

**МЕХАНИКА ВА ИНШОТЛАР СЕЙСМИК МУСТАҲКАМЛИГИ  
ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ  
DSc.02/30.12.2019.Т/ФМ.61.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

---

**МЕХАНИКА ВА ИНШОТЛАР СЕЙСМИК МУСТАҲКАМЛИГИ  
ИНСТИТУТИ**

**НАВРУЗОВ ДИЛШОД ПРИМКУЛОВИЧ**

**АЭРОДИНАМИКА МАСАЛАЛАРИНИ ТУРБУЛЕНТЛИКНИНГ ЯНГИ  
МОДЕЛЛАРИ АСОСИДА СОНЛИ ТАДҚИҚ ЭТИШ**

01.02.05 – Суюқлик ва газ механикаси

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА  
ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**Тошкент – 2022**

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)  
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата диссертации  
доктора философии (PhD) по физико–математическим наукам**

**Contents of Dissertation Abstract of the Doctor of Philosophy (PhD)  
on Physical-mathematical Sciences**

**Наврузов Дилшод Примкулович**

Аэродинамика масалаларини турбулентликнинг янги моделлари асосида  
сонли тадқиқ этиш .....5

**Наврузов Дилшод Примкулович**

Численное исследование задач аэродинамики на основе новых моделей  
турбулентности.....22

**Navruzov Dilshod Primqulovich**

Numerical study of aerodynamics problems based on new turbulence models  
.....40

**Эълон қилинган ишлар рўйхати**

Список опубликованных работ

List of published works .....43

**МЕХАНИКА ВА ИНШОТЛАР СЕЙСМИК МУСТАҲКАМЛИГИ  
ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ  
DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

---

**МЕХАНИКА ВА ИНШОТЛАР СЕЙСМИК МУСТАҲКАМЛИГИ  
ИНСТИТУТИ**

**НАВРУЗОВ ДИЛШОД ПРИМКУЛОВИЧ**

**АЭРОДИНАМИКА МАСАЛАЛАРИНИ ТУРБУЛЕНТЛИКНИНГ ЯНГИ  
МОДЕЛЛАРИ АСОСИДА СОНЛИ ТАДҚИҚ ЭТИШ**

01.02.05 – Суюқлик ва газ механикаси

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА  
ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**Тошкент – 2022**

**Физика-математика** фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида В2020.2.PhD/Г1047 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси М.Т.Ўразбоев номидаги Механика ва иншоотлар сейсмик мустаҳкамлиги институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида ([www.instmech.uz](http://www.instmech.uz)) ва "Ziynet" ахборот таълим порталида ([www.ziynet.uz](http://www.ziynet.uz)) жойлаштирилган.

**Илмий раҳбар:**

**Маликов Зафар Маматкулович**  
техника фанлари доктори, катта илмий ходим

**Расмий оппонентлар:**

**Далабаев Умурдин**  
физика – математика фанлари доктори, доцент

**Етакчи ташкилот.**

**Закиров Аскар Халилович**  
физика-математика фанлари номзоди, доцент  
**Рақамли технологиялар ва сунъий интеллектни ривожлантириш илмий тадқиқот институти**

Диссертация ҳимояси Механика ва иншоотлар сейсмик мустаҳкамлиги институти ҳузуридаги фан доктори илмий даражасини берувчи DSc.02/30.12.2019.Т/FM.61.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2023 йил “18” “январь” соат 14:00 даги мажлисида бўлиб ўтади (Манзил: 100125, Тошкент, Дўрмон йўли кўчаси, 33, 1-мажлислар зали. Тел: (99871) 262-71-52; Факс: (99871) 262-71-32, e-mail: [instmech@academy.uz](mailto:instmech@academy.uz)).

Диссертация билан Механика ва иншоотлар сейсмик мустаҳкамлиги институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин ( рақам билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100125, Тошкент ш., Дўрмон йўли кўчаси, 33-уй. Тел.: (99871) 262-71-52).

Диссертация автореферати 2022 йил « » декабрь куни тарқатилди.  
(2022 йил « » декабрдаги 11 рақамли реестр баённомаси).

**М.М.Мирсаидов**  
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси,  
т.ф.д., профессор, ЎзР ФА академиги

**М.К.Усаров**  
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий  
котиби, ф.-м.ф.д., проф.

**И.К.Хужаев**  
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш  
қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари,  
т.ф.д., проф.

## **КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертациясининг аннотацияси)**

**Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати.** Жаҳонда сўнгги йилларда олимлар томонидан гидроаэродинамика масалаларини ечишга мўлжалланган сонли алгоритмларни яратишга алоҳида аҳамият берилмоқда. Бу эса гидроаэродинамика масалаларини ечишга мўлжалланган адекват турбулент моделларни ишлаб чиқишни тақозо этмоқда. Зеро, ясси пластинани оқиб ўтиш масаласи, товуш тезлигидан кичик бўлган ўққа нисбатан симметрик ва айланма струя масалалари билан боғлиқ масалалар амалиётда жуда кўп қўлланилиши туфайли замонавий гидромеханиканинг муҳим бўлимини ташкил этади. Жумладан, айланма оқим кўплаб табиий ҳодисаларда: атмосферада торнадо ва циклонлар, самолёт қанотидан ҳосил бўладиган уюрмали из, ёмғир ҳосил қилувчи ва пурковчи қишлоқ хўжалиги машиналари фаолиятида кузатилади. Шунингдек, бумеранг ва ариларнинг учишини ўрганишда айланма ҳаракат назарияси қўлланилади. Бундан ташқари, кўплаб техник қурилмаларнинг фойдали иш коэффициентини ошириш мақсадида ҳаво ва ёқилғининг айланма ҳаракатидан фойдаланилади. Ёниш жараёнини стабиллаштирувчи ва жадаллаштирувчи ижобий омил сифатида, бензинли ва дизелли қурилмалар, қозонхоналар ва бошқа иситиш билан боғлиқ тизимларда ёқилғини экологик тоза ва самарали ёқишни таъминлаш мақсадида, шунингдек газ турбиналари, газ турбинали двигателларда айланма оқим қўлланилади. Ушбу масалаларнинг мураккаблиги тадқиқотчилардан мураккаб объектларни сонли моделлаштиришнинг замонавий усулларидан фойдаланишни талаб этмоқда.

Жаҳонда турбулентликни ўрганишда ҳам назарий ва ҳам тажрибавий изланишлар олиб борилмоқда. Аммо тажрибавий изланишларни ўтказиш иқтисодий жиҳатдан кўп харажатни талаб қилгани туфайли бугунги кунда олимлар турбулентлик моделлари ва сонли ишланмалар ёрдамида оқим майдонининг дастлабки ҳисобини аниқлашга алоҳида эътибор бермоқда. Бугунги кунда муҳитлар оқимини тавсифловчи турбулентликнинг турли моделлари яратилган ва турли гидродинамик масалаларни ечишда қўлланилмоқда. Оқимнинг айлантирилиши кучли анизотропик турбулентликни келтириб чиқаради. Математик жиҳатдан бу муаммо жуда мураккаб, ҳозиргача айланма турбулент оқимлар учун универсал математик модель яратилмаган. Бу муаммо кўп фазали полидисперс муҳитлар турбулент оқими учун янада мураккаблашади. Шунини эътиборга олиб, турбулент айланма оқимларнинг такомиллашган математик моделлари, самарали ҳисоблаш алгоритмлари ва ҳисоблаш дастурларини ишлаб усули долзарб вазифалардан ҳисобланмоқда.

Республикамизда 2022-2026 йилларга мўлжалланган Янги Ўзбекистоннинг тараққиёт стратегиясида, жумладан «Иқтисодий электр энергияси билан узлуксиз таъминлаш ҳамда “Яшил иқтисодий” технологияларини барча соҳаларга фаол жорий этиш, иқтисодийнинг

энергия самарадорлигини 20 фоизга ошириш»<sup>1</sup> бўйича вазифалари белгиланган. Бу масалаларни ҳал этиш учун турбулент оқимларни моделлаштирадиган, сонли тажрибалар ўтказиш ва турли ускуналарнинг рационал параметрларини аниқлайдиган пакет программаларни ишлаб чиқиш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2022 йил 28 январдаги ПФ-60-сон «2022-2026 йилларга мўлжалланган Янги Ўзбекистоннинг тараққиёт стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 22 августдаги ПҚ-4422-сон «Иқтисодиёт тармоқлари ва ижтимоий соҳанинг энергия самарадорлигини ошириш, энергия тежовчи технологияларни жорий этиш ва қайта тикланувчи энергия манбаларини ривожлантиришнинг тезкор чора-тадбирлари тўғрисида», 2020 йил 10 июлдаги ПҚ-4779-сон «Иқтисодиётнинг энергия самарадорлигини ошириш ва мавжуд ресурсларни жалб этиш орқали иқтисодиёт тармоқларининг ёқилғи-энергетика маҳсулотларига қарамлигини камайтиришга доир қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа меъёрий-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

**Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги.** Мазкур тадқиқот Ўзбекистон Республикасида фан ва технологияларини ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналишига мос равишда бажарилган.

**Муаммонинг ўрганилганлик даражаси.** Турбулентлик назариясининг ривожланиши О. Рейнольдс, А. Никурадзе, И. С. Хинце, П. Бредшоу, Д. Буссинеск, Л. Прандтль, Т. Карман, А. Н. Колмогоров, Л. Г. Лойцянский, Н. Н.Акатнов, Ю.В.Лапин, Ван Дрифт, А.Магер, П.А.Либби ва бошқа олимларнинг ишлари билан узвий боғлиқ. Турли хил алгебраик моделлар, бир ва икки  $(k - \varepsilon, k - \omega)$  дифференциал тенгламалар билан ифодаланувчи моделлар таклиф этилган ва гидромеханиканинг турли масалалари учун синовдан ўтказилган. П.Р.Спаларт, С.Р.Алларас (1992), М.Л.Шур (1997), Ф.Р.Ментер (1994), А.Н.Секундов (1995), Д.С. Уилкоксларнинг илмий ишлари Буссинеск гипотезаси асосида қурилган турбулентликнинг чизиқли моделларини ишлаб чиқиш ва такомиллаштиришга бағишланган. Б.Е.Лаундер (1972), В. Роди (1975), А.Хеллистен, С.Валлин, А.В.Йохансон (2005) каби олимлар чизиқсиз турбулентлик моделларни ишлаб чиқишган.

Аэродинамиканинг ривожланишига ўзбек олимлари ҳам катта ҳисса қўшишган. К.Ш.Латипов, Ю.М.Денисов, И.Н.Хусанов, З.Ш.Жумаев, З.М.Маликов, А.М.Арифжанов, А.М.Фатхуллаев ва бошқалар ўзларининг илмий ишларида янги турбулентлик моделларини таклиф этишган. Аэродинамика соҳасида олиб борилган жуда кўп илмий изланишларга

---

<sup>1</sup>Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2022 йил 28 январдаги ПФ-60-сон “2022-2026 йилларга мўлжалланган Янги Ўзбекистоннинг тарққиёт стратегияси тўғрисида”ги Фармони.

карамасдан, ҳозирги кунгача турбулентликнинг универсал модели ишлаб чиқилмаган.

**Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган муассасанинг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.** Диссертация иши ЎзР ФА Механика ва иншоотлар сейсмик мустаҳкамлиги институти “Сууюқлик, газ ва гидроюритмалар тизимлари механикаси” лабораториясининг 2019-2021 йил илмий тадқиқот режалари доирасида бажарилган.

**Тадқиқотнинг мақсади** аэродинамика масалаларини ўрганишда қўлланиладиган замонавий турбулентлик моделларининг адекватлигини текширишдан иборат.

**Тадқиқотнинг вазифалари:**

аэродинамика масалаларини ечишда қўлланиладиган замонавий турбулентлик моделларига бағишланган ишларни таҳлил этиш;

турбулентлик тенгламаларини ечиш учун замонавий сонли усуллар асосида дастурий воситаларни ишлаб чиқиш;

ясси пластинани изотермик ва ноизотермик, шунингдек табиий конвекция шароитида оқиб ўтиш масалалари учун замонавий турбулентлик моделларининг адекватлигини сонли усулда тадқиқ этиш;

сонли моделлаштириш орқали тўғри ва айланма струя учун турбулентликнинг янги математик моделларини верификация қилиш.

**Тадқиқот объекти** сифатида саноатда кенг қўлланиладиган турбулент оқимлар қаралди.

**Тадқиқот предмети**ни турбулентликнинг икки сууюқлик ва бошқа замонавий турбулент моделлари ташкил этади.

**Тадқиқот усуллари.** Тадқиқот ишларини амалга ошириш давомида турбулентликнинг феноменологик моделлари ва субстанция кўчишини ифодаловчи дифференциал тенгламалари системасини ечишнинг сонли усулларидадан фойдаланилди.

**Тадқиқотнинг илмий янгилиги** куйидагилардан иборат:

қиздирилган вертикал пластина олдидаги табиий конвекция ва ўққа нисбатан симметрик айланма струя масалалари турбулентликнинг икки сууюқлик турбулент модели асосида тадқиқ қилинди ва моделнинг бошқа турбулентлик моделларига нисбатан афзаллиги олинган натижаларнинг бошқа муаллифларнинг тажриба тадқиқотларига мослиги билан исботланган;

ўққа нисбатан симметрик тўғри ва айланма турбулент струя тенгламалари икки сууюқлик турбулент модели асосида қайта тузилди ва уларни ечиш учун SIMPLE алгоритмига асосланган сонли усул яратилган;

сиқилувчан ва сиқилмас муҳитлар турбулент оқимлари тенгламаларининг Мизес ўзгарувчиларида ифодаланган ҳолатлари учун такомиллаштирилган, турғун сонли усул ва алгоритм ишлаб чиқилган;

икки сууюқлик турбулентлик модели изотроп ва анизотроп турбулент оқимлар учун универсал модель эканлиги тажриба натижалари билан таққослаш орқали кўрсатилган.

**Тадқиқотнинг амалий натижалари** қуйидагилардан иборат:

икки суюқлик турбулентлик модели асосида табиий конвекция ва айланма турбулент оқим модели ишлаб чиқилган;

тўғри ва айланма турбулент струя оқимини ва ясси пластина оқиб ўтиш жараёнини ўрганиш учун дастурий воситалар пакети яратилган.

**Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги.** Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги олинган назарий, сонли тажриба натижалари шу соҳадаги бошқа олимлар томонидан олинган тадқиқот иши натижалари билан таққосланганлиги ва уларга мослиги билан асосланади.

**Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.** Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти, динамиканинг қатъий қонунларига асосан биринчи марта айланма оқим масаласини ечишда турбулентликнинг янги икки суюқлик модели ишлатилади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти шундан иборатки, турбулентликнинг икки суюқлик моделини қўллаган ҳолда аэродинамиканинг турли масалалари учун турғун сонли ечиш усули тавсия этилади.

**Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.** Аэродинамика масалаларини турбулентликнинг янги моделлари ёрдамида сонли тадқиқ этиш асосида:

Мизес ўзгарувчилари ва янги турбулентлик моделини қўллаш усули «ЁФА-Фтех-2018-13» фундаментал лойиҳани бажариш жараёнида қўлланилган (В.И. Романовский номидаги Математика институти 2022 йил 15 июндаги №2/219 рақамли маълумотнома). Натижада Мизес ўзгарувчилари ва янги турбулентлик моделини қўллаш туфайли мураккаб масалаларни ечиш жараёнида чегаравий шартларда сингуляр тенгламалар ҳосил бўлади. Бу эса уларни ечиш учун тўртинчи тартибли аниқликдаги усулни қўллаш имконини берган;

натижалар Ўзбекистон Республикаси Сув хўжалигига қаршли Сўх-Оқтепа ирригация тизимига қаршли каналларда ҳисоблаш усули ва илмий тавсия сифатида фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Сув хўжалиги вазирлиги 2022 йил 30 сентябрдаги № ОҚ 7263068 рақамли маълумотномаси). Анизотроп турбулентлик ва қаттиқ девордаги уринма кучланишни ҳисоблаш усуллари ўзгарувчан режимда ишлайдиган суғориш каналлари параметрларини асослайди. Натижада берилган тавсияларга кўра, қишлоқ хўжалигида қўлланиладиган анъанавий суғориш усулларига қараганда сув ресурсларини 75 млн. сўмгача иқтисод қилиш имконини берган.

**Тадқиқот натижаларининг апробацияси.** Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

**Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги.** Диссертация мавзуси бўйича жами 21 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари

асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 10 та мақола, 4 таси Scopus базасига қирувчи хорижий ва 6 таси республика нашрларида чоп этилган. ЭХМ учун 3 та дастурий маҳсулот қайд этилганлиги ҳақида гувоҳнома олинган.

**Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши.** Диссертация таркиби кириш, уч боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан иборат. Диссертациянинг ҳажми 102 бетни ташкил этган.

## ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

**Кириш** қисмида Ўзбекистон Республикасида фан ва технологияни ривожлантиришнинг устувор йўналишларига мос равишда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, мақсад ва вазифалар шакллантирилган, тадқиқотнинг объекти ва предмети кўрсатиб берилган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг ишончилиги асосланган ва назарий ҳамда амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижалари амалиётга жорий этилганлиги, чоп этилган ишлар ва диссертация ишининг тузилиши ҳақида маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи «**Турбулент оқим соҳасидаги изланишлар шарҳи**» боби уч параграфдан иборат.

Биринчи параграфда гидродинамиканинг асосий масалалари таҳлил қилинган, суюқлик ҳаракати, масса ва импульс сақланиш тенгламалари, Ньютон суюқлиги учун кучланиш ва деформация тезлиги тензорлари хусусиятлари муҳокама қилинган. Навье–Стокс ва Эйлернинг асосий тенгламалари келтирилган. Чегаравий қатлам, суюқлик ва газ ўртасидаги фарқлар тавсифланган. А.Фортъе, Р.Бусройда, П.Р.Спаларт, С.Р.Алмарас, М.Л.Шур, Ф.Р.Минтер, А.Н.Секундов, И.Н.Хусанов, З.М. Маликов сингари хорижий ва ватандош олимларининг ишлари таҳлил қилинди.

Иккинчи параграфда турбулент кўчишнинг тенгламаларини тўлдириш учун Прандтль ва Буссинеск гипотезалари тақдим этилган. Спаларт – Алмарас, Секундовнинг  $v_t-92$ , турбулентликнинг икки тенгламали  $k-\varepsilon$  модель ва унинг Чен модификацияси таҳлил этилган. Бундан ташқари турбулентликнинг янги икки суюқлик модели келтирилган.

Учинчи параграфда аэродинамика масалаларини сонли ечиш учун қўлланиладиган сонли усуллар таҳлил этилган. Оқимга қарши схеманинг биринчи, иккинчи ва учинчи тартибли аппроксимациялари муҳокама этилган. Гиперболик тенгламалар системаси учун Курант шарти қўйилган. Патанкар усулининг элементлари тушинтирилган.

Муаммони ўрганиш бўйича мазкур ҳолат таҳлили асосида тадқиқотнинг мақсади ва вазифалари шакллантирилган.

Диссертациянинг иккинчи «**Ясси сиртни оқиб ўтиш масалаларини ечиш учун турбулентликнинг икки суюқлик ва бошқа моделларининг қўлланилиши**» боби учта параграфдан иборат.

Биринчи параграфда ясси пластинани оқиб ўтиш масаласини ечиш учун  $k - \varepsilon$  турбулент модели, унинг Чен модификацияси ва икки суёқлик ёндашувидан фойдаланилган.

Пластина оқиб ўтишнинг турбулентликнинг дастлабки икки модели учун тенгламалари қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right). \quad (1)$$

Турбулентликнинг  $k - \varepsilon$  модели тенгламалари қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} u \frac{\partial k}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon, \\ u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_1 \nu_t \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k}. \end{cases} \quad (2)$$

Турбулент ёпишқоқликни ифодалаш учун Прандтль – Колмогоров боғланиши ишлатилади:

$$\nu_t = C_\nu k^2 / \varepsilon. \quad (3)$$

Бу боғланиш локал биржинсли ва изотроп назариясига асосланган.  $k - \varepsilon$  модели тенгламалар системаси бир қанча эмпирик ўзгармасларга эга:  $C_\nu = 0.09$ ,  $C_1 = 1.44$ ,  $C_2 = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\nu_k = 0.72$ ,  $\nu_\varepsilon = 0.9$ ,  $\sigma_\varepsilon$  эса қуйидагича аниқланади:

$$\sigma_\varepsilon = \chi^2 / C_\nu (C_2 - C_1), \quad \chi = 0.4. \quad (4)$$

$k - \varepsilon$  турбулентлик моделининг Чен модификацияси қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} u \frac{\partial k}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial k}{\partial y} = 2\nu_t - \varepsilon - \frac{2\nu k}{d^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right), \\ u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + 2\nu_t C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{k^4}{36\nu^2\varepsilon^2}} \right) \frac{\varepsilon^2}{k} - 2 \frac{\nu \varepsilon}{d^2} e^{-\frac{d}{2\nu}}. \end{cases} \quad (5)$$

Сиқилмайдиган муҳитнинг оқимини қараймиз ( $\rho = const$ ). Прандтль назариясига асосан ҳисоблаш соҳасида босимни ўзгармас деб қараймиз.

Масалани ечиш мақсадида қуйидаги ифодаларга асосан умумлашган оқим функцияси  $\psi$  ни киритамиз:

$$u = \frac{\psi \partial \psi}{\partial y}, \quad \mathcal{G} = -\frac{\psi \partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

У ҳолда (1) даги узлуксизлик тенгламаси автоматик тарзда каноатлантиради. Ўзгарувчиларни алмаштиришни амалга оширамиз ва қуйидаги формулага асосан Мизес  $(\xi, \psi)$  ўзгарувчиларига ўтаемиз:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{v}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{1}{\psi}. \quad (7)$$

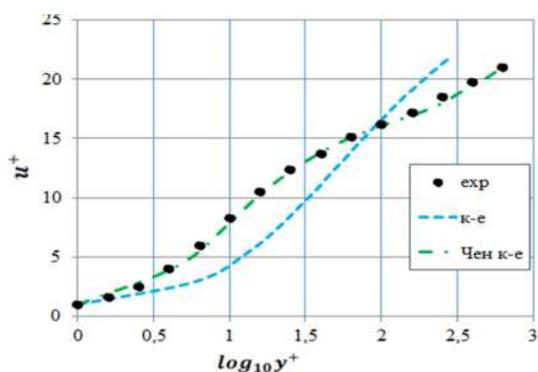
(6) ва (7) ифодаларни (1), (2) ва (5) тенгламалар системасига қўллаган ҳолда параболик турдаги тенгламалар системасига эга бўламиз. Тенгламалар системасини ечиш учун  $O(\Delta \xi, \Delta \psi^2)$  аниқликдаги ошқормас схема аппроксимацияси ишлатилган ва итерацион жараён ташкил этилди. Ҳисоблаш алгоритми марш ва қувиш усуллари асосида тузилди.

(1), (2) ва (5) тенгламалар системаси учун қуйидаги чегаравий шартлар қўйилган:

$$\psi = 0 \text{ да: } u = 0, k = 0, \varepsilon = 0; \quad \psi \rightarrow \infty \text{ да: } u = u_\infty, k = k_\infty, \varepsilon = \varepsilon_\infty.$$

Ҳисоб ишларида Рейнольдс сони қиймати  $Re = 5 \cdot 10^6$  ни ташкил этди.

1-расмда пунктир (кўк, яшил) чизиқлар ёрдамида олинган  $k - \varepsilon$  модели ва унинг Чен модификацияси орқали девор яқинидаги ўлчовсиз бўйлама тезлик профили келтирилган. Бу ерда солиштириш мақсадида NASA маълумотлар базасидаги тажриба натижалари (қора нуқталар) келтирилган.



1-расм. Ўлчовсиз тезлик  $u_*$  нинг  $y^+ = y u_* / \nu$  дан боғлиқ профили.

Бу ерда динамик тезлик  $u_* = \sqrt{0.5 C_f}$  формула ёрдамида аниқланган.  $C_f = 2 U_*^2$

Иккинчи параграфда қиздирилган ясси пластинани турбулент оқим билан оқиб ўтишда импульс ва иссиқлик кўчиши тадқиқ этилди. Масалани ечишда Спаларт – Аллмарас ва икки суюқлик турбулент моделларидан фойдаланилди. Масса, импульс ва иссиқликнинг сақланиш тенгламалари қуйидагича бўлди:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0, & u \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (8)$$

Биринчи ҳолда система (8) турбулентликнинг Спаларт – Аллмарас модели билан тўлдирилди ва турбулент динамик ёпишқоқлик  $\mu = \tilde{\nu} \rho$  кўринишда аниқланди.

$$u \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = P_w - D_w + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) + C_{\sigma 2} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (9)$$

Икки суюқлик турбулентлик модели қиздирилган текис пластина масаласи учун Декарт координаталар системасида қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial U}{\partial y} - u \vartheta \right), \\ U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = -(1 - C_s) \frac{\partial U}{\partial y} \vartheta + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - K_f u, \\ U \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + V \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -C_s \frac{\partial U}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\nu_{yy} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) - K_f \vartheta, \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} - t \vartheta \right), \quad U \frac{\partial t}{\partial x} + V \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial y} \vartheta + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial t}{\partial y} - K_t t. \end{array} \right. \quad (10)$$

Бу ерда  $U, V, T$  – кўндаланг, бўйлама ва температуранинг ўрталаштирилган ташкил этувчилар;  $u, v, t$  – уларнинг пульсацион ташкил этувчилари;

$$\nu_{xy} = 3\nu + 2 \left| \frac{u \vartheta}{\partial U / \partial y} \right|, \quad \nu_{yy} = 3\nu + 2 \left| \frac{\vartheta \vartheta}{\partial U / \partial y} \right|, \quad k_y = 3k + 2 \left| \frac{t \vartheta}{\partial T / \partial y} \right|.$$

Ишқаланиш ва иссиқлик алмашиш коэффициентлари қуйидаги кўринишга эга:

$$K_f = C_{11} \sqrt{2C_s(1-2C_s)} \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right| + C_2 \frac{|\bar{v}|}{\bar{y}},$$

$$K_t = C_{t1} \sqrt{2C_s(1-2C_s)} \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right| + C_{t2} \frac{\bar{\tau}_w}{\bar{q}_w} \left| \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right|.$$

Ушбу ифодаларда  $C_{11} = 0.939$ ,  $C_{t2} = 0.1$ ,  $C_s = 0.2$ ,  $C_1 = 0.7825$ ,  $C_2 = 0.306$  – эмпирик ўзгармаслардир;  $\tau_w$  – ишқаланиш кучланиши;  $q_w$  – девордаги иссиқлик оқими.

Моделларнинг сонли реализациясини амалга ошириш мақсадида 2.1 § даги алгоритм қўлланилди. Шунингдек узлуксизлик тенгламасини каноатлантурувчи умумлашган оқим функцияси  $\psi$  киритилди.

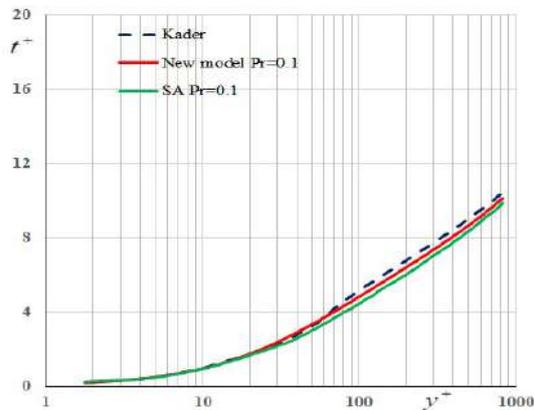
Янги ўзгарувчи киритгандан кейин, (8) тенгламалар системаси Спаларт–Аллмарас (9) моделини эътиборга олган ҳолда қуйидаги кўринишга келди:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{u}{\psi} (v + v_t) \frac{\partial u}{\partial \psi} \right], & \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{u}{\psi} \left( \frac{v}{\text{Pr}} + \frac{v_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial T}{\partial \psi} \right], \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} = \frac{P_w - D_w}{V_z} + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{u}{\psi} (v + \bar{v}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \psi} \right) + C_{\sigma_2} u \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \psi} \right) \right]. \end{cases} \quad (11)$$

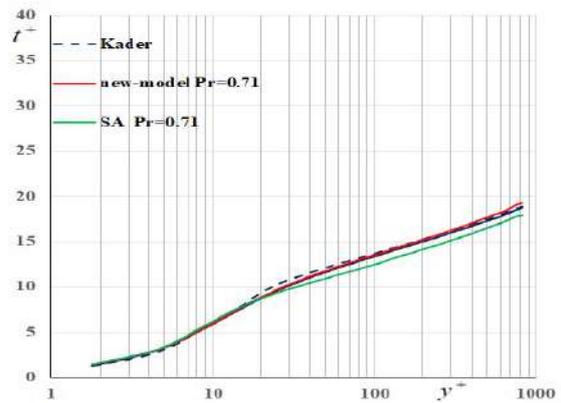
Икки суяқлик модели тенгламалари системаси (10) янги ўзгарувчиларни эътиборга олган ҳолда қуйидаги кўринишга эга бўлди:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left( \frac{\bar{U}}{\text{Re} \psi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \psi} - u \bar{v} \right), & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = -\frac{(1 - C_s)}{\psi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \psi} \bar{g} + \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left( \frac{\bar{v}_{xy} \bar{U}}{\psi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \psi} \right) - \frac{K_f \bar{u}}{U}, \\ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \xi} = -\frac{C_s}{\psi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \psi} \bar{u} + \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left( 2 \bar{v}_{xy} \frac{\bar{U}}{\psi} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \psi} \right) - \frac{K_f \bar{g}}{U}, \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{U}}{\text{Pr Re} \psi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \psi} \right) - \bar{t} \bar{g}, & \frac{\partial \bar{t}}{\partial \xi} = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \psi} \bar{v} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\bar{k}_y \bar{U}}{\psi} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \psi} \right) - \frac{K_f \bar{t}}{U}. \end{cases} \quad (12)$$

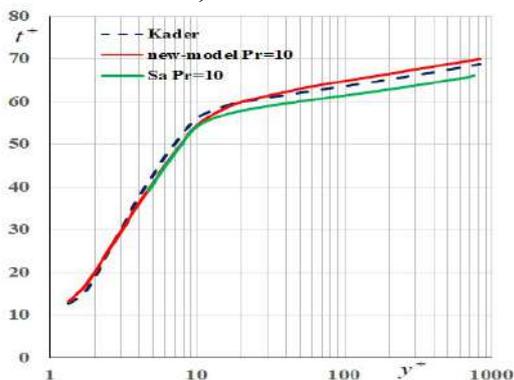
(10) тенгламага қўшимчалар ҳам Мизес ўзгарувчиларида ёзилди. Масала учун қуйидаги чегаравий шартлар қуйилган, деворда, яъни  $\psi = 0$  да:  $\bar{U} = \bar{u} = \bar{v} = \bar{t} = 0$ ,  $\bar{T} = \bar{T}_{cm}$ ;  $\xi = 0$ ,  $\psi \rightarrow \infty$  да:  $\bar{U} = 1$ ,  $\bar{u} = \bar{u}_\infty$ ,  $\bar{v} = \bar{v}_\infty$ ,  $\bar{T} = \bar{T}_\infty$ ,  $\bar{t} = \bar{t}_\infty$ .



а)



б)



в)

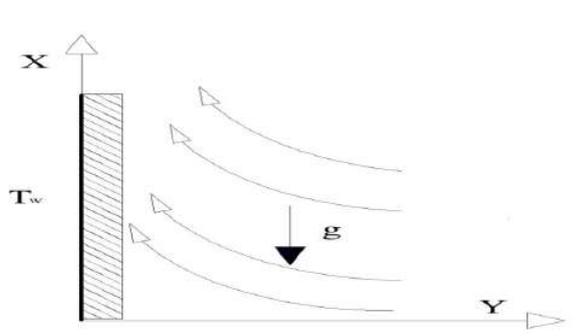
2-расм. Прандтль критерийсининг  $\text{Pr} = 0.1$  (а),  $\text{Pr} = 0.71$  (б) ва  $\text{Pr} = 10$  (в) қийматларида температуранинг профили

Ҳисоблашлар Рейнольдс сонининг  $Re=5 \cdot 10^6$  қиймати учун ўтказилди. Шундай қилиб,  $\xi=0$  кесимгача оқим бир жинсли ва ундан кейин моллар нисбий тезликлари ошиши ҳисобига турбулентликка ўтган.

(11) ва (12) тенгламалар системасини сонли ечиш учун ошқормас чекли айирмалар схемасидан фойдаланилди. Бўйлама йўналишда марказий айирма схемасидан фойдаланилди. Чекли айирмали тенгламаларни ечиш учун қувиш усули қўлланилди. Кўндаланг йўналишдаги тўр нуқталари 2000 тани ташкил этди. Интеграллаш қадамлари  $\Delta\xi=0.00002$ ,  $\Delta\psi=0.0002$  тарзида олинди. Прандтль критерийсининг турли қийматларида ҳисоблашлар олиб борилди.

2-расмда температуранинг графиклари яримлогарифмик  $y^+ = y/l_*$ ,  $t^+ = \frac{|T_w - T_\infty|}{t_*}$  координаталарида келтирилган Улар Кадернинг тажриба натижалари билан солиштирилган.

Учинчи параграфда икки суяқлик турбулентлик модели асосида қиздирилган чексиз вертикал пластина ёнида ҳавонинг табиий турбулент конвекцияси тадқиқ этилди (3-расм).



3-расм. Вертикал пластина яқинидаги табиий конвекция

Икки суяқлик ёндашуви асосида қиздирилган вертикал пластина ёнидаги ҳавонинг конвектив оқими учун тўлдирувчи муносабатлар қиздирилган пластина оқиб ўтиш масаласидаги каби бўлиб, тенгламалар куйидаги кўринишга эга бўлди:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0, & U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \vartheta \frac{\partial U}{\partial y} - u \vartheta \right) + g \frac{T - T_0}{T_0}, \\ U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = -(1 - C_s) \vartheta \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \vartheta_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - K_f u + g \frac{t}{T_0}, \\ U \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + V \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -C_s u \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \rho \vartheta_{yy} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) - K_f \vartheta - \vartheta_T^2 \frac{t}{T_0^2} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho k \frac{\partial T}{\partial y} - \rho t \vartheta \right), & U \frac{\partial t}{\partial x} + V \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial y} \vartheta + \frac{\partial}{\partial y} \rho k_y \frac{\partial t}{\partial y} - K_t t. \end{cases} \quad (13)$$

Бу ерда  $x$  – вертикал пластина бўйлаб йўналган координата;  $y$  – пластинага перпендикуляр координата;  $U, V$  – мос равишда бўйлама ва кўндаланг тезликлар;  $u, \vartheta$  – нисбий тезликлар;  $T$  – ҳаво ҳарорати;  $T_0$  – пластинадан узоқдаги ҳаво ҳарорати;  $\rho$  – ҳавонинг зичлиги;  $k$  – ҳавонинг ҳарорат ўтказиш коэффициентини.

Масаланинг кўйилишида девор яқинида ҳаво тинч ҳолатда бўлиб, бир жинсли  $T_0 = 289 K$  ҳароратга эга. Девор ҳарорати эса  $T_w = 333 K$ , муҳит зичлиги  $\rho_0 = 1.23 \text{ кг} / \text{м}^3$  га тенг.

Кўйилган масалада босим ҳамма жойда бир хил, (13) тенгламанинг ўнг қисмидаги диффузион ҳаднинг бўйлама ҳосилалари жуда кичкина бўлганлиги учун ташлаб юборилган. Кўриниб турибдики, тўртинчи тенгламанинг ўнг томонида қўшимча термик куч киритилган:

$$f_T = -\frac{\rho \vartheta_T^2 t}{T_0^2} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (14)$$

Бу ерда  $\vartheta_T$  параметр тезлик ўлчовига эга ва сонли тадқиқот шуни кўрсатдики, у  $\vartheta_T = 2.05 \text{ м} / \text{с}$  қийматга эга.

(13) тенгламалар системасини сонли ечиш учун қулай бўлган Мизес  $(\xi, \psi)$  ўзгарувчиларига ўтилди:

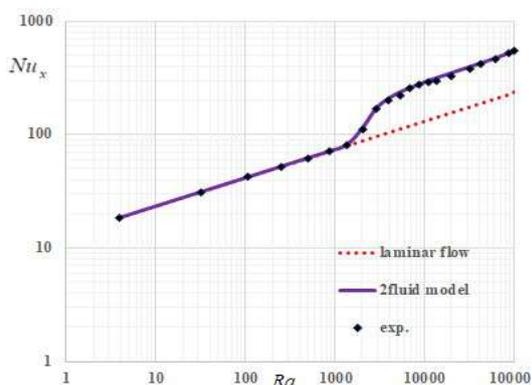
$$\xi = x, \quad \rho U = \frac{\psi \partial \psi}{\partial y}, \quad \rho V = -\frac{\psi \partial \psi}{\partial x}. \quad (15)$$

(13) тенгламалар системасини сонли ечиш учун ошқормас чекли айирмалар усулидан фойдаланилди. Кўндаланг йўналишда марказий чекли айирма қўлланилди. Ошқормас схема билан қурилган чекли айирмали тенгламаларни ечиш учун қувиш усули ишлатилди. Интеграллаш қадамлари куйидагича олинди:  $\Delta \xi = 0.00002$ ,  $\Delta \psi = 0.001$ . Кўндаланг йўналишда ҳисоблаш нуқталари сони 2000 тани ташкил этди. Масала учун куйидаги чегаравий шартлар қўйилди: деворда, яъни  $\psi = 0$  да  $\bar{U} = \bar{u} = \bar{\vartheta} = 0$  ва  $\psi \rightarrow \infty$  да:  $\bar{U} = 0$ ;  $\bar{u} = \bar{v} = 0$ .  $\xi = 0$  да:  $\tilde{u} = 10^{-20}$ ,  $\tilde{v} = 0$  шартлар қўйилди. Рейнольдс сони  $Re = 8.35 \cdot 10^4$  га тенг.

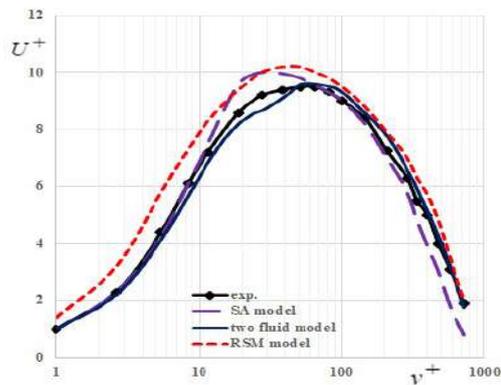
4-ва 5-расмларда икки суюқлик модели асосида олинган сонли натижалар келтирилган. Солиштириш мақсадида бу расмларда SA ва RSM турбулент моделлари ёрдамида олинган натижалар, шунингдек тажриба натижалари ҳам келтирилган.

$$(14) \text{ термик кучнинг киритилиши Нуссельт } Nu_x = -\frac{x}{T_w - T_0} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w$$

коэффициенти учун ламинар режимдан турбулент режимга ўтишда адекват натижа олишни таъминлади (4-расм).



4–расм. Икки суюқлик турбулентлик модели асосида Нуссельт сонининг Рэлей сонига боғлиқлиги



5–расм. Ўлчовсиз бўйлама тезлик профили

Учинчи «Ўққа нисбатан симметрик струяли оқим» боб учта параграфдан иборат.

Бобнинг биринчи параграфидида товуш тезлигидан паст бўлган ўққа нисбатан симметрик струя масаласининг математик моделини учта турбулентлик моделлари: Секундовнинг  $\nu_t-92$ , Ченнинг  $k-\varepsilon$  ва икки суюқлик моделлари билан берилди. Масалани ечиш учун тенгламаларни учала турбулентлик моделлари учун ҳам цилиндрик координаталар системасида ёзамиз.

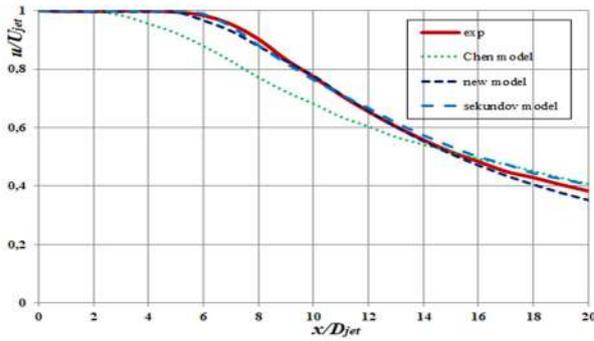
$$U = \frac{\psi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad V = -\frac{\psi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{ўринли бўлган умумлашган оқим функцияси}$$

$\psi$  киритилди. Ҳосилалар  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{Vr}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}$  ва  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{Ur}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}$  формулалар

билан аниқланди.

Тенгламалар системасини сонли ечиш учун марш усули ва мутлак устувор ошқормас схема ишлатилди. Радиал йўналишда тугунлар сони 600 тани ташкил этди. Тенгламалар системаси  $Re=5600$  учун ечилди. Ченнинг  $k-\varepsilon$  ва Секундовнинг  $\nu_t-92$  турбулентлик моделлари  $U=1$ ,  $\nu_t=0.0005$  бошланғич шартларда тажриба натижаларига яқин натижаларни беришди. Турбулентликнинг икки суюқлик модели эса  $\bar{V}_z = 1$ ,  $\bar{v}_z = 0.055$ ,  $\bar{v}_r = 0.028\bar{r}^{1/2}$  бошланғич шартларда тажриба натижалари билан устма – уст тушди:

6–расмда ўлчовсиз бўйлама тезликнинг профили соплогача ўлчовсиз масофада келтирилди. Бунда турбулентлик моделлари натижалари NASA тажриба натижалари билан солиштирилган.



6–расм. Соплогача бўлган ўлчовсиз масофада бўйлама тезликнинг тажриба натижалари билан солиштирилиши

Бобнинг иккинчи параграфида товуш тезлигидан паст ўққа нисбатан симметрик струя масаласини ечиш учун икки суюқлик модели ва чекли ҳажм усули ишлатилди. Конвектив ҳадлар учун ошкор кўринишдаги Леонардо QUICK схемаси қўлланилди. Ярим ошкормас схема ва қувиш усулидан фойдаланилди. Босим ва тезликлар ўртасидаги муносабат SIMPLE процедураси орқали амалга оширилди ва бунда юқори релаксацияли итерацион усул ишлатилди.

Икки суюқлик модели цилиндрик координаталар системасида қуйидаги кўринишга эга:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial r V_r}{r \partial r} = 0, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial V_z}{r \partial r} \right) - \frac{\partial r \mathcal{G}_r \mathcal{G}_z}{r \partial r}, \\ \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial V_r}{r \partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right) - \frac{\partial r \mathcal{G}_r \mathcal{G}_r}{r \partial r}, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial r} = -(1 - C_s) \frac{\partial V_z}{\partial r} \mathcal{G}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{zr} \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial r} \right) - C_r \mathcal{G}_z \\ \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} = -C_s \frac{\partial V_z}{\partial r} \mathcal{G}_z - \left( C_s \frac{\partial r V_\varphi}{r \partial r} - \frac{2V_\varphi}{r} \right) \mathcal{G}_\varphi + \\ + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{r\varphi} \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} \right) - 2v_{\varphi\varphi} \frac{\mathcal{G}_r}{r^2} - C_r \mathcal{G}_r. \end{array} \right. \quad (16)$$

### Босим учун тенглама

Босимни ҳисоблаш учун тенглама муҳитнинг узлуксизлиги тенграмасидан олиниши мумкин. Бунинг учун SIMPLE процедурасидан фойдаланиб, қуйидаги тенглама олинган:

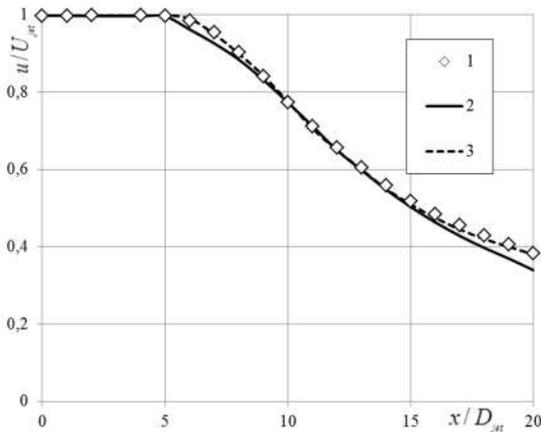
$$\frac{\delta p_{i+1,j}^n - 2\delta p_{i,j}^{n+1} + \delta p_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} - \frac{\delta p_{i,j+1}^{n+1} - 2\delta p_{i,j}^{n+1} + \delta p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right).$$

Тезликлар эса қуйидагича аниқланади:

$$\begin{cases} U^{n+1} = \tilde{U} - \Delta t \frac{\partial \delta p}{\partial x}, \\ V^{n+1} = \tilde{V} - \Delta t \frac{\partial \delta p}{\partial y}. \end{cases} \quad (17)$$

Иккинчи параграфда икки суюқлик турбулентлик моделининг соддалаштирилган (параболиклаштирилган) тенгламалар системасининг ечими ҳам олинди. Унда босим градиентининг таъсири жуда кичик деб фарз қилинди. Тадқиқот Рейнольдс сони  $Re = \rho R U_{jet} / \mu = 5600$  га тенг бўлган струя учун ўтказилди. Сонли ҳисоблашни амалга ошириш мақсадида мутлақ устувор ошқормас схемадан фойдаланилди. Бошланғич шартлар сифатида куйидаги ўлчовсиз параметрлар танлаб олинди:  $U = 1$ ,  $V = 0$ ,  $u = 0.055$ ,  $\vartheta = 0.028 r^{1/2}$ .

7-расмда соплогача бўлган ўлчовсиз масофадан боғлиқ равишда ўқдаги ўлчовсиз бўйлама тезликнинг сонли натижалари келтирилган.



7-расм. Ўқдаги бўйлама тезликнинг соплогача бўлган ўлчовсиз масофадан боғлиқлиги. 1 – тажриба, 2 – «параболиклаштирилган» тенгламалар системаси, 3 – тўлиқ тенгламалар системаси

Учинчи параграфда икки суюқлик турбулент модели асосида айланма струяли оқимнинг сонли тадқиқоти олиб борилди. Маълумки, айланма струя Рейнольдс сони  $Re$  ва айланиш даражаси  $S$  каби параметрлар билан тавсифланади:

$$Re = \frac{DU_0}{\nu} = 56000, \quad S = \left( \int_0^R V_{0\phi} V_{0z} r^2 dr \right) / \left( R \int_0^R V_{0z}^2 r dr \right) = 0.36$$

Ўққа нисбатан симметрик айланма оқимни тадқиқ қилиш учун икки суюқлик моделини цилиндрик координаталарда ёзамиз.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial r V_r}{r \partial r} = 0, \\
\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{Re \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial V_z}{r \partial r} \right) \frac{\partial r \partial r \partial z}{r \partial r}}, \\
\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_\phi^2}{r} + \frac{1}{Re \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial V_r}{r \partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right) \frac{\partial r \partial r \partial r}{r \partial r}}, \\
\frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_\phi}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_r V_\phi}{r} = \frac{1}{Re \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial r^2} \frac{\partial V_\phi}{r \partial r} \frac{V_\phi}{r^2} \frac{\partial r^2 \partial r \partial \phi}{r^2 \partial r}}, \\
\frac{\partial \vartheta_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial \vartheta_z}{\partial r} = -(1 - C_s) \frac{\partial V_z}{\partial r} \vartheta_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{zr} \frac{\partial \vartheta_z}{\partial r} \right) - C_r \vartheta_z \quad (18) \\
\frac{\partial \vartheta_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial \vartheta_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} = -C_s \frac{\partial V_z}{\partial r} \vartheta_z - \left( C_s \frac{\partial r V_\phi}{r \partial r} - \frac{2 V_\phi}{r} \right) \vartheta_\phi + \\
+ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{rr} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} \right) - 2 v_{\phi\phi} \frac{\vartheta_r}{r^2} - C_r \vartheta_r, \\
\frac{\partial \vartheta_\phi}{\partial t} + V_z \frac{\partial \vartheta_\phi}{\partial z} + V_r \frac{\partial r \vartheta_\phi}{r \partial r} = -(1 - C_s) \frac{\partial r V_\phi}{r \partial r} \vartheta_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 v_{r\phi} \left( \frac{\partial \vartheta_\phi}{\partial r} - \frac{\vartheta_\phi}{r} \right) \right] - C_r \vartheta_\phi.
\end{array} \right.$$

Соғлодан чиқишда оқим параметрларининг тажриба қийматлари куйидаги муносабатлар билан аппроксимация қилинди.

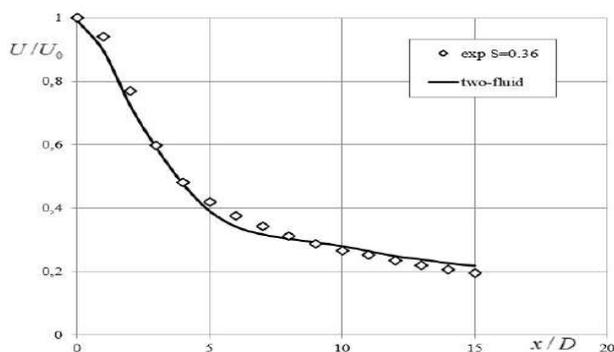
$$V_{0\phi} = 2Sr^2(4 + n_w)(1-r)^{n_w}, \quad V_{0z} = (1 + x_k)(1-r)^{x_k}, \quad n_w = 4, \quad x_k = 0.06. \quad (19)$$

Соғлодан чиқишдаги нисбий тезликлар куйидаги қийматга эга

$$\mathcal{G}_z = 0.025, \quad \mathcal{G}_r = 0.1r^{0.75}, \quad \mathcal{G}_\phi = 0.1r^{0.75}.$$

Ҳисоблаш учун  $\Delta z = 0.2$ ,  $\Delta r = 0.02$  кадамда  $250 \times 250$  ўлчамли тўрдан фойдаланилди. (17) тенгламалар системасини ечишда устуворликни таъминлаш мақсадида конвектив ҳадлар учун Леонардонинг ошкор оқимга қарши QUICK схемаси ишлатилди. Диффузион ҳадлар учун эса ошқормас кўринишдаги марказий айирма усули қўлланилди. Ярим ошқормас схема билан олинган тенгламалар қувиш усули билан ечилди. Босим ва тезликлар ўртасидаги муносабат SIMPLE процедураси билан амалга оширилди ва бунда куйи релаксацияли итерация усули ишлатилди.

8-расмда ўқдаги ўлчовсиз бўйлама тезлик қийматининг соғлонинг чиқиш кесимида бўлган ўлчовсиз масофадан боғлиқ ўзгаришининг сонли натижалари кўрсатилган. Шунингдек, бу ерда айланиш даражаси  $S=0.36$  бўлгандаги ERCOFTAC тажриба натижалари ҳам берилган.



8–расм. Ўқдаги ўлчовсиз бўйлама тезлик қийматининг соплонинг чиқиш кесимигача бўлган ўлчовсиз масофадан боғлиқ ўзгариши

## ХУЛОСА

«Аэродинамика масалаларини турбулентликнинг янги моделлари асосида сонли тадқиқ этиш» мавзусидаги диссертация ишидан олинган натижалар асосида қуйидаги хулосалар тақдим этилди.

1. Аэродинамика масалаларини ечишда қўлланиладиган мавжуд алгебраик турбулентлик моделлари ва бир ёки икки субстанция кўчиши тенгламалари билан ифодаланувчи турбулентлик моделларининг солиштирма таҳлили ўтказилди. Диссертация ишида қараладиган турбулент газ оқими масалаларини ечиш учун турбулентликнинг  $k - \varepsilon$  модели, унинг Чен модификацияси, Секундовнинг  $\nu_t-92$ , Спаларт-Аллмарас моделлари ва икки суюқлик ёндашуви модели танлаб олинди.

2. Ясси пластинани бир жинсли турбулент изотермик оқим билан оқиб ўтиш масаласига турбулентликнинг классик  $k - \varepsilon$ , Чен ва икки суюқлик моделлари синаб кўрилди. Ҳар бир вариант учун субстанциялар кўчиши тенгламалари Мизес ўзгарувчиларида берилди ва чекли айирмалар усулида ечилди. Охириги иккита модель тезлик ва ишқаланиш қаршилиги коэффициентлари профиллари учун қониқарли натижалар беришди.

3. Бир жинсли турбулент изотермик газ оқими қиздирилган ясси пластинани оқиб ўтиш масаласи Спаларт – Аллмарас ва икки суюқлик ёндашуви асосида моделлаштирилди ва тенгламалар Мизес ўзгарувчиларида тақдим этилди. Икки суюқлик ёндашуви асосида ҳарорат ва жисмнинг оқимга иссиқлик беришини ифодаловчи Прандтль критерийси профиллари бўйича олинган натижалар тажриба натижалари билан мос тушишди.

4. Қиздирилган вертикал пластина атрофида табиий конвекциянинг математик модели икки суюқлик ёндашуви асосидаги тенгламаларни қўллаш орқали шакллантирилди. Қўшимча термик кучнинг киритилиши ламинар оқим режимидан турбулент режимга ўтиши давомида Рэлей сонига нисбатан Нуссельт критерийсини ифодаловчи узлуксиз эгри чизиқни олиш имконини бериши исботланди.

5. Мизес ўзгарувчилари қўлланган ўққа нисбатан симметрик струя тенгламаларининг сонли натижалари шуни кўрсатдики, турбулентликни тавсифлашда қўлланилган Чен модификацияси, Секундов  $\nu_t-92$  модели ва икки суюқлик ёндашуви асосидаги моделлардан охириги икитаси бўйлама тезликнинг ўқ бўйича тақсимланиши ва кўндаланг профиллари, шунингдек

турбулент уринма кучланиш профиллари учун адекват натижалар олиш имконини берди.

6. Ўққа нисбатан симметрик эркин турбулент струя масаласини ечиш учун икки суюқлик модели ва унинг параболлаштирилган варианты асосида чекли ҳажм усули ишлаб чиқилди ва бунда тезлик вектори компонентлари ва босим ўртасидаги муносабатни таъминлаш мақсадида SIMPLE ҳолатлари ва юқори релаксация усули қўлланилди. Тажриба натижалари билан солиштирилган натижалар асосида масalani аниқ ечиш учун икки суюқлик моделини қўллаш ва муҳандислик ҳисоб–китоблари учун унинг соддалаштирилган вариантыни қўллаш мақсадга мувофиқ эканлиги ҳақида хулоса қилинди.

7. Айланма струяли оқимни тадқиқ этиш учун икки суюқлик турбулентлик модели асосидаги математик модель ва оқимга қарши Леонард QUICK схемасини қўллаган ҳолда ошқормас сонли модель таклиф қилинди. Бунда SIMPLE ва қуйи релаксация процедураси ишлатилди. Айланиш даражаларининг ўртача қийматларида тажриба натижалари билан яхши мосликка эга натижалар олинди.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 ПО  
ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ  
МЕХАНИКИ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ**

---

**ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ**

**НАВРУЗОВ ДИЛШОД ПРИМКУЛОВИЧ**

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ НА  
ОСНОВЕ НОВЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ**

01.02.05 – Механика жидкости и газа

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)  
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Ташкент – 2022**

**Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № В2020.2.PhD/T1047.**

Диссертация выполнена в Институте механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице научного совета ([www.instmech.uz](http://www.instmech.uz)) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» ([www.ziyo.net](http://www.ziyo.net)).

<b>Научный руководитель:</b>	<b>Маликов Зафар Маматкулович</b> доктор технических наук, старший научный сотрудник
<b>Официальные оппоненты:</b>	<b>Далабаев Умурдин</b> доктор физико-математических наук, доцент
	<b>Закиров Аскар Халилович</b> кандидат физико-математических наук, доцент
<b>Ведущая организация:</b>	<b>Научно – исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта</b>

Защита диссертации состоится « 18 » январь 2023 г. в 14:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 при Институте механики и сейсмостойкости сооружений. (Адрес: 100125, г. Ташкент, ул. Дурмон йули, 33, зал заседаний-1. Тел.(99871) 262-71-52; факс: (99871) 262-71-32, e-mail: [instmech@academy.uz](mailto:instmech@academy.uz)).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института механики и сейсмической стойкости сооружений (зарегистрирована за № ). (Адрес: 100125, г. Ташкент, ул. Дурман йули, 33. Тел.(99871) 262-71-32).

Автореферат диссертации разослан « » декабря 2022 года.  
(реестр Протокола рассылки № от « » декабря 2022 года.)

**М.М.Мирсаидов**  
Председатель Научного совета по  
присуждению ученых степеней,  
д.т.н., профессор, академик АН РУз

**М.К.Усаров**  
Ученый секретарь Научного совета  
по присуждению ученых степеней,  
д.ф.-м.н., проф.

**И.К.Хужаев**  
Заместитель председателя Научного семинара при  
Научном совете по присуждению  
ученых степеней, д.т.н., проф.

## **ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))**

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** В мире последние годы ученые большое внимание обращают на разработку численных методов, предназначенных для решения задач аэрогидродинамики. В свою очередь, для этого требуется разработать адекватных моделей турбулентности для решаемых задач аэрогидродинамики. Задачи, связанные с обтеканием различных тел, дозвуковыми струйными течениями и закрученными потоками, имеющие многочисленные практические приложения, представляют собой важный раздел современной гидромеханики. В частности, закрученные течения наблюдаются во многих явлениях природы: образование циклона и торнадо в атмосфере, водовороты в реках, вихревой след, оставляемый крылом самолета, дождевальные и разбрызгивающие сельскохозяйственные машины. Известно, теория закрученных течений применяется при изучении полета бумеранга. Кроме того, вращательное движение воздуха горючих используется для увеличения коэффициента полезного действия многочисленных технических устройств. Как положительный фактор вращающиеся потоки используются для стабилизации и интенсификации процессов горения в камерах внутреннего сгорания и дизельных устройствах, для обеспечения экологически чистого и эффективного сжигания горючих в котельных и других системах отопления, а также в газовых турбинах и газотурбинных двигателях. Сложность этих задач принуждает ученых к использованию современных, достаточно сложных методов численного моделирования.

В мире ведутся и теоретические и экспериментальные изыскательные работы. В силу того, что экспериментальные исследования требуют больших капитальных расходов, на сегодняшний день ученые большое внимание уделяют предварительным расчетам поля течения на основе моделей турбулентности и численных разработок. На сегодняшний день для описания течений сред разработаны различные модели турбулентности, которые используются для различных задач гидродинамики. Закручивание потока вызывает сильную анизотропную турбулентность. Математически эта проблема очень сложна и до сих пор не создана универсальная математическая модель для закрученного турбулентного потока. Эта проблема еще больше усложняется для многофазного полидисперсного турбулентного потока. В связи с этим требуется разработать улучшенные математические модели, эффективные вычислительные алгоритмы и программы расчета закрученных турбулентных потоков.

В стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы поставлены задачи, в том числе «..бесперебойное обеспечение экономики электроэнергией, активное внедрение технологий «Зелёной экономики» во

все сферы, увеличение энергоэффективности экономики на 20 процентов»<sup>1</sup>. Для выполнения поставленных задач, в частности, При реализации этих задач важное значение имеет разработка пакетов программ, которые позволяют моделировать турбулентные потоки, проводить вычислительные эксперименты и определить рациональные параметры различных устройств.

Представленное диссертационное исследование, в определенной мере, способствует выполнению задач, изложенных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», а также постановлениями Президента Республики Узбекистан № ПП-4779 «О дополнительных мерах по сокращению зависимости отраслей экономики от топливно-энергетической продукции, путем повышения энергоэффективности экономики и задействования имеющихся ресурсов» от 10 июля 2020 года и № ПП-4422 «Об ускоренных мерах по повышению энергоэффективности отраслей экономики и социальной сферы, внедрению энергосберегающих технологий и развитию возобновляемых источников энергии» от 22 августа 2019 года, в котором утверждены долгосрочные целевые параметры развития ВИЭ и план организационно-практических мер дальнейшего развития ВИЭ.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан.** Работа выполнена в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** Развитие учения о турбулентности тесно связано работами таких ученых, как О.Рейнольдс, Никурадзе, И.С.Хинце, П.Бредшоу, Дш.Буссинеск, Л.Прандтль, Т.Карман, А.Н. Колмогоров, Л.Г.Лойцянский, Н.Н.Акатнов, Ю.В.Лапин, Ван Дрист, А. Магер, П.А.Либби и др. Предложены различные алгебраические модели, модели с одним и двумя ( $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ ) дифференциальными уравнениями, которые апробированы для различных задач гидромеханики. Научные работы Спаларта П.Р., Аллмараса С.Р. (1992), Шура М.Л. (1997), Ментера Ф.Р. (1994), Секундова А.Н (1995), Уилкокса Д.С. (2006) посвящены разработке и улучшению линейной модели турбулентности на основе гипотезы Буссинеска. Лаундер Б.Е. (1972), Роди В. (1975), Хеллистен А., Валлин С., Йохансон А.В. (2005) разработали нелинейные модели турбулентности.

Большой вклад в развитие аэродинамики внесли также узбекские ученые. Новые модели турбулентности предложены в работах К.Ш.Латипова, Ю.М.Денисова, И.Н.Хусанова, З.Ш.Жумаева, З.М.Маликова, А.М.Арифжонова, А.М.Фатхуллаева и других. Несмотря на многочисленные

---

<sup>1</sup> Указ Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» // Собрание законодательства Республики Узбекистан, 01.05.2021 г., № 06/21/6217/0409

работы в области аэродинамики, универсальная модель турбулентности на сегодняшний день все еще не разработана.

**Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация.** Диссертационная работа выполнена в рамках плана научно-исследовательских работ лаборатории “Механика жидкости, газа и систем гидроприводов” Института механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз в 2020-2022 гг.

**Целью исследования** является проверка адекватности современных моделей турбулентности, применяемых при изучении задач аэродинамики.

**Задачи исследования:**

провести анализ работ, посвященных современным моделям турбулентности для задач аэродинамики;

Разработка программных средств на основе современных численных методов решения уравнений турбулентности;

численными способами исследовать адекватности современных моделей турбулентности применительно к задачам обтекания плоской пластины изотермическим и неизотермическим потоками, а также в условиях естественной конвекции;

верификация новых математических моделей для турбулентности путем численного моделирования прямооточных и закрученных струй.

**Объектом исследования** служили турбулентные течения, которые широко используются в промышленности.

**Предметом исследования** являются двух-жидкостная и другие современные математические модели турбулентности.

**Методы исследования.** При выполнении исследования использованы феноменологические модели турбулентности и численные методы решения системы дифференциальных уравнений переноса субстанций.

**Научная новизна работы** заключается в следующем:

Задачи естественной конвекции вблизи вертикальной нагретой стенки и осесимметричной свободной исследованы на основе двух-жидкостной модели турбулентности и на основе результатов сравнения с экспериментальными данными других авторов доказано, что преимущество данной модели турбулентности по сравнению с остальными моделями;

с помощью алгоритма SIMPLE разработаны численные методы решения уравнений осесимметричной и закрученной турбулентных струй на основе новой двух-жидкостной модели турбулентности;

способом переменных Мизеса уточнены уравнения турбулентных течений для сжимаемых и несжимаемых сред и получены численные решения на основе метода установления;

на основе сравнения с экспериментальными результатами показано, что двух жидкостная модель турбулентности является универсальной моделью для изотропных и анизотропных турбулентных течений.

**Практическая значимость работы** заключается в следующем:

на основе двух-жидкостной модели турбулентности разработаны модели естественной конвекции и закрученного турбулентного потока;

разработаны пакеты программ для изучения прямоточных и закрученных турбулентных потоков и обтекания плоских пластин.

**Достоверность полученных результатов.** Достоверность полученных теоретических и численных результатов обоснована проведением сравнения с результатами специалистов в данной области и их согласованием:

**Научная и практическая значимость результатов исследования.** Научная значимость результатов исследования заключается в том, что впервые для расчета закрученных потоков будет использоваться новая двух-жидкостная модель турбулентности, полученная из строгих основ динамики

Практическая значимость результатов исследования заключается в том, что предложен устойчивые методы численного расчёта различных задач аэродинамики с использованием двух-жидкостной модели турбулентности.

**Внедрение результатов исследования.** На основе численных исследований аэродинамических задач с помощью новых моделей турбулентности:

способ применения переменных Мизеса и новая модель турбулентности использованы при выполнении фундаментального гранта «ЁФА-Фтех-2018-13» (справка Института математики им. В.И.Романовского № 2/219 от 15 июня 2022 г). В результате применения переменных Мизеса и новой модели турбулентности при решении сложных задач численным методом в граничных условиях образуются сингулярные уравнения, для решения которых используется метод приближения четвертого порядка точности;

Результаты введены ирригационной системы Сух-Октепа Министерства водного хозяйства Республики Узбекистан в качестве научных рекомендаций и методов расчета обоснования параметров оросительных каналов, работающих в переменном режиме (справка № OQ72623068 Министерства водного хозяйства Республики Узбекистан от 30 сентября 2022 года). Методы расчета анизотропной турбулентности и касательного напряжения на твердой границе использованы для расчета каналов. В результате предложенным рекомендациям научно-исследовательской работы можно сэкономить до 75 млн. сум в год водных ресурсов по сравнению с традиционными способами орошения сельскохозяйственных культур.

**Апробация результатов исследования.** Результаты диссертационной работы обсуждались на 3 международных и 5 республиканских научных конференциях.

**Публикация результатов исследования.** По теме исследования опубликовано всего 21 научных трудов. Из них 10 научных статей, в том числе 6 в республиканских и 4 в зарубежном журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций, а также получены 3 свидетельства о регистрации программных продуктов для ЭВМ, подана заявка на патент.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 102 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** обоснована актуальность и востребованность темы диссертации в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан, сформулированы цели и задачи, указаны объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, обоснована достоверность полученных результатов, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приведены перечень внедрений результатов исследования в практику, сведения об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава **«Обзор исследований в области турбулентных течений»** диссертационной работы состоит из трех параграфов.

В первом параграфе проанализированы основные задачи гидродинамики, обсуждены особенности движения жидкости, представлены уравнения сохранения массы и импульса, тензоры напряжения и скорости деформации для ньютоновских жидкостей. Приведены основные уравнения Эйлера и Навье – Стокса. Описываются пограничный слой и различия между жидкостью и газа. Проанализированы работы А.Фортье, Р.Бусройда, П.Р.Спаларта, С.Р. Аллмараса, М.Л.Шура, Ф.Р. Ментера, А.Н.Секундова, И.Н.Хусанова, З.М.Маликова и других зарубежных и отечественных ученых.

Во втором параграфе представлены гипотезы Прандтля и Буссинеска для замыкания уравнений турбулентного переноса. Анализированы турбулентные модели Спаларта-Аллмараса, Секундова  $v_t-92$ , турбулентные модели с двумя уравнениями:  $k - \varepsilon$  и ее модификации Чена. Кроме того, приводится новая двух-жидкостная модель турбулентности.

В третьем параграфе анализированы численные методы, используемые для решения задач аэродинамики. Обсуждаются схемы против потока первого, второго и третьего порядка точности аппроксимации. Для системы гиперболических уравнений ставятся условия Куранта. Разъяснены элементы метода Патанкара.

На основе анализа текущей ситуации по исследованию проблемы сформированы цель и задачи исследования.

Вторая глава **«Применение двух-жидкостной модели турбулентности и других моделей турбулентности при решении задач обтекания плоской поверхности»** диссертационной работы состоит из трех параграфов.

В первом параграфе для решения задачи обтекания плоской пластины используются  $k - \varepsilon$  модель турбулентности, ее модификация Ченам, а также двух-жидкостный подход.

Уравнения обтекания пластины для двух первых моделей турбулентности имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right). \quad (1)$$

Уравнения  $k - \varepsilon$  модели турбулентности имеет вид:

$$\begin{cases} u \frac{\partial k}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon, \\ u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_1 \nu_t \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k}. \end{cases} \quad (2)$$

Для выражения турбулентной вязкости применяется связка Прандтля-Колмогорова:

$$\nu_t = C_\nu k^2 / \varepsilon, \quad (3)$$

которая основана на теории о локальной однородной и изотропной турбулентности. Система уравнений модели  $k - \varepsilon$  содержит целый ряд эмпирических констант:  $C_\nu = 0.09$ ,  $C_1 = 1.44$ ,  $C_2 = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\nu_\kappa = 0.72$ ,  $\nu_\varepsilon = 0.9$ , а  $\sigma_\varepsilon$  определяется в виде

$$\sigma_\varepsilon = \chi^2 / \sqrt{C_\nu (C_2 - C_1)}, \quad \chi = 0.4. \quad (4)$$

Модификация Чена модели турбулентности  $k - \varepsilon$  имеет вид

$$\begin{cases} u \frac{\partial \kappa}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial \kappa}{\partial y} = 2\nu_t - \varepsilon - \frac{2\nu\kappa}{d^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right), \\ u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + 2\nu_t C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{k^4}{36\nu^2\varepsilon^2}} \right) \frac{\varepsilon^2}{k} - 2 \frac{\nu\varepsilon}{d^2} e^{-\frac{d}{2\nu}}. \end{cases} \quad (5)$$

Рассматривается поток несжимаемой среды ( $\rho = const$ ). Согласно теории Прандтля, давление в расчетной области можно считать постоянным.

Для решения задачи введена обобщенная функция тока  $\psi$  согласно зависимостям

$$u = \frac{\psi \partial \psi}{\partial y}, \quad \mathcal{G} = -\frac{\psi \partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

В таком случае уравнение неразрывности в (1) будет удовлетворяться автоматически. Сделаем замену переменных и перейдем к переменным Мизеса ( $\xi, \psi$ ) согласно формулам:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\nu}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (7)$$

Применяя (6) и (7) к системам уравнений (1), (2) и (5), получим системы уравнений параболического типа. При решении системы уравнений использована неявная схема аппроксимации с порядком точности

$O(\Delta\xi, \Delta\psi^2)$  и организован итерационный процесс. Алгоритм расчета составили по маршевому методу и прогонки.

Для систем уравнений (1), (2) и (5) ставили следующие граничные условия:

при  $\psi = 0 : u = 0, k = 0, \varepsilon = 0$ ; при  $\psi \rightarrow \infty : u = u_\infty, k = k_\infty, \varepsilon = \varepsilon_\infty$ .

При расчетах значение числа Рейнольдса составило  $Re = 5 \cdot 10^6$ .

На рис. 1 пунктирными (синяя, зелёная) линиями представлены численные результаты по моделям  $k - \varepsilon$  и модификации Чена для профиля безразмерной продольной скорости вблизи стенки. Для сравнения приведены экспериментальные данные (черные точки) из базы данных NASA.

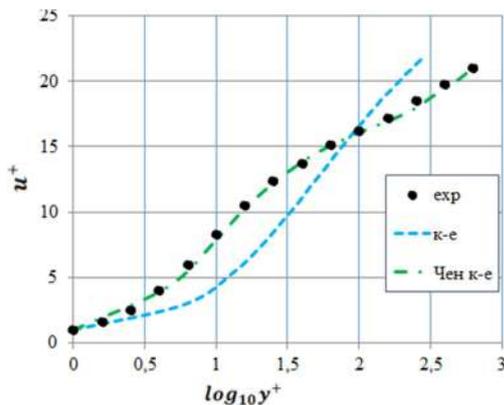


Рис. 1. Профиль безразмерной скорости  $u_*$  в зависимости от  $y^+ = yu_*/\nu$ . Здесь динамическая скорость потока определена по формуле  $u_* = \sqrt{0.5C_f}$  при  $C_f = 2U_*^2$ .

Во втором параграфе проводится исследование переноса импульса и тепла при обтекании нагретой плоской пластины турбулентным потоком. Для решения задачи используются турбулентная модель Спаларта-Аллмараса и двух-жидкостная модель. Уравнения сохранения массы, импульса и тепла имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = 0, & u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \end{cases} \quad (8)$$

В первом случае уравнения (8) замыкали моделью турбулентности Спаларта – Аллмараса

$$u \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} = P_w - D_w + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \right) + C_{\sigma 2} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (9)$$

и турбулентную динамическую вязкость определяли в виде  $\mu = \tilde{\nu} \rho$ .

**Двух-жидкостная модель турбулентности**, привлеченная для задачи обтекания нагретой пластины в декартовой системе координат, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, & U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial U}{\partial y} - u \mathcal{G} \right), \\ U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = -(1 - C_s) \frac{\partial U}{\partial y} \mathcal{G} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - K_f u, \\ U \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + V \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = -C_s \frac{\partial U}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\nu_{yy} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right) - K_f \mathcal{G}, \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} - t \mathcal{G} \right), & U \frac{\partial t}{\partial x} + V \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial y} \mathcal{G} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial t}{\partial y} - K_t t. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $U, V, T$  – осредненные составляющие, а  $u, v, t$  – пульсационные составляющие продольной и поперечной скорости и температуры;

$$\nu_{xy} = 3\nu + 2 \left| \frac{u \mathcal{G}}{\partial U / \partial y} \right|, \quad \nu_{yy} = 3\nu + 2 \left| \frac{\mathcal{G} \mathcal{G}}{\partial U / \partial y} \right|, \quad k_y = 3k + 2 \left| \frac{t \mathcal{G}}{\partial T / \partial y} \right|.$$

Коэффициенты трения и теплообмена имеют вид:

$$K_f = C_1 \sqrt{2C_s(1-2C_s)} \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right| + C_2 \frac{|\bar{v}|}{y},$$

$$K_t = C_{t1} \sqrt{2C_s(1-2C_s)} \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right| + C_{t2} \frac{\bar{\tau}_w}{\bar{q}_w} \left| \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right|.$$

В данных выражениях  $C_{t1} = 0.939$ ,  $C_{t2} = 0.1$ ,  $C_s = 0.2$ ,  $C_1 = 0.7825$ ,  $C_2 = 0.306$  – эмпирические постоянные;  $\tau_w$  – напряжение трения;  $q_w$  – поток тепла через стенки.

Для численной реализации моделей использован идентичный приведенном в предыдущем параграфе алгоритм и также введена обобщенная функция тока  $\psi$ , удовлетворяющая уравнение неразрывности.

В новых переменных система уравнений (8) с моделью Спаларта-Аллмареса (9) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{u}{\psi} (\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial \psi} \right], & \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{u}{\psi} \left( \frac{\nu}{\text{Pr}} + \frac{\nu_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial T}{\partial \psi} \right], \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} = \frac{P_w - D_w}{V_z} + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{u}{\psi} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \psi} \right) + C_{\sigma 2} u \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \right]. \end{cases} \quad (11)$$

Система уравнений двух-жидкостного подхода (10) в новых переменных будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left( \frac{\bar{U}}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \psi} - \bar{u} \bar{v} \right), & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = -\frac{(1-C_s)}{\psi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \psi} \bar{g} + \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left( \frac{\bar{v}_{xy} \bar{U}}{\psi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \psi} \right) - \frac{K_f \bar{u}}{U}, \\ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \xi} = -\frac{C_s}{\psi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \psi} \bar{u} + \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left( 2 \bar{v}_{yy} \frac{\bar{U}}{\psi} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \psi} \right) - \frac{K_f \bar{g}}{U}, \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{U}}{\text{Pr Re}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \psi} \right) - \bar{t} \bar{g}, & \frac{\partial \bar{t}}{\partial \xi} = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \psi} \bar{v} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\bar{k}_y \bar{U}}{\psi} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \psi} \right) - \frac{K_f \bar{t}}{\bar{U}}. \end{cases} \quad (12)$$

Замыкающие уравнений (10) соотношения также представлены в переменных Мизеса. Для задачи ставились следующие граничные условия: на стенке, т.е. при  $\psi = 0$ :  $\bar{U} = \bar{u} = \bar{v} = \bar{t} = 0$ ,  $\bar{T} = \bar{T}_{cm}$ ; при  $\xi = 0$  и  $\psi \rightarrow \infty$ :  $\bar{U} = 1$ ,  $\bar{u} = \bar{u}_\infty$ ,  $\bar{v} = \bar{v}_\infty$ ,  $\bar{T} = \bar{T}_\infty$ ,  $\bar{t} = \bar{t}_\infty$ .

Расчеты проводились при числе Рейнольдса  $\text{Re} = 5 \cdot 10^6$ . Таким образом, до сечения  $\xi = 0$  поток был однородным, и после него становился турбулентным за счет увеличения относительных скоростей молей.

Численное решение системы уравнений (11) и (12) проводилось с помощью неявной конечно-разностной схемы. В поперечном направлении использована центральная разность. Для решения конечно-разностных уравнений использовался метод прогонки. Шаги интегрирования брали  $\Delta \xi = 0.00002$ ,  $\Delta \psi = 0.0002$ . Число расчетных точек в поперечном направлении составило 2000. Проведены расчеты при различных значениях критерия Прандтля.

На рис. 2 приведены графики температуры в полулогарифмических координатах  $y^+ = y/l_*$ ,  $t^+ = |T_w - T_\infty|/t_*$ . Они сравнены экспериментальными результатами Кадера.

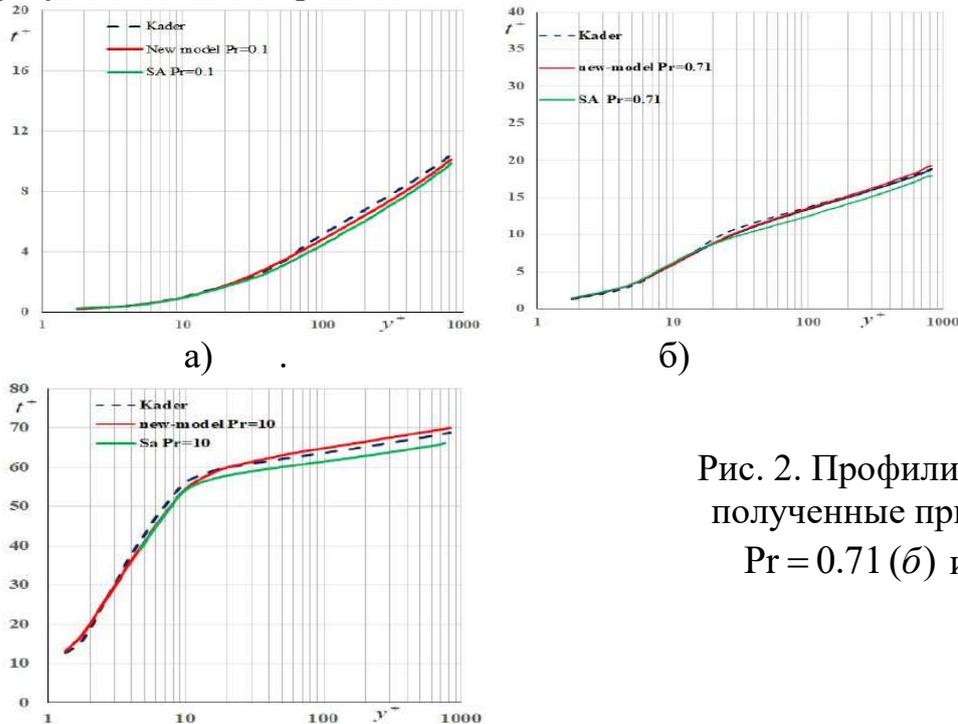


Рис. 2. Профили температуры, полученные при  $\text{Pr} = 0.1$  (а),  $\text{Pr} = 0.71$  (б) и  $\text{Pr} = 10$  (в)

с)

В третьем параграфе проводится исследование турбулентной естественной конвекции воздуха около нагретой вертикальной бесконечной пластины (рис. 3) на основе двух-жидкостной модели турбулентности.

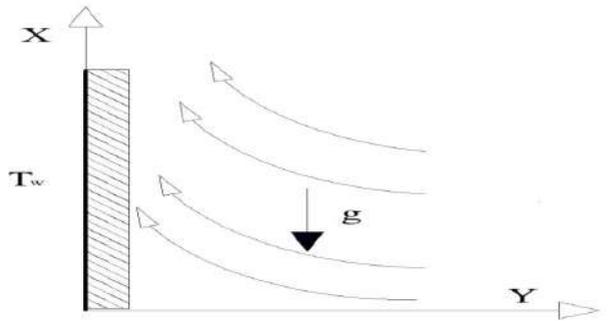


Рис. 3. Естественная конвекция около вертикальной пластины

Замыкающие соотношения для конвективного течения воздуха около нагретой вертикальной пластины такие же, как в случае обтекания нагретой пластины на основе двух-жидкостного подхода, а уравнения имели вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0, & U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \vartheta \frac{\partial U}{\partial y} - u \vartheta \right) + g \frac{T - T_0}{T_0}, \\ U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = -(1 - C_s) \vartheta \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \vartheta_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - K_f u + g \frac{t}{T_0}, \\ U \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + V \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -C_s u \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \rho \vartheta_{yy} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) - K_f \vartheta - \vartheta^2 \frac{t}{T_0^2} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho k \frac{\partial T}{\partial y} - \rho t \vartheta \right), & U \frac{\partial t}{\partial x} + V \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial y} \vartheta + \frac{\partial}{\partial y} \rho k_y \frac{\partial t}{\partial y} - K_t t. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь  $x$  – координата, направленная вдоль вертикальной пластины;  $y$  – перпендикулярная к пластине координата;  $U, V$  – соответственно продольная и поперечная скорости;  $u, \vartheta$  – аналогичные относительные скорости;  $T$  – температура воздуха;  $T_0$  – температура воздуха вдали от пластины;  $\rho$  – плотность воздуха;  $k$  – коэффициент температуропроводности воздуха.

В начале процесса вблизи стенки воздух покоится и имеет однородную температуру  $T_0 = 289 \text{ K}$ . Температура стенки составляла  $T_w = 333 \text{ K}$ , а плотность окружающей среды –  $\rho_0 = 1.23 \text{ кг / м}^3$ .

В поставленной задаче давление везде постоянное, а также в виду малости пренебрегали продольными составляющими в диффузионных

членах в правых частях уравнений (12). Как видно, в четвертом уравнении в правой части введена дополнительная термическая сила

$$f_T = -\frac{\rho \vartheta_T^2 t}{T_0^2} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (14)$$

Здесь параметр  $\vartheta_T$  имеет размерность скорости и численное исследование показывает, что она равна  $\vartheta_T = 2.05 \text{ м/с}$ .

Для численной реализации системы (13) переходили к удобным переменным Мизеса ( $\xi, \psi$ ):

$$\xi = x, \quad \rho U = \frac{\psi \partial \psi}{\partial y}, \quad \rho V = -\frac{\psi \partial \psi}{\partial x}. \quad (15)$$

Численное решение системы уравнений (13) проводился с помощью неявной конечно-разностной схемы. В поперечном направлении использована центральная разность. Для решения конечно-разностных уравнений, построенных неявной схемой, использовался метод прогонки. Шаги интегрирования составили  $\Delta \xi = 0.00002$ ,  $\Delta \psi = 0.001$ . В поперечном направлении число расчетных точек составило 2000. Для задачи ставились следующие граничные условия: при  $\psi = 0$ :  $\bar{U} = \bar{u} = \bar{v} = 0$  и при  $\psi \rightarrow \infty$ :  $\bar{U} = 0$ ;  $\bar{u} = \bar{v} = 0$ . При  $\xi = 0$  задавались условия  $\bar{u} = 10^{-20}$ ,  $\bar{v} = 0$ . Число Рейнольдса было равно  $Re = 8.35 \cdot 10^4$ .

На рис. 4 приведены численные результаты, полученные по двух-жидкостной модели. Для сравнения на этих рисунках приведены также результаты моделей турбулентности SA и RSM, а также экспериментальные данные.

Введение термической силы (14) позволило получить адекватные результаты для коэффициента Нуссельта  $Nu_x = -\frac{x}{T_w - T_0} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w$ , демонстрирующие переход от ламинарного режима к турбулентному (рис. 4).

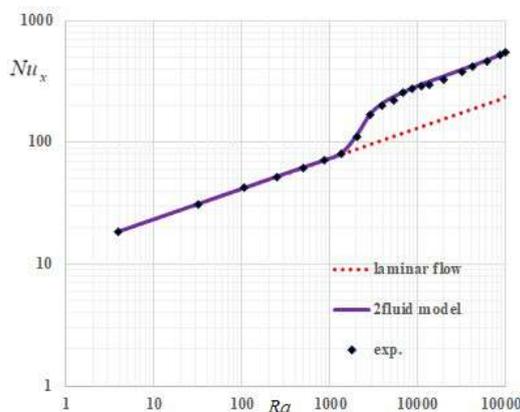


Рис. 4. Зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея по двух-жидкостной

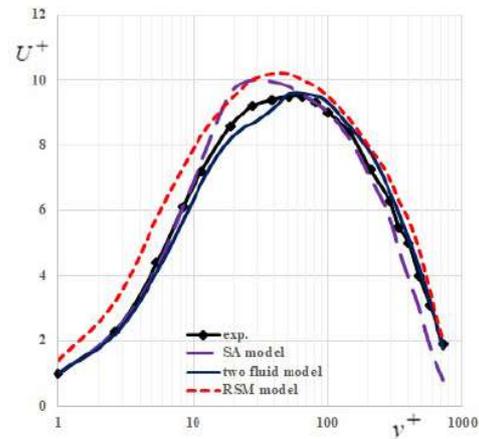


Рис. 5. Профиль безразмерной продольной скорости

## модели турбулентности

Третья глава «Осесимметричные струйные течения» состоит из трех параграфов.

В первом параграфе главы приведены математические модели задачи о осесимметричной дозвуковой струе с привлечением трех моделей турбулентности: турбулентная модель Секундова  $\nu_t$ -92, модель Чена  $k-\varepsilon$  и двух-жидкостная модель турбулентности. Для решения задачи все три модели турбулентности записаны в цилиндрической системе координат.

Введена обобщенная функция тока  $\psi$ , для которой справедливы соотношения:  $U = \frac{\psi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ ,  $V = -\frac{\psi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Преобразования производных

проводили по формулам:  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{Vr}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}$  и  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{Ur}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}$ .

Для численной реализации систем уравнений были использованы маршевый метод и абсолютно устойчивая неявная схема. Количество узлов в радиальном направлении составило 600. Система уравнений решалась для  $Re=5600$ . Хорошее соответствие с экспериментальными данными дают следующие начальные условия для модели Чена и Секундова:  $U=1$ ,  $\nu_t=0.0005$ . Для двух-жидкостной модели турбулентности хорошее соответствие с экспериментальными данными дают следующие начальные условия:  $\bar{V}_z = 1$ ,  $\bar{\nu}_z = 0.055$ ,  $\bar{\nu}_r = 0.028r^{1/2}$ .

На рис. 6 проведено сравнение результатов турбулентных моделей с опытными данными NASA безразмерной осевой скорости в зависимости от безразмерного расстояния до сопла.

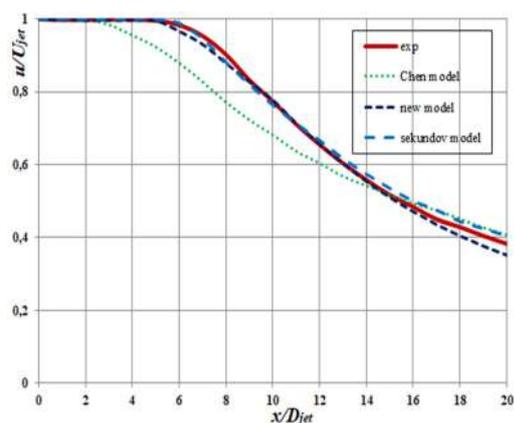


Рис. 6. Сравнение безразмерной осевой скорости от расстояния до сопла с опытными данными

Во втором параграфе главы для решения задач осесимметричной дозвуковой струи используется метод контрольного объема с привлечением двух-жидкостной модели турбулентности. Для конвективных членов использована схема Леонардо QUICK в явном виде. Для реализации полунявной схемы использовали метод прогонки. Связь между давлением и скоростями обеспечена процедурой SIMPLE, где был использован итерационный метод верхней релаксации.

Двух-жидкостная модель задачи в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial r V_r}{r \partial r} = 0, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial V_z}{r \partial r} \right) - \frac{\partial r \mathcal{G}_r \mathcal{G}_z}{r \partial r}, \\ \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial V_r}{r \partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right) - \frac{\partial r \mathcal{G}_r \mathcal{G}_r}{r \partial r}, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial r} = -(1 - C_s) \frac{\partial V_z}{\partial r} \mathcal{G}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{zr} \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial r} \right) - C_r \mathcal{G}_z \\ \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} = -C_s \frac{\partial V_z}{\partial r} \mathcal{G}_z - \left( C_s \frac{\partial r V_\varphi}{r \partial r} - \frac{2V_\varphi}{r} \right) \mathcal{G}_\varphi + \\ + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{r\varphi} \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} \right) - 2v_{\varphi\varphi} \frac{\mathcal{G}_r}{r^2} - C_r \mathcal{G}_r. \end{array} \right. \quad (16)$$

### Уравнение для давления

Необходимое уравнение для вычисления давления можно получить из уравнения неразрывности. С этой целью будем следовать известной процедуре SIMPLE и уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\delta p_{i+1,j}^n - 2\delta p_{i,j}^{n+1} + \delta p_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} - \frac{\delta p_{i,j+1}^{n+1} - 2\delta p_{i,j}^{n+1} + \delta p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right).$$

Скорости определяются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{n+1} = \tilde{U} - \Delta t \frac{\partial \delta p}{\partial x}, \\ V^{n+1} = \tilde{V} - \Delta t \frac{\partial \delta p}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (17)$$

Во втором параграфе представлены решения упрощенной (параболизированной) системы уравнений двух-жидкостной модели турбулентности. Сделано предположение о малости влияния градиента давления. Исследование проводилось для струи с числом Рейнольдса  $\text{Re} = \rho R U_{jet} / \mu = 5600$ .

Для численной реализации использована абсолютно устойчивая неявная схема. В качестве начальных условий приняты следующие безразмерные параметры  $U = 1$ ,  $V = 0$ ,  $u = 0.055$ ,  $\mathcal{G} = 0.028 r^{1/2}$ .

На рис. 7 приведены численные результаты для безразмерной осевой продольной скорости в зависимости от расстояния до сопла.

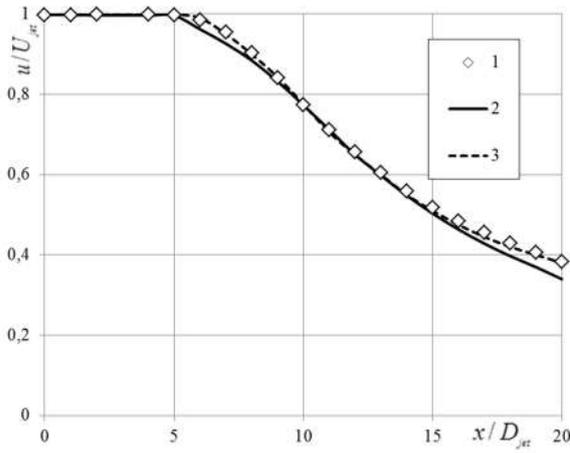


Рис. 7. Безразмерная осевая продольная скорость в зависимости от расстояния до сопла. 1 – эксперимент, 2 – «параболизованная» система уравнений, 3 – полная система уравнений

Во третьем параграфе главы проводится численное исследование затопленных закрученных струйных течений на основе двух-жидкостной модели турбулентности.

Известно, что закрученная струя характеризуется такими параметрами, как число Рейнольдса  $Re$  и степень закрутки  $S$ :

$$Re = \frac{DU_0}{\nu} = 56000, \quad S = \left( \int_0^R V_{0\phi} V_{0z} r^2 dr \right) / \left( R \int_0^R V_{0z}^2 r dr \right) = 0.36.$$

Для исследования осесимметричной закрученной струи запишем систему уравнений (18) в цилиндрических координатах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial r V_r}{r \partial r} = 0, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial V_z}{r \partial r} \right) - \frac{\partial r \mathcal{G}_r \mathcal{G}_z}{r \partial r}, \\ \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_\phi^2}{r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial V_r}{r \partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right) - \frac{\partial r \mathcal{G}_r \mathcal{G}_r}{r \partial r}, \\ \frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_\phi}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_r V_\phi}{r} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial V_\phi}{r \partial r} - \frac{V_\phi}{r^2} \right) - \frac{\partial r^2 \mathcal{G}_r \mathcal{G}_\phi}{r^2 \partial r}, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial r} = -(1 - C_s) \frac{\partial V_z}{\partial r} \mathcal{G}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{zr} \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial r} \right) - C_r \mathcal{G}_z, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} = -C_s \frac{\partial V_z}{\partial r} \mathcal{G}_z - \left( C_s \frac{\partial r V_\phi}{r \partial r} - \frac{2V_\phi}{r} \right) \mathcal{G}_\phi + \\ + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{rr} \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} \right) - 2v_{\phi\phi} \frac{\mathcal{G}_r}{r^2} - C_r \mathcal{G}_r, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_\phi}{\partial t} + V_z \frac{\partial \mathcal{G}_\phi}{\partial z} + V_r \frac{\partial \mathcal{G}_\phi}{r \partial r} = -(1 - C_s) \frac{\partial r V_\phi}{r \partial r} \mathcal{G}_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 v_{r\phi} \left( \frac{\partial \mathcal{G}_\phi}{\partial r} - \frac{\mathcal{G}_\phi}{r} \right) \right] - C_r \mathcal{G}_\phi. \end{array} \right. \quad (18)$$

Экспериментальные значения параметров потока на срезе сопла аппроксимировались следующими выражениями

$$V_{0\phi} = 2Sr^2(4 + n_w)(1 - r)^{n_w}, \quad V_{0z} = (1 + x_k)(1 - r)^{x_k}, \quad n_w = 4, \quad x_k = 0.06. \quad (19)$$

Относительные скорости на выходе из сопла были равны

$$\mathcal{G}_z = 0.025, \quad \mathcal{G}_r = 0.1r^{0.75}, \quad \mathcal{G}_\phi = 0.1r^{0.75}.$$

Для расчетов использовалась сетка размером 250x250 с шагами  $\Delta z = 0.2$ ,  $\Delta r = 0.02$ . Для обеспечения устойчивости при решении уравнений системы (17) в конвективных членах использована явная разностная схема против потока Леонардо QUICK. Для реализации полунявной схемы использовался метод прогонки. Связь между давлением и скоростями проводилась процедурой SIMPLE, где был использован итерационный метод нижней релаксации.

На рис. 7 показаны численные результаты для безразмерной осевой продольной скорости в зависимости от расстояния до среза сопла. Здесь также представлены опытные данные из ERCOFTAC для профилей безразмерной осевой скорости при закрутке  $S = 0.36$ .

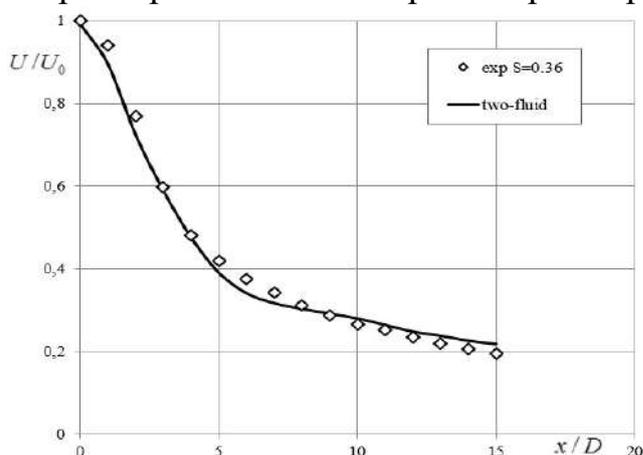


Рис. 7. Безразмерная осевая продольная скорость в закрученной турбулентной струе в зависимости от расстояния до среза сопла

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе результатов, полученных по диссертационной работе «Численное исследование задач аэродинамики на основе новых моделей турбулентности», представлены следующие выводы:

1. Проведен сравнительный анализ существующих алгебраических моделей турбулентности и моделей турбулентности с одним и двумя уравнениями переноса субстанций, используемых при решении задач аэродинамики. В качестве более подходящих моделей для круга решаемых в работе задач выбраны  $k - \varepsilon$  модель и ее модификация Ченом, модель Секундова, модель Спаларта-Аллмараса и двух-жидкостный подход описания турбулентных течений газов.

2. Применительно к задаче обтекания плоской пластины однородным турбулентным изотермическим потоком апробированы классическая  $k - \varepsilon$  модель, модель Чена и двух-жидкостный подход к турбулентности. Для каждого из вариантов уравнения переноса субстанций представлены в переменных Мизеса, которые решены методом конечных разностей.

Доказано, что последние две модели дают приемлемые результаты по профилям скорости и коэффициента сопротивления трения.

3. При моделировании обтекания нагретой пластины однородным турбулентным потоком газа с привлечением модели Спаларта-Аллмареса и двух-жидкостного подхода, уравнения которых представлены в переменных Мизеса, хорошее согласие результатов двух-жидкостного подхода получены по профилям температуры и по числу Прандтля – критерию теплоотдачи тела потоку с экспериментальными данными.

4. С применением уравнений двух-жидкостного подхода сформулирована математическая модель естественной конвекции у нагретой вертикальной пластины. Доказано, что введенная дополнительная термическая сила позволяет получить сплошную кривую критерия Нуссельта от числа Рэлея при переходе от ламинарного режима течения к турбулентному.

5. Численные результаты уравнений осесимметричного прямого струйного течения в переменных Мизеса показали, что при использовании модификации Чена, модели  $v_t-9$  Секундова и двух-жидкостного подхода для описания турбулентности последние две модели позволяют получить более адекватные результаты по осевому распределению и профилям продольной скорости, а также по профилю турбулентного касательного напряжения.

6. Для решения задачи о свободной турбулентной осесимметричной струе в рамках двух-жидкостной модели и ее “параболизованного” варианта разработан метод контрольного объема, где для удовлетворения взаимосвязи между давлением и компонентами вектора скорости реализованы положения SIMPLE и верхней релаксации. На основе результатов сравнения с экспериментальными данными сделан вывод, что для более точного решения задачи рекомендуется использовать двух-жидкостный подход, а для инженерных расчетов – упрощенный вариант данного подхода.

7. Для изучения закрученной турбулентной струи предложены математическая модель на основе уравнений двух-жидкостной модели и неявная численная модель на основе схемы против потока Леонардо QUICK, где используются положения процедуры SIMPLE и нижней релаксации. При умеренной крутке получены хорошо согласованные с экспериментальными данными результаты.

**SCIENTIFIC COUNCIL DSc. 02/30.12.2019.T/FM.61.01 AWARDING THE  
SCIENTIFIC DEGREE AT THE INSTITUTE OF MECHANICS AND  
SEISMIC STABILITY OF STRUCTURES**

---

**INSTITUTE OF MECHANICS AND SEISMIC STABILITY OF  
STRUCTURES**

**Navruzov Dilshod Primkulovich**

**NUMERICAL STUDY OF AERODYNAMICS PROBLEMS BASED ON  
NEW TURBULENCE MODELS**

**01.02.05 – Mechanics of liquid and gas**

**DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)  
ON PHYSIC AND MATHEMATICS SCIENCES**

**Tashkent – 2022**

**The theme of doctor of philosophy (PhD) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2020.2.PhD/T1047**

The dissertation has been prepared in the Institute of mechanics and seismic stability of structures.

The abstract of the dissertation in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council ([www.instmech.uz](http://www.instmech.uz)) and on the information- educational portal "ZiyoNet" at the address ([www.ziyo.net](http://www.ziyo.net).)

**Scientific adviser:** **Malikov Zafar Mamatkulovich**  
Doctor of Technical Sciences, senior researcher

**Official opponents :** **Dalabaev Umuridin**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor

**Zakirov Askar Xalilovich**  
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor

**Leading organization:** **Research Institute for the Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence**

Defense will take place « » 2022 at 14<sup>00</sup> the meeting of the Scientific Council DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 at the Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures (Address 100125, Tashkent, Durman yuli street, 33, Conference hall – 1. Tel: (99871) 262-71-52; fax: (99871) 262-71-32, e-mail: [instmech@academy.uz](mailto:instmech@academy.uz)).

Dissertation is possible to review in Information-resource center of the Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures (registration number №. 10 ). (Address: 1000125, Tashkent, st. Durmon Yuli, 33. Tel. (99871) 262-71-52).

Abstract of the dissertation sent out on “ ” 2022y.  
(mailing report №. 1 on “ ” 2022 y.)

**M.M.Mirsaidov**  
Chairman of the Scientific Council  
for awarding scientific degrees, doctor  
of technic sciences, professor,  
academician

**M.K.Usarov**  
Scientific secretary of Scientific Council  
for awarding scientific degrees, doctor of  
technic sciences, professor

**I.K.Khujaev**  
Deputy chairman of the council seminar  
at the Scientific Council for the awarding  
degrees, doctor of technic sciences,  
professor

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of the research** it is a test of the adequacy of modern turbulence models used in the study of aerodynamics problems

**The object of the research work** turbulent currents were used, which are widely used in industry.

**The scientific novelty of the work** is as follows:

the problems of natural convection near a vertical heated wall and an axisymmetric free one are investigated on the basis of a two-fluid turbulence model and based on the results of comparison with experimental data from other authors, it is proved that the advantage of this turbulence model in comparison with other models;

numerical methods for solving the equations of axisymmetric and swirling turbulent jets based on a new two-fluid turbulence model have been developed using the SIMPLE algorithm;

using the method of Mises variables, the equations of turbulent flows for compressible and incompressible media are refined and numerical solutions based on the method of establishing;

based on comparison with experimental results, it is shown that the two-fluid turbulence model is a universal model for isotropic and anisotropic turbulent flows.

**Implementation of research results.** Based on numerical research of aerodynamics issues using new models of turbulence

The method of applying the Mises variables and the new turbulence model "Yofa-Ftex-2018-13" was used in the process of completing the fundamental Project (V.I. Institute of mathematics named after Romanovsky No. 2/219 dated June 15, 2022). As a result of the application of the Mises variables and the new turbulence model, in the process of solving complex problems, singular equations are formed on the boundary conditions, which made it possible to apply a fourth-order precision method for solving them;

The results were used as a method of calculation and scientific recommendation in the channels owned by the Sukh-Aktepa irrigation system of the Republic of Uzbekistan. (Ministry of water resources of the Republic of Uzbekistan dated September 30, 2022 № White 7263068). Methods for calculating anisotropic turbulence and urinal voltage in a solid wall justify the parameters of irrigation channels operating in variable mode. According to the recommendations given as a result, it is estimated that 75 million will be used in water resources compared to traditional irrigation methods used in agriculture. it made it possible to make an economy up to som.

**Volume and structure of dissertation.** The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and appendices. The volume of the dissertation is 102 pages.

**ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ**  
**СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**  
**LIST OF PUBLISHED WORKS**  
**I бўлим (I часть; I part)**

1. Kholboev V.M., Navruzov D.P., Asrakulova D.S., Engalicheva N.R., Turemuratova A.A. Comparison of results for the calculation of eddy flows after a sudden expansion of a pipe with different diameters // Int.J.of Applied Mechanics and Injeniring. – 2022, vol 27, No2, P 115-123. DOI:102478/ijame-2022-0023. (Scopus, IF=1.3).

2. Маликов З.М., Наврузов Д.П. Сравнение турбулентных моделей для расчета осесимметричной затопленной струи // Проблемы механики. Ташкент. – 2021. - №1. – С. 57-63. (01.00.00; №4).

3. Маликов З.М., Наврузов Д.П. Исследование модифицированной модели турбулентности для расчета обтекания плоской пластины // Проблемы механики. Ташкент. – 2020. - №3. – С. 35-40. (01.00.00; №4).

4. Маликов З.М., Мадалиев М.Э., Наврузов Д.П. Исследование влияния расчетной сетки для турбулентного потока // Проблемы механики. Ташкент. – 2021. - №4. – С. 41-46. (01.00.00; №4).

5. Мадалиев М.Э., Наврузов Д.П. Исследование модель турбулентности vt-92 для расчета осесимметричной дозвуковой струи // Научный вестник Бухарского государственного университета. – 2020. - № 2. – С. 82-91. (01.00.00; №3).

6. Наврузов Д.П. Бюргерс тенгламасини ечишда ВВЦП ва Мак-Кормак сонли усулларининг кўлланилиши // Наманган давлат университети Илмий ахборотномаси. – 2021. - № 3. – Б. 30-36. (01.00.00; №14).

7. Наврузов Д.П. Численный анализ вихревых течений после внезапного расширения трубы с различными диаметрами // Проблемы механики. Ташкент. – 2022. - №1. – С. 78-84. (01.00.00; №4).

**II бўлим (II часть; II part)**

8. Malikov Z.M., Navruzov D.P., Jumayev X.J. Models results Comparison of different approaches to turbulence for flow past a heated flat plate // E3S Web of Conferences 264, 01008 (2021) <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126401008>. (Scopus, №3).

9. Malikov Z.M., Navruzov D.P., Adilov K., Jurayev S,R. Numerical study of a circular jet based on a modern turbulence model // «Computer Applications for Management and Sustainable Development of Production and Industru» (CMSD2021). doi:10.1117/12.2631607. (Scopus, №3).

10. Malikov Z.M., Madaliyev M.E., Navruzov D.P., Adilov K. Numerical study of an axisymmetric jet based on a new turbulence model // International Scientific Conference on Actual Problems of Applied Mechanics, AIP Conference Proceedings. DOI.org/10.1063/5.0118473. (Scopus, №3).

11. Navruzov D.P. Application of finite difference methods for solving the two-dimensional equation of heat conductivity // International multidisciplinary conference “Scientific research results in pandemic conditions” Shavnee, USA. 2020 June. – P. 98-100.

12. Наврузов Д.П. Исследование моделей для расчета одномерного волнового уравнения первого порядка // Актуальные научные исследования в современном мире” ISCIENCE.IN.UE. февраль 2020. – С.124-128.

13. Маликов З.М. Наврузов Д.П. Численное исследование осесимметричной струи на основе новых моделей турбулентности // Современное программирование. Материалы 4-международной научно-практической конференции, 08.12.2021 Нижневартовск. – С.153-159.

14. Наврузов Д.П. Применение методов конечных разностей для уравнения диффузии // Международная научно-практическая онлайн конференция “Инновационные идеи, разработки в практику”, 27-28 мая 2020. Андижан. – С. 250-253.

15. Наврузов Д.П. Численное исследование моделей для расчета одномерного волнового уравнения первого порядка с использованием двухшаговых конечно-разностных методов // Международная научно-практическая онлайн конференция “Инновационные идеи, разработки в практику”, 27-28 мая 2020. Андижан. – С. 253-255.

16. Наврузов Д.П. Численное исследование моделей для расчета одномерного волнового уравнения первого порядка с использованием трехшаговых конечно-разностных методов // Международная научно-практическая конференция “Современные проблемы инновационного развития науки, образования и производства”. Андижан-2020. – С. 459-453.

17. Маликов З.М., Наврузов Д.П., Мирзоев А.А., Каримов Р.С. Численное исследование осесимметричной закрученной струи на основе двух-жидкостной модели турбулентности // Международная научно-практическая конференция “Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий”. Бухара, 15.04. 2021. – С. 161-163.

18. Маликов З.М., Мадалиев М.Э., Наврузов Д.П. Сравнение турбулентных моделей для расчета распространения температуры в несжимаемой затопленной турбулентной струе // Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа, Бухара, 4-5 ноября 2021. – С. 330-332.

19. Маликов З.М., Наврузов Д.П. Расчет обтекания нагретой плоской пластины на несжимаемом турбулентном потоке // Агентство по интеллектуальной собственности РУз. Свидетельство № DGU 10483 10.02.2021.

20. Маликов З.М., Наврузов Д.П. Численное исследование закрученных струйных течений на основе двух-жидкостной модели турбулентности // Агентство по интеллектуальной собственности РУз. Свидетельство № DGU 15302 04.03.2022.

21. Маликов З.М., Наврузов Д.П. Моделирование турбулентной естественной конвекции на основе двух-жидкостного подхода // Агентство по интеллектуальной собственности РУз. Свидетельство № DGU 14975 16.02.2022.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари  
«Композицион материаллар» илмий журнали  
тахририятида таҳрирдан ўтказилди

Босишга рухсат этилди: 18.11.2022 йил.  
Бичими 60x841/16, «Times New Roman»  
гарнитурда рақамли босма усулидан босилди.  
Шартли босма табоғи: 2,75. Адади 100. Буюртма № 39.  
Тел (99) 832-99-79; (97) 815-44-54.  
Гувоҳнома reestr № 10-3279  
«IMPRESS MEDIA» МЧЖ босмаҳонасида чоп этилган.  
100031, Тошкент ш., Яккасарой тумани, Қушбеги кўчаси, 6-уй.