

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ
JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI**

**ÁJINIYAZ ATINDAĞÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK
PEDAGOGIKALÍQ INSTITUTÍ**

TEÑSIZLIKLERDI DÁLILLEW USÍLLARÍ

(Oqıw-metodikalıq qollanba)

Nókis-2019

Dúziwshiler: **N.Djumabaev, M.Urazbaeva, E.Oteniyazov**

Bul oqıw -metodikalıq qollanba joqarı oqıw orınlarınıń matematika fakulteti talabaları, akademiyalıq licey, kásip-óner kolledjleri, ulıwma bilim beriw mektepleri hám matematika pání tereńnen oqıtılatuǵın qánigelestirilgen mektep oqıwshıları hám oqıtıwshılar ushın «Teńsizliklerdi dálillew usılları» temasında jazılǵan bolıp, bul metodikalıq qollanbada teńsizliklerdi dálillewde oqıwshılardıń ózlestiriwi kerek bolǵan mısallar bir neshe usıllar menen dálillenip kórsetilgen.

JUWAPLÍ REDAKTOR:

Z.Saparov - Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı «Matematika oqıtıw metodikası» kafedrası docenti, fizika-matematika ilimleriniń kandidatı.

PIKIR BILDIRIWSHILER:

M.Alatinov. Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutınıń «Informatika oqıtıw metodikası» kafedrasınıń docenti, fizika-matematika ilimleriniń kandidatı.

S.Tañirbergenov. Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutınıń «Matematika oqıtıw metodikası» kafedrasınıń docenti, fizika-matematika ilimleriniń kandidatı.

Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı
Oqıw-metodikalıq keńesi (27-iyun 2019-jıl №8 sanlı bayanlama) májilisi
qararı menen baspaǵa usınıs etilgen.

Kirisiw

Bárshemizge belgili usı kúnge shekem turmıstıń barlıq tarawları qatarında ilim hám bilimlendiriw tarawında da ko'plegen reformalar hám ózgerisler ámelge asırılıp kelindi. 2017-2021 jıllarda O'zbekistandı rawajlandırıwdıń bes áhmiyetli baǵdarı boyınsha háreketler strategiyasında úzliksiz tálim sistemasın ele de jetilistiriw jolın dawam etiw, sapalı tálim xızmetleriniń múmkinshiliklerin arttırıw, miynet bazarınıń zamanagóy talaplarına ılayıq joqarı bilimli kadrlardı tayarlaw, ulıwma orta tálim beriw sapasın arttırıw, talap joqarı bolǵan matematika hám informatika, fizika, ximiya, biologiya h. t. b. anıq hám fundamental pánlerin tereń úyreniw, ilimiy-izertlew hám innovaciyalıq islerdi qollap-quwatlaw, ilimiy hám innovaciya jańalıqların ámeliyatta qollanıwdıń effektiv mexanizmlerin jaratıw mashqalaları ayrıqsha atap ko'rsetilgen.

Ózbekstan Respublikası Prezidentiniń 2018-jıl 5-iyundaǵı "Joqarı oqıw orınlarında tálim sıpatın asırıw hám olardıń mámlekette ámelge asırılıp atırǵan keń kólemli reformalarda belsendi qatnasıwın támiyinlew boyınsha is-ilajlar haqqında"ǵı PQ-3775-sanlı qararı mámleketimizde joqarı bilimlendiriw sistemasın jańasha rawajlandırıw hám joqarı oqıw orınları professor-oqıtıwshıların jámiyettiń siyasiy-ekonomikalıq turmısına elede belsendilik penen qatnasıwǵa baǵdarlaydı. Sonlıqtan da búgingi kúnde ilim hám tálim-tárbiyanıń nátiyjeliliginiń asırıw, jaslardıń erkin bilim alıwın támiyinlew ushın hár bir oqıtıwshı jaqsı tájiriybege iye bolıwı hám o'z tarawındaǵı bilimlerdi tereń iyelewi, zamanago'y pedagogikalıq texnologiyalardı tereń o'zlestiriwi, oqıw hám tárbiyalıq jumislardı sheber shólkemlestire alıwı zárúr.

1-§. Teńsizlikler dálillew boyınsha tusınık

1.1 Teńsizlikler boyınsha ulıwma túsiniń

Meyli $f(x) > g(x)$ yamasa $f(x) < g(x)$ teńsizligi berilgen bolsın. Berilgen teńsizlikti durıs sanlı teńsizlikke aylandıratuǵın ondaǵı ózgeriwshilerdiń hár qanday mánisleri *teńsizliktiń sheshimleri* dep ataladı. *Ózgeriwshisi bar teńsizlikti sheshiw* degenimiz, – bul demek, onıń barlıq sheshimlerin tabıw yamasa olardıń joq ekenligin dálillew degen sóz.

Bir ózgeriwshige iye bolǵan eki teńsizliktiń sheshimleri duspa-dus kelse, onda olar *teń kúshli teńsizlikler* dep ataladı: dara jaǵdayda eki teńsizliktiń ekewi de sheshimlerge iye bolmasa, onda olar da teń kúshli teńsizlikler boladı.

Teńsizliklerdi sheshiw waqtında ádette berilgen teńsizliklerdi ádewir ápiwayıraq biraq berilgen teńsizlikke teń kúshli bolǵan teńsizlikler menen albastıradı; kelip shıqqan teńsizlikti taǵı da ádewir ápiwayıraq biraqta berilgen teń kúshli bolǵan teńsizlikler menen albastıradı hám t. b. Bunday albastırıwlar mına tómendegi tasqıyqlawlarǵa tiykarlanıp ámelge asırıladı.

1. Eger teńsizliktiń bir jaǵındaǵı qosılıwshını qarama-qarsı belgisi menen $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$ ekinshi jaǵına kóshirsek, onda berilgenge teń kúshli bolǵan teńsizlik kelip shıǵadı. Eger $h(x)$ ańlatpa $x \in X$ larda anıqlanǵan bolsa, $f(x) < g(x)$ hám $x^2 + 5x < 6$ hám $x^2 + 5x - 6 < 0$ teńsizlikleri.

2. Eger bir ózgeriwshige iye bolǵan teńsizliklerdiń eki jaǵın da birdey oń sanǵa kóbeytsek yamasa bólsek, onda berilgen teńsizlikke teń kúshli bolǵan teńsizlik kelip shıǵadı. Mısalı $3x^2 + 6x < 9$ hám $x^2 + 2x - 3 < 0$ teńsizlikleri.

3. Eger bir ózgeriwshige iye bolǵan teńsizliklerdiń eki jaǵın da birdey teris sanǵa kóbeytsek yamasa bólip, sonıń menen bunda teńsizlik belgisin qarama-qarsı belgige ózertsek, onda berilgen teńsizlikke teń kúshli bolǵan teńsizlik kelip shıǵadı. Mısalı hám $x > -2$ teńsizlikleri.

2 hám 3-lerge tiykarlanǵan halda tómendegi tastıyıqlawdı keltirip ótsekte boladı.

4. Eger teńsizliktiń eki jaǵın da ózgeriwshilerdiń barlıq mánislerinde oń mániske iye bolatuǵın qanday da bir ańlatpaǵa kóbeytsek yamasa bólsek, onda berilgen teńsizlikke teń kúshli bolǵan teńsizlik kelip shıǵadı. Mısalı Eger hámme $x \in X$ larda $h(x) > 0$ bolsa, $f(x) < g(x)$ hám $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ teńsizlikler teń kúshli boladı.

5. Eger teńsizliktiń eki jaǵın da ózgeriwshilerdiń barlıq mánislerinde teris mániske iye bolatuǵın qanday da bir ańlatpaǵa kóbeytsek yamasa bólip, sonıń menen bunda teńsizlik belgisin qarama-qarsı belgige ózertsek, onda berilgen teńsizlikke teń kúshli bolǵan teńsizlik kelip shıǵadı. Mısalı Eger hámme $x \in X$ larda $h(x) < 0$ bolsa, $f(x) < g(x)$ hám $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ teńsizlikler teń

kúshli boladı. Demek teńsizliklerdi sheshiwde joqarıdağı tastıyqlawlardan paydalansaq teńsizliktiń anıq sheshimlerin tapqan bolamız.

1.2 Sanlı teńsizliklerdi dálillew

Sanlı teńsizliklerdi dálillewde tómendegishe qásiyetlerdi keltirip ótemiz hám usılar boyınsha dálilleymız.

Qálegen a hám b sanlar ushın tómendegi úsh qatnasdan tek ǵana birewi orınlı:

$$1. a - b > 0, \Leftrightarrow a > b$$

$$2. a - b < 0, \Leftrightarrow a < b$$

$$3. a - b = 0, \Leftrightarrow a = b.$$

Sanlı teńsizlikler tómendegishe qásiyetlerge iye:

- Eger $a > b$ hám $b > c$ bolsa onda $a > c$;
- Eger $a > b$ bolsa onda $a + m > b + m$;
- Eger $a_1 > b_1, a_2 > b_2, \dots, a_n > b_n$, bolsa $a_1 + a_2 + \dots + a_n > b_1 + b_2 + \dots + b_n$ orınlı
- Eger $a > b$ bolsa, $m > 0$ ushın sanı $am > bm$, $m < 0$ sanı ushın $am < bm$ teńsizlikleri orınlı.
- Eger $a_1 > b_1 \geq 0, a_2 > b_2 \geq 0, \dots, a_n > b_n \geq 0$ bolsa $a_1 a_2 \dots a_n > b_1 b_2 \dots b_n$ orınlı
- Eger $a > b > 0$ bolsa $a^x > b^x$ orınlı. bunda $x > 0$
- Eger $a > 1$ hám $x > y > 0$ bolsa, onda $a^x > a^y$, $0 < a < 1$ hám $x > y > 0$ bolsa $a^x < a^y$ teńsizlikleri orınlı.

Teńsizliklerde dálillewde qollanılatuǵın usıllardıń bırı bul *ayırmanıń belgisin baxalaw* usılı. Bul usıldıń maǵanası tómendegilerden ibarat boladı:

$$f(x; y; z) > g(x; y; z)$$

Teńsizlikleriniń durıslıǵın anıqlaw ushın, olardıń ayırmasın, $f(x; y; z) - g(x; y; z)$ ti duzedi hám bul ayırmanıń oń bolatuginlıǵın dálilleydi.

1-Mısal. Eger $x \geq 0, y \geq 0$ bolsa, onda $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ bolatuginlıǵın dálilleniz.

Sheshiliwi. Bulardıń ayırmasın duzemiz: $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \geq 0$

Bunnan

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}$$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ teńsizligi, x penen y tiń teris emes qálegen mánislerinde, durıs boladı. Demek, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, sonıń menen bunda tek ǵana $x = y$ bolgan jágdayda ǵana teńlik kelip shıǵadı.

2-misal. $a^2 - b^2 \geq 4ab$ $a - b^2$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshılıwı: Berilgen teńsizlikti tómendegishe jazamız.

$$a + b^2 - a - b^2 \geq 4ab - a - b^2$$

Eger $a = b$ bolsa, onda teńlik kelip shıǵadı. Eger $a \neq b$ bolsa, onda $a - b^2 > 0$ bolǵanlıqtan, teńsizliktiń eki jaǵın $a - b^2$ qa bólemız.

$$\text{Nátıyjede} \quad \Rightarrow a + b^2 > 4ab$$

teń kushli

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab, a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

Bunnan $a - b^2 > 0$ kelip shıǵadı. Teńsizlik dálillendi.

3-misal. $ab + bc + ca \geq 3abc(a + b + c)$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshılıwı: Teńsizlikti dálillew ushın teńsizliktiń oń jaǵın shep jaǵına ótkeremiz.

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 - 3a^2bc - 3ab^2c - 3abc^2 \geq 0$$

yamasa

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 - 2abc + c^2 + b^2a^2 - 2ac + c^2 + c^2a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b - c^2 + b^2a - c^2 + c^2a - b^2 \geq 0$$

Teńsizlik $\forall a, b, c$ sanları ushın orınlı. Eger $a = b = c$ bolsa teńlik belgisi kelip shıǵadı. Teńsizlik dálillendi.

4-misal. Eger $x > 0, y > 0$ sanları ushın $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt[4]{xy}$ teńsizligin dálilleń.

Sheshılıwı: teńsizlikti tómendegishe turlendiremiz.

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}} \right)^2 - 2\sqrt[4]{xy} + \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 + 2\sqrt[4]{xy} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 + 2\sqrt[4]{xy}$$

Nátıyjede

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 + 2\sqrt[4]{xy} \geq 2\sqrt[4]{xy} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 \geq 0$$

teń belgisi tek ǵana $x = y$ de, x, y qalǵan mánislerinde teńsizlik orınlanadı.

5-misal. $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14 > 2a + 12b + 6c$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshılıwı: $(a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14) - (2a + 12b + 6c) > 0$

$$(a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + (3c^2 - 6c + 3) + 1 = (a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 + 1 > 0$$

sonǵı teńlik a, b, c qálegen mánisinde teńsizlik orınlı ekenin dálilleydi.

6-mısal. Eger $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ hám $ac > 0$ $\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} \geq 4$ bolsa, teńsizliginiń orınlı ekenin dálilleń.

Sheshılıwı: $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ teńliginen b nı tawıp, berilgen teńsizlikke aparıp qoyamız.

$$b = \frac{2ac}{a+c}$$

$$\frac{a+b}{2a-b} = \frac{a + \frac{2ac}{a+c}}{2a - \frac{2ac}{a+c}} = \frac{a \frac{a+c}{a+c} + 2ac}{2a \frac{a+c}{a+c} - 2ac} = \frac{a+3c}{2a} \quad (1)$$

$$\frac{c+b}{2c-b} = \frac{c + \frac{2ac}{a+c}}{2c - \frac{2ac}{a+c}} = \frac{c \frac{a+c}{a+c} + 2ac}{2c \frac{a+c}{a+c} - 2ac} = \frac{3a+c}{2c} \quad (2)$$

(1) hám (2) lerdi qosamız.

$$\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} = \frac{a+3c}{2a} + \frac{3a+c}{2c},$$

$$\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} = \frac{2ac + 3a^2 + c^2}{2ac},$$

$$\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq 4,$$

Sebebi $ac > 0$. Teńlikke tek ǵana $a = b = c$ bolǵanda erisemiz. Teńsizlik dálillendi.

7-mısal. Eger $a+b+c \geq 0$ bolsa $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ teńsizligin dálilleń.

Sheshılıwı: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ ańlatpasın $a^3 + b^3$ ǵa keltiremiz.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3ab^2 - 3abc = \\ &= (a+b)^3 - 3ab(a+b+c) + c^3 \\ &\quad (a+b)^3 + c^3 \end{aligned}$$

kublardıń qosındısı boyınsha jayamız.

$$\begin{aligned}
& (a+b)^3 + c^3 - -3ab(a+b+c) = ((a+b)+c) \\
& \left((a+b)^2 - (a+b)c + c^2 \right) - 3ab(a+b+c) = \\
& = (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) = \\
& = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = \\
& = \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac) = \\
& = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right).
\end{aligned}$$

Sonğı teńlik $a+b+c \geq 0$ boyınsha teris emes. Eger $a=b=c$ bolsa teńlik qanaatlandıradı. Demek bul teńlik a, b, c lar ushın teńsizlikтіń orınlı bolıwın dálilleydi.

8-mısal: $S = \frac{1}{8^2+8^3} + \frac{2}{9^2+9^3} + \dots + \frac{n}{(7+n)^2+(7+n)^3} < \frac{1}{7}$ dálilleń.

Sheshılıwı: ulıwma aǵzası ushın tómendegishe teńsizlikti keltireyik.

$$\frac{n}{(7+n)^2+(7+n)^3} < \frac{n}{(7+n)^3} < \frac{1}{(7+n)^2} < \frac{7+n-6-n}{(7+n)(6+n)} = \frac{1}{6+n} - \frac{1}{7+n}$$

Nátiyjede

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8^2+8^3} < \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \\
& \frac{2}{9^2+9^3} < \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \\
& \dots\dots\dots \\
& \frac{n}{(7+n)^2+(7+n)^3} < \frac{1}{6+n} - \frac{1}{7+n}
\end{aligned}$$

Joqarıdaǵı teńsizliklerdi qossaǵ $S < \frac{1}{7} - \frac{1}{7+n} < \frac{1}{7}$ kelip shıǵadı. Teńsizlik dálillendi.

9-mısal: $(a^2 - b^2)(a^4 - b^4) \leq (a^3 - b^3)^2$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshılıwı: teńsizlikтіń eki jaǵın apiwayılastıramız.

$$(a-b)^2(a+b)^2(a^2+b^2) \leq (a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2$$

Eger $a=b$ bolsa teńlik orınlı. Eger $a \neq b$ bolsa, onda $(a-b)^2 > 0$ bolǵanlıqtan

$$(a+b)^2(a^2+b^2) \leq (a^2+ab+b^2)^2$$

teńsizligin dálillew qaladı.

$$((a^2+b^2)+2ab)(a^2+b^2) \leq (a^2+b^2+ab)^2$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)^2 + 2ab(a^2+b^2) \leq (a^2+b^2)^2 + a^2b^2 + 2ab(a^2+b^2)$$

$a^2b^2 \geq 0$, a, b nıń qálegen mánisinde orınlı. Teńsizlik dálillendi.

10-mısal: $a > 0, b > 0, c > 0$ hám p -qálegen sanları ushın
 $a+b-c > 0, a+c-b > 0, b+c-a > 0$ teńsizlikleri orınlı bolsa
 $pa^2 + (1-p)(b^2 - pc^2) > 0$ teńsizligin dálilleń.

Sheshılıwı: teńsizlikti kvadrat teńsizlik kórinisine alıp kelemiz.

$$pa^2 + (1-p)(b^2 - pc^2) = c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2$$

$$c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2 > 0 \quad (1)$$

Teńsizlik qálegen p sanı ushın orınlı bolıwı kerek. $c^2 > 0$ bolıp, teńsizlik orınlı bolıwı ushın p qarata berilgen kvadrat úsh aǵzalısnıń diskriminantı teris mániske iye bolıwı kerek.

$$\begin{aligned} D &= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) = \\ &= (a^2 - (b+c)^2)(a^2 - (b-c)^2) = (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) = - \\ &= -(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b). \end{aligned}$$

bizge berilgen

$$a+b-c > 0, a+c-b > 0, b+c-a > 0$$

teńsizliktiń shártlerin esapqa alǵan halda songı teńlikten

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0. \quad (2)$$

Nátıyjede (2) boyınsha $D < 0$ bolıwı kelip shıǵadı. Bul (1) teńsizliktiń p nıń qálegen mánisinde teńsizlikti qanaatlandıırıwın dálilleydi.

Shınıǵıwlar

1. $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$ teńsizlikti dálilleń.

2. $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ teńsizlikti dálilleń.

3. $1+2a^4 \geq a^2+2a^3$ teńsizlikti dálilleń.

4. Eger $a > 0, b > 0$, sanları ushın $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$ teńsizligin dálilleń.

5. Eger $a \geq 0$ sanı ushın $a^3 + 2 \geq a^2 + 2\sqrt{a}$ teńsizligin dálilleń.

6. Eger $a > 0, b > 0, ay + bx > 0$ hám $x \neq y$ bolsa $\frac{(a+b)xy}{ay+bx} < \frac{ax+by}{a+b}$ teńsizliginiń orınlı bolıwın dálilleń.
7. Eger $a \neq 2$ bolsa $\frac{1}{a^2-4a+4} > \frac{2}{a^3-8}$ teńsizligin dálilleń.
8. Eger $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, bolsa $6abc \leq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)$ teńsizligin dálilleń.
9. Eger $a \geq -1$ bolsa $a^3 + 1 \geq a^2 + a$ teńsizlikti dálilleń.
10. Eger $abc > 0$ bolsa $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3}$ teńsizliginiń orınlı bolıwın dálilleń.
11. Eger $x > 0, y > 0$, $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{xy}$ teńsizligin dálilleń.
12. Eger $a \geq 0, b \geq 0$ bolsa, onda $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ teńsizlikti dálilleń.
13. $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$ teńsizligin dálilleń.
14. Eger $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, bolsa $\frac{a+b}{b} \leq \frac{c+d}{d}$ dálilleń.
15. Egerde c, d oń sanlar bolıp $a \geq c+d, b \geq c+d$, bolsa $ab \geq bc+ad$ dálilleń.
16. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ sanları ushın $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$ dálilleń.
17. Egerde a, b, c, d teris emes sanları berilgen bolsa $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ dálilleń.
18. $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$ teńsizlikti dálilleń.
19. $a \geq b, b \geq c, c \geq 0$ bolsa $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$ teńsizlikti dálilleń.
20. $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$ teńsizlikti dálilleń.
21. $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$ teńsizlikti dálilleń.
22. Egerde $zy + yz + zx = 1$ bolsa, $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ dálilleń.
23. $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$ teńsizlikti dálilleń.
24. $a > b > 0$ sanları ushın $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$ egerde $x > \sqrt{ab}$, hám $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} < \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$ egerde $x < \sqrt{ab}$ teńsizliklerdi dálilleń.
25. Egerde $|a| \geq |b|$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hám $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ bolsa $(x-c)^2 + y^2 \leq 4a^2$ teńsizliginiń orınlı ekenin dálilleń.

26. x tiń qálegen mánisinde teńsizliktiń orınlı bolıwın dálilleń.

$$-3 \leq \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} \leq 3$$

27. Eger $a \geq 0, b \geq 0$ sanları ushın $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ teńsizlikti dálilleń.

28. Egerde $a^2 + b^2 = 1$ hám $c^2 + d^2 = 1$ bolsa $|ac - bd| \leq 1$ teńsizligin dálilleń.

29. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|$ teńsizligin dálilleń.

30. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{2n-1}{n}$ teńsizlikti dálilleń.

31. $P = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \dots (4n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ teńsizlikti dálilleń.

32. a, b, c - sanları ushmúyeshliktiń tárepleri uzınlıqları bolsa

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

teńsizlikti dálilleń.

33. $S = \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3}{3^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!} < 1$ Teńsizlikti dálilleń.

34. Eger $x > 0$ sanı ushın $x(4^x - 4 \cdot 2^x + 1) + 2^x(x^2 + 1) > 0$ teńsizlikti dálilleń.

35. Eger $t > 0$ hám $t < \sqrt[3]{z} < t+1$ bolsa, $\frac{t(t^3 + 2z)}{2t^3 + z} < \sqrt[3]{z} < \frac{(t+1)((t+1)^3 + 2z)}{2(t+1)^3 + z}$

teńsizlikti dálilleń.

36. m, n natural sanları ushın tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\left(m + \frac{3}{2}\right) \left(m + \frac{7}{2}\right) \left(m + \frac{11}{2}\right) \dots \left(m + \frac{4n-1}{2}\right) > \sqrt{\frac{(m+2n)!}{m!}}.$$

1.3 Teńsizliklerdi qarsıdan dálillew usılı menen dálillew.

Bul usıldıń maǵanası mına tómendegilerden ibarat boladı. Meyli mınaday teńsizliktiń shın ekenligin dálillew kerek bolsın deyik :

$$f(x; y; z) \geq g(x; y; z) \quad (1)$$

Bunı kerisinshe uyǵarıp kóreyik, yáǵnıy ózgeriwshilerdiń qanday da bolmasın bir toparı ushın mına teńsizlik durıs boladı deyik:

$$f(x; y; z) \leq g(x; y; z) \quad (2)$$

Tensizliklerdiń qásiyetlerin qollanıp, (2) teńsizlikti turlendiriwdi orinlaydı.

Egerde usı turlendiriwlerdiń nátiyjesinde nadurıs kelip shıqsa, onda bul (2) teńsizliktiń durıslıǵı haqqında boljawımız nadurıs bolıp shıǵadı, al sonıń ushın da (1) teńsizlik durıs boladı.

1-misal. Eger $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ bolsa mına teńsizlikti dálilleń:

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

Sheshiliwi. Qarsısınan uyǵarıp qarayıq, yaǵnıy a, b, c, d lardıń mánisleriniń ğeypara toparları ushın, mına teńsizlik durıs boladı deyik:

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

Bul teńsizliktiń eki jaǵın da kvadratqa kóteremiz. Sonda mınaǵan iye bolamız:

$$ab + bc + ad + cd < ab + 2\sqrt{abcd} + cd.$$

Bunnan

$$ab + ad < 2\sqrt{abcd}$$

hám bunnan keyin

$$\frac{bc + ad}{2} < \sqrt{abcd}$$

biráq bul, teris emes bc hám ad sanları ushın dúzilgen Koshi teńsizligine qarama- qarsı keledi.

Demek biziń bulay dep úyǵarıwımız nadurıs eken , yaǵnıy a, b, c, d lardıń teris emes qálegen mánisleri ushın, mına teńsizlik durıs eken :

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

2-mısal. Tómendegi teńsizlikti dalilleń :

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) \leq \cos^2 \alpha.$$

Sheshiliwi. Qarsısınan uyǵarıp qarayıq, yaǵnıy qandayda bir α menen β bar bolıp , olar ushın mına teńsizlik orınlanadı dep úyǵayıq:

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \frac{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}{2}$$

hám

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

formulalarınan paydalanıp, mınaǵan iye bolamız:

$$\frac{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}{2} \geq \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

bunnan $\cos 2\beta > 1$ kelip shıǵadı. Durısında da β nıń qálegen mánislerinde $\cos 2\beta \leq 1$ bolatuǵın bizler qarama-qarsılıqqa kelip jolıqtıq. Demek , biziń joqarıdaǵı úyǵarıwımız nadurıs eken, al sonın ushın da $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \leq \cos^2 \alpha$ $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \leq \cos^2 \alpha$ teńsizligi durıs teńsizlik eken.

Teńlemelerdi sheshiwde teńsizliklerdi qollanıw. Meyli $f(x) = g(x)$ teńlemesin sheshiw kerek bolsın deyik, hám sonıń menen qatar qandayda bir A degen san bar bolıp, ol san bir waqıttıń ózinde $y = f(x)$ funktsiyasınıń eń ulken mánisi hám $y = g(x)$ funktsiyasınıń eń kishi mánisi bolıp esaplansın deyik . sonda $f(x) = g(x)$ teńlemesiniń korenleri bolıp $f(x) = A, g(x) = A$ teńlemelerdi funktsiyonal usılda sheshiwdiń dara jaǵdayı boladı.

2-Misal. Teñlemenini sheshiń. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 - (x-1)^4$

Sheshiliwi. teñlemeninińshep jaǵı ushın $x \neq 0$ bolǵan ,barlıq mánislerde $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ teńsizligi, oń jaǵı ushın ondaǵı x tıń qálegen mánisinde $2 - (x-1)^4 \leq 2$ teńsizligi orınlanadı. Demek berilgen teñlemeniniń kórenleri bolıp , $x=1$ $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ hám $2 - (x-1)^4 = 2$ teñlemeleriniń ulıwma korenleri esaplanadı.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$$

teñlemesinen $x_1 = 1, x_2 = -1$ di tabamız. $2 - (x-1)^4 = 2$ teñlemesinen $x = 1$ di tabamız. Bul teñlemelerdiń ulıwma bir koreni bolıp , $x = 1$ mánisi esaplanadı. Ol koren berilgen teñlemeniniń birden-bir koreni boladı.

2-§. Orta mánisler arqalı teńsizliklerdi dálillew

Ayırım teńsizliklerdi dálillewde teńsizliklerdi qandayda bir almasırwlar járdeminde dálilleymız. Bunday almasırwlar teńsizlikde berilgen ózgeriwishlerdiń orta mánisleri arqalı ámelge asırıladı.

Orta mánisler

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ oń sanlar izbe-izligi ushın

- $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ orta arifmetikalıq mánis

- $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ orta geometriyalıq mánis

- $K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ orta kvadratlıq mánis

- $N_n = \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}$ orta garmonikalıq mánis

Máselen a_1, a_2 oń sanlar ushın joqarıdaǵı orta mánisler tómendegishe anıqlanadı:

$$A_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}, G_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_2}, K_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}, N_2 = \frac{2a_1 \cdot a_2}{a_1^2 + a_2^2}$$

Orta mánislerdi bir-biri menen tómendegishe teńsizliklerge alıp kelseń boladı.

1) Orta arifmetikalıq hám orta geometrik mánisler ushın Koshi teńsizligi orınlı

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Yaǵniy $A_n \geq G_n$ hám $A_n = G_n$ teńlik tek ǵana $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ teńlik bolǵanda orınlı.

1-misal. Eger $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ bolsa $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshiliwı: Teńsizlikti dálillew ushın tómendegishe úsh teńsizlikdi dúzıp alamız.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}, b+c \geq 2\sqrt{bc}, a+c \geq 2\sqrt{ac},$$

teńsizliklerdiń qosındısınan

$$2(a+b+c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})$$

nátıyjede

$$(a+b+c) \geq (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})$$

teńsizlik payda boladı, eger $a=b=c$ bolsa teń boladı. Teńsizlik dálillendi.

2-misal. $x, y > 0$ bolsa, $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshiliwı: Teńsizlikdi apıwayılastıramız

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x^2 + y^2 + 1$$

$$+ \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq xy, \\ \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \geq y, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \geq x, \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y.$$

teńsizlik dálillendi.

2) Orta geometrik hám orta garmonikalıq mánisler arasındadı teńsizlik. $G(a) \geq H(a)$ teńsizligi orınlı bolıwın tekseremiz.

Dálili.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Koshi teńsizliginen paydalanıp

$$(H(a))^{-1} = \left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \right) = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} \geq$$

$$\geq \sqrt[n]{a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1}} = (G(a))^{-1}$$

Teńsizlikke iye bolamız. Egerde $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bolsa $G(a) = H(a)$ teń boladı.

3-misal. Eger $a, b, c > 0$ bolsa $\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshılıwı: Teńsizlikti kóbeytsek $9 \leq (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$, de bunnan

$$\begin{cases} a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \end{cases} \Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{9\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{abc}} = 9.$$

3) Orta arifmetik hám orta kvadratlıq mánisler arasındaǵı teńsizlik.

$K(a) \geq A(a)$ teńsizlik orınlı bolıwın dálilleybiz.

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Dálillew: Teńsizlikti dálillew ushın Koshi teńsizliginen paydalanamız $1 \leq i \leq j \leq n$ boyınsha teńsizlikti jazamız.

$$\frac{a_i^2 + a_j^2}{2} \geq \sqrt{a_i^2 \cdot a_j^2} \Rightarrow a_i^2 + a_j^2 \geq 2a_i a_j$$

Usı boyınsha tómendegi teńlik arqalı korsetemiz.

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq \\ &\leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i^2 + a_j^2) = n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2). \end{aligned}$$

Egerde $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bolsa $K(a) = A(a)$ teńlik kelip shıǵadı.

4-misal. Eger $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ bolsa, tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} + \sqrt{(a+c)(b+d)} + \sqrt{(a+d)(b+c)} \geq 6\sqrt[4]{abcd}$$

Sheshılıwı: Koshi teńsizligine paydalanıp tómendegishe teńliklerdi dúzemiz.

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+b)(c+d)} &= 2\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = 2\sqrt[4]{abcd} \\ \sqrt{(a+c)(b+d)} &= 2\sqrt{\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}} \geq 2\sqrt{\sqrt{ac} \cdot \sqrt{bd}} = 2\sqrt[4]{abcd} \\ \sqrt{(a+d)(b+c)} &= 2\sqrt{\frac{a+d}{2} \cdot \frac{b+c}{2}} \geq 2\sqrt{\sqrt{ad} \cdot \sqrt{bc}} = 2\sqrt[4]{abcd} \end{aligned}$$

Endi teńliklerdi qosamız.

Nátiyjede

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} + \sqrt{(a+c)(b+d)} + \sqrt{(a+d)(b+c)} \geq 6\sqrt[4]{abcd}$$

kelip shıǵadı. Teńsizlik dálillendi.

5-misal. a_1, a_2, b_1, b_2 sanları ushın tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}.$$

Sheshılıwı: teńsizlikti dálillew ushın Koshi teńsizliginen paydalanamız.

$$a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \geq 2\sqrt{a_1^2 b_1^2 a_2^2 b_2^2}$$

$$a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \geq 2|a_1 b_1 a_2 b_2| \geq 2a_1 b_1 a_2 b_2$$

$$a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \geq a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2$$

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$$

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2| \geq a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \geq 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \geq a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

$$\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2 \geq (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2$$

$$\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right) \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}$$

Teńsizlik kelip shıǵadı. Egerde $a_1 b_2 = a_2 b_1$ bolsa teńlik orınlı boladı. Teńsizlik dálillendi.

6-misal. Eger $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ sanları bar bolsa,

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$$

teńsizligin dálilleń.

Sheshılıwı: Koshi teńsizligi boyınsha tómendegishe teńsizliklerdi dúzemiz.

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$$

Eki teńsizlikdi oń hám shep jaqların bir-birine kóbeytemiz. Nátiyjede

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} = 9abc$$

Nátiyjede joqarıdaǵı biz dálillemekshi bolǵan teńsizlik kelip shıǵadı. Teńsizlik dálillendi.

7-misal. Eger $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ bolsa

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)}$$

teńsizlikti dálilleń.

Sheshılıwı:

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)}$$

berilgen teńsizlikti kvadratqa kóteremiz.

$$\begin{aligned}
& (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x + y + z) \\
& \Leftrightarrow (xy)^2 + 2xy^2z + (yz)^2 + 2(xy + yz)zx + (zx)^2 \geq 3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2 \\
& \Rightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z) \quad (1)
\end{aligned}$$

Koshi teńsizliginen paydalanıp tómendegi teńliklerdi dúzemiz.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2y^2 + x^2z^2}{2} & \geq \sqrt{x^4y^2z^2} = |x^2yz| = x^2yz, \\
\frac{y^2z^2 + x^2y^2}{2} & \geq \sqrt{x^2y^4z^2} = |xy^2z| = xy^2z, \\
\frac{z^2x^2 + z^2y^2}{2} & \geq \sqrt{x^2y^2z^4} = |xyz^2| = xyz^2
\end{aligned}$$

Aqırǵı úsh teńsizlikti qossaq, (1) teńsizlik kelip shıǵadı. Teńsizlik dálillendi.

8-mısal. n natural sanlar ushın $(n!) \leq \left(\frac{(n+1)}{2}\right)^n$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshılıwı: $(n!) \leq \left(\frac{(n+1)}{2}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \leq \left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (1)$

$n \in N$ san bolǵanlıqtan sonǵı teńsizlikti tómendegishe túrlendiremiz.

$$\frac{n+1}{2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n+1)n}{2} = \frac{1}{n}(1+2+3+\dots+n)$$

Bul teńlikti teńsizliktiń oń jaǵı menen alıstıramız.

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{n}(1+2+3+\dots+n)$$

Nátıyjede orta arifmetikalıq hám orta geometriyalıq mánisler arasındǵı qatnasqa tiykarlanıp (1) teńsizlik $n \geq 2$ sanları ushın dálillendi.

9-mısal. Oń a, b, c sanları ushın $abc = 8$ shárt qanaatlandırılса, onda

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

Teńsizlikti dálilleń.

Sheshılıwı: Orta arifmetikalıq hám orta geometriyalıq mánisler boyınsha Koshi teńsizliginen paydalanıp,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+a^3} &= \sqrt{(1+a)(1+a^2-a)} \leq \frac{2+a^2}{2}, \\
\sqrt{1+b^3} &= \sqrt{(1+b)(1+b^2-b)} \leq \frac{2+b^2}{2}, \\
\sqrt{1+c^3} &= \sqrt{(1+c)(1+c^2-c)} \leq \frac{2+c^2}{2}
\end{aligned}$$

Qatnaslardı alamız. Endi tómendegi teńsizlikti dálillesek jetkilikli boladı:

$$\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)} + \frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)} + \frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$3(a^2(2+c^2) + b^2(2+a^2) + c^2(2+b^2)) \geq (2+a^2)(2+b^2)(2+c^2) \Leftrightarrow$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2b^2c^2 + 8 = 72$$

Bul teńsizlik tómendegi teńsizliklerdi aǵzama-aǵza qosıwdan kelip shıǵadı.

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^4} = 48,$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 24$$

Demek joqarıdaǵılardan teńsizliktiń dálilleniwi payda boldı. Teńsizlik dálillendi.

10-mısal. Eger $0 \leq a \leq b \leq c$ shárt orınlansa, onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc$$

Sheshılıwı: Orta arifmetikalıq hám orta geometriyalıq mánisler boyınsha berilgen Koshi teńsizliginen tómendegishe paydalanamız:

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) = (a+b+b+b)(b+c+c+c+c)(c+2a) \geq$$

$$\geq 4\sqrt[4]{ab^3} \cdot 5\sqrt[5]{b \cdot c^4} \cdot 3\sqrt[3]{a^2c} = 60a^{\frac{11}{12}} \cdot b^{\frac{19}{20}} \cdot c^{\frac{17}{15}} =$$

$$= 60abc \frac{c^{\frac{2}{15}}}{a^{\frac{1}{12}} \cdot b^{\frac{1}{20}}} = 60abc \cdot \frac{c^{\frac{1}{12}} \cdot c^{\frac{1}{20}}}{a^{\frac{1}{12}} \cdot b^{\frac{1}{20}}} = 60abc \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{12}} \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{20}} \geq 60abc$$

Bunda $\left(\frac{c}{a}\right), \left(\frac{c}{b}\right) \geq 1$ boladı. Teńsizlik dálillendi.

Shınıǵıwlar.

1. Eger $a, b, c \in R$ hám $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ bolsa, onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\frac{bc}{a-a^3} + \frac{ac}{b-b^3} + \frac{ab}{c-c^3} \geq \frac{5}{2}$$

2. Eger $a > 0, b > 0$ bolsa $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$ teńsizlikti dálilleń.

3. Eger $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ bolsa $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \geq a_1(a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ teńsizlikti dálilleń.

4. Eger $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ bolsa $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ teńsizlikti dálilleń.

5. Eger $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ bolsa $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ teńsizlikti dálilleń.

6. Teńsizlikti dálilleń. $\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$

7. Eger $a > 0, b > 0, c > 0$ bolsa, onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\frac{a^2 - ab}{a + b} + \frac{b^2 - bc}{b + c} + \frac{c^2 - ac}{a + c} \geq 0$$

8. Eger $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ bolsa, $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$ teńsizlikti dálilleń.

9. Eger $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ bolsa, $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$

10. Eger $a \geq 0, b \geq 0$ sanları bar bolsa,

$$\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{(c - x)^2 + b} \geq \sqrt{c^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$

teńsizlikti dálilleń.

11. Eger $a, b, c > 0$ hám $a + b + c = 1$ onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\sqrt{a + (b - c)^2} + \sqrt{b + (a - c)^2} + \sqrt{c + (a - b)^2} \geq \sqrt{3}$$

12. Eger $a, b, c > 0$ hám $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\frac{bc}{a - a^3} + \frac{ac}{b - b^3} + \frac{ab}{c - c^3} \geq \frac{5}{2}$$

13. Eger $a \geq 0$ bolsa, onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq 3ab^2 - 4$$

14. Eger $a, b, c \in \mathbb{R}$ bolsa, onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$(a + b)^4 + (b + c)^4 + (a + c)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4)$$

15. Eger $x, y, z > 0$ hám $x + y + z = 3$ bolsa, onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + xz + yz$$

16. Eger $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ bolsa, onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$a^3 + b^3 + c^3 + 15abc \leq 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

17. Eger $a, b, c > 0$ bolsa $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 4\left(\frac{ab + bc + ac}{a^2 + b^2 + c^2}\right) \geq 7$ dálilleń.

18. Eger $a, b, c > 0$ bolsa, onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{ab + bc + ac}{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \sqrt{3} + 1$$

19. Egerde n natural san bolsa, tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$(n + 1)^n \geq (2n)!!$$

20. Egerde n natural san bolsa, tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$(n!)^2 \geq \left[\frac{(n + 1)(2n + 1)}{6} \right]^n$$

21. Egerde n natural san bolsa, tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$3n(3n+1)^2 > 4^n \sqrt{(3n)!}$$

22. Eger $x, y, z \geq 0$ hám $x + y + z = 2$ bolsa, $\sqrt{x^3y + y^3z + z^3x} + \sqrt{xy^3 + yz^3 + zx^3} \leq 2$ ni dálilleń.

23. Eger $a, b, c \geq 0$ bolsa,

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 4 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right) \text{ ni dálilleń.}$$

24. Oń a, b, c sanlardıń kóbeymesi birge teń bolsa,

$$\frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{b} + 0,64}} + \frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{c} + 0,64}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{a} + 0,64}} \geq 1,2$$

teńsizlikti dálilleń.

25. Oń a, b sanlar ushın $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{3ab^2} + \frac{1}{3a^2b} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{64}{3(a+b)^3}$ teńsizlikti dálilleń.

26. Oń a, b, c sanlar $ab + bc + ca = 1$ teńlikti qanaatlandirsa,

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}$$

teńsizlikti dálilleń.

27. Eger $x > 0$ hám n -oń putin san bolsa, onda tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \dots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}$$

28. Eger a, b sanları oń hám hár qiyli sanlar bolsa, onda tómendegi teńsizlikti dálilleń. $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n > (n+1)(ab)^{\frac{n}{2}}$

29. Eger $a > 0, b > 0, 0 < p < 1$ sanları ushın tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$(a+b)^p \cdot a^{1-p} < a + pb$$

30. Haqiyqiy oń x, y, z sanlar ushın shártdi $xyz \geq 1$ qanaatlandirilsa tómendegi

teńsizlikti dálilleń. $\frac{x^5}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 1$

3-§. Teńsizliklerdi dálillewde Matematikalıq indukciya metodınan paydalanıw

Matematikalıq induktsiya metodı teoremlardı, tastıyıqlawlardı hám teńsizliklerdi dálillewde keń túrde paydalanıladı.

Induktsiya - «alıp keledi» degendi ańlatıwshı latın sózi.

Oqıwshı dáslepki waqıtlarda matematikalıq túsiniqlerdi baqlaw, tájiriybe arqalı qabıl etiwge beyimlengen boladı; tájiriybe hám baqlaw arqalı matematikalıq shınlıqtı úyreniw induktsiya dep ataladı. Ulıwma túrde induktsiya

dep dara tastıyqlawlardan ulıwma tastıyqlawlardı keltirip shıǵarıwǵa aytıladı. Induktsiya tolıq, tolıq emes hám matematikalıq induksiya bolıp bólinedi.

Eger múmkin bolǵan dara jaǵdaylardıń birewinde qaldırmaı qaraǵannan ulıwma juwmaq shıǵarılsa bul tolıq induksiya boladı. Mısalı: ekinshi onlıqtaǵı ápiwayı sanlardı anıqlaw ushın ondaǵı barlıq sanlardı tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$11 = 1 \cdot 11; 12 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3; 13 = 1 \cdot 13; 14 = 1 \cdot 2 \cdot 7; 15 = 1 \cdot 3 \cdot 5;$$

$$16 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2; 17 = 1 \cdot 17;$$

$$18 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3; 19 = 1 \cdot 19; 20 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

Ekinshi onlıqta barlıǵı 4 ápiwayı san bar eken.

Egerde ulıwma juwmaq dara jaǵdaylardı tolıq qaramastan shıǵarılǵan bolsa, onda tolıq emes induksiya boladı. Tolıq emes induksiya tiykarında shıǵarılǵan juwmaqtań durıslıǵına iseniwge bolmaydı.

Mısalı. $y = x^2 + x + 41$ úsh aǵzalığı $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 39$ mánislerinde ápiwayı san, al $x=40$ mánisinde 41^2 quramalı san boladı. Solay etip biziń pikirimiz bir neshe dara jaǵdaylarda durıs bolıp, ulıwma alǵanda durıs bolmay shıqtı.

Endi soraw tuwıladı: bazı bir tastıyqlawlar bir neshe dara jaǵdaylar ushın durıs, biraq barlıq dara jaǵdaylardı qarap shıǵıw múmkin emes, sonda bul tastıyqlawdıń durıslıǵın qalay biliwge boladı. Bul soraw matematikalıq induksiya metodı járdemi menen sheshiledi.

Matematikalıq induksiya metodı

Matematikalıq induksiya metodınıń tiykarı tómendegi printsipke tiykarlangan: Eger bazıbir tastıyqlaw

1) $n = 1$ bolǵanda durıs hám

2) usı tastıyqlawdıń qanday da bir erikli $n = k$ mánisinde durıslıǵınan $n = k + 1$ bolǵanda da durıs bolatuǵınlıǵı kelip shıqsa, onda ol tastıyqlaw qálegen natural n sanı ushın durıs boladı. Usı printsipke tiykarlangan dálillew metodı *matematikalıq induksiya metodı* dep ataladı.

Endi biz Matematikalıq induksiya metodı járdeminde teńsizliklerdi dálillewdi úyrenemiz.

1-mısal: Eger $n > 1$ bolǵanda $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshılıwı: 1) Joqarıdaǵı tastıyqlaw boyınsha dáslep $n = 2$ bolǵanda mánisi

$$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$

Teńsizlik orınlanadı.

2) $n = k > 1$ da $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$

orınly dep esaplap, $n = k + 1$ daǵı teńsizlikty tekseremiz.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \\ & + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \\ & = \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24} \end{aligned}$$

Demek, $n = k + 1$ de teńsizlik orınly bolatyn eken. Teńsizlik $n > 1$ de dálillendi.

2-misal: $a + b > 0$, $a \neq b$, n -birden úlken natural sanlar ushyn

$$2^{n-1} a^n + b^n > a + b^n$$

ekenligin dálilleń.

Sheshiliwı: 1) $n = 2$ de

$$2^{2-1} a^2 + b^2 > a + b^2$$

$$2a^2 + 2b^2 > a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 + b^2 > 2ab \Rightarrow a + b^2 > 0$$

Teńsizlik orınly. 2) $n = k$ da $2^{k-1} a^k + b^k > a + b^k$ teńsizlik orınly bólsin.

$n = k + 1$ de $2^k a^{k+1} + b^{k+1} > a + b^{k+1}$ ekenligin kórsetemiz.

$$\begin{aligned} a + b^{k+1} &= a + b^k a + b < 2^{k-1} a^k + b^k a + b = \\ &= 2^{k-1} a^{k+1} + a^k b + b^k a + b^{k+1}. \end{aligned}$$

Bunnan $a^k b + b^k a < a^{k+1} + b^{k+1}$

$$a^k a - b + b^k b - a > 0 \Rightarrow a - b a^k + b^k > 0$$

Eger $a > b$ bolsa, onda kóbeyme oń. Eger $a < b$ bolsada kóbeyme oń san boladı. Sonıń ushyn

$$a + b^{k+1} < 2^{k-1} a^{k+1} + a^k b + b^k a + a^{k+1} = 2^k a^{k+1} + b^{k+1}$$

Demek teńsizlik dálillendi.

3-misal. Qálegen n natural san ushyn

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

Teńsizlik orınly bóliwin dálilleń.

Sheshiliwı: $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1}$ dep belgilep alamız.

$n = 1$ de tekseremiz,

$$S_1 = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{13}{12} > 1.$$

$n = k$ da $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3 \cdot k + 1} > 1$ teńsizlik orınly dep esaplaymız.

$n = k + 1$ de teńsizlik qanaatlandırıwın dálilleymız.

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3 \cdot k + 1} + \frac{1}{3 \cdot k + 2} + \frac{1}{3 \cdot k + 3} + \frac{1}{3 \cdot k + 4} > 1$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3 \cdot k + 1} + \frac{1}{3 \cdot k + 2} + \frac{1}{3 \cdot k + 3} + \frac{1}{3 \cdot k + 4} +$$

$$+ \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} \right) = \underbrace{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3 \cdot k + 1}}_{S_k > 1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}}_{> 0} > 1$$

Endi sonǵı 4 aǵzasıdan dúzilgen ańlatpa nolden úlken ekenin dálilleymız.

$$\frac{1}{3 \cdot k + 2} + \frac{1}{3 \cdot k + 3} + \frac{1}{3 \cdot k + 4} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} - \frac{2}{3k+3} =$$

$$= \frac{3k+4}{3k+2} \cdot \frac{3k+3}{3k+3} + \frac{3k+2}{3k+3} \cdot \frac{3k+3}{3k+4} - \frac{6k+4}{3k+3} =$$

$$= \frac{9k^2 + 21k + 12 + 9k^2 + 15 - 18k^2 - 36k - 16}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} =$$

$$= \frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > 0$$

Demek bul nolden ekenı kelıp shıǵadı. Matematikalıq induksiya metodı boyınsha qálegen n natural san ushın $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$ teńsizlik qanaatlandıradı dep juwmaq shıǵaramız.

4-mısal. $a_1, a_2, \dots, a_n$ -oń sanlar ushın

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Orınlı bolıwın dálilleń.

Sheshılıwı: $n = 1$ de $a_1 = a_1$

$$n = 2 \text{ de } \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2} \Rightarrow \sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}^2 \geq 0$$

orınlı.

Endi $n = k$ teńsizlik orınlı bolsa, teńsizlikdi $n = 2k$ da orınlı ekenin kórsetemiz.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k}$$

Orınlı bolsın.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k}}{2k} \geq \sqrt[2k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2k}}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt[2k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2k}} &= \sqrt{\sqrt[k]{a_1 \cdot \dots \cdot a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{2k}}} \leq \\
&\leq \frac{\sqrt[k]{a_1 \cdot \dots \cdot a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{2k}}}{2} \leq \frac{\frac{a_1 + \dots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + \dots + a_{2k}}{k}}{2} \\
&= \frac{a_1 + \dots + a_{2k}}{2k}
\end{aligned}$$

$n = 2k$ de teńsizlik tuwri ekenin kórsetedi. Demek, bul $n = 4, n = 8, \dots, n = 2^r$ r -natural sanlarda tuwri. Qálegen n -de kórsetiw ushın $n = k$ da tuwri bolsa, $n = k - 1$ tuwrlıǵın kórsetiw jetkilikli.

Meyli bizge $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ -oń sanlar berilgen bolsin. $x > 0$ qandayda bir san. Bunda

$$\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot x} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + x}{k}$$

x ni sonday etip tanlaymız,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + x}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1}$$

Yáǵniy

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1} \\
\sqrt[k]{\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})}{k-1}} &\leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1} \\
\sqrt[k-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1}} &\leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1}
\end{aligned}$$

Endi eger m – qálegen natural san bolsin. Eger $m = 2^r$ bolsa teńsizlikdın orınlı ekenin kórsetdik. $m = 2n$ bolsa, orınlı ekeni kórsetildi, $m = 2n - 1$ bolsa $m = 2n$ da orınlıǵınan joqarida kórsetgenimizdey $2n - 1$ de orınlı bolatuǵını kelip shıǵadı. Teńsizlik dálillendi.

Shınıǵıwlar

1. Teńsizlikті dálilleń. $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n, n \in N$
2. Teńsizlikті dálilleń. $n! > \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \forall n \in N : n \geq 2$
3. Teńsizlikті dálilleń. $n! > n^{\frac{n}{2}}, \forall n \in N : n \geq 3$
4. Teńsizlikті dálilleń. $n! > 2^{n-1}, \forall n \in N : n \geq 3$
5. Teńsizlikті dálilleń. $2^n > n^2 + 2, n \geq 5$
6. Teńsizlikті dálilleń. $n! \geq (n-1)!^{n!}$

7. Teńsizlikti dálilleń. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

8. Teńsizlikti dálilleń. $5^n > 7n - 3$

9. Teńsizlikti dálilleń. $n \geq 2, 4^n > 3^n + 2^n$

10. Teńsizlikti dálilleń. $3^n > 2^n + n$

11. Teńsizlikti dálilleń. $n! > 2^{2n-3}, \forall n \in N : n \geq 5$

12. Teńsizlikti dálilleń. $2^n > n^2 + 1, n \geq 5$

13. Teńsizlikti dálilleń. $n \geq 7, 2^{n-1} > n \cdot n + 1$

14. Teńsizlikti dálilleń. $n \geq 10, 2^n > n^3$

15. Teńsizlikti dálilleń. $n = 1, 2$, hám $n \geq 6, 2^n > 2n^2 - 3n + 1$

16. Hár qanday $n \geq 2, n \in N$ larda $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$ teńsizlik orınlı bolıwın dálilleń.

17. Eger $a > 0$ hám n qálegen san bolsa tómendegi teńsizlikti dálilleń.

$$1 - a^n < \frac{1}{1 + na}$$

18. Teńsizlikti dálilleń. $3^n - 2^n \geq n, \forall n \in N$

19. Teńsizlikti dálilleń. $\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n+1}{n}, \forall n \in N$

20. Teńsizlikti dálilleń. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}, \forall n \in N$

21. Teńsizlikti dálilleń. $2n - 1! < n^{2n-1}, \forall n \in N : n \geq 2$

22. Eger n natural san bolsa, $\lg n + 1 > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg n}{n}$ teńsizlikti dálilleń.

23. Hár qanday $n \in N$ larde $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ teńsizlik orınlı bolıwın dálilleń.

24. Hár qanday $n \geq 3, n \in N$ larda $2^n > 2n + 1$ teńsizlik orınlı bolıwın dálilleń.

25. Eger $0 \leq \alpha_i \leq \pi$ bolsa, bunda $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \geq \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{n}$$

Teńsizlikti dálilleń.

Juwmaqlaw

Búgingi kúnde klassikalıq teńsizlikler matematikanıń kópshilik tarawlarında tiykarǵı orınlardı iyeleydi. Mektep kursındaǵı matematikanıń oqıw dástu`rinde de teńsizlikler ushın keń orın berilgen. Teńsizlikler tuwındı ha`m integraldı, sonday-aq qatarlar teoriyasınıń geypara elementlerin úyrengende de keń qollanıladı hám teńsizlikler járdeminde izbe-izlikler, funktsiyalar izertlenedi.

Biz bul oqıw-metodikalıq qollanbada teńsizliklerdi dálillew usılları hám olardı sheshiw metodikasın jarattıq. Qollanbada teńsizlikler tuwralı ulıwma túsınık, orta mánisler, matematikalıq induksiya metodı hám taǵı basqada usıllar arqalı teńsizliklerdi dálillew boyınsha keń túsınıklar berilgen. Teńsizlikler sheshkende jiberiletuǵın tiykarǵı qáteliklerdi joǵaltıw jolları usılları anıqlama hám de mısallar, qosımsha shınıǵıwlar arqalı kórsetilip ótilgen.

Ulıwmalastırıp aytqanda, bul jumıstı, teńsizliklerdi dálillew usılların jeńil ózlestiriwde metodikalıq qural retinde qollanıw múmkin.

Paydalangan ádebiyatlar

1. V.N. Litvinenko A.G.Mordkovich., Praktikum po Elementarnoy matematike. Moskva «ABF». 1995.
2. Í.X.Sivashinskiy. «Neravenstva v zadachax» «Nauka» , 1967.
3. Blox A.Sh., Neverov G.S., Reshenie neravenstv, «Minsk», 1962.
4. E.Bekkenbax, R.Bellman., Vvedenie v neravenstva, «Mir» Moskva 1965.
5. Mitrinovic D.S., Elementary inequalities, Groningen, 1970
6. Krijanovskiy D.A., Elementı teorii neravenstv, Onti, 1936.
7. A.U.Umirbekov, Sh.Sh.Shaabzalov. Matematikani takrorlang. Toshkent «Woqituvchi» 1989.
8. M.A.Mirzaahmedov,R.A.Karimov. Tenglama va tengsizliklarni yechish. Toshkent «Óqituvchi» 1989.
9. A.Ya.Simonov. D.S.Bakaev. Sistema trenirovochnıx zadach i uprajneniy po matematike. Moskva «Prosveshenie» 1991.
10. [http: //WWW. Mathmat. narod. ru/](http://WWW.Mathmat.narod.ru/).
11. [http: //WWW. bymath. net/](http://WWW.bymath.net/).
12. [http: //WWW. mathemlib. ru/](http://WWW.mathemlib.ru/).

MAZMUNÍ TEÑSIZLIKLERDI DÁLILLEW USÍLLARÍ

Kirisiw	3
1-§. Teñsizlikler dálillew boyınsha túsınık	4
1.2. Sanlı teñsizliklerdi dálillew	5
1.3. Teñsizliklerdi qarsıdan dálillew usılı menen dálillew	11
2-§. Orta mánisler arqalı teñsizliklerdi dálillew	13
3-§. Teñsizliklerdi dálillewde matematikalıq indukciya metodınan paydalanıw	20
Juwmaqlaw	26
Ádebiyatlar	27

Dúziwshiler:

Djumabaev Nókisbay - Ájiniyaz atındağı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı matematika oqıtıw metodikası kafedrası p.i.k.docent.

Urazbaeva Manzura - Ájiniyaz atındağı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı matematika oqıtıw metodikası kafedrası úlken oqıtıwshısı.

Oteniyazov Erkin- Ájiniyaz atındağı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı matematika oqıtıw metodikası kafedrası assistenti.

**TEÑSIZLIKLERDI DÁLILLEW
USILLARI
(Oqıw-metodikalıq qollanba)**

Bas redaktor: K.M.Koshanov

Tex. Redaktor: X.K.Shamuratova

Korrektor: Z.B.Baltabaeva

Operator: N.Nısanbaev

Ájiniyaz atındağı NMPİ Redakciya-baspa bólimi
Ájiniyaz atındağı NMPİ baspaxanasında basılğan 2020-j.
Buyırtpa № 0144. Nusqası 50 dana. Formatı 60x84. Kólemi 1,25 b.t.
230105, Nókis qalası, P. Seytov kóshesi nomersiz jay. Reestr № 11-3084