САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.07.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ШАРОФ РАШИДОВ НОМИДАГИ САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ИСМОИЛОВ АЛИШЕР СИДИКОВИЧ

ТЕКИСЛИКДА КУЧСИЗ НОКОРРЕКТ ИНТЕГРАЛ ГЕОМЕТРИЯ МАСАЛАЛАРИНИНГ ЯНГИ СИНФЛАРИ

01.01.02 - Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд - 2022

УДК 517.946

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии(PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.07.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ШАРОФ РАШИДОВ НОМИДАГИ САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ИСМОИЛОВ АЛИШЕР СИДИКОВИЧ

ТЕКИСЛИКДА КУЧСИЗ НОКОРРЕКТ ИНТЕГРАЛ ГЕОМЕТРИЯ МАСАЛАЛАРИНИНГ ЯНГИ СИНФЛАРИ

01.01.02 - Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд - 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертация мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.4.PhD/FM778 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва "Ziyonet" Ахборот-таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Бегматов Акрам Хасанович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Хасанов Акназар Бекдурдиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Утеулиев Ниетбай Утеулиевич физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти Бухоро бўлинмаси**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.07.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2023 йил «12» 01 соат 10⁰⁰ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (149 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.)

Диссертация автореферати 2022 йил «28» 12 куни тарқатилди.
(2022 йил «28» 12 даги 1 рақамли реестр баённомаси).

А.С.Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

А.М.Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

А.Б.Хасанов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурийлиги. Жаҳонда олиб борилаётган кўплаб илмий ва амалий тадқиқотларда объектларни локализация қилиш, уларнинг геометрик характеристикаларини ўрганиш учун тасвир кўринишида тиклаш масалаларига алоҳида аҳамият берилмоқда. Ҳозирги кунда функцияларни берилган интеграл характеристикалари асосида тиклаш ва уларнинг математик моделларини тузиш математика, ҳисоблаш математикаси, математик моделлаштириш ва объектга йўналтирилган дастурлаш каби соҳалардаги тадқиқотларнинг объекти сифатида муҳим ўрин тутмоқда. Бу борада интеграл геометрия масалаларидан фойдаланиб, объектларнинг ички структураларини қайта тиклаш, унга зиён етказмаган ҳолда объект ички структураси ҳақидаги яширин маълумотларни олиш, сейсмик қидирув масалаларининг математик асосини ўрганиш, геофизик ва аэрокосмик кузатувлар маълумотларини таҳлил қилиш, тиббиётда эса томографик берилганларга асосланиб, бемор органларининг ички структураларини махсус эгри чизиқлар оиласи бўйича тиклаш масалаларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилмоқда.

Жаҳонда интеграл геометрия масалалари орқали объектларнинг ички структураларини тасвир кўринишида тиклашга қаратилган илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда. Ушбу йўналишда Фурье анализ усуларига асосланиб олинган аналитик формулалар асосида қайта тиклаш жараёнини амалга оширишга оид тадқиқотлар устивор ҳисобланмоқда. Шу билан бирга интеграл берилганларга асосланиб махсус эгри чизиқлар оиласида турғунлиги юқори бўлган объектларнинг ички структураларини тасвир кўринишида қайта тиклаш алгоритмларини қуриш, кенг доирадаги фойдаланувчиларга мўлжалланган қулай интерфейсга эга дастурлар мажмуасини яратиш, сейсмик қидирув ишларининг тескари масалалари ечимининг мавжудлиги, ягоналиги ва турғунлиги аниқлаш, геологик муҳитдаги реал жараёнларнинг янги моделларини ишлаб чиқишга оид тадқиқотларни ривожлантириш долзарб вазифалардан ҳисобланмоқда.

Республикамизда тиббиёт ва геофизика соҳаларида қўлланиладиган интеграл геометрия масалаларини тадқиқ қилиш, объектларнинг ички структураларини интеграл характеристикалари орқали қайта тиклаш бўйича кенг кўламда чора-тадбирлар амалга оширилмоқда. “Алгебра ва унинг татбиқлари, дифференциал тенгламалар ва унинг татбиқлари, чизиқсиз тизимлар, динамик тизимлар ва уларнинг татбиқларини математик моделлаштириш, стохастик таҳлил, тиббий-биологик информатика, ҳисоблаш математикаси[1]” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланган.

[1]Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги қарори.

Ушбу вазифаларни амалга оширишда интеграл геометрия масалаларини ривожлантириш муҳим илмий аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2019 йил 9 июлдаги “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПҚ-4387-сонли ва 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708-сонли қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Сўнги йилларда инсониятнинг кундалик эҳтиёжида фойдаланилаётган томография масалаларининг асосида математика фани ётади. Кўпчилик ҳолларда томография масалаларини ечиш интеграл геометрия масалаларига асосланади. Функцияларни берилган интеграл характеристикалари бўйича тиклаш бу интеграл геометрия масалаларининг бир бўлими бўлиб ҳисобланади. Интеграл геометрия масалалари дастлаб ўтган асрда ўрганила бошланди. Агар функциянинг интеграли маълум бўлса, мумкин бўлган барча гипертекисликлар ҳамда сферик ўрта қийматлар бўйича функцияни аниқлаш масаласи, яъни тескари Радон алмаштириши масаласи Радон ва бошқа олимлар томонидан кенг ўрганила бошлаган. Кейинчалик бу масалаларнинг турли кўринишлари Ф.Йон, А.А.Хачатуров, П.О.Костелян, Ю.Г.Решетня, И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин ва бир қатор олимлар томонидан ўрганилди. Интеграл геометрия масалалари орасида кенг ўрганилган масалалардан бири иккинчи тартибли сиртлар оиласи бўйича функцияни тиклаш масаласи ҳисобланади. Бу соҳа бўйича Ф.Йон, Р.Курант ва шу билан бирга И.М.Гельфанд, М.М.Лаврентьев, М.В.Клибанов, Г.И.Плаксин, В.Г.Романов, В.И.Семянист, С.В.Успенсклар томонидан олинган муҳим натижаларни алоҳида таъкидлаб ўтиш лозим. М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов ва бошқа муаллифларнинг илмий натижаларида ҳар хил турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тескари масалаларнинг кенг синфлари интеграл геометрия масалаларини ечишга келтирилиши кўрсатилган. Бирлик доирада берилган узлуксиз функцияни икки параметрли эгри чизиқлар оиласи бўйича интеграл орқали тиклаш масаласи В.Г. Романов томонидан ўрганилган.

F. Natterer, E.T. Quinto, J. Radon, P. Funk, M.L. Agranovsky, A.K.Louis, Rim Gouia-Zarrad, Gaik Ambartsoumian ва бошқа бир қатор олимлар фотоакустик, термоакустик, сейсмик, ультратовушли томографияда, нуклидли диагностика ва тиббиётнинг бошқа соҳалари вужудга келадиган масалаларни математик моделлаштиришда интеграл геометрия масалаларининг аналитик ечимларидан фойдаланган.

Ўзбекистонда интеграл геометрия масалалари ва унинг тадбиқи бўлган объектларнинг ички структураларини қайта тиклаш масалалари бўйича А.Х.Бегматов, З.Х.Очилов, К.С.Фаёзов, Н.У.Утеулиев, Г.М.Джайков, А.К.Сеидуллаев ва бошқалар шуғулланган. Синиқ чизиқлар ва сиртлар оиласи бўйича махсусликка эга бўлган вазн функцияли интеграл геометрия масалалари учун ягоналик теоремаси, турғунлик баҳоси ва тескариланиш формуласи А.Х.Бегматов, З.Х.Очилов, Г.М.Джайков ва А.К.Сеидуллаевлар томонидан олинган. А.Х.Бегматов томонидан учларида махсусликка эга бўлган сиртлар ва синиқ чизиқлар оиласи бўйича кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари учун ягоналик теоремаси исботланган, турғунлик баҳоси олинган ва тескариланиш формуласи топилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилаётган олий таълим ёки илмий-тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университети илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ №SMat-01 рақамли “Дифференциал операторлар спектрал назариясининг ночизиқли эволюцион тенгламаларга тадбиқлари ва замонавий математик физиканинг нокоррект масалалари” номли илмий-тадқиқот ишлари режаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади текисликда параболалар оиласи бўйича кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги теоремаларини исботлаш, турғунлик баҳосини олиш ҳамда тескариланиш формуласини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

текисликда параболалар оиласи бўйича вазн функцияли кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари учун ечимнинг ягоналиги ва мавжудлигини исботлаш;

текисликда параболалар оиласи бўйича вазн функцияли кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари учун турғунлик баҳосини Соболев фазосида олиш;

текисликда параболалар оиласи бўйича вазн функцияли кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари учун тескариланиш формуласи топиш;

текисликда параболалар оиласи бўйича вазн функцияли кучсиз нокоррект қўзғалишли интеграл геометрия масалалари ечиминнинг ягоналигини исботлаш ва қўзғалишли интеграл геометрия масалалари учун Соболев фазосида ечимнинг турғунлик баҳоси топиш.

Тадқиқотнинг объекти текисликда параболалар оиласи бўйича вазн функцияли кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалаларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети текисликда параболалар оиласи бўйича кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари учун ечимнинг ягоналиги, мавжудлиги теоремаларини исботлаш, турғунлик баҳосини олиш ва тескариланиш формуласини келтириб чиқаришдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида математик анализ, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, математик физика, Вольтерра интеграл тенгламаларини ечиш усулларидан, тескари масалалар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқот илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

текисликда параболалар оиласи бўйича вазн функцияли кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари учун ечимнинг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган;

текисликда параболалар оиласи бўйича вазн функцияли кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари учун турғунлик баҳоси Соболев фазосида олинган;

текисликда параболалар оиласи бўйича вазн функцияли кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари учун тескариланиш формуласи топилган;

текисликда параболалар оиласи бўйича вазн функцияли кучсиз нокоррект қўзғалишли интеграл геометрия масалалари ечимнинг ягоналиги исботланган ва қўзғалишли интеграл геометрия масалалари учун Соболев фазосида ечимнинг турғунлик баҳоси топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

текисликда параболалар оиласи бўйича кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари ечимининг ягоналиги, мавжудлиги, турғунлик баҳоси ва тескариланиш формуласи орқали ер ости қатламларида суспензиялар сизиши жараёнининг математик моделлари тузилган;

параболалар оиласи бўйича қўзғалишли интеграл геометрия масалалари ечимининг ягоналиги ва турғунлик баҳосидан чегаравий шартлар бўйича объектнинг ички тузилишини тиклаш, яъни фойдали қазилмаларни излаш масалаларини ечишнинг алгоритми ва модели тузилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги дифференциал тенгламалар, математик анализ, тескари масалалар назарияси усуллари қўлланилганлиги, математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги, шунингдек, теоремаларнинг тўлиқ исботланганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти олинган илмий натижаларнинг интеграл геометрия масалалари назариясини янада ривожлантириш билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти тиббиёт ва геофизика соҳаларида юзага келадиган масалаларни берилган интеграл характеристикалари бўйича қайта тиклаш масалаларини сонли ечиш учун хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Текисликда параболалар оиласи бўйича вазн функцияли кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалаларига оид олинган натижалар асосида:

текисликда параболалар оиласи бўйича кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари ечимининг ягоналиги, мавжудлиги, турғунлик баҳоси ва тескариланиш формуласидан ОТ-Ф4-64 рақамли (2017-2020йй.) “Биржинслимас ғовак муҳитларда суюқлик сизиши ва моддалар кўчирилиши гидродинамик моделларини тузиш ва сонли тадқиқ этиш” мавзусидаги фундаментал лойиҳада биржинслимас ғовак муҳитларда суюқлик сизиши ва моддалар кўчирилиши гидродинамик моделларини тузишда фойдаланилган. (Самарқанд давлат университетининг 2022 йил 16 февралдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланиши ер ости қатламларида суспензиялар сизиши жараёнининг математик моделларини тузишда кольматация ва суффозия ходисаларини характерловчи параметрларнинг қийматини топиш имконини берган;

параболалар оиласи бўйича кучсиз нокоррект қўзғалишли интеграл геометрия масаласи ечимининг ягоналиги ва турғунлик баҳосидан №-20-31-90099 рақамли “Ўз-ўзига қўшма операторларга яқин бўлмаган дифференциал операторларнинг спектрал хоссалари” номли хорижий лойиҳада чегаравий шартлар бўйича объектнинг ички тузилишини тиклаш билан боғлиқ бир қатор масалаларни ўрганиш имконини берди (Башкирия давлат университети, 2022 йил 28 январдаги 65/10/1-67-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланиши геофизика (фойдали қазилмаларни излаш) масалалари ечимининг алгоритми ва моделини қуриш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 6 та халқаро ва 4 та республика илмий - амалий анжуманларида, жами 10 та илмий - амалий анжуманларда муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича илмий журналлар, Республика ва хорижий конференция тўпламларида жами 15 та илмий иш чоп этилган бўлиб, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестацияси комиссиясининг фалсафа доктори диссертацияларини ҳимоя қилишда тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатида 5 та мақола нашр эттирилган. Ушбу мақолаларнинг 1 таси хорижий ва 4 таси республика илмий журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 102 бетни ташкил қилади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланади ҳамда тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва техника тараққиётининг устувор йўналишларига мувофиқлиги аниқланган. Диссертация мавзуси ва муаммони ўрганиш даражаси бўйича чет эл ва МДҲ давлатларида қилинган илмий тадқиқотлари бўйича умумий маълумотлар берилган. Тадқиқотнинг мақсад ва вазифалар шакллантирилиб, унинг объекти ва предмети аниқланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган. Тадқиқот натижаларини амалга ошириш, нашр этилган ишлар ва диссертациянинг тузилиши тўғрисида маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби **«Интеграл геометрия масалалари»** деб номланади. Ушбу бобда интеграл геометрия масалаларининг диссертация мавзусига бевосита боғлиқ бўлган муҳим натижалари келтирилган.

Биринчи параграф интеграл геометрия масалаларининг тарихий шарҳига бағишланган. Нокоррект масала, кучсиз ва кучли нокоррект масалаларнинг таърифлари ҳамда интеграл геометрия масаласининг қуйидаги таърифи келтирилган:

$x \in R^n,\ x = (x_1,...,x_n)$, $y \in R^m,\ y = (y_1,...,y_m)$ ва $S(y)$ – $x \in R^n$ да m ўлчамли y параметрга боғлиқ бўлган кўпхилликлар оиласи бўлсин. Шунингдек, $u(x)$- функция қандайдир $D \subset R^n$ соҳада аниқланган, $\rho(x,y)$ – x, y ўзгарувчили функция ва $\omega(y)$ – $S(y)$ кўпхилликдаги ўлчов бўлсин.

Қуйидаги интегрални қараймиз:

$$\int\limits_{S(y)} \rho(x,y)u(x)d\omega = f(y). \qquad (1)$$

Интеграл геометрия (1) кўринишидаги тенгламаларнинг элементлари орасидаги муносабатларни ўрганадиган математиканинг бир бўлими ҳисобланади. (1) тенгламада $S(y)$, $\rho(x,y)$, $f(y)$ берилган деб фараз қиламиз ва (1) тенгламани $u(x)$ функцияга нисбатан чизиқли оператор тенглама сифатида қараймиз. Интеграл геометрия масаласида $f(y)$ функция орқали $u(x)$ функцияни тиклаш талаб этилади.

Иккинчи параграф интеграл геометрия масалаларига бағишланган бўлиб, вазн функциялар ва кўпхилликлар оилаларининг муҳим хоссалари ўрганилган.

Учинчи параграфда махсус функциялар синфлари учун интеграл геометрия масаласи бўйича олинган натижалар келтирилган. Ушбу бўлимда M чизиқли тўпламдан олинган ихтиёрий $u(x)$ функциялар учун махсус функциялар синфидаги интеграл геометрия масаласи ечимининг ягоналиги теоремаси ва турғунлик баҳоси келтирилган.

Диссертациянинг **«Параболалар оиласи бўйича берилган интеграл орқали функцияни тиклаш масаласи»** деб номланган иккинчи бобида текисликда вазн функцияси $g(x_1,\xi_1) = |x_1 - \xi_1|$ кўринишда бўлган параболалар оиласи бўйича кучсиз нокоррект интеграл геометрия масаласи ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги теоремалари исботланади, турғунлик баҳоси олинади ҳамда тескариланиш формуласи топилади. Бундан ташқари, қўзғалишли интеграл геометрия масаласи учун ечимнинг ягоналиги исботланади ва турғунлик баҳосини олишда ечим учун шундай функционал фазолар жуфтлиги топиладики, бу фазолар жуфтлиги учун тескариланиш оператори узлуксиз бўлиб, нормани аниқлашда чекли сондаги ҳосилалар қатнашади ва қўйилган масала кучсиз нокоррект интеграл геометрия масала эканлиги кўрсатилади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$x \in R^2, \ \xi \in R^2, \lambda \in R^1, \ \mu \in R^1,$$

$$R_+^2 = \{x = (x_1, x_2): x_2 \geq 0\},$$

$$\Omega = \{x \in R_+^2 : 0 < x_2 < l\},$$

бу ерда $0 < l < \infty$.

Ω йўлакда учи $(x_1, x_2) \in \Omega$ нуқтада бўлган бир қийматли параметрланувчи $P(x_1, x_2)$ эгри чизиқлар оиласи қуйидаги

$$P(x_1, x_2) = \{(\xi_1, \xi_2): x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2, \ 0 \leq \xi_2 \leq x_2\}$$

муносабат билан аниқланган бўлсин.

1-масала. Агар Ω йўлакдан олинган барча (x_1, x_2) лар учун $P(x_1, x_2)$ параболалар бўйича қуйидаги

$$\int_{x_1-\sqrt{x_2}}^{x_1+\sqrt{x_2}} g(x_1, \xi_1) u(\xi_1, \psi(x_1, x_2, \xi_1)) d\xi_1 = f(x_1, x_2), \tag{2}$$

интеграллар маълум бўлса, икки ўзгарувчили $u(x_1, x_2)$ функцияни топинг, бу ерда $g(x_1, \xi_1) = |x_1 - \xi_1|$.

u орқали саккизинчи тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва Ω йўлакда ташувчиси билан финит бўлган функциялар синфини белгилаймиз:

$$\text{supp } u \subset D = \{(x_1, x_2): -a < x_1 < a, \ 0 < x_2 < l\}, \ 0 < a < \infty, l < \infty.$$

(2) тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x_1, x_2)$ функция Ω йўлакда аниқланган. $u(x_1, x_2)$ функцияга қўйилган шартлардан $f(x_1, x_2)$ функция ҳам саккизинчи тартибгача хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз ва финит ҳисобланади.

Қуйидаги функцияларни киритамиз:

$$I(\lambda, \mu) = \int_0^{\infty} e^{i\mu\tau} \cos \lambda \sqrt{\tau} d\tau,$$

$$I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu(x_2 - \xi_2)} \frac{d\mu}{(1 + \mu^4) I(\lambda, \mu)},$$

$$I_2(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\lambda(x_1-\xi_1)}I_1(\lambda, x_2-\xi_2)}{(1+\lambda^4)}d\lambda.$$

Биринчи параграфда 1-масала ечимининг ягоналиги исботланди, турғунлик баҳоси олинди ва тескариланиш формуласи келтириб чиқарилди. Бу қуйидаги асосий теоремада келтирилган.

1-теорема. $f(x_1,x_2)$ функция барча $(x_1,x_2)\in\Omega$ лар учун аниқланган бўлсин. У ҳолда 1-масаланинг ечими саккиз марта узлуксиз дифференциалланувчи ва Ω йўлакда ташувчиси билан финит бўлган функциялар синфида ягона бўлиб, $f(x_1,x_2)$ функция орқали

$$u(x_1,x_2)=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I_2(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\left(1+\frac{\partial^4}{\partial\xi_1^4}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2^4}\right)f(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \qquad (3)$$

кўринишда ифодаланади ва қуйидаги

$$\| u(x_1,x_2)\|_{L_2(\Omega)}\le C_1 \| f(\xi_1,\xi_2)\|_{W_2^8(\Omega)}$$

тенгсизлик бажарилади. Бу ерда $0<C_1$ – ўзгармас сон.

Иккинчи параграфда 1-масала ечимининг мавжудлиги қаралади. Ушбу параграфда мавжудлик теоремаси ва унинг исботи келтирилади.

Қуйида 1-масала ечимининг мавжудлиги тўғрисидаги теоремани келтирамиз:

2-теорема. $f(x_1,x_2)$ функция барча $(x_1,x_2)\in\Omega$ ларда аниқланган бўлсин ва қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $f(x_1,x_2)$ функция x_1 ўзгарувчи бўйича финит;

2) $f(x_1,x_2)$ функция ҳар бир ўзгарувчиси бўйича тўртинчи тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин;

3) $f(x_1,x_2)$ функция йўлак чегарасида иккинчи ўзгарувчиси бўйича тўртинчи тартибгача узлуксиз ҳосилалари билан биргаликда нолга айлансин, яъни $x_2=0$ ва $x_2=l$ да.

У ҳолда 1-масаланинг (3) формула бўйича аниқланган ечими x_1 ўзгарувчи бўйича финит ва узлуксиз функциялар синфида мавжуд бўлади.

Учинчи параграфда қўзғалишли интеграл геометрия масаласи қаралган. $S(x_1,x_2)$ орқали $\overline{\Omega}$ йўлакнинг $x_2=0$ ўқ ва $P(x_1,x_2)$ чизиқ билан чегараланган қисмини белгилаймиз.

$\overline{\Omega}$ йўлакни қуйидагича киритамиз:

$$\bar{\Omega}=\left\{(x_1,x_2): x_1\in R\,, x_2\in[0,l]\right\}.$$

2-масала. Агар барча $(x_1,x_2)\in\bar{\Omega}$ лар учун $g(x_1,\xi_1)=|x_1-\xi_1|$ вазн функцияли $P(x_1,x_2)$ чизиқ ва $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ вазн функцияли $S(x_1,x_2)$ юза бўйича

$$\int_0^{x_2}\left[u(x_1+h,\xi_2)+u(x_1-h,\xi_2)\right]d\xi_2+$$

$$+\int_0^{x_2}\int_{x_1-h}^{x_1+h}k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)u(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2=F(x_1,x_2) \tag{4}$$

интеграллар маълум бўлса, $u(x_1,x_2)$ функцияни аниқланг. Бу ерда $h=\sqrt{x_2-\xi_2}$.

Бу ерда $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ – вазн функция бўлиб, саккизинчи тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, финит ва $x_2-\xi_2=(x_1-\xi_1)^2$, $\xi_2>0$, $x_2>0$ параболада ҳосилалари билан биргаликда нолга айланади. $F(x_1,x_2)$ функция бутун йўлакда аниқланган бўлсин.

2-масалага қўзғалишли интеграл геометрия масаласи дейилади. (4) тенгламанинг чап томонидаги биринчи қўшилувчи

$$\int_0^{x_2}\left[u(x_1+h,\xi_2)+u(x_1-h,\xi_2)\right]d\xi_2=f(x_1,x_2)$$

интеграл учлари (x_1,x_2) нуқтада бўлган ярим пароболалар оиласи бўйича изланаётган функциянинг интеграллари тўпламини ифодалайди.

Иккинчи қўшилувчи интеграл эса $P(x_1,x_2)$ парабола билан чегараланган йўлак қисмининг $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ вазн функцияли интегралини ифодалайди.

$u(x_1,x_2)$ ва $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ функцияларга қўйилган шартлардан $f(x_1,x_2)$ ва $F(x_1,x_2)$ функцияларнинг саккизинчи тартибгача ҳосилалари билан биргаликда узлуксизлиги келиб чиқади.

2-масала ечимининг ягоналиги ва турғунлик баҳоси қуйидаги теореманинг исботида келтирилган.

3-теорема. $F(x_1,x_2)$ функция барча $(x_1,x_2)\in\bar{\Omega}$ да аниқланган бўлсин. $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ функция саккизинчи тартибгача ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз, финит ва $P(x_1,x_2)$ параболада ўзининг ҳосилалари билан биргаликда нолга айлансин.

У ҳода $g(x_1,\xi_1)=|x_1-\xi_1|$ вазн функцияли 2-масаланинг ечими $\bar{\Omega}$ йўлакда ташувчиси билан финит бўлган саккиз марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфида ягона ва

$$\|u(x_1,x_2)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \le C_2 \|F(x_1,x_2)\|_{W_2^8(\bar{\Omega})}$$

баҳо ўринли бўлади, бу ерда $0<C_2-$ ўзгармас сон.

Диссертациянинг **«Текисликда кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалалари»** деб номланган учинчи бобида текисликда вазн функцияси $g(x_1,\xi_1)=x_1-\xi_1$ кўринишда бўлган параболалар оиласи бўйича кучсиз нокоррект интеграл геометрия масаласи ечимининг ягоналиги теоремаси исботланди ва тескариланиш формуласи топилди. Чекли силлиқ фазоларда қўйилган масала ечимининг турғунлик баҳоси олинди ҳамда қўйилган масала кучсиз нокоррект эканлиги кўрсатилди. Ечимнинг ягоналиги ва мавжудлиги ҳақидаги теоремаларни исботлашда тўғри ва тескари Фурье алмаштиришларидан фойдаланилди. Йўлакда ташувчиси билан финит бўлган силлиқ функциялар синфида қўзғалишли интеграл геометрия масаласи ечимининг ягоналиги теоремаси исботланди ва Соболев фазосида турғунлик баҳоси олинди.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$x\in R^2,\ \ \xi\in R^2,\ \lambda\in R^1,\ \ \mu\in R^1,$$

$$R_+^2=\left\{x=(x_1,x_2):\ x_2\ge 0\right\},$$

$$\Omega=\left\{x\in R_+^2:\ 0<x_2<l\right\},$$

бу ерда $0<l<\infty$.

Ω йўлакда учи $(x_1,x_2)\in\Omega$ нуқтада бўлган бир қийматли параметрланувчи $P(x_1,x_2)$ эгри чизиқлар оиласи

$$P(x_1,\,x_2)=\{(\xi_1,\,\xi_2):x_2-\xi_2=(x_1-\xi_1)^2,\ \ 0\le\xi_2\le x_2\}$$

муносабат билан аниқланган бўлсин.

3-масала. Агар Ω йўлакдан олинган барча (x_1,x_2) лар учун $P(x_1,x_2)$ параболалар бўйича қуйидаги

$$\int_{x_1-\sqrt{x_2}}^{x_1+\sqrt{x_2}} g(x_1,\xi_1)u(\xi_1,x_2-(x_1-\xi_1)^2)d\xi_1=f(x_1,x_2) \tag{5}$$

интеграллар маълум бўлса, икки ўзгарувчили $u(x_1,x_2)$ функцияни топинг. Бу ерда $g(x_1,\xi_1)=x_1-\xi_1$.

u орқали саккизинчи тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилалар эга ва Ω йўлакда ташувчиси билан финит бўлган функциялар синфини белгилаймиз, яъни

$$\operatorname{supp} u \subset D = \{(x_1, x_2): -a < x_1 < a;\ 0 < x_2 < l\} \quad 0 < a < \infty,\ l < \infty.$$

(5) тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x_1, x_2)$ функция Ω йўлакда аниқланган. $u(x_1, x_2)$ функцияга қўйилган шартлардан $f(x_1, x_2)$ функция ҳам саккизинчи тартибгача хусусий ҳосилалар билан биргаликда узлуксиз ва финит ҳисобланади.

Қуйидаги функцияларни киритамиз:

$$I(\lambda, \mu) = \int_0^{\infty} e^{i\mu\tau} \sin \lambda\sqrt{\tau}\, d\tau,$$

$$I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu(x_2-\xi_2)} \frac{\lambda\, d\mu}{\left(1+\mu^4\right) I(\lambda, \mu)},$$

$$I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda(x_1-\xi_1)} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{1+\lambda^4} d\lambda.$$

Биринчи параграфда 3-масала ечимининг ягоналиги исботланди, турғунлик баҳоси олинди ва тескариланиш формуласи келтириб чиқарилди. Бу қуйидаги асосий теоремаси келтирилган.

4-теорема. $f(x_1, x_2)$ функция барча $(x_1, x_2) \in \Omega$ лар учун аниқланган бўлсин. У ҳолда 3-масаланинг ечими саккиз марта узлуксиз дифференциалланувчи ва Ω йўлакда ташувчиси билан финит бўлган функциялар синфида ягона бўлиб, $f(x_1, x_2)$ функция орқали

$$u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(\xi_3 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \left(1 + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^{\,4}}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^{\,4}}\right) f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 . \tag{6}$$

кўринишда аниқланади ва қуйидаги

$$\| u(x_1, x_2) \|_{W_2^1(\Omega)} \le C_3 \| f(\xi_1, \xi_2) \|_{W_2^8(\Omega)}$$

тенгсизлик бажарилади. Бу ерда $0 < C_3 -$ ўзгармас сон.

Иккинчи параграфда 3-масала ечимининг мавжудлиги тўғрисидаги теорема келтирилган.

5-теорема. (5) тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x_1,x_2)$ функция барча қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $f(x_1,x_2)$ функция x_1 ўзгарувчи бўйича финит;

2) $f(x_1,x_2)$ функция саккизинчи тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин;

3) $\frac{\partial^m}{\partial x_2^m} f(x_1,x_2)\Big|_{x_2=0} = \frac{\partial^m}{\partial x_2^m} f(x_1,x_2)\Big|_{x_2=l} = 0 \quad (m=0,1,2,3,4)$.

У ҳолда 3-масаланинг (6) формула бўйича аниқланган ечими x_1 ўзгарувчи бўйича финит ва узлуксиз функциялар синфида мавжуд бўлади.

Учинчи параграфда қўзғалишли интеграл геометрия масаласи қаралган.

$S(x_1,x_2)$ орқали $\bar{\Omega}$ нинг $x_2=0$ ўқ ва $P(x_1,x_2)$ чизиқ билан чегараланган қисмини белгилаймиз.

$\bar{\Omega}$ йўлакни қуйидагича киритамиз:

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x_1,x_2) : x_1 \in R\,, x_2 \in [0,l] \right\}.$$

4-масала. Агар барча $(x_1,x_2)\in\bar{\Omega}$ лар учун $P(x_1,x_2)$ эгри чизиқ ва $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ вазн функцияли $S(x_1,x_2)$ юза бўйича

$$\int_0^{x_2} \left[u(x_1-h,\xi_2) - u(x_1+h,\xi_2) \right] d\xi_2 +$$

$$+\int_0^{x_2} \int_{x_1-h}^{x_1+h} k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2) u(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = F(x_1,x_2) \tag{7}$$

интеграллар маълум бўлса, $u(x_1,x_2)$ функцияни аниқланг. Бу ерда $h=\sqrt{x_2-\xi_2}$.

Бу ерда $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ – вазн функция бўлиб, саккизинчи тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, финит ва $x_2-\xi_2=(x_1-\xi_1)^2$, $\xi_2>0$, $x_2>0$ параболада ҳосилалари билан биргаликда нолга айланади. $F(x_1,x_2)$ функция бутун йўлакда аниқланган бўлсин.

(7) тенгламанинг чап томонидаги биринчи қўшилувчи

$$\int_0^{x_2} \left[u(x_1-h,\xi_2) - u(x_1+h,\xi_2) \right] d\xi_2 = f(x_1,x_2)$$

интеграл учлари (x_1,x_2) нуқтада бўлган ярим пароболалар оиласи бўйича изланаётган функциянинг интеграллари тўпламини ифодалайди.

Иккинчи қўшилувчи $x_2-\xi_2=(x_1-\xi_1)^2$ парабола билан чегараланган йўлак қисмининг $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ вазн функцияли интегралини ифодалайди.

$u(x_1,x_2)$ ва $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ функцияларга қўйилган шартлардан $f(x_1,x_2)$ ва $F(x_1,x_2)$ функцияларнинг саккизинчи тартибгача ҳосилалари билан биргаликда узлуксизлиги келиб чиқади.

4-масала ечимининг ягоналиги ва турғунлик баҳоси қуйидаги теореманинг исботида келтирилган.

6-теорема. $F(x_1,x_2)$ функция барча $(x_1,x_2)\in\bar{\Omega}$ да аниқланган бўлсин. $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ функция саккизинчи тартибгача ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз, финит ва $P(x_1,x_2)$ параболада ўзининг ҳосилалари билан биргаликда нолга айлансин.

У ҳолда $g(x_1,\xi_1)=x_1-\xi_1$ вазн функцияли 4-масаланинг ечими $\bar{\Omega}$ йўлакда ташувчиси билан финит бўлган саккиз марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфида ягона ва

$$\|u(x_1,x_2)\|_{W_2^1(\bar{\Omega})}\le C_4\|F(x_1,x_2)\|_{W_2^8(\bar{\Omega})}$$

баҳо ўринли бўлади, бу ерда $0<C_4-$ ўзгармас сон.

ХУЛОСА

Интеграл геометрия классик интеграллашга тескари бўлган масалаларни ўрганади. Функцияларни берилган интеграл характеристикалари бўйича тиклаш бу интеграл геометрия масалаларининг бир бўлими бўлиб ҳисобланади.

Диссертация иши текисликда кучсиз нокоррект интеграл геометрия масалаларининг янги синфларини ечишга бағишланган. Юқорида қўйилган масалалар ва теоремаларга асосланиб шуни айтиш мумкинки, илмий тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1.Текисликда параболалар оиласи бўйича кучсиз нокоррект интеграл геометрия масаласи ечимининг ягоналиги теоремаси исботланди ва тескариланиш формуласи топилди. Тескариланиш формуласини топишда тўғри ва тескари Фурье алмаштириларидан фойдаланилди.

2. Қўйилган масалалар ечимининг турғунлик баҳоси чекли силлиқ фазоларда олинди ҳамда қўйилган масала кучсиз нокоррект эканлиги кўрсатилди.

3. Ечимнинг ягоналиги ва мавжудлиги ҳақидаги теоремаларни исботлашда тўғри ва тескари Фурье алмаштиришларидан фойдаланилди.

4. Йўлакда ташувчиси билан финит бўлган силлиқ функциялар синфида қўзғалишли интеграл геометрия масалалари ечимининг ягоналиги теоремаси исботланди.

5. Қўзғалишли интеграл геометрия масаласи учун ечимнинг турғунлик баҳосини олишда ечим учун шундай функционал фазолар жуфтлиги топилдики, бу фазолар жуфтлиги учун тескариланиш оператори узлуксиз бўлиб, нормани аниқлашда чекли сондаги ҳосила қатнашди ва қўйилган масаланинг кучсиз нокоррект интеграл геометрия масаласи эканлиги кўрсатилди.

Юқорида қўйилган масалаларни ечиш учун ишлаб чиқилган усулдан интеграл геометрия масалалари назариясини янада ривожлантириш учун фойдаланиш мумкин. Диссертация ишида олинган интеграл геометрия масалаларининг аналитик ечимларидан фотоакустик, термоакустик, сейсмик, ультратовушли томографияда, нуклидли диагностика ва тиббиётнинг бошқа соҳаларида, сейсмологиядаги кўпгина математик моделларини ўрганишда, аэрокосмик кузатишларда, геофизик маълумотларни таҳлил қилишда вужудга келадиган масалаларнинг математик моделларини тузишда фойдаланиш мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.07.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ШАРОФА РАШИДОВА

ИСМОИЛОВ АЛИШЕР СИДИКОВИЧ

НОВЫЕ КЛАССЫ СЛАБО НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

01.01.02- Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Самарканд – 2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2022.4.PhD/FM778.

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Бегматов Акрам Хасанович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Хасанов Аканазар Бекдурдиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Утеулиев Ниетбай Утеулиевич доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Бухарском отделении Института Математики имени В.И. Романовского АН РУз.**

Защита диссертации состоится «12» 01 2023 года в «10^{00}» часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №149) (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «28» 12 2022 года
(протокол рассылки № 1 от «28» 12 2022 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

А.С.Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.М.Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

А.Б.Хасанов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во многих научных и практических исследованиях, проводимых в мире, особое значение придается вопросам локализации объектов, их геометрических характеристик, восстановления в виде изображения. В настоящее время восстановление функций на основе заданных интегральных характеристик и создание их математических моделей занимают важное место как объект исследований в таких областях, как математика, вычислительная математика, математическое моделирование и объектно-ориентированное программирование. В связи с этим особое внимание уделяется использование задач интегральной геометрии к задачам: восстановление внутреннего строения объекта, получение скрытой информации о внутреннем строении объекта без его повреждения, изучение математической основы задач сейсмо поиска, анализа данных геофизических и аэрокосмических наблюдений. Также в медицине на основе томографических данных определение структуры внутренних органов больного и его восстановление по семейству специальных кривых.

В мире научные исследования, направленные на восстановление внутренних структур объектов в виде изображений, осуществляются через задачи интегральной геометрии. В этом направлении приоритетными считаются исследования по реализации процесса восстановления на основе аналитических формул, полученных на основе методов анализа Фурье. При этом на основе интегральных данных одной из актуальных задач считается: построение алгоритмов восстановления изображений внутренних структур объектов с высокой устойчивостью в семействе специальных кривых, создание комплекса программ с удобным интерфейсом, предназначенных для широкого круга пользователей, определение существования, единственности и устойчивость решения обратных задач сейсморазведки, развитие исследований в реальной геологической среды, по разработке новых моделей процессов.

В нашей республике реализуется широкий комплекс мероприятий по исследованию вопросов интегральной геометрии, используемых в областях медицины и геофизики, для восстановления внутренних структур объектов по их интегральным характеристикам. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Алгебра и ее приложения, дифференциальные уравнения и ее приложения, математическое моделирование нелинейных систем, динамические системы и их приложения, стохастический анализ, медико-биологическая информатика, вычислительная математика[2]» определяются как основные задачи деятельности науки математики. В реализации этих задач, в

---

[2]Постановление Президента Республики Узбекистан №PQ-4387 от 9 июля 2019 года «О государственной поддержке дальнейшего развития математического образования и науки, а также мерах по коренному совершенствованию деятельности Института математики Академии наук Республики Узбекистан имени В. И. Романовского».

частности, большое научное значение имеет разработка задач интегральной геометрии современной математики.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле проблем, которые входят в тематику задач, отмеченных в Указах Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от17 февраля 2017 года «О дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследования выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В последние годы в повседневных нуждах человечества используемые задачи на основе томографии лежит математическая наука. В большинстве случаев решение задач томографии основывается на задачах интегральной геометрии. Восстановление функций по заданным интегральным характеристикам является частью интегральной геометрии. Впервые задачи интегральной геометрии стали рассматривать в прошлом веке. Если интеграл от функции известен, то проблема определения функции на всех возможных гиперплоскостях и сферических средних значениях, т.е. задача обратной подстановки Радона, широко изучалась Радоном и другими учеными. Позднее различные аспекты этих вопросов изучались Ф.Йоном, А.А.Хачатуровым, П. О. Костеляном, Ю. Г. Решетней, И. М. Гельфандом, М.И. Граевым, Н. Я.Виленкиным и рядом ученых. Среди задач интегральной геометрии одной из широко изучаемых является задача о восстановлении функции на семействе поверхностей второго порядка. В этой области следует выделить работы Ф. Йона, Р.Куранта и одновременно И.М. Гельфанда, М.М.Лаврентьева, М.В.Клибанова, Г.И.Плаксина, В.Г.Романова, В.И.Семьяниста, С.В.Успенским и др. Результаты М.М.Лаврентьева, В.Г.Романова и других авторов показывают, что к решению задач интегральной геометрии можно привлечь широкие классы обратных задач для различных типов дифференциальных уравнений с частными производными. В.Г.Романов исследовал задачу восстановления непрерывной функции, заданной в единичной окружности, интегралом по семейству двухпараметрических кривых.

Natterer F., Quinto E. T., Radon J., Funk P., Agranovsky M.L., Louis A.K., Rim Gouia-Zarrad, Gaik Ambartsoumian и другие ученые занимались исследованиями по аналитическим решениям задачи интегральной геометрии возникающих в области фотоакустической и термоакустической томографии, нуклидной диагностике и других областях медицины.

В Узбекистане задачами интегральной геометрии и восстановлением внутренних структур объектов занимались А.Х.Бегматов, З.Х.Очилов, К.С.Фаязов, Н.У.Утеулиев, Г.М.Джайков, А.К.Сеидуллаев и некоторые другие ученые. Теорема единственности, оценка устойчивости и формула обращения для задач интегральной геометрии с весовыми функциями с особенностью на семействе ломаных и поверхностей были получены А.Х.Бегматовым, З.Х.Очиловым, Г.М.Джайковым и А.К.Сейдуллаев. А.Х.Бегматов доказал теорему единственности, получил оценку устойчивости и нашел формулу обращения для слабо некорректных задач интегральной геометрии на семействе поверхностей и ломаных с особенностями на концах.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательской работы Самаркандского государственного университета имени Шарафа Рашидова в рамках комплексной научной работы № SМат-01 «Приложения спектральной теории дифференциальных операторов к нелинейным эволюционным уравнениям и некорректным задачам современной математической физики».

Цель исследования. Доказать теоремы существования и единственности решений слабо некорректных задач интегральной геометрии по семейству парабол на плоскости, получить оценку устойчивости и найти формулу обращения.

Задача исследования. Основными задачами исследования являются:

- доказать единственность и существование решения слабо некорректных задач интегральной геометрии с весовой функцией по семействе парабол на плоскости;
- получение оценки устойчивости в пространстве Соболева для слабо некорректных задач интегральной геометрии с весовой функцией на семействе парабол на плоскости;
- найти формулу обращения для слабо некорректных задач интегральной геометрии с весовой функцией на семействе парабол на плоскости;
- доказать единственность решения найти оценки устойчивости решения в пространстве Соболева для слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости с возмущением

Объектом исследования является слабо некорректные задачи интегральной геометрии с весовой функцией по семейству парабол на плоскости.

Предметом исследования является доказательство единственности решения слабо некорректных задач интегральной геометрии по семейству парабол на плоскости, доказательство теорем существования, получение оценки устойчивости и вывод формулы обращения.

Методы исследования. В диссертации используются математический анализ, дифференциальные уравнения с частными производными, математическая физика, методы решения интегральных уравнений Вольтерра, методы теории обратных задач.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

- доказана единственность и существование решения слабо некорректных задач интегральной геометрии по семейству парабол на плоскости;
- получена оценка устойчивости в пространстве Соболева для слабых некорректных задач интегральной геометрии по семейству парабол на плоскости;
- найдена формула обращения для слабо некорректных задач интегральной геометрии по семейству парабол с весовой функцией на плоскости;
- доказана единственность решения и получена оценка устойчивости решения в пространстве Соболева для слабо некорректных задач интегральной геометрии по семейству парабол с весовой функцией на плоскости с возмущением;

Практическими результатами исследования являются следующие:

- построен математическая модель процесса просачивания взвесей в подземные слои с помощью единственности, существования, оценки устойчивости решения и формулы обращения слабо некорректной задачи интегральной геометрии семейства парабол на плоскости;
- построен алгоритм и модель решения задач поиска полезных ископаемых, восстановление внутренней структуры объекта по граничным условиям из особенности решения задач интегральной геометрии с возмущением по семейству парабол и оценка устойчивости.

Достоверность результатов исследования обоснована на применении дифференциальных уравнений, математического анализа, методов теории обратных задач, строгих математических соображении, а также полных доказательствах теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что полученные научные результаты развивают теорию задач интегральной геометрии.

Практическая значимость результатов исследования служит для численного решения задач восстановления интегральных данных, возникающих в области медицины и геофизики.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных результатов, связанных с слабо некорректными задачами интегральной геометрии с весовой функцией на семействе парабол на плоскости:

Создание гидродинамических моделей просачивания флюидов и массопереноса в неоднородных пористых средах в фундаментальном проекте

№ОТ-Ф4-64 (2017-2020) «Составление и численный анализ гидродинамических моделей фильтрации жидкости и переноса веществ в неоднородных пористых средах» с помощью единственности, существования, оценки устойчивости решения и формулы обращения слабо некорректной задачи интегральной геометрии семейства парабол на плоскости (Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, справка от 16 февраля 2022 г.). Использование научных результатов при создании математических моделей процесса просачивания взвесей в подземные пласты позволило определить значение параметров, характеризующих явления кольматизации и суффозирования путем решения некорректных задач (задач интегральной геометрии);

существования, единственность и устойчивости решения, а также формула обращения слабо некорректной задачи интегральной геометрии по семейству парабол на плоскости были применены в проекте “Спектральные свойства дифференциальных операторов, не близких к самосопряженным”, регистрационный номер № 20-30-90099 (справка №65/10/1-67 от 28 января 2022 года, Башкирский государственный университет). Применение научных результатов позволило рассмотреть постановоки ряда новых интересных теоретических и практических задач, которые связаны с проблемой восстановления внутренней структуры объекта по граничным данным. Это, в свою очередь, пазволило разработать мадели и алгоритмы решения геофизических задач (при поиске полезных ископаемых).

Апробация результатов исследования.

Результаты данного исследования были обсуждены на 10 научно-практических конференциях, в том числе на 6 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 5 статей опубликованы в изданиях, входящих в перечень научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 1 зарубежных журналах и 4 в национальных научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Структура диссертации состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 102 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан. Приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы. Сформулированы цели и задачи, выявлен объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость научных результатов. Даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется **“Задачи интегральной геометрии”**. В данной главе приводятся понятие некорректных задач и наиболее известные результаты по интегральной геометрии, относящиеся непосредственно к теме диссертации.

Первый параграф посвящен историческому обзору теории некорректных задач и задач интегральной геометрии. Приведено определения некорректной задачи, слабой и сильной некорректности задачи, а также следующее определение задачи интегральной геометрии.

Пусть $x \in R^n,\ x = (x_1,...,x_n)$, $y \in R^m,\ y = (y_1,...,y_m)$, $S(y)$ – семейство многообразий в $x \in R^n$, зависящих от параметра y размерности m. Пусть, далее, $u(x)$- функция, определена в некоторой области $D \subset R^n$, $\rho(x,y)$ – функция переменных $x, y,\ \omega(y)$ – мера на многообразии $S(y)$.

Рассмотрим функцию

$$\int\limits_{S(y)} \rho(x,y)u(x)d\omega = f(y). \qquad (1)$$

Интегральная геометрия есть раздел математики, в котором изучаются различные взаимоотношения между элементами, входящими в (1).

Мы будем считать, что в (1) $S(y)$, $\rho(x,y)$, $f(y)$ заданы и рассматривать (1) как линейное операторное уравнение относительно функции $u(x)$. Требуется по функции $f(y)$ найти функцию $u(x)$.

Второй параграф посвящен задачам интегральной геометрии, изучение которых базировалось на специальных свойствах семейств многообразий и весовой функции.

В третьем параграфе приводятся результат по задачи интегральной геометрии в специальных классах функций. В этом параграфе приводятся теорема о единственности решения задачи интегральной геометрии в классе специальных функций и оценка устойчивости для произвольных функций $u(x)$, полученных из линейных множествах M.

Во второй главе диссертации, названной **«О восстановлении функции, заданной интегралами по семейству парабол»** приведены теоремы существования и единственности решения задачи слабой некорректной задачи интегральной геометрии для семейства парабол в плоскости, с весовой функцией $g(x_1,\xi_1) = |x_1 - \xi_1|$. Получена оценка устойчивости и найдена формула обращения. Доказана единственность решения задачи интегральной геометрии с возмущением и найдена пара функциональных пространств для решения. При получении оценки устойчивости, такой, что оператор обращения для этой пары пространств непрерывен, в определении нормы участвовали конечное число производных, и было показано, что данная задача является задачей слабой некорректной интегральной геометрии.

Введем обозначения, которые будем использовать в этом пункте:

$$x \in R^2,\ \ \xi \in R^2,\ \lambda \in R^1,\ \ \mu \in R^1,$$

$$R_+^2 = \{x = (x_1, x_2) \colon x_2 \ge 0\},$$

$$\Omega = \{x \in R_+^2 :\ 0 < x_2 < l\},$$

здесь, $0 < l < \infty$.

В полосе Ω рассмотрим семейство $P(x_1, x_2)$ кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин $(x_1, x_2) \in \Omega$:

$$P(x_1,\ x_2) = \{(\xi_1,\ \xi_2) \colon x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2,\ \ 0 \le \xi_2 \le x_2\}.$$

Задача 1. Определить функцию двух переменных $u(x_1, x_2)$, если для всех (x_1, x_2) из полосы Ω известны интегралы от нее параболам $P(x_1, x_2)$:

$$\int\limits_{x_1 - \sqrt{x_2}}^{x_1 + \sqrt{x_2}} g(x_1, \xi_1) u(\xi_1, \psi(x_1, x_2, \xi_1)) d\xi_1 = f(x_1, x_2), \tag{2}$$

где $\quad g(x_1, \xi_1) = |x_1 - \xi_1|$.

Обозначим через u класс функция $u(x_1, x_2)$, которые имеют все непрерывные частные производные до восьмого порядка включительно и финитны с носителем в Ω. Для определенности имеем

$$\operatorname{supp} u \subset D = \{(x_1, x_2) \colon -a < x_1 < a,\ 0 < x_2 < l\},\ 0 < a < \infty,\ \ l < \infty.$$

Правая часть уравнения (2) – функция $f(x_1, x_2)$ - предполагается известной в полосе Ω. Из условий, наложенных на функцию $u(x_1, x_2)$, вытекает, что функция $f(x_1, x_2)$ будет иметь все непрерывные производные до восьмого порядка включительно.

Введем следующие функции

$$I(\lambda, \mu) = \int\limits_0^{\infty} e^{i\mu\tau} \cos \lambda \sqrt{\tau} d\tau,$$

$$I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu(x_2 - \xi_2)} \frac{d\mu}{\left(1 + \mu^4\right) I(\lambda, \mu)},$$

$$I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda(x_1 - \xi_1)} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{(1 + \lambda^4)} d\lambda.$$

В первом параграфе доказана единственность решения задачи 1, получено оценка устойчивости и выведена формула обращение. Это утверждение приведено в слудующей основной теореме.

Теорема 1. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ известна для всех $(x_1, x_2) \in \Omega$. Тогда решение задачи 1 в классе восемь раз непрерывно дифференцируемых финитных с носителем в полосе Ω функций единственно, выражается через функцию $f(x_1, x_2)$ по формуле

$$u(x_1,x_2)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\left(1+\frac{\partial^4}{\partial\xi_1^4}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2^4}\right)f(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \tag{3}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\| u(x_1,x_2)\|_{L_2(\Omega)}\le C_1 \| f(\xi_1,\xi_2)\|_{W_2^8(\Omega)},$$

где $0<C_1$ – некоторая постоянная.

Во втором параграфе исследуется существование решения задачи 1. В этом параграфе доказана теорема существования решения задачи 1.

Теорема 2. Пусть функция $f(x_1,x_2)$ известна для всех $(x_1,x_2)\in\Omega$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x_1,x_2)$ финитна по переменной x_1;

2) $f(x_1,x_2)$ имеет все непрерывные частные производные до восьмого порядка включительно;

3) $f(x_1,x_2)$ обращается в нуль вместе со своими частными производными до четвертого порядка включительно на границах полосы, т.е. при $x_2=0$ и $x_2=l$.

Тогда существует решение уравнения (2) в классе непрерывных функций, финитных по аргументу x_1, определенное формулой (3).

В третьем параграфе исследуется задача интегральной геометрии с возмущением.

Здесь через $S(x_1,x_2)$ обозначим часть $\bar\Omega$, ограниченную кривой $P(x_1,x_2)$ и осью $x_2=0$. $\bar\Omega$ есть полоса:

$$\bar\Omega=\left\{\left(x_1,x_2\right):\ x_1\in R,\ x_2\in[0,l]\right\}.$$

Задача 2. Определить функцию $u(x_1,x_2)$, если для всех $(x_1,x_2)\in\bar\Omega$ известны интегралы от неё по кривым $P(x_1,x_2)$ с весовой функцией $g\left(x_1,\xi_1\right)=\left|x_1-\xi_1\right|$ и площадям $S(x_1,x_2)$ с весовой функцией $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$

$$\int_0^{x_2}\left[u(x_1+h,\xi_2)+u(x_1-h,\xi_2)\right]d\xi_2+$$
$$+\int_0^{x_2}\int_{x_1-h}^{x_1+h} k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)u(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2=F(x_1,x_2), \tag{4}$$

где $h=\sqrt{x_2-\xi_2}$.

Функция $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ – функция финитна, имеет все непрерывные частные производные до восьмого порядка включительно и вместе своими производными обращается в ноль на параболах $x_2-\xi_2=(x_1-\xi_1)^2,\ \xi_2>0,\ x_2>0.$

Функция $F(x_1,x_2)$ считается известной во всей полосы.

Уравнение (4) соответствует задачу интегральную геометрии с возмущением. Первое слагаемое в левой части (4)

$$\int_0^{x_2}\left[u(x_1+h,\xi_2)+u(x_1-h,\xi_2)\right]d\xi_2 = f(x_1,x_2),$$

представляет собой совокупность интегралов от искомой функции по семейству половинок парабол с вершинами в точках (x_1,x_2).

Второе слагаемое $f_0(x_1,x_2)=F(x_1,x_2)-f(x_1,x_2)$ - интеграл с весом $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ по частям полосы, ограниченными параболами.

Из условий, наложенных на функции $u(x_1,x_2)$ и $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ вытекает, что функции $f(x_1,x_2)$ и $F(x_1,x_2)$ будут иметь все непрерывные производные до восьмого порядка включительно.

Единственности решения и оценки устойчивости задачи 2 даны в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть функция $F(x_1,x_2)$ известна в полосе $\bar{\Omega}$. Весовая функция $k(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ вместе со своими производными до восьмого порядка включительно обращается в ноль на параболах $P(x_1,x_2)$.

Тогда решение задачи 2 с весовой функцией $g\left(x_1,\xi_1\right)=\left|x_1-\xi_1\right|$ в классе восемь раза непрерывно дифференцируемых и финитных функций единственно в полосе $\bar{\Omega}$ и выполняется неравенство

$$\left\|u(x_1,x_2)\right\|_{L_2(\bar{\Omega})} \le C_2\left\|F(x_1,x_2)\right\|_{W_2^8(\bar{\Omega})},$$

где $0<C_2$ – некоторая постоянная.

В третьей главе диссертации, названной **«Слабо некорректные задачи интегральной геометрии на плоскости»**, доказано теорема единственности решения слабо некорректной задачи интегральной геометрии для семейства парабол на плоскости, с весовой функцией $g(x_1,\xi_1)=x_1-\xi_1$, и найдена формула обращения. Получена оценка устойчивости решения данной задачи в конечных гладких пространствах и показано, что данная задача является слабо некорректной. Прямые и обратные преобразования Фурье использовались для доказательства теорем о единственности и существовании решения. Доказана теорема единственности решения задачи интегральной геометрии с возмущением в классе конечных гладких функций с носителем и получена оценка устойчивости в пространстве Соболева.

Введем обозначения, которые будем использовать в этом пункте:

$$x\in R^2,\ \ \xi\in R^2,\ \lambda\in R^1,\ \ \mu\in R^1,$$

$$R_+^2=\left\{x=(x_1,x_2)\colon x_2\ge 0\right\},$$

$$\Omega=\left\{x\in R_+^2:\ 0<x_2<l\right\},$$

здесь, $0<l<\infty$.

В полосе Ω рассмотрим семейство $P(x_1,x_2)$ кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин $(x_1,x_2)\in\Omega$:

$$P(x_1, x_2) = \{(\xi_1, \xi_2) : x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2, \;\; 0 \le \xi_2 \le x_2\}.$$

Задача 3. Определить функцию двух переменных $u(x_1, x_2)$, если для всех (x_1, x_2) из полосы Ω известны интегралы от нее параболам $P(x_1, x_2)$:

$$\int\limits_{x_1-\sqrt{x_2}}^{x_1+\sqrt{x_2}} g(x_1,\xi_1)u(\xi_1, x_2 - (x_1 - \xi_1)^2)d\xi_1 = f(x_1, x_2), \qquad (5)$$

где $g(x_1,\xi_1) = x_1 - \xi_1$.

Обозначим через u класс функция $u(x_1, x_2)$, которые имеют все непрерывные частные производные до восьмого порядка включительно и финитны с носителем в Ω. Для определенности имеем

$$\text{supp } u \subset D = \{(x_1, x_2) : -a < x_1 < a, 0 < x_2 < l\}, \; 0 < a < \infty, l < \infty.$$

Правая часть уравнения (5) – функция $f(x_1, x_2)$ - предполагается известной в полосе Ω. Из условий, наложенных на функцию $u(x_1, x_2)$, вытекает, что функция $f(x_1, x_2)$ будет иметь все непрерывные производные до восьмого порядка включительно.

Введем следующие функции

$$I(\lambda, \mu) = \int\limits_0^\infty e^{i\mu\tau} \sin \lambda\sqrt{\tau} d\tau,$$

$$I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu(x_2-\xi_2)} \frac{\lambda\, d\mu}{\left(1+\mu^4\right) I(\lambda, \mu)},$$

$$I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda(x_1-\xi_1)} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{1+\lambda^4} d\lambda.$$

В первом параграфе доказана единственность решения задачи 3, получено оценка устойчивости и выведена формула обращение. Это утверждение приведено в слудующей основной теореме.

Теорема 4. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ известна для всех $(x_1, x_2) \in \Omega$. Тогда решение задачи 3 в классе восемь раз непрерывно дифференцируемых финитных с носителем в полосе Ω функций единственно, выражается через функцию $f(x_1, x_2)$ по формуле

$$u(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_2(\xi_3 - \xi_1, x_2 - \xi_2)\left(1 + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2{}^4}\right) \times$$
$$\times \left(1 + \frac{\partial^4}{\partial \xi_1{}^4}\right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\,. \qquad (6)$$

и выполняется неравенство

$$\| u(x_1, x_2) \|_{W_2^1(\Omega)} \le C_3 \| f(\xi_1, \xi_2) \|_{W_2^8(\Omega)},$$

где $0 < C_3$ – некоторая постоянная.

Во втором параграфе доказана следующая теорема существования решения задачи 3.

Теорема 5. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ правая часть уравнения (5) удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x_1, x_2)$ финитна по переменной x_1;

2) $f(x_1, x_2)$ имеет все непрерывные частные производные до восьмого порядка включительно;

3) $\frac{\partial^m}{\partial x_2^m} f(x_1, x_2)\Big|_{x_2=0} = \frac{\partial^m}{\partial x_2^m} f(x_1, x_2)\Big|_{x_2=l} = 0 \quad (m = 0,1,2,3,4)$.

Тогда существует решение уравнения (5) в классе непрерывных функций, финитных по аргументу x_1, определенное формулой (6).

В третьем параграфе третьей главе исследуется задача интегральной геометрии с возмущением.

Здесь через $S(x_1, x_2)$ обозначим часть $\bar{\Omega}$, ограниченную кривой $P(x_1, x_2)$ и осью $x_2 = 0$. $\bar{\Omega}$ есть полоса:

$$\bar{\Omega} = \left\{ \left(x_1, x_2 \right):\ x_1 \in R,\ x_2 \in [0, l] \right\}.$$

Задача 4. Определить функцию $u(x_1, x_2)$, если для всех $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$ известны интегралы от неё по кривым $P(x_1, x_2)$ и площадям $S(x_1, x_2)$ с весовой функцией $k(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$

$$\int_0^{x_2} \left[u(x_1 - h, \xi_2) - u(x_1 + h, \xi_2) \right] d\xi_2 +$$

$$\int_0^{x_2} \int_{x_1 - h}^{x_1 + h} k(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = F(x_1, x_2), \tag{7}$$

где $h = \sqrt{x_2 - \xi_2}$.

Функция $k(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ – функция финитна, имеет все непрерывные частные производные до восьмого порядка включительно и вместе своими производными обращается в ноль на параболах $x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2,\ \xi_2 > 0,\ x_2 > 0.$ Функция $F(x_1, x_2)$ считается известной во всей полосы.

Уравнение (7) соответствует задачу интегральную геометрии с возмущением. Первое слагаемое в левой части (7)

$$\int_0^{x_2} \left[u(x_1 - h, \xi_2) - u(x_1 + h, \xi_2) \right] d\xi_2 = f(x_1, x_2),$$

представляет собой совокупность интегралов от искомой функции по семейству половинок парабол с вершинами в точках (x_1, x_2).

Второе слагаемое $f_0(x_1, x_2) = F(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)$ - интеграл с весом $k(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ по частям полосы, ограниченными параболами.

Из условий, наложенных на функции $u(x_1, x_2)$ и $k(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ вытекает, что функции $f(x_1, x_2)$ и $F(x_1, x_2)$ будут иметь все непрерывные производные до восьмого порядка включительно.

Единственности решения и оценки устойчивости задачи 4 даны в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть функция $F(x_1, x_2)$ известна в полосе $\bar{\Omega}$. Весовая функция $k(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ вместе со своими производными до восьмого порядка включительно обращается в ноль на параболах $P(x_1, x_2)$.

Тогда решение задачи 4 в классе восемь раза непрерывно дифференцируемых и финитных функций единственно в полосе $\bar{\Omega}$ и выполняется неравенство

$$\left\| u(x_1, x_2) \right\|_{W_2^1(\bar{\Omega})} \le C_4 \left\| F(x_1, x_2) \right\|_{W_2^8(\bar{\Omega})},$$

где $0 < C_4$ – некоторая постоянная.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интегральная геометрия изучает задачи, обратные к классическому интегрированию. Она исследует возможность восстановления функции по набору значений ее интегралов по тем или иным подмножествам области определения исходной функции.

Диссертация посвящена решению новых классов слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости. Основываясь на перечисленных выше проблемах и теоремах, можно сказать, что основными результатами научных исследований являются:

1. Доказана теорема единственности решения слабо некорректные задачи интегральной геометрии по семейству парабол на плоскости и найдена формула обращения. Для нахождения формулы обращение использовались прямые и обратные преобразование Фурье.
2. Получена устойчивость решения задачи в конечных гладких пространствах и показана слабая некорректность задачи.
3. При доказательства теоремы единственности и существовании решения использовался прямые и обратные преобразование Фурье.
4. Доказана теорема о единственности решения задач интегральной геометрии движения в классе гладких функций с конечным числом с носителем в полосе.
5. При получении оценки устойчивости, такой, что оператор обращения для этой пары пространств непрерывен, в определении нормы участвовали конечное число производных, и было показано, что данная задача является задачей слабой некорректной интегральной геометрии.

Метод, разработанный для решения указанных выше задач, может быть использован для дальнейшего развития теории задач интегральной геометрии. Результаты диссертации интегрированы в математическое моделирование задач, возникающих в фотоакустической, термоакустической, сейсмической, ультразвуковой томографии, нуклидной диагностике и других областях медицины, исследовании многих математических моделей в сейсмологии, аэрокосмических наблюдениях, интерпретации геофизических данных.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.07.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV

ISMOILOV ALISHER SIDIKOVICH

NEW CLASSES WEAKLY ILL-POSED PROBLEMS INTEGRAL GEOMETRY ON A PLANE

01.01.02 - Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.4.PhD/FM778.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Begmatov Akram Khasanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Khasanov Aknazar Bekdurdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Uteuliev Nietbay Uteulievich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy at the Academy of**

Defense will take place "12" 01 2023 at 10^{00} at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered № 149) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on "28" 12 2022 year.
(Mailing report № 1 on "28" 12 2022 year).

A.S.Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

A.M.Khalkhuzhaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

A.B.Khasanov
Chairman of the Scientific Seminar at the Scientific Council for the Awarding of Scientific Degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to prove existence and uniqueness theorems for solutions of weakly ill-posed problems of integral geometry with respect to a family of parabolas in the plane, obtain a stability estimate, and find an inversion formula.

The object of the research work is weakly ill-posed problems of integral geometry with a weight function over a family of parabolas in the plane..

Scientific novelty of the research work is as follows:

• the uniqueness of the solution of weakly ill-posed problems of integral geometry for a family of parabolas on the plane was proved;

• the existence of a solution to weakly ill-posed problems of integral geometry for a family of parabolas in the plane was proved;

• a stability estimate in Sobolev space is obtained for weak ill-posed problems of integral geometry for a family of parabolas in the plane;

• an inversion formula was found for weakly ill-posed problems of integral geometry for a family of parabolas with a weight function on the plane;

• the uniqueness of the solution of weakly ill-posed problems of integral geometry for a family of parabolas with a weight function on the perturbed plane was proved;

• an estimate of the stability of the solution in Sobolev space for weakly ill-posed problems of integral geometry for a family of parabolas in the plane is obtained.

Implementation of the research results. Based on the obtained results related to weakly ill-posed problems of integral geometry with a weight function on a family of parabolas in the plane:

Creation of hydrodynamic models of fluid seepage and mass transfer in inhomogeneous porous media in the fundamental project № OT-F4-64 (2017-2020) "Compilation and numerical analysis of hydrodynamic models of fluid filtration and substance transfer in inhomogeneous porous media" using uniqueness, existence, stability assessment solutions and inversion formulas for a weakly ill-posed problem of the integral geometry of a family of parabolas on the plane (Samarkand State University named after Sharof Rashidov, reference dated February 16, 2022). The use of scientific results in the creation of mathematical models of the process of seepage of suspensions into underground layers made it possible to determine the value of the parameters characterizing the phenomena of colmatization and suffosing by solving ill-posed problems (problems of integral geometry);

existence, uniqueness and stability of the solution, and the formula for inverting a weakly ill-posed problem of integral geometry with respect to a family of parabolas on the plane, were applied in the project “Spectral properties of differential operators that are not close to self-adjoint”, registration number № 20-30-90099 (reference № 65/ 10/1-67 dated January 28, 2022, Bashkir State University). The application of scientific results made it possible to consider the formulation of a number of new interesting theoretical and practical problems that are associated with the problem of restoring the internal structure of an object from boundary data. This, in turn, made it possible to develop models and algorithms for solving geophysical problems (when searching for minerals).

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of introduction, three chapters, a conclusion and references. The volume of the dissertation is 102 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. Задача интегральной геометрии в полосе с весовой функцией // Научный вестник Самаркандского государственного университета, № 5 (117), С.12-17. 2019. (01.00.00; № 2)
2. Исмоилов А.С. Единственность и существование решения задачи интегральной геометрии в полосе // Бюллетень Института Математики, № 2, С. 58-68. 2020. (01.00.00; № 17)
3. Begmatov Akram Kh., Ismoilov A.S. Restoring the function set by integrals for the family of parabolas on the plane // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, Vol. 3, issue 2, pp. 246-254. 2020. (01.00.00; № 8)
4. Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S. On A Problem Of Integral Geometry Over A Family Of Parabolas With Perturbation // Journal of the Balkan Tribological Association 27 (4), 497-509, 2021. (Scopus, IF=0.311)
5. Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S. Weakly ill-posed problems of integral geometry on the Plane. Uzbek Mathematical Journal, Volume 66, Issue 1, pp.64-75. 2022. (01.00.00; N6)

II бўлим (II часть; II part)

1. Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. О восстановлении функции, заданной интегралами по семейству парабол. Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики». Москва, 12-14 мая 2019 г. 452-455 с.
2. Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. Задача восстановления функции в полосе по кривым с особенностями. Международная научная конференция “Обратные и некорректные задачи” Самарканд, 2-4 октября 2019 г. 65-68 с.
3. Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. The problem of integral geometry for family of parabolas on the plane. Международная научная конференция “Обратные некорректные задачи” Самарканд, 2-4 октября 2019 г. 10-13 с.
4. Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. Слабо некорректная задача интегральной геометрии на плоскости. Международная научная конференция “Уфимская осенняя математическая школа”. Россия, 16-19 октября 2019 г. 35-36 с.
5. Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. The problem of restoration a function from a family of special curves. Международная научная конференция посвяшенной 60-летию Рахмонова З.Х. и Исхокова С.А. Душанбе, 13-14 декабря 2019 г. 64-66 с.
6. Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. Единственность и существование решения задачи интегральной геометрии в полосе с возмущением.

“Математиканинг замонавий муаммолари” номли онлайн-конференция, Нукус, 2020 йил 20 май, 150-153 бет.

7. Begmatov Akram Kh., Ismoilov A.S. Weakly Ill-Posed Problems of Integral Geometry on the Plane. Frontier in mathematics and computer science. Abstracts of the International Online Conference. October 12–15, 2020. Tashkent, pp 37.

8. Исмоилов А.С. Слабо некорректная задача интегральной геометрии по семейству парабол с возмущением. Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference, August 24-15, 2020, Tashkent, pp. 193-195.

9. Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. Задача интегральной геометрии по семейству парабол с возмущением. Республиканская научная конференция "Современные методы математической физики и их приложения” Ташкент. 17-19 ноябрь 2020 г. с. 167-171.

10. Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. Слабо некорректная задача интегральной геометрии по семейству парабол в полосе с возмущением. «Стохастик таҳлилнинг долзарб муаммолари» Республика илмий конференцияси. Тошкент. 20- 21 феврал 2021 й. 293-296 б.

Автореферат Шароф Рашидов номидаги Самарқанд давлат университетининг “Илмий ахборотнома” журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди ва унинг ўзбек, рус ва инглиз тилидаги матнлари ўзаро мослаштирилди (26.12.2022).

Босмахона лицензияси:

4268

Тасдиқнома
№ 8376-525f-572d-f37b-0fd6-3529-7957

2022 йил 26 декабрда босишга рухсат этилди:
Қоғоз бичими $60\times84_{1/16}$. “Times New Roman” гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди. Ҳисоб-нашриёт т.: 2,4.
Шартли б.т. 1,6. Адади 100 нусха. Буюртма №26/12.

СамДЧТИ таҳрир-нашриёт бўлимида чоп этилди.
Манзил: 140104, Самарқанд ш., Бўстонсарой кўчаси, 93-уй.