соболева (Россия)

Защита диссертации состоится « 10 » января 2023 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 155). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 26 » декабря 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от « 26 » декабря 2022 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Б.А.Омиров
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD)

Актуальность и востребованность темы диссертации. В настоящее время поиск эффективных алгоритмических представлений абстрактных моделей и изучение их алгебраических свойств являются одной из актуальных проблем теории алгоритмов и информатики. Универсальные алгебры чрезвычайно важны в математике и естествознании, поэтому эта проблема требует изучения алгоритмических и алгебраических свойств универсальных алгебр. Алгоритмические, топологические и алгебраические свойства универсальных алгебр открывают широкие возможности для эффективного использования в теоретической информатике. Эффективные (алгоритмические) топологии играют важную роль как в абстрактной теории вычислимости, так и в смежных областях.

А.И. Мальцевым было показано, что всякая позитивная нумерация конечно порожденной алгебры, обладающей ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса, является разрешимой, что поставило вопрос о справедливости данного утверждения в общем случае (без условия конечной порожденности). Все вычислимо отделимые представления алгебр, обладающих свойствами подпрямой неразложимости, артиновости для решеток конгруэнций или трансляционной предполноты, являются негативными (т.е. лежат в классе Π_1^0), т.к. в случае вычислимо отделимых нумераций соответствующие топологические пространства являются T_4-пространствами. Для отделимых представлений все такие нумерации – эффективно отделимы, т.е. лежат в классе Π_2^0. Однако вопрос о существовании отделимых представлений алгебр с условиями минимальности в разности $\Pi_2^0 \setminus \Pi_1^0$ уже долгое время остается открытым.

В нашей стране особое внимание уделяется изучению структурной теории математической логики и теории алгоритмов. Эта теория является одним из актуальных направлений научного и практического применения фундаментальных наук. Известно, что основной класс теории алгоритмов представляют вычислимо отделимые алгебры. В последние годы были получены значительные результаты по нахождению хороших алгоритмических представлений универсальных алгебр. Исследования на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Алгебра, теория алгоритмов и теория вычислимости» обозначены как основные цели и направления научных исследований[1]. В целях использования полученных результатов в смежных областях науки важным считается определение алгоритмических представлений вычислимо отделимых универсальных алгебр с условиями конечности.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП–4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему

[1] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Введенное А.И. Мальцевым понятие нумерованный алгебры – одно из центральных понятий, возникших на стыке универсальной алгебры и теории нумераций. В силу чрезвычайной общности класса всех нумерованных алгебр изучение последних обычно проводится в предположении наличия ограничений на алгоритмические сложности нумерационных эквивалентностей. В этом аспекте, в первую очередь, нужно отметить конструктивные и позитивные алгебры, теория которых представляет собой бурно развивающийся раздел современный математический логики. Понятие вычислимо отделимой алгебры, естественное само по себе, оказалось полезным для решения ряда задач как в теории вычислимых моделей, так и в теоретической информатике. Идеи использования понятия отделимости в теории нумераций восходят к В.А.Успенскому и А.Нероуду и развиваются в работах А.И.Мальцева и Ю.Л.Ершова . Классическим условием отделимости в теории алгоритмов является условие вычислимой отделимости. Синтез понятий модели и вычислимо отделимой нумерации образует понятие вычислимо отделимой модели.

Этот факт подтверждает важность отделимых нумераций алгебр, среди которых фундаментальную роль играют эффективно отделимые алгебры, т.к. нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимо нумерованными алгебрами. Ю.Л. Ершовым было введено наиболее общее понятие отделимой нумерации, которое, в случае нумераций универсальных алгебр, можно трактовать как одно из математических уточнений понятия сложной развивающейся системы, интенсионально заданной семейством вычислимых функций вместе с соответствующими ядрами гомоморфизмов и допускающей эффективное распознавание различия составляющих ее элементов путем отделения их соответствующими алгоритмически определяемыми окрестностями.

В различных по методам доказательства и озвученных результатах о нумерованных моделях из упомянутых выше классов имеется немало принципиальных общих моментов, причем справедливость весьма сильных свойств оказалась не зависящей от сложности нумерационной эквивалентности. Эти факты становятся прозрачными именно при обобщенном взгляде на ситуацию - с точки зрения теории вычислимо отделимых нумерованных алгебр. На базе и в рамках этой теории решается ряд естественных вопросов, возникших в связи с работами А.И.Мальцева, В.Баура, Д.Бергстры и Д.Такера, С.Камина в теории вычислимо представимых моделей и в теории абстрактных типов данных. Д.Бергстр и Д.Такер доказали, что всякая вычислимо представимая конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры имеет обогащение, обладающее эквациональной спецификацией. Другими словами, всякая конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры имеет обогащение, являющееся инициальной системой подходящего конечно-базируемого многообразия алгебр. В работах Н.Х.Касымова изучены наиболее общие эффективные, структурные и топологические свойства вычислимо отделимых алгебр и описаны важнейшие типы таких алгебр.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно–образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882 с 02.02.2022 по 31.12.2023). Диссертация выполнялась в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Цель исследования является доказать топологические свойства подпрямо неразложимых и трансляционно предполных универсальных алгебр и найти их отделимые алгоритмические представления.

Задачи исследования:

доказательство негативности всякого хаусдорфова представления трансляционно предполной алгебры;

построение примера T_1-отделимой нехаусдорфовой трансляционно предполной алгебры и доказательство существования подпрямо неразложимой алгебры с артиновой решеткой конгруэнций, обладающей T_1-отделимым нехаусдорфовым представлением;

доказательство существования простой алгебры, вычислимости всякого T_1-отделимого представления;

поиск для любой эквивалентности с бесконечным числом классов бесконечного расширения, эффективное пространство по модулю которого компактно.

Объектом исследования являются эффективные топологические пространства, универсальная алгебра.

Предмет исследования. Теория вычислимости, теория алгоритмов, теория универсальных алгебр и топологических пространств.

Методы исследования. В работе используются методы математической логики, алгебры, теории универсальных алгебр, теории топологических пространств.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

введено понятие трансляционно предполных универсальных алгебр и изучены соотношения между ними и алгебрами с классическими условиями конечности и доказано, что всякое хаусдорфово представление трансляционно предполной алгебры негативно;

доказано существование подпрямо неразложимой алгебры с артиновой решеткой конгруэнций, обладающей T_1-отделимым нехаусдорфовым представлением;

доказано существование простой алгебры, всякое T_1-отделимое представление которой вычислимо;

установлено, что для любой эквивалентности с бесконечным числом классов существует бесконечное расширение, эффективное пространство по модулю которого компактно.

Практические результаты исследования. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут найти применение в теории нумерованных алгебр и в теории абстрактных типов данных.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов математической логики, алгебры, теории множеств, теории топологических пространств, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты будут использованы для дальнейших исследований в теории отделимых алгоритмических представлений универсальных алгебр, а также использованы в рамках теоретической информатики для исследования вопросов специфицируемости структур данных, которые, по своей сути, являются отделимыми универсальными алгебрами.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты, касаются отделимых алгебр с условиями конечности. В частности, негативность всяких хаусдорфовых представлений трансляционно предполных алгебр даёт возможность построения их адекватных описаний в подходящих логико-математических языках.

Внедрение результатов исследования. Результаты диссертации были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты, касающиеся топологических пространств, эффективно определяемых над фактор-множествами по модулю эквивалентностей на множестве натуральных чисел, были использованы в фундаментальном проекте ОТ-4-27 «Описание йордановых троек, пространств емкостей и голоморфного продолжения функций» для нахождения предсопряженных пространств и дифференцирования JBW-алгебр (Справка Каракалпакского государственного университета от 25 августа 2022 года за номером №01-22-04/376). Применение научного результата позволило классифицировать предсоединенные пространства JBW-алгебр и дифференцирования бесконечномерных центральных регулярных алгебр;

негативность всякого хаусдорфова представления трансляционно предполных алгебр были использованы в иностранный фундаментальном проекте 18-11-00028 по теме «Алгебраические структуры и вычислимость» при решении вопросов эффективной теории моделей и алгебры, связанные с проблемами определимости естественных классов множеств в вычислительных алгебраических структурах, а также вопросов алгоритмической разрешимости ограниченных фрагментов этих структур (справка Казанского федерального университета от 6 июля 2022 года за номером № НП-07/9, Россия). Применение научных результатов позволило найти негативные представления вычислимо отделимых алгебр.

Апробация результатов исследования. Основное результаты диссертации были обсуждены 5 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 14 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертации на степень доктора философии, из них 3 опубликованы в зарубежных журналах и 3 республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения и трех глав, разбитых на 12 параграфов. Объем диссертации 85 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Эффективно отделимо нумерованные алгебры»**, приведены необходимые понятия и вспомогательные результаты. Описана характеристика эффективно и вычислимо отделимых алгебр.

Всюду определенная функция из множества натуральных чисел ω в ω называется вычислимой, если существует алгоритм ее вычисления. Подмножество ω называется вычислимым, если вычислима его характеристическая функция. Эти определения естественным образом обобщаются на многоместные функции и подмножества декартовых степеней ω. Подмножество ω называется эффективным, если оно является областью значений подходящей вычислимой функции.

Равносильно (и менее формально), множество эффективно, если оно порождается некоторым алгоритмом. Это определение также естественным образом обобщается на многоместные отношения.

Важно отметить, что всякое вычислимое множество является эффективным, в то же время фундаментальным фактом теории алгоритмов является существование эффективных невычислимых множеств.

Определение 1. Множество A *продуктивно,* если существует частично–рекурсивная функция ψ, такая, что $(\forall x)\left[W_x \subset A \Rightarrow \left[\psi(x) \textit{определено} \,\&\, \psi(x) \in A - W_x\right]\right]$. Функция ψ называется *продуктивной функцией* для *A*. (Термин «продуктивный» принадлежит Деккеру.)

Особый интерес представляют для нас рекурсивно перечислимые множества с продуктивными дополнениями. Такие множества называются по Посту *творческими (или креативными).*

Определение 2. A - *творческое (или креативное)* множество, если

1. A рекурсивно перечислимо;
2. $\overline{A}$ продуктивно.

Определение 3. Числовое множество *A* называется *иммунным,* если оно бесконечно и в то же время не содержит никаких бесконечных рекурсивно перечислимых подмножеств. Таким образом, иммунное не может быть ни рекурсивно перечислимым, ни продуктивным.

Определение 4. Множество A - *просто*, если

1. A рекурсивно перечислимо;
2. $\overline{A}$ бесконечно;
3. $(\forall B)\left[\left[B \textit{ бесконечно} \,\&\, B \textit{ рекурсивно перечислимо}\right] \Rightarrow B \cap A \neq \varnothing\right]$.

Числовое множество *A* называется простым, если оно само рекурсивно перечислимо, а дополнение его имунно.

Пусть N - не более чем счетное множество. Сюрьективное отображение $\nu\colon \omega \longrightarrow N$ называется нумерацией множества N, а ядро этой нумерации (т.е. множество $\{\langle x, y\rangle \vee \nu x = \nu y\}$) - нумерационной эквивалентностью нумерации ν. При этом пара (N, ν) называется нумерованным множеством.

Определение 5. Нумерация ν семейства вычислимых множеств $\mathfrak{R}$ называется вполне вычислимой, если вычислимым является множество

$$\{\langle x, y\rangle | y \in \nu x, x \in \omega, \nu x \in \mathfrak{R}\}.$$

Пусть η -произвольная эквивалентность.

Характеристической трансверсалью эквивалентности η (в обозначениях $tr(\eta)$) назовем множество всех чисел, являющихся наименьшими в содержащих их η-классах, т.е. $tr(\eta) = \{x \mid \forall y(x = y(\operatorname{mod}\eta) \to x \leq y)\}$.

Конгруэнцией θ универсальной алгебры А сигнатуры Σ называется любая эквивалентность на А, сохраняющая все операции, т.е.

$$\forall f \in \Sigma \quad \forall \bar{x} = \bar{y}(mod\ \theta) \implies f(\bar{x}) = f(\bar{y})(mod\ \theta).$$

Если алгебра не имеет нетривиальных конгруэнций (кроме нулевой $id\ A$

и единичной A^2), то она называется конгруэнц-простой.

Определение 6. Универсальная алгебра (далее - просто алгебра) А сигнатуры Σ называется определимой над η, если существует такая вычислимая Σ -алгебра $(\omega; I)$, с основным множеством ω и семейством I вычислимых Σ -операций, что η является конгруэнцией вычислимой алгебры $(\omega; I)$, фактор-алгебра которой по конгруэнции η изоморфна А (т.е. $A \cong (\omega/\eta; I)$).

Гомоморфизм φ нумерованной алгебры (A, μ) в нумерованную алгебру (B,ν) называется вычислимым, если он эффективно поддерживается на номерах, то есть существует такая вычислимая функция f, что имеет место $\varphi\mu = \nu f$.

Определение 7. Алгебра А называется вычислимо (позитивно, негативно) представимой, если существует ее нумерация с вычислимым (перечислимым, коперечислимым) ядром.

Подмножество множества N называется ν – вычислимым (ν-эффективным), если вычислимо (эффективно) множество всех ν-номеров множества N_0, т.е полный ν -прообраз N_0 ($\nu^{-1}N_0 = \{x \vee \nu x \in N_0\}$). Далее, если из контекста будет ясно, о какой нумерации ν идет речь, будем называть подмножества нумерованного множества просто вычислимыми (эффективными), без приставки ν. Поскольку пересечение конечного числа вычислимых (эффективных) подмножеств нумерованного множества (N, ν) является таковыми же, то семейство вычислимых (эффективных) подмножеств N образует базу естественной топологии на N, которую будем называть вычислимой (эффективной) топологией, а соответствующее топологическое пространство – вычислимым (эффективным) пространством.

Пусть (M, μ) и (N, ν) −нумерованные множества и $F: M \longrightarrow N$ −отображение из M в N. F называется морфизмом, если оно "поддерживается" вычислимой функцией на номерах, т.е. существует такая вычислимая функция f, что $F\mu = \nu f$. Иными словами, морфизмами являются в точности те отображения, для которых по любому μ-номеру всякого элемента множества M можно вычислить некоторый ν-номер F-образа этого элемента в множестве N. Отображения, рассматриваемые в общей теории нумерации, являются именно морфизмами.

Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η-замкнутым (не в топологическом смысле!), если α вместе с каждым числом содержит и все ему η-эквивалентные, т.е. $x \in \alpha \wedge x = y(mod\eta) \rightarrow y \in \alpha$.

Предложение 1. Операции любой нумерованной алгебры непрерывны в рекурсивно (эффективно) порожденном пространстве.

Определение 8. Эквивалентность η называется вычислимо (эффективно) отделимой, если всякая пара различных смежных классов этой эквивалентности отделяется подходящим η-замкнутым вычислимым (эффективным) множеством.

Определение 9. (A, μ) называется аппроксимируемой К-алгеброй, если для любых двух различных элементов a_0, a_1 алгебры А найдутся такая К-алгебра (B, ν) и гомоморфизм $\varphi: A \longrightarrow B$, являющийся морфизмом, который различает элементы a_0, a_1 (т.е. $\varphi(a_0) \neq \varphi(a_1)$).

Теорема 1. Нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.

Во второй главе диссертации, названной **«Отделимые представления алгебр с условиями конечности»**, доказано, что всякое хаусдорфово представление трансляционно предполной алгебры негативно; построен пример T_1-отделимой нехаусдорфовой трансляционно предполной алгебры; доказано существование подпрямо неразложимой алгебры с артиновой решеткой конгруэнций, обладающей T_1-отделимым нехаусдорфовым представлением.

В первом параграфе приведены основные определения аксиом отделимости и свойства их негативных представлений.

Определение 10. Нумерация называется T_1-отделимой (T_2-отделимой; T_3-отделимой; T_4-отделимой), если для всякой пары натуральных чисел, различных по модулю ее нумерационной эквивалентности, найдется перечислимая окрестность первого числа, не содержащая второе, и перечислимая окрестность второго, не содержащая первое (найдутся непересекающиеся перечислимые окрестности этих чисел; для всякого элемента и замкнутого в эффективно порожденной топологии множества, не содержащего этот элемент, найдутся их непересекающиеся окрестности; для всякой пары непересекающихся замкнутых множеств найдутся их непересекающиеся окрестности).

Пусть T_i —одна из стандартных топологических аксиом ($i \in \{0,1,2,3,4\}$), и ν —нумерация алгебры A.

Определение 11. Нумерация ν называется T_i-отделимой (T_i-вычислимо отделимой), если топология на A, порождённая перечислимыми (вычислимыми) $ker(\nu)$-замкнутыми множествами, удовлетворяет аксиоме T_i.

Каждая из аксиом T_i утверждает существование некоторых открытых множеств в топологии, отделяющих одни объекты от других (например, аксиома T_0 утверждает, что для любых различных точек a и b существует открытое множество O, отделяющее эти точки, т.е. такое, что $a \in O \Leftrightarrow b \notin O$). Любое семейство S, состоящее из открытых множеств, такое, что отделяющие множества в соответствующей аксиоме T_i всегда можно выбрать из S, будем называть отделяющим семейством.

Определение 12. Решетка конгруэнций алгебры называется артиновой (нетеровой), если не существует строго бесконечно убывающей (соответственно возрастающей) цепи конгруэнций.

Простейшим примером конгруэнции с артиновый решеткой является алгебра предшествования $P = \langle \omega, n \rangle$, где p(n+1)=n, p(0)=0 (любая ее ненулевая конгруэнция содержит пару $\langle 0,1 \rangle$).

Предложение 2. Всякая T_2-отделимая нумерация алгебры предшествования является негативной.

Во втором параграфе изучены свойства T_1-отделимой нумерации алгебр с артиновыми решетками конгруэнций.

Предложение 3. Для алгебры P справедливо следующее:

1) P имеет артинову и не нетерову решетку конгруэнций;
2) решетка конгруэнций алгебры P изоморфна $\omega + 1$;
3) решетка подалгебр алгебры P также изоморфна $\omega + 1$;
4) всякая фактор-алгебра P/θ по ненулевой конгруэнции θ изоморфна P;
5) группа автоморфизмов алгебры P тривиальна.

В третьем параграфе второй главы доказывается, что всякое хаусдорфово представление трансляционно предполной алгебры – негативно и что существует простая алгебра, всякое T_1-отделимое представление которой вычислимо.

Унарная термальная операция с фиксированными элементами алгебры в качестве параметров называется трансляцией .

Определение 13. Универсальная алгебра называется трансляционно полной, если всякая упорядоченная пара различных ее элементов переводится в любую другую упорядоченную пару различных элементов подходящей трансляцией.

Предложение 4. Всякое тело является трансляционно полным.

Определение 14. Универсальная алгебра называется трансляционно предполной, если существует такая пара ее различных элементов, в которую переводится любая пара различных элементов этой алгебры подходящей трансляцией.

Теорема 2. Всякая T_2-отделимая нумерация трансляционно предполной алгебры является негативной.

Следствие 1. Всякая позитивная нумерация трансляционно предполной алгебры является вычислимой.

Следствие 2. Всякая отделимая нумерация любого поля является негативной.

Предложение 5. Позитивные и негативные эквивалентности являются равномерно эффективно T_2-отделимыми.

Алгеброй Мальцева назовем алгебру, удовлетворяющую тождествам $\varphi(x,x,z) = z$, $\varphi(x,z,z) = x$, где φ –термальный многочлен в сигнатуре исходной алгебры (алгебра из конгруэнц-перестановочного мальцевского многообразия).

Рассмотрим следующую алгебру $M = (\omega; f)$, где $f(x,y,z) = z$, при $x = y$ и $f(x,y,z) = x$, при $x \neq y$. Очевидно, что M – алгебра Мальцева.

Предложение 6. Алгебра M является простой, но не трансляционно предполной алгеброй, всякая T_1-отделимая нумерация которой является вычислимой.

В четвертом параграфе построен пример T_1-отделимой нехаусдорфовой трансляционно предполной алгебры и доказано существование подпрямо неразложимой алгебры с артиновой решеткой конгруэнций, обладающей T_1-отделимым нехаусдорфовым представлением.

Теорема 3. Существует T_1-отделимо нумерованная подпрямо неразложимая алгебра, не являющаяся негативной.

Следствие 3. Существует подпрямо неразложимая алгебра с артиновой решеткой конгруэнций, обладающая T_1-отделимой не негативной нумерацией.

Следствие 4. Существует трансляционно предполная алгебра, обладающая T_1-отделимой не негативной нумерацией.

В третьей главе диссертации**, названной “Компактные расширения представлений, свойства типа продуктивности и алгебры над негативными эквивалентностями”,** установлено, что для любой эквивалентности с бесконечным числом классов существует бесконечное расширение, эффективное пространство по модулю которого компактно**.**

η-замкнутое множество называется η-бесконечным (η-конечным), если оно состоит из бесконечного (конечного) числа классов η-эквивалентности. Будем также говорить, что множество коконечно (кобесконечно), если таковым является его дополнение.

Расширением эквивалентности η_0 назовем любую эквивалентность η_1, в которой содержится η_0, т.е. $\eta_0 \subseteq \eta_1$.

Лемма 1. Если $\alpha - \eta_1$-замкнутое множество и η_1 является расширением η_0, то α, также и η_0-замкнуты (т.е. свойство замкнутости наследуемо "'вниз" относительно "расщеплений" эквивалентностей).

Теорема 4. Всякая бесконечная эквивалентность на ω имеет такое бесконечное расширение, что перечислимое (вычислимое, арифметическое) фактор-пространство по модулю которого является компактным.

Замечание 1. Перечислимое η^*-пространство, являющееся компактным, может и не быть компактом.

Для произвольного $\alpha \in \omega$ обозначим через $\eta(\alpha)$ следующую эквивалентность на ω:

$$\eta(\alpha) = \alpha^2 \cup id\omega.$$

Будем называть эффективным (вычислимым) пространством над множеством $\alpha \subseteq \omega$ эффективное (вычислимое) $\eta(\alpha)$-пространство, которое обозначим через $X_{eff}(\alpha)$ (соответственно $X_{comp}(\alpha)$).

Утверждение 1. Для произвольного $\alpha \subseteq \omega$ следующие условия равносильны:

(1) α коиммунно или коконечно;

(2) $X_{comp}(\alpha)$-пространство – компакт;

(3) всякая $\eta(\alpha)-$алгебра финитно аппроксимируема.

Предложение 7. (1) если α коиммунно, то всякая $\eta(\alpha)$-алгебра финитно аппроксимируема;

(2) если $X_{eff}(\alpha)$-компакт, то α коиммунно;

(3) существует такое коиммунное $\alpha \subseteq \omega$, что $X_{eff}(\alpha)$-пространство дискретно.

Замечание 2. Заметим также, что всякое $\eta(\alpha)_{eff}$-пространство является совершенным и нормальным, однако существуют эффективные пространства, гомеоморфные пространству коконечных подмножеств счетного множества (т.е. компактные пространства, не являющиеся компактами), никакие фактор-пространства которых не являются эффективно T_1-отделимыми в смысле Ю.Л.Ершова.

Определение 15. Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется полупродуктивным, если существует такая вычислимая частичная функция ψ, что для всякого $W_x \subseteq \alpha$ значение $\psi(x)$ определено и $W_x \subseteq W_{\psi(x)} \subseteq \alpha \wedge W_{\psi(x)} \backslash W_x \neq \emptyset$. Хорошо известно, что класс полупродуктивных множеств является собственным расширением класса продуктивных множеств.

Определение 16. Множество α называется вычислимо-продуктивным, если существует такая вычислимая частичная функция ψ, что для всякого разрешимого множества $R_x \subseteq \alpha$, заданного своим характеристическим индексом x, значение $\psi(x)$ определено и $\psi(x) \in \alpha \backslash R_x$.

Обозначим через $\Pi, Semi-\Pi, Comp-\Pi, Eff-Inf$ классы продуктивных, полупродуктивных, вычислимо-продуктивных и эффективно бесконечных множеств соответственно.

Предложение 8. $\Pi \subset Semi-\Pi \subset Comp-\Pi \subset Eff-Inf$. Все включения собственные.

Теорема 5. Над любой негативной эквивалентностью представима трансляционно полная универсальная алгебра.

Следствие 5. Над любой негативной эквивалентностью представима трансляционно предполная универсальная алгебра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе изучены топологические пространства, порожденные отделимыми алгоритмическими представлениями универсальных алгебр, а также исследованы наиболее важные подклассы этих пространств (в частности, эффективно отделимые, включая позитивные и негативные представления) и вопросы представимости алгебр с условиями конечности над отделимыми эквивалентностями.

Основные результаты исследования следующие:

1. Введено понятие трансляционно предполных универсальных алгебр и изучены соотношения между ними и алгебрами с классическими условиями конечности.
2. Доказано, что всякое хаусдорфово представление трансляционно предполной алгебры негативно.
3. Построен пример T_1-отделимой нехаусдорфовой трансляционно предполной алгебры.
4. Доказано существование подпрямо неразложимой алгебры с артиновой решеткой конгруэнций, обладающей T_1-отделимым нехаусдорфовым представлением.
5. Доказано существование простой алгебры, всякое T_1-отделимое представление которой вычислимо.
6. Установлено, что для любой эквивалентности с бесконечным числом классов существует бесконечное расширение, эффективное пространство по модулю которого компактно.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KHODZAMURATOVA INDIRA AZATOVNA

EFFECTIVE TOPOLOGICAL SPACES OVER ALGORITHMIC REPRESENTATIONS OF UNIVERSAL ALGEBRAS

01.01.06-Algebra

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.1.PhD/FM594.

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Kasymov Nadimulla Khabibullaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Faizrahmanov Marat Khaydarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Khudoyberdiev Abror Khakimovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Leading organization:	S.L.Sobolev Institute of Mathematics (Russia)

Defense will take place " 10 " January 2023 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered № 155). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on « 26 » December 2022 year
(Mailing report № 2 on « 26 » December 2022 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Councilon award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

B.A.Omirov
Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to prove the topological properties of subdirectly indecomposable and translationally precomplete universal algebras and find their separable algorithmic representations.

The objects of the researchwork are effective topological space and universal algebra.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

the concept of translationally pre-full universal algebra was introduced and the relations between it and algebras with classical limb conditions were studied and it has been proven that any Hausdorff representation of translationally pre-full algebra is negative;

The existence of subdirectly indecomposable algebra with an artine congruence lattice with an T_1-separable non-Hausdorff representation has been proven;

The existence of a simple algebra is proved, every T_1-separable representation of which is computable;

It is established that for any equivalence with an infinite number of classes there is an infinite extension, the effective space modulo which is compact.

Implementation of the research results. The results of the dissertation were used in the following research projects:

the results concerning topological spaces effectively defined over factor sets modulo equivalences on the set of natural numbers were used in the fundamental project OT-4-27 "Description of Jordan triples, spaces of capacities and holomorphic continuation of functions" to find predual spaces and differentiate JBW- Algebras (Certificate of Karakalpak State University dated August 25, 2022, No. 01-22-04/376). The application of the scientific result made it possible to classify preconnected spaces of JBW-algebras and derivations of infinite-dimensional central regular algebras;

the negativity of any Hausdorff representation of translationally precomplete algebras were used in the foreign fundamental project 18-11-00028 on the topic "Algebraic structures and computability" in solving problems of effective model theory and algebra, related to the problems of definability of natural classes of sets in computational algebraic structures, as well as questions algorithmic solvability of limited fragments of these structures (Certificate of Kazan Federal University dated July 6, 2022, No. NP-07/9, Russia). The application of scientific results made it possible to find negative representations of computably separable algebras.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 5 international and 3 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 14 research papers have been published, 6 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the PhD thesis, in addition 3 of them were published in international journals and 3 papers published in national mathematical journals.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertationis 85 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙҲАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Касымов Н.Х., Ходжамуратова И.А. О компактных расширениях эффективных пространств. // Доклады Академии Наук (ДАНРУз). – 2017. №5. –С. 9-11. (01.00.00, № 7).
2. Kasymov N.Kh., Khodzamuratova I.A. Topological Spaces over Algorithmic Representasoins of Universal Algebras. // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. 245, №3, – P. 311-322. (3.Scopus. IF=0.415).
3. Касымов Н.Х., Морозов А.С., Ходжамуратова И.А. О T_1-отделимых нумерациях подпрямо неразложимых алгебр. // Алгебра и логика (Algebra and logic). – 2021, **60**, №4, –P. 263-278. (3. Scopus. IF=0.75).
4. Ходжамуратова И.А., Жавлиев С.К. Об одном классе универсальных алгебр, все хаусдорфовы нумерации которых негативны. // Бюллетень института математики. –2021. Том **4**, №2, –С. 39-45. (01.00.00, № 17).
5. Дадажанов Р.Н., Касымов Н.Х., Ходжамуратова И.А. Равномерно вычислимо отделимые алгебры с эффективно расщепляемыми семействами негативных конгруэнций. // Сибирский математический журнал. –2022. Том 63, –С. 466-475. (3. Scopus. IF=0.68).
6. Ходжамуратова И.А. О представимости над эквивалентностями трансляционно полных конечно порожденных алгебр и полугрупп. // Бюллетень института математики. – 2022. Том 5, №6. –С. 150-158. (01.00.00, № 17).

II бўлим (II часть; part II)

7. Касымов Н.Х., Ходжамуратова И.А. О позитивных и негативных представлениях плотных линейных порядков. Республиканская научная конференция «Жизнь и творчество Академика Ташмухаммеда Ниязовича Кары-Ниязова», Ташкент, 7-8 сентября 2017 г. С. 62-65.
8. Касымов Н.Х., Ходжамуратова И.А. Об эффективных частичных порядках над вычислимыми множествами. Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Жизнь и творчество Академика Ташмухаммеда Ниязовича Кары-Ниязова», Ташкент, 7-8 сентября 2017 г. С. 65-66.
9. Касымов Н.Х., Ходжамуратова И.А. Характеризация негативно представимых линейных порядков с конечным числом предельных элементов. Международная научная конференция Узбек-Израиль «Contemporary problems in mathematics and physics» Ташкент, 6-7 октября 2017 г. С. 181-183.
10. Ходжамуратова И.А. О негативности хаусдорфовых нумераций одного класса универсальных алгебр. Республиканская научная конференция

«Современные проблемы и математики», Нукус, 20 мая 2020, с. 63-65.

11. Касымов Н.Х., Морозов А.С., Ходжамуратова И.А. О T_1-отделимых нумерациях подпрямо неразложимых алгебр. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 16-20 ноября 2020. С. 119-120.
12. Дадажанов Р.Н., Касымов Н.Х., Ходжамуратова И.А. Критерий эффективной расщепляемости алгоритмических представлений универсальных алгебр. Республиканская научная конференция «Сарымсаковские чтения», Ташкент, 16-18 сентября 2021. С. 47-48.
13. Касымов Н.Х., Ходжамуратова И.А. Об определимости трансляционно полных алгебр над негативными эквивалентностями. Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационной технологии-Аль-Хорезми-2021», Фергана, 15-17 ноября 2021. С.82.
14. Ходжамуратова И.А. Свойства типа продуктивности. Международная научная конференция «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий», Бухара, 2022, 11-12-мая. С. 129.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
2022 йил 12 декабрда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги
матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,5. Адади 100 дона. Буюртма № 1/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.