

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM
VAZIRLIGI**

AJINIYOZ NOMIDAGI NUKUS DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

Qo‘l yozma huquqida

UDK 515.1.372.851

ATABAEVA QUNDUZ AZATJANOVNA

**UZLUKSIZ AKSLANTIRISHLARI FAQATGINA O‘ZGARMASLARDAN
IBORAT FAZO MISOLI**

5A110101 – Aniq va tabiiy fanlarni o‘qitish metodikasi (matematika)

**Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan
DISSERTATSIYA**

Ilmiy rahbar: f.-m.f.d., prof. Zaitov.A.A

Nukus – 2022

ANNOTATSIYA

Mazkur dissertatsiya ishida uzluksiz funksiyalari faqat o'zgarmaslardan iborat fazoni qurish o'rganiladi. Bundan tashqari $A(m)$ fazoni qurish va uning ayrim xossalari, $A(m)$ ko'rinishidagi fazolardagi uzluksiz funksiyalarning doimiylik to'plamlari va regulyar bo'lib, to'la regulyar bo'lmaydigan fazo misoli o'rganiladi.

ANNOTATION

In this dissertation the construction of a space whose continuous functions consist only of invariants is studied. In addition, the construction of the space $A(m)$ and some of its properties, the set of constants of continuous functions in the spaces of the form $A(m)$ and the example of a regular and completely non-regular space are studied.

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I BOB. UMUMIY TOPOLOGIYANING TAYANCH TUSHUNCHALARI .	7
1.1-§. Topologiya tarixi. Topologik fazo.....	7
1.2-§. Kompaktli fazo. Kesmaning kompaktligini o‘rnatish metodikasi	18
1.3-§. Lokal kompaktli fazolar. Bitta nuqtasi chiqarib tashlangan aylana va to‘g‘ri chiziqning o‘zaro gomeomorfligini isbotlash metodikasi	23
I bob bo‘yicha xulosa	28
II BOB.TOPOLOGIK FAZO SINFLARI	29
2.1-§. Topologik fazoda to‘plamlararo amallar. Topologiya kiritish usullari .	28
2.2-§. Uzluksiz akslantirishlar. Ochiq va yopiq akslantirishlar Gomeomorfizm	41
2.3-§. Topologik fazolarning ajrimlilik aksiomalari.....	48
II bob bo‘yicha xulosa.....	56
III BOB. UZLUKSIZ FUNKSIYALARI FAQATGINA O‘ZGARMASLARDAN IBORAT FAZONI QURISH	57
3.1-§. $A(m)$ fazoni qurish va uning ayrim xossalari	57
3.2-§. $A(m)$ ko‘rinishidagi fazolardagi uzluksiz funksiyalarning doimiylik to‘plamlari	59
3.3-§. Regulyar bo‘lib, to‘la regulyar bo‘lmaydigan fazo misoli	61
3.4-§. Har bir uzluksiz funksiyasi o‘zgarmas bo‘ladigan regulyar fazo misoli	64
III bob bo‘yicha xulosa	66
XULOSA.....	67
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI.....	69

KIRISH

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi.

Jahon miqyosida ilmiy-texnik taraqqiyotning tez sur'atlar bilan rivojlanishi fundamental tadqiqotlarning, shu jumladan matematikaning yangi sohalarini rivojlantirish va olingan natijalarni amaliyotga tadbiq qilishni talab etmoqda. Matematikadagi amaliyot talablaridan kelib chiqadigan ko'pgina masalalar optimallashtirish va optimal boshqarish masalalariga keltiriladi. Matematika, matematik fizika va iqtisodiyotning turli sohalarida giperfazo tushunchasi ko'plab tatbiqlari amalda qo'llanilmoqda. Xususan, giperfazoning har bir elementi idempotent o'lchov (Maslov integrali) sifatida qaralishi mumkin. Idempotent o'lchovlar dinamik optimallashtirish masalalarida yuzaga keladi.

J. P. Aubinning ishida matematik iqtisodiyotda noaniqlikni modellashtirish uchun Maslov o'lchovlaridan foydalanish klassik ehtimollik nazariyasidan foydalanish kabi muhim hisoblanadi.

An'anaviy matematikani sonlar maydoni ustida kvant nazariyasi kabi talqin qilish mumkin. Uning yarim maydonlar (va yarim xalqalar) ustida matematika idempotent qo'shish amali bilan aniqlanadigan "klassik analogi" – idempotent matematika ham mavjud. Idempotent matematika ancha rivojlangan. Xususan, idempotent funktsional analiz qurilgan; G. L. Litvinov, V. P. Maslov va G. B. Shpizning ishlarida idempotent o'lchovlari va optimallashtirish o'rtasidagi o'xshashlik qayd etilgan. Idempotent ehtimolliklar o'lchoviga an'anaviy matematikada ehtimolliklar o'lchovi mos keladi. Ammo, natijalar shuni ko'rsatadiki, ehtimollik o'lchovlari va idempotent ehtimollik o'lchovlarining o'xshash natijalarni isbotlash uchun turli xil usullar talab qilinadi.

O'tgan asrning oxirida cheksiz o'lchovli ko'pxilliklar umumiy nazariyasining qurilishi "tabiatda" mavjud bo'lgan cheksiz o'lchovli ob'ektlarga qiziqishni kuchaytirdi. Idempotent ehtimolliklar o'lchovi funktori I esa, ixtiyoriy kompakt to'plamlarni aynan shunday ob'ektlarga – max-plus-qavariq fazolarning max-plus-qavariq qism to'plamlarga o'tkazadi.

Mamlakatimizda tabiiy va aniq fanlarga e'tibor sezilarli darajada kuchaytirildi, xususan, optimallashtirish va optimal boshqarish masalalarini tadqiq qilishga alohida e'tibor qaratildi. Ushbu sohada maqsadli ilmiy izlanishlarni, xususan, topologik fazolardagi idempotent ehtimollik o'lchovlari fazolarining geometrik va topologik xossalarini qo'llash muhim vazifalardan biridir. Bugungi kunda mamlakatimizda "Funksional analiz, geometriya va topologiya fanlarining ustuvor yo'nalishlari bo'yicha halqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish asosiy vazifalar va faoliyat yo'nalishlari" etib belgilandi. Qaror ijrosini ta'minlashda topologik fazolardagi idempotent ehtimollik o'lchovlari nazariyasini, xususan, giperfazodagi yangi strukturalarni rivojlantirish muhim ahamiyatga ega.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi №PF-4947 "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha harakatlar strategiyasi to'g'risidagi" Farmoni, 2017-yil 17-fevraldagi №PQ-2789-son «Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi, 2017 yil 20 apreldagi PQ-2909-son «Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi va 2018-yil 27-apreldagi № PQ-3682 "Innovatsion g'oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risidagi" qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqot ob'yekti va predmeti. Mazkur magistrlik dissertatsiyasining tadqiqot ob'yekti idempotent o'lchovlar fazosi, xususan, giperfazodagi metrika bo'lib, tadqiqot predmeti zamonaviy matematikaning Umumiy topologiya, Funksional analiz sohalari hisoblanadi.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari. Magistrlik dissertatsiyasining maqsadi giperfazoda Hausdorff metrikasidan farqli yangi metrika kiritish va bu metrika nuqtali yaqinlashish topologiyasini hosil qilishini va boshqa xossalarini taqiq qilishdan iborat.

Magistrlik dissertatsiyasining vazifalari quyidagilardan iborat:

Idempotent o'lchovlar fazosidagi nuqtali yaqinlashish topologiyasini hosil qiluvchi yangicha talqindagi bazani o'rganish.

Idempotent o'lchovlar fazosidagi nuqtali yaqinlashish topologiyasini hosil qiluvchi metrikani o'rganish.

Giperfazoda nuqtali yaqinlashish topologiyasini hosil qiluvchi Hausdorff metrikasidan farq qiluvchi yangi metrikani kiritish.

Giperfazoda kiritilgan yangi metrikaning xossalarini o'rganish.

Ilmiy yangiligi. Magistrlik dissertatsiyasining ilmiy yangiligi unda giperfazoda yangi metrika kiritilishi bilan baholanadi.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari.

Idempotent o'lchovlar fazosidagi nuqtali yaqinlashish topologiyasini hosil qiluvchi yangi baza kiritish. Bunda giperfazodagi Viyetoris topologiyasini hosil qiluvchi bazani modifikasiya qilish farazini ilgari surish.

Idempotent o'lchovlar fazosida kiritilgan bazani qo'llagan holda nuqtali yaqinlashish topologiyasini hosil qiluvchi metrika kiritish. Bunda ehtimollik o'lchovlari fazosidagi Kantorovich-Rubinstein metrikasini modifikasiya qilish farazini ilgari surish.

Giperfazoda nuqtali yaqinlashish topologiyasini hosil qiluvchi Hausdorff metrikasidan farq qiluvchi yangi metrikani kiritish. Bunda idempotent ehtimollik o'lchovlari fazosidagi Zaitov metrikasini modifikasiya qilish farazini ilgari surish.

Giperfazoda kiritilgan yangi metrikaning xossalarini o'rganish. Viyetoris topologiyasini hosil qilishi farazini ilgari surish.

Tadqiqot mavzusi bo'yicha adabiyotlar sharhi (tahlili). Idempotent funksional analiz V. P. Maslov, V. N. Kolokolsov, G. L. Litvinov va boshqalarning ishlarida qurilgan va rivojlantirilgan. M. Zarichnyy, T. Radul, T. Banax, A. A. Zaitov, I. I. Tojiev, O. Hubal, V. Brydun, A. Savchenko, M. Cencelj, D. Repovš va boshqalar o'z tadqiqotlarida kategorik usullardan foydalangan holda nafaqat ushbu nazariyani, balki kovariant funktorlar nazariyasini va umumiy

topologiyani yanada rivojlantirishga o'z hissalarini qo'shdilar.

Giperfazo konstruksiyasi Hausdorffning ishlariga borib taqaladi. Giperfazoda topologiya kiritish Viyetoirs taklif etgan baza orqali amalga oshirilishi ko'plab ilmiy siljishlarga olib keldi. Bu sohada ko'plab olimlar mehnat qilishdi va natijaga erishdi. Bu ro'yxatga albbatta birinchi navbatda Hausdorff, Vietorislarni, qolaversa, R. Engelking, V. Fedorchuk, O'. Tashmetov, A. Zaitov va boshqalarni qo'shish mumkin.

O'rganishiga keng qamrovli adabiyotlar bag'ishlangan bo'lishiga qaramasdan giperfazoning hali ham o'rganilmagan jihatlari uchrab turadi. Shular jumlasiga giperfazoda qaralayotgan yangi metrikaning kiritish mumkin. Bu metrika giperfazoga hech qanday qo'shimcha konstruksiyalarsiz, tabiiy yo'l bilan kiritilishi dissertatsiyada bayon etildi. Bu metrika avval o'rganilmagan.

Tadqiqotda qo'llanilgan metodikaning tavsifi. Magistrlik dissertatsiyasini tayyorlashda umumiy topologiya va funksional analizning metodlari qo'llanindi.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan kelib chiqadiki, olingan natijalarni giperfazo va idempotent o'lchovlar fazosi bo'yicha keyingi tadqiqotlarda foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati giperfazoda kiritilgan yangi metrika yordamida giperfazoning va undan kengroq bo'lgan idempotent ehtimollik o'lchovlari fazosining geometrik va topologik xossalari yangicha talqinda tahlil qilish imkonini beradi.

Ish tuzilmasining tavsifi. Magistrlik dissertatsiyasi kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Magistrlik dissertatsiyasi 72 betdan iborat.

I BOB. UMUMIY TOPOLOGIYANING TAYANCH TUSHUNCHALARI

1.1-§. Topologiya tarixi. Topologik fazo

Ko'pgina matematik tushunchalar, ba'zida butun bir matematik nazariyalar vujudga kelishi bilan matematikadan tashqarida bir qancha vaqt davomida o'z tatbig'ini topmaydi. Jumboqli kompleks sonlar tarixi bunga yaqqol misol bo'ladi: ushbu sonlar bir necha yuz yillar mobaynida boshqa sohalarda qo'llanilmay, keyinchalik fizika va mexanikaga kirib keldi. Shunga o'xshab, matematikaning asosiy bo'g'ini bo'lmish geometriya fanini oladigan bo'lsak, bu sohada noevklid (Lobachevskiy) geometriyaning asosiy obyektlari – Lobachevskiy tekisligi va fazosi (Lobachevskiy tekisligi modeli) ham bir necha o'n yillar davomida o'z tatbig'ini topmagan.

Shunga o'xshash sohalardan yana biri Evklid geometriyasi, Lobachevskiy geometriyasi, zamonamiz geometriyasi, qolaversa, zamonaviy matematikaning bir bo'limi, hosilasi bo'lgan topologiya fanidir. Topologiya so'zining lug'aviy ma'nosi yunoncha topos-joy, o'rin, to'ys-qonun so'zlaridan iborat.

Topologiya atamasini birinchi bo'lib Listing qo'llagan. Topologiya – matematikaning nisbatan yosh va muhim bo'limlaridan biridir. Topologiya fani geometriya va matematik analiz fanlarining qator fundamental faktlarini (tushunchalarini) umumiy nuqtai nazardan qayta ko'rib chiqish natijasida paydo bo'ldi.

Topologiya fan sifatida ilk marta XIX asrning oxirlarida buyuk fransuz matematigi Anri Puankare ishlarida shakllana boshlagan. U topologiyani “analysis situs” (lotinchadan tarjimasi-joy(o'rin) geometriyasi) tahlili deb nomlaydi. Bu atamani esa, matematikaga birinchi bo'lib Riman olib kirgan. Keyinchalik bu atamalar bir so'z bilan topologiya deb atala boshlandi.

A.Puankare topologiya to'g'risida shunday degan edi: “o'zinga keladigan bo'lsak, oldinma-ketin kirib chiqqan turfa yo'llar meni “analysis situs” tomon boshlab keldi”.

Bu o'rinda mashhur fransuz matematigi Andre Veylning topologiya xususida aytgan quyidagi so'zlari ham e'tiborga loyiqdir: "Har bir matematikning qalbini zabt etish ustida topologiya farishtasi bilan mavhum algebra shaytoni kurash olib boradi. Bu orqali, birinchidan, topologiyani ajoyib jozibas va go'zalligi namoyon bo'lsa, ikkinchidan, barcha zamonaviy matematikaning g'aroyib birikishi topologiya va algebraga eltishi ifoda etiladi".

Hozirgi zamon fanlarining rivojlanishida topologiyani fizika, biologiya, ximiya va binobarin geografiya fanlaridagi tatbig'i qo'llanilmoqda. Topologiyani sehirli olamiga kirish mashaqqatlidir. Shu sababli topologiya fanining tushuncha, ta'rif va ma'lumotlarini puxta o'zlashtirish muhim. Oddiy topologik tushunchalar bizni o'rab turgan olamga nazar tashlaganda paydo bo'la boshlaydi. O'z-o'zidan tushunarlik, figuralarning geometrik xossalari figura o'lchamlari, ularning joylashishi, burchaklarining ko'rinishi va hokazolar kiradi.

Bu geometrik xususiyatlardan tashqari, yana nimadir nazarimizdan chetda qolayotgandek tuyuladi. Masalan, geometrik chiziqlarning yopiq yoki yopiq emasligi, figuralarning "teshikli" yoki "teshiksiz", cho'ziluvchan yoki cho'ziluvchan emasligi, geometrik figuralarning zanjirsimonligi yoki yo'qligi, bog'lamli chiziqlarning bog'ichli bo'lishi yoki bo'lmasligi, figuralarni yirtmasdan cho'zish yoki cho'zish mumkin emasligi kabi xossalari inobatga oladigan bo'lsak, Evklid geometriyasidan sal tashqariga chiqishga to'g'ri keladi. Aynan shu o'rganish natijasida va shu kabi geometrik figuralarning xossalari o'rganuvchi topologiya fani elementlari kirib kela boshladi.

A.Puankare nuqtai nazariga ko'ra, topologiya shunday fanki, u geometrik figuralarning sifatli xossalari faqat uch o'lchamli fazoda emas, balki undan yuqori o'lchamli fazolarda ham o'rganishga yordam beradi. Geometrik figuralarning sifatli xossalari deganda, masalan, sferani rezina qobiq bilan qoplangan deb faraz qilib, uni yetarlicha siqishni yoki yetarlicha uzmasdan cho'zishni tushunish mumkin. Sferani bunday almashtirishlar topologik gomeomorfizm deb yuritiladi. Gomeomorfizm natijasida hosil qilingan har xil

geometrik figuralar o'zaro gomeomorf deyiladi. Figuralarning sifatiy xossalari bu figuraga o'zaro gomeomorf bo'lgan barcha geometrik figuralarga tegishli bo'ladi. Bunday xossalar bir so'z bilan topologik xossalar deb ataladi.

Yuqoridagi misoldan ko'rinadiki, sferaning topologik xususiyati uning bir butunligi va bog'lamli ekanligidadir. Sferani chuqurroq o'rganishga, masalan, sfera bilan shar yoki doiraning harakati natijasida gomeomorfligini ko'rsatishga harakat qilsak, uning boshqa hususiyatlari ayon bo'ladi.

Topologiyaning geometrik xususiyatlarga boy muhim yo'nalishlaridan yana biri qo'zg'almas nuqtalar nazariyasidir. Qo'zg'almas nuqtalar nazariyasi algebra va matematik analiz fanlarining asosiy masalalari bilan chambarchas bog'liqdir. Algebra va matematik analizda $f(x) = 0$ (1) tenglamaning yechimlari mavjudmi degan savolga duch kelamiz. Bu yerda $f(x)$ ko'phad yoki boshqa biror funksiya (1) tenglamaga ekvivalent.

$$f(x) + x = x \quad (2)$$

Agar $F(x) = f(x) + x$ deb belgilash kiritsak, ekvivalent $F(x) = x$ (3) tenglamaga ega bo'lamiz. Bu (3) tenglamaning yechimlari F akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi. Ushbu akslantirish birorta yopiq (Evklid fazosida), albatta, chegaralangan to'plamda qaralsa, qo'zg'almas nuqta mavjudligining mazmunli alomatlar hamda isbotlari bor.

Hozirgi kunga kelib topologiya matematik tadqiqotlarning mustahkam quroliga aylandi, uning tili esa, universal ahamiyat kasb etmoqda. Topologiyaning fizikada, mexanikada va boshqa fanlarda kompleks qo'llanilishi fakt bo'lib qoldi. Fizikada ba'zi real holatlarni bayon qilishni topologiyasiz hal qilib bo'lmaydi. Teskari holatlar ham uchrab turadi, ya'n fizikadagi ba'zi muammolar topologiyaning rivojlanishiga ta'sir etmoqda.

1.1.1-ta`rif. Bo'sh bo'lmagan X to'plamning qism to'plamlaridan iborat va

(1) $\emptyset \in \mathcal{O}$ va $X \in \mathcal{O}$,

(2) agar $U_1 \in \mathcal{O}$ va $U_2 \in \mathcal{O}$ bo'lsa, u holda $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$,

(3) agar $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$ bo'lsa, u holda $\cup \mathcal{A} \in \mathcal{O}$

aksiomalarni qanoatlantiruvchi $\mathcal{O}$ oilaga X to'plamdagi topologiya deyiladi. Bu holda $(X, \mathcal{O})$ juftlik **topologik fazo deb** ataladi.

Agar X da qarayotgan topologiya ma'lum bo'lsa, u holda soddalik uchun $(X, \mathcal{O})$ juftlik o'rniga X ishlatiladi.

X to'plamning undagi biror $\mathcal{O}$ topologiyaga tegishli qism to'plamlari $(X, \mathcal{O})$ topologik fazoning *ochiq to'plamlari* deb ataladi. To'plamga topologiya kiritish degani bu – shu to'plamning ochiq to'plamlarini ko'rsatish demakdir. Topologiya kiritilgan to'plamning elementlari shu topologik fazoning nuqtalari deb ataladi.

1.1.1-ta`rifdan ochiq to'plamlar oilasi uchun quyidagilar kelib chiqadi:

(1') bo'sh to'plam va butun fazo ochiq to'plamdirlar;

(2') ikkita ochiq to'plamning kesishmasi ochiq to'plam bo'ladi;

(3') ixtiyoriy ochiq to'plamlarning birlashmasi ochiq to'plam.

Ravshanki, (2') xossadan ixtiyoriy cheklita ochiq to'plamlarning kesishmasi ochiq to'plam bo'lishi kelib chiqadi.

Eslatma. Bu xossani cheksizta ochiq to'plamlarning kesishmasi uchun tadbiq etib bo'lmaydi.

1.1.1-misol. Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ da (a, b) ko'rinishidagi intervallar $\mathbb{R}$ dagi tabiiy topologiya deb ataluvchi topologiyaga nisbatan ochiq to'plamlar, $[a, b]$ ko'rinishidagi kesmalar esa yopiq to'plamlar bo'ladi. Endi cheksizta $\left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, ochiq to'plamlarni qaraylik. Ushbuga egamiz

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0, 1]$$

ya'ni ochiq to'plamlarning cheksizta yig'indisi yopiq to'plam bo'lib qoldi.

$x \in X$ nuqtani saqllovchi har qanday $U \subset X$ ochiq to‘plam x nuqtaning **ochiq atrofi** deyiladi. Boshqacha aytganda, $x \in U \in \mathcal{O}_X$ shartlarni qanoatlantiruvchi U to‘plam $x \in X$ nuqtaning ochiq atrofi deyiladi.

$V \subset X$ to‘plam ochiq bo‘lishi uchun uning har bir nuqtasining V da yotuvchi ochiq atrofi mavjud bo‘lishi zarur va yetarli. Ya’ni

$$V \in \mathcal{O}_X \Leftrightarrow (\forall x \in V: \exists U_x \in \mathcal{O}_X, x \in U_x \subset V).$$

Bu shart bajarilsa, u holda (3) aksiomaga asosan

$$V = \bigcup_{x \in V} U_x$$

ochiq to‘plam bo‘ladi.

Agar X fazoning har qanday bo‘sh bo‘lmagan ochiq qism to‘plamini biror $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ oilaga tegishli to‘plamlarning birlashmasi shaklida yozish mumkin bo‘lsa, u holda $\mathcal{B}$ oila $(X, \mathcal{O})$ topologik fazoning bazasi deyiladi.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ oila $(X, \mathcal{O})$ topologik fazoning bazasi bo‘lishi uchun har bir $x \in X$ nuqtani va bu nuqtaning har qanday V atrofini olganda ham

$$x \in U \subset V$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $U \in \mathcal{B}$ element mavjud bo‘lishi zarur va yetarli.

Topologik fazoning bazalari ko‘p bo‘lishi mumkin. Lekin har qanday baza quyidagi xossalarga ega:

(B1) har qanday $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ juftlik va ixtiyoriy $x \in U_1 \cap U_2$ nuqta uchun

$$x \in U \subset U_1 \cap U_2$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $U \in \mathcal{B}$ element mavjud;

(B2) har qanday $x \in X$ uchun $x \in U$ bo‘ladigan $U \in \mathcal{B}$ element mavjud.

Endi ikkita chekli A va B to‘plamlar berilgan bo‘lib, ularni son jihatdan solishtirish kerak bo‘lsin. Bu masalani quyidagi ikki usul bilan hal qilish mumkin:

1) Bu to‘plamlar elementlarining sonini hisoblab chiqib, chiqqan sonlarni solishtirish;

2) Agar shunday bir qoida mavjud bo'lsaki, bu qoidaga muvofiq A to'plamning har bir elementiga B to'plamdan birgina elementi mos keltirilganda B to'plamning har bir elementiga A to'plamda ham birgina element mos kelsa, ya'ni A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lsa, u holda bu to'plamlar elementlarining sonlari jihatidan bir xil bo'ladi.

Endi cheksiz A va B to'plamlarning elementlari "miqdor"larini solishtirish talab etilsin. Ravshanki, yuqorida keltirilgan 1) usul bu talabni bajarishga yaramaydi. 2) usul esa qo'yilgan talabni bajarish imkonini beradi.

Agar A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lsa, u holda bu to'plamlar *ekvivalent* yoki *teng quvvatli* to'plamlar deyiladi va $A \sim B$ ko'rinishida yoziladi.

Odatda A to'plamga ekvivalent bo'lgan to'plamlar sinfi $|A|$ bilan belgilanadi va $|A|$ ni A to'plamning **quvvati** yoki **kardinal soni** deb ataladi.

Chekli to'plamning quvvati (kardinal soni) sifatida odatda bu to'plam elementlarining soni olinadi.

X topologik fazoning bazalari quvvatlarining eng kichigiga X topologik fazoning **salmog'i** deyiladi va $w(X)$ ko'rinishida belgilanadi, ya'ni

$$w(X) = \min\{|B|: B \text{ oila } X \text{ ning bazasi}\}.$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ natural sonlar to'plamidagi nuqtalar to'plamiga ekvivalent bo'lgan to'plamlarni **sanoqli quvvatli** to'plamlar deyiladi. Sanoqli quvvatni $\aleph_0$ orqali belgilashadi.

$[0, 1]$ segmentdagi nuqtalar to'plamiga ekvivalent bo'lgan to'plamlarni **kontinuum quvvatli** to'plamlar deyiladi. Kontinuum quvvat c orqali belgilanadi.

$$\aleph_0 < c$$

munosabat o'rinli.

$\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$ oila $U_i \in \mathcal{P}$, $i = 1, 2, \dots, k$, elementlarining $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ chekli kesishmalari baza hosil qilsa, u holda $\mathcal{P}$ oila $(X, \mathcal{O})$ fazoning bazaoldi deyiladi.

Agar $(X, \mathcal{O})$ topologik fazoning x nuqtasining har qanday V atrofi uchun shunday $U \in \mathcal{B}(x)$ element topilib, $x \in U \subset V$ bo'lsa, u holda x ning atroflari oilasi berilgan $\mathcal{B}(x)$ ga **x nuqtadagi baza** deyiladi.

Agar $\mathcal{B}$ oila $(X, \mathcal{O})$ topologik fazoning bazasi bo'lsa, u holda x ni o'z ichiga oluvchi $\mathcal{B}$ ning elementlaridan tuzilgan $\mathcal{B}(x)$ oila $(X, \mathcal{O})$ fazoning x nuqtadagi bazasi bo'ladi. Ikkinchi tomondan agar har bir $x \in X$ nuqta uchun $\mathcal{B}(x)$ oila $(X, \mathcal{O})$ fazoning x nuqtadagi bazasi bo'lsa, u holda

$$\bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x) = \bigcup_{x \in X} \{ \{U \subset X : U \in \mathcal{B}(x)\} \}$$

birlashma $(X, \mathcal{O})$ fazoning bazasi bo'ladi.

Yoki boshqacha aytganda, birorta bo'sh bo'lmagan X to'plamda ma'lum bir τ topologiyani kiritish uchun uning barcha ochiq to'plamlarini ko'rsatish doimo ham shart bo'lavermaydi. Buning uchun uning biron-bir ochiq to'plamlari jamlanmasini ko'rsatish yetarlidir. Ochik to'plamlar jamlanmasi ma'lum bir xossalarga ega bo'ladi. Bu xossalalar shu τ topologiyaning bazasini aniqlaydi.

1.1.2-ta'rif. Agar X fazoning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan U ochiq to'plami β oilaga tegishli bo'lgan elementlarning birlashmasidan iborat bo'lsa, (X, τ) topologik fazoning ochiq to'plamlaridan tashkil topgan bu β to'plamlar oilasi τ topologiyaning bazasi yoki fazoning bazasi deyiladi.

Ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, har bir (X, τ) fazo bazaga ega. Ma'lumki, barcha ochiq to'plamlardan iborat oila uning bazasini tashkil qiladi.

1.1.3-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilganda, bu atrof bilan M to'plamning kesishmasi faqat x_0 nuqtadan iborat, ya'ni $U \cap M = \{x_0\}$ bo'lsa, X topologik fazoning x_0 nuqtasi M to'plamostisining yakka-langani deyiladi.

(X, τ) topologik fazo va $x_0 \in X$ uning nuqtasi bo'lsin.

1.1.4-ta'rif. Birorta x_0 nuqtaning (X, τ) fazodagi atrofi deb shunday $A(x) \subset X$ to'plamostiga aytiladiki, u quyidagi ikki shartni qanoatlantiradi:

- 1) $x \in A(x)$;
- 2) Shunday $U \in \tau$ topiladiki, $x \in U \subset A(x)$.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, (X, τ) topologik fazoning ixtiyoriy x_0 nuqtasi uchun X to'plamning o'zi atrof bo'la oladi.

Birorta nuqtaning barcha atroflaridan tashkil topgan to'plamlar oilasiga kelsak, bu oila quyidagi xossalarga egadir:

- 1) ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi yana X ning atrofidan iborat bo'ladi;
- 2) ixtiyoriy chekli sondagi elementlarining kesishmasi yana x ning atrofi bo'ladi;
- 3) x nuqtaning birorta atrofini o'zida saqlagan ixtiyoriy to'plam x nuqtaning atrofi bo'ladi.

Shuni ta'kidlashimiz kerakki, X fazo birorta nuqtasining ochiq atrofi deb, shu nuqtani o'zida saqlagan ixtiyoriy ochiq to'plamga aytiladi.

1.1.1-teorema. (X, τ) topologik fazoda A to'plam ($A \neq \emptyset$) ochiq to'plam bo'lishi uchun mazkur A to'plam har bir nuqtasining atrofini o'zida saqlashi zarur va yetarlidir.

Topologik fazo bazasi ta'rifidan va nuqtaning atrofi tushunchasidan ayon bo'ladiki, fazoning barcha yakka-langon nuqtalari (agar shunday nuqtalar mavjud bo'lsa) baza elementlari safiga kirar ekan.

1.1.2-teorema. (X, τ) topologik fazoning ochiq to'plamlaridan tashkil topgan β oila fazoning bazasi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x \in X$ nuqtaning atrofi U uchun shunday $V \in \beta$ topilib, $x \in V \subset U$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremadan ma'lum bo'ladiki, topologik fazo bazasi quyidagi ikki xossaga ega:

1°. β oilaga tegishli barcha elementlarning birlashmasi butun X fazodan iborat.

2°. β oilaning ixtiyoriy ikki elementi U, V va ixtiyoriy $x \in U \cap V$ uchun shunday $W \in \beta$ topiladiki, $x \in W \subset U \cap V$ shart o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, bu ikki xossadan ko‘rinadiki, birorta β ochiq to‘plamlar sistemasi β, X fazoning bazasi bo‘lishi uchun yuqoridagi ikki xossaga ega bo‘lishi zarur ekan. Bu ikki xossa X to‘plamdagi topologiyaning bazasini to‘la xarakterlaydi. Demak, baza orqali ham topologiyani kiritish mumkin ekan.

1.1.3-teorema. Bo‘sh bo‘lmagan X to‘plamda yuqoridagi ikki shartlarni qanoatlantiruvchi β to‘plamlar sistemasi aniqlangan bo‘lsin. U holda X to‘plamda shunday yagona τ topologiya mavjud bo‘ladiki, bu τ topologiya uchun β sistema baza bo‘ladi.

Mabodo, birorta X to‘plamning qism to‘plamlari oilasi $V = \{V_\alpha\}$ berilgan va agar bu sistema elementlari uchun $X = \bigcup_\alpha V_\alpha$, $V_\alpha \in V$, $V_\alpha \subset X$ shart o‘rinli bo‘lsa, V sistema X to‘plamning qoplamasi deyiladi.

Agar qoplamaning elementlari ochiq to‘plamlardan tashkil topgan bo‘lsa, u qoplama ochiq qoplama deyiladi.

Agarda $\{S_\alpha\}$ to‘plamostilar sistemasi X to‘plamning ixtiyoriy qoplamasi bo‘lsa, tabiiy savol tug‘iladi: qanday shart bajarilsa, to‘plamning ixtiyoriy qoplamasiga ko‘ra X to‘plamda biron-bir topologiyani aniqlash mumkinmi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi:

1.1.4-teorema. $\{S_\alpha\}$ sistema X fazoning qoplamasi bo‘lsin. $\{V = \bigcup_{\alpha \in k} S_\alpha : k - \text{ixtiyoriy chekli to'plam}\}$ oila tabiiy topologiya vujudga keltiradi va V Sistema τ topologiyaning bazasini tashkil qiladi.

Demak, X to‘plamning qoplamasi $\{S_\alpha\}$ ushbu to‘plamda topologiya tashkil qilar ekan. Bu topologiyada $V(\bigcup_{\alpha \in k} S_\alpha)$ ko‘rinishdagi barcha mumkin bo‘lgan birlashmalar va bo‘sh to‘plam ochiq to‘plamlar sinfini tashkil qiladi.

1.1.5-ta’rif. (X, τ) topologik fazoning ochiq to‘plamlaridan tashkil topgan $v = \{W_\alpha\}$ sistemaning ixtiyoriy sondagi chekli elementlari kesishmasi τ topologiya

bazasini tashkil qilsa, u topologik fazoning old bazasi deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, topologiyani ixtiyoriy bazasi old baza bo'la oladi. Lekin buning teskarisi har doim ham o'rinli emas.

1.1.2-misol. Endi $X = R^1$ to'g'ri chiziq yoki haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. $S_\alpha = \{x: x < \alpha; \alpha \in R^1\}$ va $S_\beta = \{x: x > \beta; \beta \in R^1\}$ to'plamlar oilasini olaylik. Bu to'plamlar sistemasi sonlar chizig'i R^1 dagi tabiiy topologiyani old bazasini tashkil qiladi.

1.1.3-misol. R^n – n o'lchamli vektor fazo bo'lsin. Bu R^n fazoda topologiyani bazasi sifatida $B = \{V_{a,b}\}$ ko'rinishdagi elementlardan tashkil topgan $V_{a,b} = \{x \in R^n: a_i < \xi_i < b_i, i = \overline{1, n}\}$ sistemani olamiz, bu yerda ξ_i -vektorning koordinatasi, $x = \{\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n\}$; $a = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$; $b = \{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ lar R^n dagi ixtiyoriy vektorlar, bunda $a_i < b_i$ bo'lsa, R^n fazodagi $V_{a,b}$ ko'rinishdagi to'plamlar R^n ning ochiq parallelepiped deb yuritiladi.

$(X, \mathcal{O})$ topologik fazoning x nuqtadagi $\mathcal{B}(x)$ bazalari quvvatlarining eng kichigiga X topologik fazoning x nuqtadagi xarakteri deyiladi va $\chi(x, (X, \mathcal{O}))$ ko'rinishida, yoki qisqalik uchun $\chi(x, X)$ orqali belgilanadi. Demak,

$$\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}(x)|: \mathcal{B}(x) \text{ oila } x \text{ nuqtaning } X \text{ fazodagi bazasi}\}.$$

$\chi(x, X)$ kardinal sonlarning x o'zgaruvchi bo'yicha eng kattasiga $(X, \mathcal{O})$ topologik fazoning xarakteri deyiladi va $\chi(X, \mathcal{O})$, yoki qisqalik uchun $\chi(X)$ ko'rinishida belgilanadi. Ta'rifga ko'ra

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X): x \in X\}.$$

1.2-§. Kompaktli fazo. Kesmaning kompaktililigini o'rnatish metodikasi

X to'plamning qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathcal{A} = \{A_s: s \in S\}$ oila uchun

$$\bigcup_{s \in S} A_s = X$$

bo'lsa, u holda $\mathcal{A}$ oila X ning qoplamasi deyiladi. Agar X topologik fazo bo'lsa hamda har bir $A_s \in \mathcal{A}$ ochiq (yopiq) to'plam bo'lsa, u holda $\mathcal{A}$ qoplama X topologik fazoning **ochiq (mos ravishda, yopiq) qoplamasi** deyiladi.

$\mathcal{A} = \{A_s: s \in S\}$ va $\mathcal{B} = \{B_t: t \in T\}$ oilalar aynan bitta X to'plamning qoplamalari bo'lsin. Agar har bir $B_t \in \mathcal{B}$ uchun shunday $A_s \in \mathcal{A}$ topilib, $B_t \subset A_s$ bo'laversa, u holda $\mathcal{B}$ qoplama $\mathcal{A}$ qoplamaga **ichki chizilgan** deyiladi.

Agar $T \subset S$ bo'lib, barcha $t \in T$ indekslarda $B_t = A_t$ bo'lsa, u holda $\mathcal{B}$ qoplama $\mathcal{A}$ qoplamaning **qismqoplamasi** deyiladi.

Har bir ochiq qoplamasidan chekli qismqoplama ajratish mumkin bo'lgan topologik fazo **kompaktli** fazo deyiladi.

Boshqacha aytganda, X topologik fazo uchun $X = \bigcup_{s \in S} U_s$ bo'ladigan ochiq to'plamlarning ixtiyoriy $\mathcal{A} = \{U_s: s \in S\}$ oilasining shunday chekli $\{U_{s_1}, \dots, U_{s_n}\} \subset \mathcal{A}$ qismoilasi topilib, $X = U_{s_1} \cup \dots \cup U_{s_n}$ bo'lsa, X topologik fazo **kompaktli fazo** deyiladi.

To'plamlarning $\mathcal{F} = \{F_s: s \in S\}$ oilasi $\mathcal{F} \neq \emptyset$ va ixtiyoriy chekli $\{s_1, \dots, s_n\} \subset S$ indekslar uchun

$$F_{s_1} \cap \dots \cap F_{s_n} \neq \emptyset$$

shartni bajarsa, u holda $\mathcal{F}$ ni **markazlashgan** oila deyiladi.

1.2.1-teorema. X fazo berilgan bo'lib, uning yopiq to'plamlarining har qanday markazlashgan oilasi bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega bo'lsa, faqat va faqat shu holda X kompaktli fazo bo'ladi.

Isboti. X kompaktli fazo bo'lib, uning yopiq to'plamlarining $\mathcal{F} = \{F_s: s \in S\}$ markazlashgan oilasining kesishmasi bo'sh to'plam, ya'ni

$$\bigcap_{s \in S} F_s = \emptyset$$

bo'lsin. Ushbu $U_s = X \setminus F_s$ ochiq to'plamlarni qaraymiz.

$$\bigcup_{s \in S} U_s = \bigcup_{s \in S} (X \setminus F_s) = X \setminus \left(\bigcap_{s \in S} F_s \right) = X \setminus \emptyset = X$$

bo'lgani uchun $U = \{U_s : s \in S\}$ oila X fazoning ochiq qoplamasi bo'ladi. X kompaktli ekanligidan U ochiq qoplamadan chekli $\{U_{s_1}, \dots, U_{s_k}\}$ qismqoplama ajratish mumkin.

Natijada

$$X = \bigcup_{i=1}^k U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^k (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^k F_{s_i}$$

bo'lib, bundan

$$\bigcap_{i=1}^k F_{s_i} = \emptyset$$

kelib chiqadi. Bu $\mathcal{F}$ oilaning markazlashgan ekanligiga zid. Shunday qilib, $\mathcal{F}$ oila markazlashgan bo'lsa,

$$\bigcap_{s \in S} F_s = \emptyset$$

bo'ladi.

Endi X fazoning yopiq to'plamlarining har qanday markazlashgan oilasi bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega bo'lsin. X fazoning ixtiyoriy ochiq $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ qoplamasini qaraylik. Faraz qilaylik, uning har bir chekli $\{U_{s_1}, \dots, U_{s_m}\}$ qismoilasi X ni qoplamasin, ya'ni

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^m U_{s_i} \neq \emptyset$$

bo'lsin.

$F_s = X \setminus U_s$ deb olib, $\mathcal{F} = \{F_s : s \in S\}$ oilani tuzamiz. U holda uning ixtiyoriy chekli $\{F_{s_1}, \dots, F_{s_m}\}$ qismoilasi uchun ushbuga egamiz

$$\bigcap_{i=1}^m F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^m (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^m U_{s_i} \neq \emptyset.$$

Demak, $\mathcal{F}$ oila yopiq to'plamlarning markazlashgan oilasi ekan. Farazga

ko'ra $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Ushbuga egamiz

$$\cap \mathcal{F} = \cap_{s \in S} F_s = \cap_{s \in S} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s \in S} U_s = X \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset$$

Bundan $\mathcal{U}$ oila X ning qoplamasi bo'la olmasligi kelib chiqadi. Olingan bu ziddiyat farazning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Boshqacha aytganda, $\mathcal{U}$ qoplama chekli qismqoplamaga ega bo'lishga majbur ekan. Bu X kompaktli ekanligini anglatadi. Teorema to'la isbotlandi.

1.2.2-teorema. Kompaktli fazoning har bir yopiq qismfazosi kompaktli fazo bo'ladi.

Isboti. (X, τ_X) kompaktli fazo bo'lib, Y uning yopiq qismto'plami bo'lsin. Y to'plamni singdirilgan, ya'ni

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau_X\}$$

topologiya bilan ta'minlaymiz.

Φ to'plam (Y, τ_Y) fazoda faqat va faqat u (X, τ_X) fazoda yopiq bo'lsagina yopiq bo'lishini eslatib o'tamiz.

$\mathcal{K} = \{K_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ oila (Y, τ_Y) fazoda yopiq to'plamlarning markazlashgan oilasi bo'lsin. U holda $\mathcal{K}$ oila (X, τ_X) fazoda yopiq to'plamlarning markazlashgan oilasi bo'ladi. Bundan $\cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ kelib chiqadi. Tuzilishiga ko'ra $\cap \mathcal{K} \subset Y$ bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Quyidagi tasdiqlarni isbotsiz keltiramiz. Mazkur jumlar hech qanday havolasiz ishlatilib ketiladi.

1.2.3-teorema. Ixtiyoriy X Hausdorff fazosining har bir kompaktli qismfazosi X fazoda yopiq to'plam bo'ladi.

1.2.4-teorema. Har bir kompaktli Hausdorff fazosi normal fazo bo'ladi.

1.2.1-misol. X to'plamning quvvati $|X|$ orqali belgilanadi. X ni diskret, ya'ni

$$B_d = \{\{x\} : x \in X\}$$

baza yordamida kiritilgan τ_d topologiya bilan ta'minlaymiz.

$|X| = m$ bo'lsin. (X, τ_d) diskret topologik fazoni $D(m)$ orqali belgilash qabul qilingan, ya'ni $D(m) = (X, \tau_d)$.

$D(m)$ faqat va faqat m chekli bo'lsa kompaktli fazo bo'ladi.

Endi ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan kesmaning kompaktli bo'lishini oliy ta'lim muassasalarida o'rnatishning quyidagi metodikasini taklif qilamiz.

1.2.2-misol. Tabiiy topologiya, ya'ni

$$B_e = \{(a, b): -\infty < a < b < +\infty\}$$

baza orqali hosil qilingan topologiya bilan ta'minlangan $\mathbb{R}_e = (R, \tau_e)$ haqiqiy sonlar fazosini qaraylik.

Ixtiyoriy

$$[\alpha, \beta] = \{x \in R: \alpha \leq x \leq \beta\}$$

kesma $\mathbb{R}_e$ dagi tabiiy topologiyadan singdirilgan topologiyaga ko'ra kompaktli fazo bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

$[\alpha, \beta]$ fazoning ixtiyoriy ochiq $\mathcal{U} = \{U_s: s \in S\}$ qoplamasini olamiz. A orqali shunday $x \in [\alpha, \beta]$ lar to'plamini belgilaymizki, har bir $x \in A$ uchun $[\alpha, x]$ to'plam $\mathcal{U}$ oilaning chekli sondagi a'zolari birlashmasida yotsin. Isbotni yakunlash uchun $[\alpha, \beta] \setminus A$ to'plam bo'sh ekanligini ko'rsatish yetarli.

Aytaylik, $[\alpha, \beta] \setminus A \neq \emptyset$ bo'lsin. Ta'kidlash joizki, har bir $x \in [\alpha, \beta] \setminus A$ nuqta shunday nuqtaki, $[\alpha, x]$ kesmani $\mathcal{U}$ qoplamaning hech bir chekli qism oilasi qoplamaydi, ya'ni $[\alpha, x]$ kesma $\mathcal{U}$ qoplamaga tegishli har qanday chekli sondagi to'plamlarning birlashmasida yotmaydi. Demak, $[\alpha, x]$ kesmaning $\mathcal{U}$ ning a'zolaridan tuzilgan har qanday qoplamasi cheksiz miqdordagi a'zoga ega.

$[\alpha, \beta] \setminus A$ to'plamning aniq quyi chegarasini x_0 orqali belgilaylik. Har bir $x > x_0$ uchun $x \in [\alpha, \beta] \setminus A$ ga egamiz.

Agarda $x_0 \in A$ bo'lsa, u holda shunday chekli $\{U_{s_1}, \dots, U_{s_m}\} \subset \mathcal{U}$ qismoila topiladiki,

$$[\alpha, x_0] \subset \bigcup_{i=1}^m U_{s_i}$$

bo'lad.

Bundan

$$x_0 \in \bigcup_{i=1}^m U_{s_i}$$

bo'lad.

$$\bigcup_{i=1}^m U_{s_i}$$

to'plam ochiq ekanligidan shunday $\xi \in [x_0, \beta)$ nuqta topilib,

$$[x_0, \xi) \subset \bigcup_{i=1}^m U_{s_i}$$

bo'lad. Bu $\frac{x_0 + \xi}{2} > x_0$ bo'lishiga qaramasdan

$$\frac{x_0 + \xi}{2} \in \bigcup_{i=1}^m U_{s_i},$$

ya'ni $\frac{x_0 + \xi}{2} \in A$ ekanligini bildiradi. Ziddiyatga duch keldik.

Endi $x_0 \in [\alpha, \beta] \setminus A$ bo'lsin deb faraz qilaylik. Ravshanki, $[\alpha, x_0]$ kesmaning $\mathcal{U}$ ning a'zolaridan tuzilgan har qanday qoplamasi cheksiz miqdordagi a'zoga ega. Shunday $s_0 \in S$ topiladiki, $x_0 \in U_{s_0}$ bo'lad. $\alpha < x_0$ ekanligini ko'rish oson; shuning uchun U_{s_0} to'plamning ochiq bo'lganligidan qandaydir $y \in [\alpha, x_0)$ uchun $(y, x_0] \subset U_{s_0}$ qismlilik bajariladi.

x_0 ning aniqlanishidan $y \in A$ bo'lad. Demak, $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$ lar uchun

$$[\alpha, y] \subset \bigcup_{i=1}^k U_{s_i}$$

bo'lad. Natijada

$$[\alpha, x_0] = [\alpha, y] \cup (y, x_0] \subset \left(\bigcup_{i=1}^k U_{s_i} \right) \cup U_{s_0} = \bigcup_{i=0}^k U_{s_i}$$

bo'lib, bundan $x_0 \in A$ kelib chiqadi. Yana ziddiyatga duch keldik.

Hosil qilingan bu ziddiyatlardan $A = [\alpha, \beta]$, ya'ni $[\alpha, \beta]$ to'plam $\mathcal{U}$ qoplamaning chekli a'zolari birlashmasida yotishi kelib chiqadi. $\mathcal{U}$ ixtiyoriy ekanligidan $[\alpha, \beta]$ kesma kompaktli fazo ekanligi kelib chiqadi.

1.2.5-teorema (Tikhonov teoremasi). Bo'sh bo'lmagan X_s , $s \in S$

fazolarning

$$\prod_{s \in S} X_s$$

ko'paytmasi faqat va faqat har bir $s \in S$ uchun X_s fazo kompaktli bo'lsagina kompaktli fazo bo'ladi.

n -o'lchamli $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosining A to'plami uchun shunday

$$I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$$

kesma topilib, $A \subset I^n \subset \mathbb{R}^n$ bo'lsa, A to'plam chegaralangan deyiladi.

1.2.6-teorema. m -o'lchamli $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosining A topologik qismfazosi faqat va faqat A to'plam yopiq va chegaralangan bo'lsagina kompaktli bo'ladi.

1.2.3-misol. $y = ax + b$, $y = tgx$, $y = \ln x$ funksiyalarning grafiklarining har biri $\mathbb{R}^2$ da yopiq bo'lishiga qaramasdan, $\mathbb{R}^2$ dan singdirilgan topologiyaga nisbatan kompaktli bo'lmaydi. Bu grafiklar chegaralanmagan.

Bog'lamli kompaktli Hausdorff fazosi **kontinuum** deyiladi.

1.2.4-misol. Ixtiyoriy bir nuqtali fazo, son o'qi $\mathbb{R}$ ning ixtiyoriy $[\alpha, \beta]$ kesmasi, n -o'lchamli $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosining ixtiyoriy n -o'lchamli shari kontinuum bo'ladi.

1.3-§. Lokal kompaktli fazolar. Bitta nuqtasi chiqarib tashlangan aylana va to'g'ri chiziqning o'zaro gomeomorfliqini isbotlash metodikasi

Agar X topologik fazoning har bir $x \in X$ nuqtasi uchun shunday U atrof topilib, $[U]$ yopilma X fazoning kompaktli qismfazosi bo'lsa, u holda X topologik fazo **lokal kompaktli** fazo deyiladi.

1.3.1-teorema. Har bir lokal kompaktli Hausdorff fazosi Tikhonov fazosi bo'ladi.

1.3.2-teorema. Hausdorff fazosi faqat va faqat u biror kompaktning ochiq qismfazosiga gomeomorf bo'lsagina lokal kompaktli fazo bo'ladi.

Har qanday kompaktli fazo lokal kompaktli fazo bo'ladi. Aksinchasi o'rinli emas.

1.3.1-misol. Son o'qi $\mathbb{R}$ ning ixtiyoriy (α, β) intervali kompaktli bo'lmagan lokal kompaktli fazo bo'ladi.

Har bir diskret fazo lokal kompaktli fazo bo'ladi.

1.3.3-teorema. Bo'sh bo'lmagan fazolarning

$$\prod_{s \in S} X_s$$

ko'paytmasi faqat va faqat har bir $s \in S$ uchun X_s fazo lokal kompaktli bo'lsa va shunday chekli $S_0 \subset S$ topilib, barcha $s \in S \setminus S_0$ da X_s kompaktli bo'lsagina lokal kompaktli fazo bo'ladi.

Lokal kompaktli fazolarning ajoyib xossalaridan biri shundaki, har qanday lokal kompaktli fazoga bitta nuqtani qo'shish bilan bu fazo kompaktli fazoga aylanadi.

1.3.2-misol. Ushbu

$$X = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + \left(v - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\} \setminus \{(0, 1)\}$$

to'plam (bitta nuqtasi chiqarib tashlangan aylana)ni $\mathbb{R}^2$ tekislikdan indutsirlangan

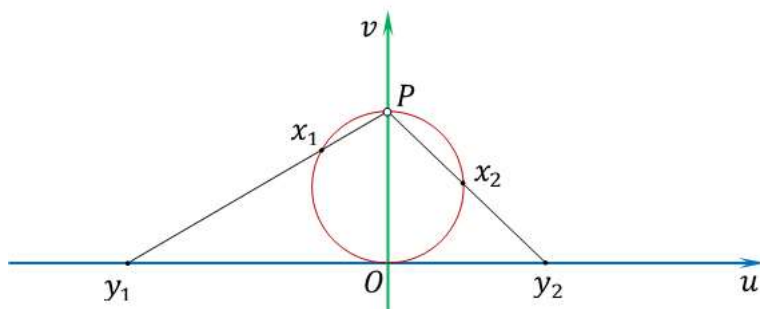
topologiya bilan ta'minlaymiz. Hosil bo'lgan topologik fazo lokal kompaktli fazo bo'ladi. Unga bitta $P(0, 1)$ nuqtani qo'shish natijasida ushbu

$$S\left(\left(0, \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right) = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2: u^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

kompaktli fazo (markazi $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ nuqtada bo'lgan, radiusi $\frac{1}{2}$ teng ayalana) hosil qilinadi.

Quyidagi misolda bitta nuqtasi chiqarib tashlangan aylana va to'g'ri chiziqning o'zaro gomeomorfligini isbotlash metodikasi bayon etiladi.

1.3.3-misol. Tabiiy topologiya bilan ta'minlangan $Y = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ haqiqiy sonlar o'qi (umuman olganda, har qanday to'g'ri chiziq) lokal kompaktli fazo bo'ladi. Bu Y fazoni bitta nuqta qo'shib kompaktli



fazo hosil qilish uchun uni 6-misoldagi X fazo bilan ayniylashtiriladi. Keyin esa P nuqtani qo'shish orqali kompaktli fazo hosil qilinadi.

Yuqoridagi X va Y fazolar nuqtalarini

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1-v}, 0\right)$$

tenglik bilan aniqlanadigan $f: X \rightarrow Y$ moslik orqali, yoki

$$g(u, 0) = \left(\frac{u}{1+u^2}, \frac{u^2}{1+u^2}\right)$$

tenglik bilan aniqlanadigan $g: Y \rightarrow X$ moslik orqali amalga oshiriladi.

f va g akslantirishlar o‘zaro teskari, ya’ni

$$f(g(u, 0)) = (u, 0)$$

hamda

$$g(f(u, v)) = (u, v)$$

bo‘ladi.

Haqiqatan ham,

$$f(g(u, 0)) = f\left(\frac{u}{1+u^2}, \frac{u^2}{1+u^2}\right) = \left(\frac{\frac{u}{1+u^2}}{1 - \frac{u^2}{1+u^2}}, 0\right) = (u, 0),$$

ya’ni $f(g(u, 0)) = (u, 0)$ tenglik bajarilishi ko‘rsatildi.

Endi ikkinchi tenglikni ko‘rsatish uchun X to‘plamning (u, v) elementlari

$$u^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

tenglikni qanoatlantirishini e’tiborga olamiz. Bundan X fazoning (u, v) nuqtalari

$$u^2 + v^2 - v + \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$u^2 = v - v^2,$$

$$u^2 = v(1 - v) \quad (\star)$$

va

$$u^2 = v - v^2 = 1 - v - 1 + 2v - v^2 = 1 - v - (1 - v)^2,$$

ya’ni

$$(1 - v)^2 + u^2 = 1 - v \quad (\star\star)$$

tengliklarni qanoatlantirishi kelib chiqadi. Endi ikkinchi tenglikni tekshiramiz:

$$\begin{aligned}
g(f(u, v)) &= g\left(\frac{u}{1-v}, 0\right) = \left(\frac{\frac{u}{1-v}}{1 + \left(\frac{u}{1-v}\right)^2}, \frac{\left(\frac{u}{1-v}\right)^2}{1 + \left(\frac{u}{1-v}\right)^2}\right) = \\
&= \left(\frac{u(1-v)}{(1-v)^2 + u^2}, \frac{u^2}{(1-v)^2 + u^2}\right) = ((\star) \text{ va } (\star\star) \text{ tengliklarga ko'ra}) = \\
&= \left(\frac{u(1-v)}{1-v}, \frac{v(1-v)}{1-v}\right) = (u, v).
\end{aligned}$$

Demak, $g(f(u, v)) = (u, v)$ tenglik ham bajarildi.

I BOB BO‘YICHA XULOSA

Mazkur bobda topologik fazo ta’rifi berildi, topologik fazoning asosiy tushunchalarining mohiyati yoritildi. Topologik fazoning asosiy tushunchalari: ochiq to‘plam, topologik fazo bazasi, salmog‘i, xarakteriga ta’rif berilib misollar orqali tushuntirildi.

Keyinchalik kompaktli va lokal kompaktli fazolar o‘rganildi. Tabiiy topologiya bilan ta’minlangan son o‘qidagi har qanday kesma kompaktli bo‘lishi isbotlandi.

1.2-§. mavzuda ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan kesmaning kompaktli bo‘lishini oliy ta’lim muassasalarida o‘rnatishning metodikasi taklif qilindi.

1.3-§. mavzuda bitta nuqtasi chiqarib tashlangan aylana va son o‘qi lokal kompaktli fazolar bo‘lishini ko‘rsatish metodikasi yoritildi. Undan tashqari, bu ikki fazolar orasida o‘zaro bir qiymatli, o‘zaro teskari akslantirishlar qurildi.

II BOB. TOPOLOGIK FAZO SINFLARI

2.1-§. Topologik fazoda to‘plamlararo amallar. Topologiya kiritish usullari

Topologik fazoda yopiq to‘plam, yakkalangan nuqta tushunchalari aniqlangandan keyin bu tushunchalar bilan bevosita bog‘liq bo‘lgan to‘plamning teginish nuqtasi, to‘plamning yopig‘i va to‘plam ichi hamda ichki nuqtalari tushunchalarini ham bilish lozim bo‘ladi.

2.1.1-ta’rif. (X, τ) topologik fazoning $x_0 \in X$ nuqtasi berilgan bo‘lib, agar bu nuqtaning ixtiyoriy U atrofi M to‘plamning birorta nuqtasini o‘zida saqlasa, ya’ni $U \cap M \neq \emptyset$. $M \subset X$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqta M to‘plamning teginish nuqtasi deyiladi.

Topologik fazoda M to‘plamning barcha teginish nuqtasidan tashkil topgan to‘plam uning yopig‘i deb ataladi va $\bar{M}$ ko‘rinishida belgilanadi. To‘plamning o‘zidan yopig‘i to‘plamga o‘tish amali to‘plamning topologik yopig‘ini olish amali deb yuritiladi. Ta’rifdan ko‘rinadiki, to‘plamning yopig‘i uning o‘zini o‘z ichiga oladi: $\emptyset$ ning yopig‘i o‘ziga teng; butun X ning yopig‘i fazoning o‘ziga teng. Shuningdek, agar $M \subset N$ bo‘lsa, u holda $\bar{M} \subset \bar{N}$ bo‘ladi. Bu esa, mazkur amalning monotonlik xarakterga ega ekanligini ko‘rsatadi. Yana shuni ta’kidlash lozimki, bu amal idempotentdir, ya’ni $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$ o‘rinli bo‘ladi.

2.1.1-teorema. Fazoning M to‘plamostisi yopiq bo‘lishi uchun u o‘zining yopig‘iga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

2.1.2-natija. Fazoning ixtiyoriy M to‘plamostisi yopig‘i $\bar{M}$ bu fazoda yopiq to‘plamdir.

Shuni ta’kidlash kerakki, to‘plam yopig‘ini olish amali quyidagi xossalarga ega:

$$1^\circ. \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n$$

$$2^\circ. \bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

$$3^\circ. A \subset \bar{A}$$

$$4^\circ. \emptyset = \emptyset$$

2.1.2-ta'rif. Agar x_0 ning ixtiyoriy atrofida M to'plamning x_0 dan farqli elementi bo'lsa, X fazoning x_0 nuqtasi $M \subset X$ to'plamning limit nuqtasi deyiladi, ya'ni $U(x_0) \cap M \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, to'plamning limit nuqtasi uning teginish nuqtasi bo'lishi mumkin, lekin teginish nuqtasi yoki yakkalangan nuqta doimo ham limit nuqtasi bo'lavermaydi. Shuni ta'kidlash mumkinki, $\bar{M} \setminus M$ ning har bir nuqtasi M to'plam uchun limit nuqta bo'ladi. To'plamning yopig'ini oladigan bo'lsak, bu to'plam teginish, limit va yakkalangan nuqtalardan tashkil topgan ekan. To'plamning barcha limit nuqtalaridan tashkil topgan to'plamni uning hosila to'plami deb belgilanadi va M ning hosila to'plami M' ko'rinishida ifodalanadi. Hosila to'plam ta'rifidan ma'lumki, $M' \subset \bar{M}$ o'rinli va M to'plam yopiq bo'lishi uchun $M' \subset M$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.1.3-ta'rif. Agar X fazoning M to'plami o'z-o'zining hosila to'plami bilan ustma-ust tushsa, mukammal to'plam deyiladi, ya'ni $M' = M$.

Bu ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, mukammal to'plam, bir tomondan, yopiq to'plam, ikkinchi tomondan, yakkalangan nuqtalarga ega emas ekan. Mukammal to'plamga misol sifatida to'g'ri chiziqda ixtiyoriy kesma, tekislikda yopiq doirani olishimiz mumkin. Yana shuni ta'kidlash mumkinki, fazoda yopiq to'plamlarning ixtiyoriy birlashmasi har doim ham yopiq bo'lavermaydi. Ba'zi hollarda yopiq to'plamlar birlashmasi ham yopiq bo'lishi mumkin.

2.1.4-ta'rif. Agar X to'plamning to'plamostilaridan tashkil topgan $S = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ oila berilgan bo'lsa, X ning ixtiyoriy x_0 nuqtasi shunday U_0 atrofga ega bo'lsaki, bu atrof jamlanmaning chekli sondagi elementlari bilan kesishsa, u holda bu oila local chekli deyiladi, ya'ni $U_0 \cap A_i \neq \emptyset$, $i \in K$, $|K| < \infty$.

2.1.3-teorema. X topologik fazoning ixtiyoriy lokal chekli oilasi $S = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ uchun $\overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{A}_i$ munosabat (tenglik) o'rinli.

Teoremadan quyidagi xulosani chiqarish mumkin.

2.1.4-xulosa. Yopiq to'plamlarning lokal chekli oilasi – birlashmasiyopiq

to'plamdir.

Agar to'plamning yopig'ini olish amalini $ClM = \bar{M}$ bilan belgilasak va bu amalni birorta bo'sh bo'lmagan X to'plamda qo'llasak, shu to'plamda topologiya aniqlashning yana bir usuli kelib chiqadi. Bu usul, ya'ni to'plamning yopig'ini olish amali buyuk polyak topologi K.Kuratovski tomonidan yaratilgan.

2.1.5-teorema. Ixtiyoriy X to'plamda qo'llaniladigan ixtiyoriy Kuratovski operatori Cl shu to'plamda ma'lum bir τ topologiyaga asos solidi, aynan $\tau = \{U\}$ ning har bir U elementi uchun $Cl(X \setminus U) = X \setminus U$ tenglik o'rinli va ixtiyoriy $M \subset X$ to'plamosti uchun $\bar{M} = ClM$ tenglik o'rinli bo'ladi.

2.1.1-misol. Ixtiyoriy sanoqsiz X to'plam berilgan bo'lsin. X to'plamda Cl to'plamning yopig'i amalini quyidagicha aniqlaymiz: ixtiyoriy sanoqlidan katta bo'lmagan M to'plam uchun $Cl(M) = X$ deb olamiz. Tekshirib ko'rish ko'rsatadiki, bunday aniqlangan amal to'plamning yopig'ini olishning hamma shartlarini qanoatlantirishini ko'rsatadi. Ya'ni:

- 1) $Cl(M \cup N) = Cl(M) \cup Cl(N)$;
- 2) $M \subset Cl(M)$;
- 3) $Cl(Cl(M)) = Cl(M)$;
- 4) $Cl(\emptyset) = \emptyset$ shartlar o'rinlidir.

Bu misolda X to'plamda yopiq to'plam sifatida faqat va faqat $Cl(M) = M$ tenglikni qanoatlantiruvchi to'plamlarni e'lon qilsak. Bu X da ma'lum bir topologiyani aniqlaydi.

2.1.5-ta'rif. X topologik fazoning x_0 nuqtasi uchun x_0 nuqtaning shunday ochiq atrofi U_0 topilsaki, va bu atrof to'la M_0 to'plamda yotsa, u X fazoning M to'plamostisining ichki nuqtasi deyiladi, ya'ni $U_0 \subset M$ bo'lsa, M to'plamning barcha ichki nuqtalari tashkil topgan to'plam M ning ichi deyiladi va $intM$ ko'rinishida belgilanadi. Ta'rifdan va oldingi keltirilgan faktlardan ko'rinadiki, M to'plam ochiq to'plam bo'lishi uchun $intM = M$ tenglik yoki u o'zining ichiga

teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Yana shuni aytish mumkinki, M to'plamning ichi ochiq to'plam va $\text{int}M$ – bu M da yotgan ochiq to'plamlarning birlashmasidan iboratdir. To'plamning ichi int quyidagi xossalarga ega:

- 1) Agar $M \subset N$ bo'lsa; $\text{int}M \subset \text{int}N$ (monotonligi);
- 2) $\text{int}(\text{int}M) = \text{int}M$ (idempotent);
- 3) $\text{int}(M \cap N) = \text{int}M \cap \text{int}N$.

2.1.2-misol. Sonlar o'qi R^1 topologiyasiga ko'ra, $\text{int}Q = \emptyset$ va $\text{int}(R^1 \setminus Q) = \emptyset$, bu yerda Q – ratsional sonlar to'plami.

X topologik fazoning ixtiyoriy M to'plamostisi uchun:

$$X \setminus \bar{M} = \text{int}(X \setminus M)$$

$$X \setminus \text{int}M = \overline{(X \setminus M)} \text{ tengliklar o'rinlidir.}$$

2.1.6-ta'rif. X topologik fazoning x_0 nuqtasi uchun x_0 nuqta uning ixtiyoriy ochiq U atrofini ham, M ning elementlarini ham uning to'ldiruvchisi $CM = X - M$ ning elementlarini o'zida saqlasa, x_0 nuqta $M \subset X$ to'plami uchun chegaraviy nuqta deyiladi, ya'ni $U \cap M \neq \emptyset$ va $U \cap X \setminus M \neq \emptyset$. Boshqacha aytganda, x_0 nuqta M va $X \setminus M$ to'plamlar uchun teginish nuqtasi bo'lgan taqdirda, u chegaraviy nuqta deyiladi. To'plamning barcha chegaraviy nuqtalaridan tashkil topgan to'plam uning chegarasi deyiladi va $F_r M$ ko'rinishda belgilanadi.

Demak, M ning chegarasi $F_r M$ uchun $F_r M = \bar{M} \cap \overline{CM}$ tenglik o'rinli ekan. Chegara uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$F_r M = \bar{M} \setminus \text{int}M = (\bar{M} \setminus M) \cup (M \setminus \text{int}M) = (\bar{M} \setminus M) \cup (M \cap \overline{CM})$$

2.1.6-teorema. X topologik fazoning M to'plami ochiq bo'lishi uchun u o'zining chegarasi bilan kesishmasligi zarur va yetarlidir. M to'plam yopiq bo'lishi uchun esa, u o'zida chegarasini to'la saqlashi zarur va yetarlidir.

2.1.3-misol. Sonlar o'qi R^1 dagi topologiyani olsak, $F_r Q = R^1$ va $F_r(R^1 \setminus Q) = R^1$ tengliklar o'rinlidir.

Ammo, $F_r R^1 = \emptyset, F_r(F_r Q) = F_r R^1 = \emptyset$. Agar $M \subset X$ bo'lib, M ning faqat o'ziga tegishli bo'lgan chegaraviy nuqtalarini olsak, bu nuqtalar to'plami M ning cheti deb yuritiladi. Bunda $M \cap \overline{CM} = M \setminus \text{int} M$ o'rinlidir. Demak, birorta to'plamning cheti uning ichki nuqtalarini o'z ichiga olmas ekan. Ya'ni, to'plamning cheti ichki nuqtasiz ekan.

Ba'zi bir masalalarda figuralarning topologik xossalarini o'rganishda maxsus ochiq(yopiq) to'plamlar sinfidan foydalanishga to'g'ri keladi.

2.1.7-ta'rif. Agar X topologik fazoning $A \subset X$ to'plamostisi, o'z yopig'ining ichiga (ichining yopig'iga) teng bo'lsa, kanonik ochiq (kanonik yopiq) deyiladi. Ya'ni, agar $A = \text{int} \bar{A}$ bo'lsa, A kanonik ochiq deyiladi, agar $A = \overline{\text{int} A}$ bo'lsa, A kanonik yopiq deyiladi. Kanonik ochiq va kanonik yopiq to'plamlarga tekislikda ochiq va yopiq doiralarni misol keltirish mumkin.

To'plamning kanonik yopig'ini olish amalini Cl^* bilan, to'plamning kanonik ichini olish amalini int^* bilan belgilasak, bu maxsus amallar bilan to'plamning yopig'i va ichini olish amallari orasida quyidagicha bog'lanish mavjud:

$$\text{int}^* A = \text{int} \bar{A};$$

$$cl^* A = \overline{\text{int} A}.$$

Ko'p hollarda kanonik ichini olish amali $\text{int}^* A$ to'plamning kanonik yadrosini aniqlash amali deb ham yuritiladi. To'plamning ichini topish $\text{int} A$ esa, uning yadrosini aniqlashdir.

Ma'lumki, $A \subset \bar{A}$, u holda $\text{int} A \subset \text{int}^* A$. Ya'ni, ochiq yadro doimo kanonik yadroda yotadi. Demak, barcha ochiq to'plamlar o'zining kanonik yadrosida yotar ekan. Bundan ko'rinadiki, $\text{int} A \subset A$ munosabat o'rinli. U holda $Cl(A) \subset \bar{A}$. Ya'ni to'plamning kanonik yopig'i uning yopig'ida yotadi. Demak, barcha yopiq to'plamlar o'zida kanonik yopig'ini saqlar ekan.

X to'plamga topologiyani kiritish deganda biz $(T1) - (T3)$ aksiomalarni qanoatlantiruvchi τ to'plamlari oilasini tanlashni nazarda tutadi. Shundan keyin (X, τ) juftlik topologik fazoga aylanadi. Bundan tashqari, (01)-(03) shartlarga javob beradigan oilani tanlash $(T1) - (T3)$ aksiomalarni qanoatlantiradigan τ oilani tanlashga teng kuchlidir. Shuni ham ta'kidlaymizki, agar to'plamda $(C1) - (C3)$ shartlarni qanoatlantiradigan oilasi ajratib olinsa, u holda ajratilgan oila elementlarining barcha to'ldirmalaridan iborat oila berilgan to'plamdagi topologiyani hosil qiladi.

Quyida topologiya kiritishning boshqa usullarini ko'rib chiqamiz.

To'plamning yopilmasi orqali topologiya kiritish. (X, τ) topologik fazo bo'lsin va M ba'zi bir X ning qism to'plamidir. X fazosi M ni o'z ichiga olgan barcha yopiq to'plamlar oilasi bo'lib, C_M bilan belgilanadi.

$$C_M = \{F \subset X : F \supset M, X \setminus F \in \tau\}$$

(C1) yopiq to'plamlar xossasi tufayli bizda $C_M \neq \emptyset$ va shunga ko'ra (C2) xossasidan $\cap C_M$ kesishma yopiq. Bu kesishma $\overline{M}$ yoki $[M]$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$[M] = \overline{M} = \cap C_M.$$

Shubhasiz, $[M]$ M to'plamlarni o'z ichiga olgan eng kichik to'plam.

$[M]$ to'plam M to'plamining yopilmasi deyiladi.

Yopilma operatorining eng muhim xossalari quyidagilardan iborat:

$$(CO1) [\emptyset] = \emptyset;$$

$$(CO2) A \subset [A], \forall A \subset X;$$

$$(CO3) [A \cup B] = [A] \cup [B], \forall A, B \subset X;$$

$$(CO4) [[A]] = [A], \forall A \subset X;$$

Yopilma operatorining muhim qo'llanilishidan biri quyidagi teoremda berilgan.

2.1.7-teorema. X to'plam va $[\cdot]$ operator berilgan bo'lib, $(C01) - (C04)$ shartlar bajarilsin. U holda

$$\tau_{[\cdot]} = \{M \subset X: [X \setminus M] = X \setminus M\}$$

oila topologiya ta'rifidagi $(T1) - (T3)$ aksiomalarini qanoatlantiradi.

$(X, \tau_{[\cdot]})$ topologik fazoda har bir $M \subset X$ uchun $[M]$ to'plam M to'plamning yopilmasidir.

Bunday $\tau_{[\cdot]}$ topologiya $[\cdot]$ yopilma operatori yordamida yaratilgan topologiya deyiladi.

2.1.1-masala. Bitta elementdan ortiq bo'lgan ixtiyoriy X – to'plam berilgan bo'lsin, va x_0 – uning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan $A \subset X$ – to'plam uchun $[A] = A \cup x_0$ va $[\emptyset] = \emptyset$ bo'lsin. Biz yuqoridagi usul bilan kiritilgan operator yoyilmasining $(C01) - (C04)$ shartlarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

Bir nuqtali $\{x_0\}$ – to'plam yuqorida kiritilgan operator yopilmasiga nisbatan birgina yopiq to'plam bo'ladi. Qolgan barcha bir nuqtali to'plamlar ochiq, lekin yopiq emas.

Yuqorida aniqlangan operator yopilmasi $(C01) - (C04)$ shartlarini qanoatlantirishini ko'ramiz. A va B to'plamlar X ning ixtiyoriy to'plam ostisi bo'lsin. U holda

$$[A] = A \cup \{x_0\} \text{ va } [B] = B \cup \{x_0\}$$

bo'lsin.

$$[A] \cup [B] = (A \cup \{x_0\}) \cup (B \cup \{x_0\}) = (A \cup B) \cup \{x_0\} = [A \cup B]$$

bo'ladi.

$(C04)$ xossaning bajarilishini ko'rsatamiz. X ning ixtiyoriy A - to'plam ostisini qaraylik. U holda $[A] = A \cup \{x_0\}$ bo'ladi. $[A]$ dan yana bir marta yopilma

olsak, u holda

$$[A] = A \cup \{x_0\} = (A \cup \{x_0\}) \cup \{x_0\} = [[A]]$$

bo'ladi. Demak, (CO4) xossa bajarildi.

2.1.4-Misol. $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ bo'lsin. Taxmin qilib

$$[A] = \begin{cases} A, & \text{agar } A \neq \emptyset, \\ A \cup \{0\}, & \text{agar } A = \emptyset \end{cases}$$

X ni $[\cdot]: X \rightarrow X$ operatorida aniqlang.

To'plamning ichi bo'yicha topologiya kiritish. (X, τ) topologik fazo va M to'plam X ning qandaydir qism to'plami bo'lsin. Agar $x \in M$ nuqta shunday $O_{[x]} \in \tau$ atrofga ega bo'lib $O_{[x]} \subset M$ bo'lsa, x nuqta M to'plamning ichki nuqtasi deyiladi.

M to'plamning barcha ichki nuqtalari to'plami M to'plamning ichi deyiladi va $Int_X M$ yoki $Int M$ bilan belgilanadi.

To'plamning yopilmasi va ichi operatorlari quyidagi tenglik bilan bog'langan

$$Int A = X \setminus [X \setminus A].$$

bu yerda X — topologik fazo, A uning ixtiyoriy qism to'plami.

To'plamning ichini olishi Int operatori quyidagi xossalarga ega:

$$(IO1) Int X = X ;$$

$$(IO2) Int A = A, \forall A \subset X ;$$

$$(IO3) Int A(A \cap B) = Int A \cap B, \forall A, B \subset X ;$$

$$(IO4) Int Int A = A, \forall A \subset X .$$

2.1.8-teorema. Mayli, X to‘plam va Int operatori berilgan bo‘lsin. $M = IntM$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $M \subset X$ to‘plamlar oilasi uchun (IO1) – (IO4) shartlar bajariladi. U holda

$$\tau_{Int} = \{M \subset X: IntM = M\}$$

oila topologiya ta’rifidagi (T1) – (T3) aksiomalarni qanoatlantiradi. (X, τ_{Int}) topologik fazodagi har bir $M \subset X$ uchun, $intM$ to‘plam M to‘plamning ichi bo‘ladi.

Bunday τ_{Int} topologiya Int operatori bilan yaratilgan topologiya deyiladi.

Topshiriqlar. a) A va B to‘plamlar uchun X topologik fazo implikatsiyasini isbotlang

$$A \subset B \Rightarrow IntA \subset IntB$$

b) A to‘plami agar va faqat agar $IntA = A$ bo‘lganda X topologik fazo to‘plami ochiq ekanligini isbotlang.

c) A to‘plam uchun X topologik fazodagi tenglikni isbotlang

$$IntA = \bigcup \{U: U \in \tau, U \subset A\}$$

To‘plamning yopilmasi va ichi operatorlari quyidagi tenglik bilan bog‘langan

$$IntA = X \setminus [X \setminus A].$$

bu yerda X – topologik fazo, A uning ixtiyoriy qism to‘plami.

2.1.5-misol. Mayli, $X = \{0,1,2,3,4\}$ va $X_0 = \{0,1,2\}$ bo‘lsin.

$$IntA = \begin{cases} A, & \text{agar } A = X, \\ A \cap X_0, & \text{agar } A \neq X \end{cases}$$

tenglik bilan $Int: X \rightarrow X$ operatori aniqlangan bo‘lsin.

Topshiriqlar. a) Bunday aniqlangan Int operator (IO1) – (IO4) shartlarni qanoatlantirini isbotlang.

b) X fazoning barcha ochiq to'plamlarini sanab o'ting.

c) Barcha X_0 to'plamostilar va butun X to'plam va faqat ular X fazoda ochiq to'plamlar ekanligiga ishonch hosil qiling.

2.1.6-misol. Quyidagi

$$X = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

to'plam va

$$\tau = \{A \subset X: (1 \notin A) \vee (|X \setminus A| < \infty)\}.$$

oilani ko'rib chiqing.

Topshiriqlar. a) (X, τ) topologik fazo ekanligini aniqlang.

b) Har bir $n \in X \setminus \{1\}$ to'plam $\{n\}$ ochiq-yopiq ekanligini isbotlang.

c) $\{1\}$ to'plam yopiq, lekin ochiq emasligini isbotlang.

d) Har bir $A \subset X$ to'plam uchun quyidagilarni isbotlang.

$$[A] = \begin{cases} A, & \text{agar } |A| < \aleph_0, \\ A \cup \{1\}, & \text{agar } |A| = \aleph_0. \end{cases}$$

e) Har bir $A \subset X$ to'plam uchun quyidagilarni isbotlang.

$$IntA = \begin{cases} A, & \text{agar } |A| < \aleph_0, \\ A \cup \{1\}, & \text{agar } |A| = \aleph_0. \end{cases}$$

2.1.2-masala. Bitta nuqtadan kam bo'lmagan ixtiyoriy X to'plam va $|X \setminus X_0| > 1$ shartni qanoatlantiruvchi $X_0 \subset X$ to'plam berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $A \subset X$ to'plam ostiga quyidagi munosabatni $IntA = A \cap X_0$ qo'yamiz va $IntX = X$ deb olamiz. Yuqoridagi ichi operatori (IO1) – (IO4) shartlarni qanoatlantiradi. Bunda X_0 ning barcha to'plam ostilari va fazo o'zi yuqorida kiritilgan topologiyaga nisbatan ochiq.

Agar X_0 – bo'sh bo'lsa, u holda X – antidiskret fazo deyiladi.

Baza orqali topologiya kiritish. X to‘plam va β qism to‘plamlar oilasi berilgan bo‘lsin.

2.1.9-teorema. X to‘plamning β qism to‘plamlar oilasi $(B1) - (B2)$ shartlarni qanoatlantirsin va

$$\tau_\beta = \{\cup \beta' : \beta' \subset \beta\}.$$

bo‘lsin.

Unda τ_β oila $(T1) - (T3)$ aksiomalarni qanoatlantiradi. β oila (X, τ_β) topologik fazoning bazasidir.

τ_β topologiya β baza orqali yaratilgan topologiya deb ataladi.

2.1.7-misol. $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ barcha haqiqiy sonlar to‘plamini ko‘rib chiqaylik.

2.1.9-teoremaga ko‘ra, a) topshiriqlarini tekshirish uchun etarli bo‘ladi, ya’ni $\beta_e, \beta_\rightarrow$ va β_d oilalar uchun $(B1) - (B2)$ xususiyatlarini o‘rnatish kifoya. Keyin b) topshiriqlarning bajarilishi 3-teoremadan kelib chiqadi.

2.1.7-misol 2.1.9-teorema qanchalik muhimligini ko‘rsatadi.

Atroflar tizimi yordamida topologiya kiritish. Biz bilamizki, $x \in X$ nuqtalardagi ϑ_x lokal bazalarining birlashmalaridan iborat oila, ya’ni

$$\vartheta = \bigcup_{x \in X} \vartheta_x = \left\{ \bigcup_{x, \alpha} : \alpha \in A_x, x \in X \right\}$$

oilalar (X, τ) fazoning atroflar tizimi deb ataladi. Har qanday atroflar tizimi quyidagi xossalarga ega:

(NS1) har qanday $x \in X$ nuqta uchun ϑ_x to‘plam bo‘sh emas va har bir $V_{x, \alpha} \in \vartheta_x$ uchun $x \in V_{x, \alpha}$ mavjud;

(NS2) Agar $X \in V_{y,\alpha} \in \vartheta_y$ bo'lsa, u holda $V_{x,\beta} \in \vartheta_x$ topiladi, bunda $V_{x,\beta} \subset V_{y,\alpha}$;

(NS3) har bir $V_{x,\alpha}, V_{x,\beta} \in \vartheta_x$ juftlik uchun $V_{x,\gamma} \in \vartheta_x$ topilib, $V_{x,\gamma} \subset V_{x,\beta} \cap V_{x,\alpha}$ bo'ladi;

2.1.10- teorema. (NS1) - (NS3) xossalriga ega bo'lgan X to'plam va uning

$$\vartheta = \left\{ \bigcup_{x,\alpha} : \alpha \in A_x, x \in X \right\}$$

qism to'plamlari berilgan bo'lsin. $\tau_\vartheta = \{ \cup \vartheta' : \vartheta' \subset \vartheta \}$ bo'lsin.

Unda τ_ϑ oila (T1) - (T3) shartlarni qanoatlantiradi. ϑ oila (X, τ) topologik fazoning atroflar tizimidir.

τ_ϑ topologiya ϑ atroflar tizimi tomonidan yaratilgan topologiya deb ataladi.

2.1.8-misol. $L = \{(x, y) : y \geq 0\}$ yopiq yuqori yarimtekislik va

$$L_1 = \{(x, y) : y \geq 0\}$$

to'g'risini ko'rib chiqaylik.

Keling, har bir $(\xi, 0) \in L_1$ va $r > 0$ uchun $L_2 = L/L_1$ qo'ying. Mayli

$$U((\xi, 0), r) = \{(x, y) : (x - \xi)^2 + (y - r)^2 < r^2\}$$

davom etsak

$$U_i(\xi, 0) = U\left((\xi, 0), \frac{1}{i}\right) \cup \{(\xi, 0)\}, i = 1, 2, \dots$$

Har bir $r > 0$ va $(\xi, \zeta) \in L_2$ bo'lsin

$$U((\xi, \zeta), r) = \{(x, y) : (x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2 < r^2, \zeta \geq 0\},$$

$$U_i(\xi, \zeta) = U\left((\xi, \zeta), \frac{1}{i}\right), i = 1, 2, \dots$$

Topshiriqlar. a) (NS1) - (NS3) xossalariga ega $\vartheta = \{U_i \mid (\xi, \zeta): (\xi, \zeta) \in L, i \in \mathbb{N}\}$ to'plam ekanligini aniqlang.

b) (L, τ_ϑ) topologik fazoda L_1 to'plamning yopiq ekanligini isbotlang.
 (L, τ_ϑ) topologik fazo Nemitskiy tekisligi deb ataladi.

2.2-§. Uzluksiz akslantirishlar. Ochiq va yopiq akslantirishlar.

Gomeomorfizm.

A va B ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. A to'plamni B to'plamga **akslantirish** deb, A to'plamning har bir elementiga B to'plamning yagona elementini mos qo'yuvchi qoidaga (moslikka) aytiladi. A to'plamni B to'plamga akslantirish odatda $f: A \rightarrow B$ yoki $A \xrightarrow{f} B$ kabi belgilanadi.

$f: A \rightarrow B$ akslantirish uchun ushbularni kiritamiz

$$f(F) = \{f(a): a \in A\}, \quad F \subset A$$

$$f^{-1}(G) = \{a \in A: f(a) \in G\}, \quad G \subset B$$

$f(F) \subset B$ to'plam $G \subset B$ to'plamning $f: A \rightarrow B$ akslantirishdagi **obrazi (aksi)** deyiladi. $f^{-1}(G) \subset A$ to'plam $G \subset B$ to'plamning $f: A \rightarrow B$ akslantirishdagi **proobrazi (asli)** deyiladi.

X, Y topologik fazolarni va $x \in X$ nuqtani qaraylik. Agar $y = f(x)$ nuqtaning har bir Oy atrofi uchun shunday Ox atrof topilib, $f(Ox) \subset Oy$ bo'lsa, $f: X \rightarrow Y$ akslantirish x nuqtada uzluksiz deyiladi.

Har bir $x \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lgan $f: X \rightarrow Y$ akslantirish **uzluksiz akslantirish** deyiladi.

2.2.1-teorema. Quyidagi shartlardan har biri $f: X \rightarrow Y$ akslantirishning uzluksizligiga teng kuchli:

- Y dagi har bir ochiq U to'plamning $f^{-1}(U)$ proobrazi X da ochiq bo'ladi;
- Y da yopiq har bir F to'plamning $f^{-1}(F)$ proobrazi X da yopiq bo'ladi;
- Har bir $A \subset X$ to'plam uchun $f([A]) \subset f[(A)]$ bo'ladi;
- Y fazodagi qandaydir ρ oldbazasining har bir U elementining $f^{-1}(U)$ proobrazi X da ochiq bo'ladi;

Uzluksiz akslantirishlarning quyidagi xossalarini ta'kidlaymiz:

1°. Bog‘lamli to‘planning uzluksiz akslantirishdagi obrazi bog‘lamli bo‘ladi.

2°. Chiziqli bog‘lamli to‘planning uzluksiz obrazi chiziqli bog‘lamli bo‘ladi.

3°. Bog‘lamli fazodan to‘la bog‘lamli bo‘lmagan fazoga uzluksiz akslantirish doimiy (ya’ni bitta nuqtaga) akslantirishdan iborat.

X fazoni (diskret topologiyali) ikki nuqtali to‘plamga uzluksiz akslantirishlar faqatgina doimiylardan iborat.

Son o‘qiga uzluksiz $f: X \rightarrow R_e$ akslantirish **uzluksiz (haqiqiy qiymatli) funksiya** deyiladi.

2.2.1-misol. Ushbu to‘plamni

$$X = N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

va undagi ushbu topologiyani qaraylik

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : |X \setminus A| < \infty\}.$$

(X, τ) topologik fazodagi har qanday uzluksiz funksiya o‘zgarmas ekanligini ko‘rsatamiz.

Ochiq to‘plamlarning ixtiyoriy juftining kesishmasi cheksiz sondagi elementlarga ega bo‘lishini ta’kidlaymiz.

$f: X \rightarrow [0,1]$ uzluksiz akslantirish bo‘lsin. Ixtiyoriy $m \in N$ va $k \in N$ nuqtalarni olaylik. Faraz qilaylik, $f(m) = a \neq b = f(k)$ bo‘lsin.

f ning uzluksizligidan m nuqtaning shunday $U_m \in \tau$ atrofi topiladiki, uning obrazi $a = f(m)$ nuqtaning $\left(a - \frac{|b-a|}{3}, a + \frac{|b-a|}{3}\right) \cap [0,1]$ atrofida yaxlit yotadi:

$$f(U_m) \subset \left(a - \frac{|b-a|}{3}, a + \frac{|b-a|}{3}\right) \cap [0,1].$$

Shuningdek, k nuqta shunday $U_k \in \tau$ atrofi topiladiki, uning obrazi $b = f(k)$ nuqtaning $\left(b - \frac{|b-a|}{3}, b + \frac{|b-a|}{3}\right) \cap [0,1]$ atrofida yaxlit yotadi:

$$f(U_k) \subset \left(a - \frac{|b-a|}{3}, a + \frac{|b-a|}{3}\right) \cap [0,1].$$

$$\left(a - \frac{|b-a|}{3}, a + \frac{|b-a|}{3}\right) \cap \left(b - \frac{|b-a|}{3}, b + \frac{|b-a|}{3}\right) = \emptyset$$

bo'lgani uchun $f(U_m) \cap f(U_k) = \emptyset$ bo'ladi. Boshqa tarafdin $U_m \cap U_k \neq \emptyset$ ekanligidan $f(U_m) \cap f(U_k) \neq \emptyset$ bo'ladi. Hosil qilingan bu ziddiyat X fazoda o'zgarmlardan boshqa uzluksiz funksiya yo'qligini ko'rsatadi.

Agar $f: X \rightarrow Y$ va $g: Y \rightarrow Z$ akslantirishlar uzluksiz bo'lsa, u holda ularning $g \cdot f: X \rightarrow Z$ kompozitsiyasi ham uzluksiz bo'ladi.

$f: X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish, Z esa X fazoning qismfazosi bo'lsin. Faqatgina Z to'plamda qarayotgan f akslantirish $f|_Z$ orqali belgilanadi va f akslantirishning Z to'plam bilan **cheklanishi** yoki Z to'plamga **torayishi** deyiladi.

2.2.2-misol. Agar $\sin: R^1 \rightarrow R^1$ ni olsak, ya'ni har bir $x \in R$ ga $\sin x$ ni mos qo'ysak, bu akslantirish uzluksizdir.

2.2.3-misol. Agar $\arctg: R^1 \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ akslantirishni olsak, bu akslantirish uzluksiz va biektiv akslantirishdir. Bunga teskari akslantirish $tg: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R^1$ ham uszuksizdir.

Uzluksiz akslantirishga misol sifatida quyidagini aytishimiz mumkin: ixtiyoriy $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda X fazo diskret fazo bo'lsa, yoki Y antidiskret fazo bo'lsa, bu akslantirish doimo uzluksiz bo'ladi.

Bulardan xulosa qilib aytishimiz mumkinki, $f: X \rightarrow Y$ ning uzluksiz bo'lishi bu fazolardagi topologiyalarga bog'liq ekan. Masalan, bir X to'plamda ikki xil topologiyani olsak, u holda $i_x: X \rightarrow Y$ ayniy akslantirish doimo uzluksiz bo'lavermaydi.

Uzluksiz akslantirishlarning oddiy, biroq muhim xossalardan biri shuki, bir necha uzluksiz akslantirishlarning kompozitsiyasi yana uzluksiz akslantirishdan iborat bo'ladi.

Endi quyidagi akslantirishni qaraymiz

$$A \xrightarrow{f} B.$$

$f^{-1}(b)$ orqali ushbu to'plamni belgilaymiz

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A: f(a) = b\}.$$

$|M|$ orqali M to'plamning quvvati (ya'ni elementlari "miqdori") belgilash qabul qilinganligini ta'kidlab o'tamiz.

Agar har bir $b \in B$ uchun $|f^{-1}(b)| \leq 1$ bo'lsa, u holda f o'zaro bir qiymatli akslantirish deyiladi. Boshqacha aytganda, har bir $b \in B$ element uchun eng ko'pi bilan bitta shunday $a \in A$ element topilib, $f(a) = b$ bo'lsa, u holda f **o'zaro bir qiymatli akslantirish** deyiladi.

Agar $f: A \rightarrow B$ o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lsa, u holda f akslantirishga **teskari** $f^{-1}: B \rightarrow A$ akslantirishni aniqlash mumkin:

$$f^{-1}(b) = a, \quad b \in B \text{ \& } f(a) = b.$$

Agar har bir $b \in B$ uchun $|f^{-1}(b)| \geq 1$ bo'lsa, u holda f akslantirish "ustiga" akslantirish deyiladi. Boshqacha aytganda, har bir $b \in B$ uchun kamida bitta shunday $a \in A$ topilib, $f(a) = b$ bo'lsa, u holda f **"ustiga" akslantirish** deyiladi.

2.2.1-ta'rif. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish

- 1) o'zaro bir qiymatli;
- 2) "ustiga";
- 3) uzluksiz;
- 4) unga teskari f^{-1} akslantirish uzluksiz bo'lsin. U holda f **gomeomorfizm**, X va Y fazolar **gomeomorf fazolar** deyiladi.

Topologiya fani topologik fazolarning gomeomorfizmlarda saqlanadigan xossalarini o'rgangani uchun topologik fazolar nazariyasida gomeomorf fazolarni bir-biridan farqlashmaydilar. Masalan, tabiiy topologiya bilan qaralayotgan bo'sh bo'lmagan har qanday yopiq, chegaralangan kesma $[0, 1]$ kesмага gomeomorf bo'lgani uchun, $[0, 1]$ kesmaning xossasini o'rganish yetarli.

Topologik fazolarning gomeomorfizmlarda saqlanadigan xossalari ularning topologik xossalari deyiladi.

Topologik fazolarning bog‘lamliligi topologik xossa, ya’ni gomeomorfizmlarga nisbatan invariant xossa bo‘ladi.

2.2.2-teorema. O‘zaro bir qiymatli $f: X \rightarrow Y$ akslantirish X topologik fazoning qandaydir $\emptyset$ oldbasasini Y topologik fazoning oldbasasiga akslantirgandagina va faqat shu holda gomeomorfizm bo‘ladi.

Uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda ochiq $U \subset X$ to‘plamning obrazi Y da ochiq bo‘lmasligi, $F \subset X$ yopiq to‘plamning obrazi esa Y da yopiq bo‘lmasligi mumkin.

2.2.4-misol. R^n fazoda radiusi 1 ga teng bo‘lgan B ochiq sharni olsak, $f: R^n \rightarrow B$ akslantirishni $f(x) = x/(1 + |x|)$ formula bilan aniqlasak, bu yerda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$; $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Bu akslantirish biektivdir. Teskari akslantirish $f^{-1}: B \rightarrow R^n$ esa, $f^{-1}(x) = x/(1 - \|x\|)$ formula bilan aniqlanadi. f va f^{-1} lar uzluksizdir. Shu sababli f – gomeomorfizm.

Agar X topologik fazo Y topologik fazoning birorta qism to‘plamiga gomeomorf bo‘lsa, ya’ni $f: X \rightarrow Y_0 \subset Y$ gomemorfizm bo‘lsa, u holda X fazo Y fazoga topologik joylashgan yoki X fazo Y fazoda topologik yotadi yoxud Y fazo X fazoni o‘zida saqlaydi, deyiladi. Bunday gomeomorfizm joylash yoki joylashtirish deyiladi.

Topologik fazolarning gomeomorf akslantirishlarda o‘zgarmay qoladigan xossalari ularning topologik xossalari deb yuritiladi. Shu sababli topologiyani shunday akslantirishlarda fazoning topologik xossalarini o‘rganuvchi fandir, desak ham bo‘ladi.

2.2.5-misol. Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lsin. $S = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ aylana va $X = [0; 2\pi)$ yarimintervalni qaraylik.

$f: X \rightarrow S$ akslantirishni ushbu qoida bilan aniqlaymiz: $x \in X$ nuqtaga shunday $f(x) \in S$ nuqta mos qo'yiladiki, bu nuqtaning radius-vektori abscissa o'qi bilan x burchak hosil qilsin.

X topologik fazoning Y topologik fazoga $f: X \rightarrow Y$ akslantirilishini qaraylik. Agar har bir ochiq $U \subset X$ to'plamning $f(U)$ obrazi Y fazoning ochiq to'plami bo'lsa, u holda f **ochiq akslantirish** deyiladi.

X topologik fazoning Y topologik fazoga $f: X \rightarrow Y$ akslantirilishini qaraylik. Agar har bir yopiq $F \subset X$ to'plamning $f(F)$ obrazi Y fazoning yopiq to'plami bo'lsa, u holda f **yopiq akslantirish** deyiladi.

2.2.6-misol. Ixtiyoriy $f: [a, b] \rightarrow R^1$ uzluksiz akslantirishni olsak, bu akslantirish doimo yopiq akslantirish bo'ladi. Lekin u doimo ochiq akslantirish bo'lavermaydi.

2.2.7-misol. $P: R^2 \rightarrow R$ proeksiyalashni olsak, bu akslantirish $p(x_1, x_2) = x_1$ formula bilan aniqlanadi va ochiq akslantirish bo'ladi. Ya'ni markazi $(x_1; x_2)$ nuqtada bo'lgan ochiq doira proeksiyasi markazi x_1 da bo'lgan intervaldan iboratdir. Agar R^2 da $x_1 x_2 = 1$ giperbolani olsak, bu giperbola yopiq to'plamdir.

Yopiq to'plamga misol keltirganda tekislikdagi ixtiyoriy ikkinchi tartibli chiziq yopiq to'plam ekanligini ta'kidlagan edik. Bu to'plamlardan ba'zilarining proeksiyasi $R^1 \setminus \{0\}$ dan iborat bo'lib, bu yopiq to'plam emas. Demak, bu akslantirish yopiq akslantirish emas.

2.2.8-misol. Agar $f: R^1 \rightarrow R^1$ uzluksiz funktsiyani

$$f(x) = 1/(1 + x^2)$$

formula bilan aniqlasak, bu uzluksiz akslantirish bo'lib, ochiq ham, yopiq ham emasdir. Shundan, $f(R^1) = (0; 1]$ to'plam R^1 da ochiq ham, yopiq ham emasligi ma'lum bo'ladi.

2.2.3-teorema. Topologik fazolarning uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ akslantirishi uchun quyidagi jumlar teng kuchli:

- 1) f homeomorfizm bo'ladi;
- 2) f o'zaro bir qiymatli ochiq akslantirish bo'ladi;
- 3) f o'zaro bir qiymatli yopiq akslantirish bo'ladi.

2.3-§. Topologik fazolarning ajrimlilik aksiomalari

Topologik fazo tushunchasi ancha keng tushuncha hisoblanadi. Shuning uchun ham barcha topologik fazolar uchun ko‘plab qiziqarli xossalarni birdaniga isbotlash imkonsiz bo‘ladi. Shundan kelib chiqib, topologik fazolarning maxsus sinflari kiritiladi. Ravshanki, qaralayotgan sinf qancha “tor” bo‘lsa, bu sinf shuncha ko‘p qiziqarli xossalarga ega bo‘ladi.

Topologik fazolarga qo‘shimcha ravishda qo‘yiladigan, topologik fazolardagi nuqtalarni va yopiq to‘plamlarni ajratish bilan bog‘liq hamda topologik fazolarning shartlar bilan chegaralangan sinflarini o‘rganish imkonini beruvchi qo‘shimcha talablar yig‘ilmalarini – **ajrimlilik aksiomalarini** bayon etamiz.

Matematikaning ko‘pgina sohalarida odatda ushbu $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$ ajrimlilik aksiomalari ancha keng qo‘llaniladi.

Aytaylik, (X, τ) – qandaydir topologik fazo bo‘lsin.

Ajrimlilikning T_0 -aksiomasi (yoki ajrimlilikning Kolmogorov aksiomasi).

Agar X fazoning ixtiyoriy ikkita turlicha x va y nuqtalaridan hech bo‘lmaganda bittasi ikkinchisini saqlamaydigan atrofga ega bo‘lsa, u holda X fazo ajrimlilikning T_0 aksiomasini qanoatlantiradi deyiladi. Bu holda X ni topologik T_0 -fazo, yoki qisqalik uchun T_0 -fazo deb yuritiladi.

Ayrim hollarda barcha T_0 -fazolar sinfi T_0 orqali belgilanadi. Bunday hollarda $X \in T_0$ yozuv X fazo topologik fazolarning T_0 sinfiga tegishli ekanligi, ya‘ni X topologik fazoning T_0 -fazo ekanligini anglatadi.

T_0 -fazo bo‘lmaydigan topologik fazolar ham bor. Masalan, har qanday antidiskret fazo T_0 -fazo bo‘lmaydigan topologik fazoning misoli bo‘ladi. Quyida T_0 -fazo bo‘lmaydigan boshqa topologik fazo misolini keltirimiz.

2.3.1-misol. $X = \{0,1,2,3,4\}$ bo'lsin. Ushbu

$$\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3,4\}\}$$

oila X da topologiya bo'ladi. (X, τ) fazo T_0 aksiomani qanoatlantirmaydi. Haqiqatan ham, $3 \in X$ nuqtaning yagona ochiq $O_3 = \{0,1,2,3,4\}$ atrofi mavjud bo'lib, bu atrof $4 \in X$ nuqtaning yagona ochiq $O_4 = \{0,1,2,3,4\}$ atrofi bilan ustma-ust tushadi ($O_3 = O_4$). Bundan $3 \in O_4$ va $4 \in O_3$. Demak, bir-biridan farqli 3 va 4 nuqtalarning birontasi ham boshqasini saqlamaydigan atrofga ega emas ekan. Boshqacha aytganda, 3 va 4 nuqtalarni ochiq to'plamlar bilan ajratib bo'lmaydi. Shuning uchun qaralayotgan (X, τ) topologik fazo ajrimlilikning T_0 aksiomasini qanoatlantirmaydi.

2.3.1-masala. Topologik fazolar ichidan T_0 topologik fazo bo'lmaydiganlariga misollar keltiramiz.

1. Antidiskret topologik fazoni T_0 fazo bo'lmaydigan topologik fazoga misol qilib keltirish mumkin. Haqiqatan ham, antidiskret topologik fazoning topologiyasi $\tau = \{\emptyset, X\}$ to'plamdan iborat. Antidiskret topologik fazoning ixtiyoriy olingan $x, y \in X, (x \neq y)$ nuqtalari uchun shu nuqtalardan faqat bittasini o'z ichiga oluvchi ochiq to'plam mavjud emas. Chunki, bu fazoning ochiq to'plamlari faqat $\emptyset, X$ to'plamlardan iborat xolos, shuning uchun ixtiyoriy olingan $x, y \in X, (x \neq y)$ nuqtalardan bittasini o'z ichiga oluvchi to'plam albatta ikkinchisini ham o'z ichiga oladi.

2. Bizga elementi bittadan ko'p bo'lgan X to'plam va $X \setminus X_0$ ayirmaning elementi bittadan ko'p bo'ladigan $X_0 \subset X$ qism to'plam berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $A \subset X$ qism to'plam uchun $\text{int}A = A \cap X_0$ va $\text{int}X = X$ munosabat o'rinli deb faraz qilaylik. Ravshanki, bu usul bilan aniqlangan to'plamning ichi tushunchasi yordamida X to'plamda topologiya aniqlash mumkin. Berilgan X_0 to'plamning barcha qism to'plamlari va X to'plamning faqat o'zi yuqorida kiritilgan topologiyaga nisbatan ochiq to'plamdir. Ixtiyoriy olingan $x, y \in X, (x \neq y)$ nuqtalardan bittasini o'z ichiga oluvchi to'plam albatta ikkinchisini ham o'z ichiga olishini tekshirib ko'rish unchalik qiyin emas.

Agar X_0 sifatida bo'sh to'plamni olsak, u holda X antidiskret topologik fazodan iborat bo'ladi.

T_1 -aksioma (Tixonov aksiomasi). Agar X fazoning ixtiyoriy ikkita turlicha x va y nuqtalaridan har biri boshqasini saqlamaydigan atrofga ega bo'lsa, u holda X fazo ajrimlilikning T_1 aksiomasini qanoatlantiradi deyiladi.

Ajrimlilikning T_1 aksiomasini qanoatlantiruvchi X topologik fazo qisqalik uchun T_1 -fazo deb yuritiladi. $X \in T_1$ yozuv X fazo barcha topologik T_1 -fazolarning T_1 sinfiga tegishli ekanligi, ya'ni X topologik fazoning T_1 -fazo ekanligini anglatadi.

2.3.1-xossa. Topologik fazo faqat va faqat uning har qanday bitta nuqtali to'plamostisi yopiq bo'lgandagina T_1 -fazo bo'ladi.

Ravshanki, har qanday topologik T_1 -fazo topologik T_0 -fazo bo'ladi. Aksinchasi, umuman olganda, o'rinli emas.

2.3.2-misol. Ushbu to'plamni

$$X = [0,1]$$

va undagi ushbu oilani qaraylik

$$\tau = \{A \subset X: A \neq 1\} \cup \{X\}.$$

Ravshanki, τ oila X da topologiya bo'ladi.

(X, τ) fazo T_1 aksiomani qanoatlantirmaydi. Haqiqatan ham, bu fazoning $1 \in X$ nuqtasi yagona $O_1 = X$ atrofga ega bo'lib, har bir $x \in X$, $x \neq 1$, nuqta uchun $x \in O_1$ bo'laveradi. Demak, 1 nuqta o'zidan farq qiladigan har qanday x nuqtani olganda ham, 1 ning x ni saqlamaydigan atrofi mavjud emas ekan. Demak, (X, τ) fazo T_1 aksiomani qanoatlantirmas ekan.

(X, τ) fazo T_0 aksiomani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Topologiyaning aniqlanishiga ko'ra har bir $x \in X \setminus \{1\}$ nuqtadan tashkil togan $\{x\}$ to'plam ochiq bo'lib, uning $O_x = \{x\}$ atrofi 1 ni saqlamaydi. Demak, 1 va $x \in X \setminus \{1\}$ nuqtalarda T_0 aksioma bajariladi. Ixtiyoriy turlicha $x, y \in X \setminus \{1\}$ nuqtalar jufti uchun esa $y \notin$

$\{x\}$ va $x \notin \{y\}$ bo'ladi. Bundan (X, τ) fazo o'zining barcha nuqtalarida T_0 aksioma shartini qanoatlantirishi kelib chiqadi. Demak, $(X, \tau) \in T_0$ degan xulosaga kelamiz.

2.3.2-masala. Ma'lumki, har qanday T_1 topologik fazo T_0 topologik fazo bo'ladi, lekin teskarisi har doim ham o'rinli emas. Bunga misol keltiramiz.

Bizga elementi bittadan ko'p bo'lgan X to'plam va uning biror $x_0 \in X$ nuqtasi berilgan bo'lsin. Har bir bo'sh bo'lmagan $A \subset X$ qism to'plam uchun $\bar{A} = A \cup \{x_0\}$ va $\bar{\emptyset} = \emptyset$ munosabat o'rinli deb faraz qilaylik. Bu usul bilan aniqlangan to'plamning yopilmasi tushunchasi yordamida X to'plamda topologiya aniqlash mumkin. Berilgan $\{x_0\}$ nuqtadan iborat to'plamning faqat o'zi yuqorida kiritilgan topologiyaga nisbatan X topologik fazoda yopiq to'plamdir, boshqa har qanday bir nuqtali to'plam ochiq to'plamdir, lekin yopiq emas.

Ixtiyoriy $y \in X, (x \neq y)$ nuqtaning har qanday atrofi x_0 nuqtani o'z ichiga oladi, lekin x_0 nuqtani atrofi sifatida $\{x_0\}$ nuqtadan iborat to'plamni olsak, u holda y tegishli bo'lmagan x_0 nuqtaning atrofi mavjud ekan.

Demak, ushbu X topologik fazo T_0 fazo, lekin T_1 fazo bo'lmagan topologik fazoga misol bo'la oladi.

T_2 -aksioma (*Hausdorff aksiomasi*). Agar X fazoning ixtiyoriy har xil x va y nuqtalari kesishmaydigan atroflarga ega bo'lsa, u holda X fazo ajrimlilikning T_2 -aksiomasini qanoatlantiradi deyiladi. Bu holda X fazo T_2 -fazo deb yuritiladi; yuqoridagilarga o'xshash $X \in T_2$ yozuv ham ishlatiladi.

Ajrimlilikning T_2 -aksiomasini qanoatlantiruvchi fazo *Hausdorff fazosi* yoki *ajratiladigan fazo* deb ham yuritiladi.

Ravshanki, har qanday topologik T_2 -fazo topologik T_1 -fazo bo'ladi. Aksinchasi, umuman olganda, o'rinli emas.

2.3.3-misol. Ushbu to'plamni

$$X = N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

va undagi ushbu topologiyani qaraylik

$$\tau = \{A \subset X: |X \setminus A| < \infty\} \cup \{X\}.$$

(X, τ) fazo T_2 -aksiomani qanoatlantirmaydi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy m, n natural sonlarni olganda ham, ularning har qanday O_m va O_n ochiq atroflari uchun $X \setminus O_m$ va $X \setminus O_n$ to'plamlar chekli bo'laveradi. Bundan

$$(X \setminus O_m) \cup (X \setminus O_n) = X \setminus (O_m \cap O_n)$$

to'plam chekli, ya'ni $O_m \cap O_n$ kesishma cheksiz ekanligi kelib chiqadi. Demak, (X, τ) fazo har qanday ikkita turlicha nuqtalarini olganda ham, ularning har qanday atroflari kesishaverar ekan. Xulosa qilib, $(X, \tau) \notin T_2$ ekanligiga amin bo'lamiz.

(X, τ) fazoning har bir bitta nuqtali $\{x\}$ to'plami yopiq bo'lgani uchun, 1-xossaga ko'ra $(X, \tau) \in T_1$ bo'lishi kelib chiqadi.

T_3 -aksioma. Agar X fazoning ixtiyoriy yopiq to'plami va unga tegishli bo'lmagan har qanday nuqta kesishmaydigan atroflarga ega bo'lsa, u holda X fazo ajrimlilikning T_3 -aksiomasini qanoatlantiradi deyiladi.

2.3.2-xossa. X topologik fazo faqat va faqat har bir x nuqta va uning U atrofi uchun shunday V atrof topilib, $x \in V \subset [V] \subset U$ bo'lgandagina ajrimlilikning T_3 -aksiomasini qanoatlantiradi.

T_1 va T_3 aksiomalarni birgalikda qanoatlantiruvchi fazo *regulyar* fazo deyiladi.

Har qanday regulyar fazo Hausdorff fazosi bo'ladi. Aksincha tasdiq, umuman olganda, o'rinli emas.

2.3.4-misol. $X = (-\infty, +\infty)$ barcha haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Ushbu to'plamni qaraymiz

$$D = \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots, \pm \frac{1}{n}, \dots \right\}.$$

Har bir $x \in X$ uchun ushbu to'plamlarni va sistemani aniqlaymiz

$$U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i} \right),$$

$$v(x) = \begin{cases} \{U_i(x): i = 1, 2, \dots, n, \dots\}, & x \neq 0, \\ \{U_i(x) \setminus D: i = 1, 2, \dots, n, \dots\}, & x = 0. \end{cases}$$

Ushbu

$$v = \bigcup_{x \in X} v(x)$$

sistema atroflar sistemasi bo'ladi. v atroflar sistemasi orqali hosil qilingan topologiya bilan ta'minlangan X topologik fazo Hausdorff fazosi bo'ladi. D to'plam X topologik fazoda yopiq bo'ladi. Undan tashqari, $0 \notin D$ bo'ladi. $0 \in U$ va $D \subset V$ bo'ladigan har qanday U va V ochiq to'plamlar uchun $U \cap V \neq \emptyset$ ekanligi ko'rinib turibdi. Bundan X regulyar fazo emasligi kelib chiqadi.

$T_{3\frac{1}{2}}$ -aksioma. Agar X fazoning ixtiyoriy yopiq F to'plami va unga tegislili bo'lmagan har qanday x_0 nuqtasi uchun shunday $f: X \rightarrow [0,1]$ uzluksiz funksiya topilib, $f(x_0) = 0$ va barcha $x \in F$ da $f(x) = 1$ bo'lsa, u holda X fazo $T_{3\frac{1}{2}}$ -aksiomani qanoatlantiradi deyiladi.

Ajrimlilikning T_1 va $T_{3\frac{1}{2}}$ aksiomalarini qanoatlantiruvchi topologik fazo *to'la regulyar fazo* yoki *Tixonov fazosi* deb yuritiladi.

Har qanday to'la regulyar fazo regulyar fazo bo'ladi. Aksinchasi o'rinli emas. Buni ko'rsatuvchi misol ancha qiyin usulda quriladi. Shuning uchun bu misolni keltirmaymiz.

Eslatma. To'la regulyar bo'lmagan shunday regulyar fazo mavjudki, unda aniqlangan har qanday uzluksiz funksiya faqatgina o'zgaras bo'ladi.

Keltirilgan bu eslatma to'la regulyar fazolar sinfining naqadar ahamiyatli ekanligini ko'rsatadi.

T_4 -aksioma. Agar X fazoning ixtiyoriy ikkita yopiq, kesishmaydigan to'plamlari kesishmaydigan atroflarga ega bo'lsa, u holda X fazo ajrimlilikning T_4 -aksiomasini qanoatlantiradi deyiladi.

2.3.3-xossa. X topologik fazo faqat va faqat har qanday F yopiq to'plam va uning ixtiyoriy U ochiq atrofi uchun F ning shunday V ochiq atrofi topilib,

$$F \subset V \subset [V] \subset U$$

bo'lsagina ajrimlilikning T_4 -aksiomani qanoatlantiradi.

T_1 va T_4 aksiomalarni qanoatlantiruvchi topologik fazo **normal fazo** deb yuritiladi.

Har qanday normal fazo to'la regulyar fazo bo'ladi. Aksinchasi o'rinli ernas.

2.3.5-misol. Nemitskiy tekisligi to'la regulyar fazo bo'ladi, ammo normal fazo bo'lmaydi. Uning qurilishini keltiramiz.

Yuqori yopiq

$$L = \{(x, y): y \geq 0\}$$

yarimtekislik hamda

$$L_1 = \{(x, y): y = 0\}$$

to'g'ri chiziqni qaraymiz. $L_2 = L \setminus L_1$ deb olamiz. Har bir $(\xi, 0) \in L_1$ va $r > 0$ uchun

$$U((\xi, 0), r) = \{(x, y): (x - \xi)^2 + (y - r)^2 < r^2\}$$

bo'lsin. Yana

$$U(\xi, 0) = U\left((\xi, 0), \frac{1}{i}\right) \cup \{(\xi, 0)\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

bo'lsin. Har bir $(\xi, \zeta) \in L_2$ va $r > 0$ uchun

$$U((\xi, \zeta), r) = \{(x, y): (x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2 < r^2, \zeta \geq 0\}.$$

$$U_i(\xi, \zeta) = U\left((\xi, \zeta), \frac{1}{i}\right), \quad i = 1, 2, \dots$$

bo'lsin.

Ushbu

$$\nu = \{U_i(\xi, \zeta): (\xi, \zeta) \in L, i \in N\}$$

jamlanma L da atroflarning fundamental sistemasi bo'ladi.

Bu sistema hosil qilgan τ_ν topologiyaga ko'ra L_1 to'plam (L, τ_ν) topologik fazoda yopiq bo'ladi. Bundan tashqari har qanday $F \subset L_1$ top'lam L da yopiq bo'ladi. Xususan, $A = \{(x, 0): x \in Q\}$ va $B = \{(x, 0): x \in R \setminus Q\}$ to'plamlar L da yopiq bo'ladi, bunda Q – ratsional sonlar to'plami. Ravshanki,

$$A \cap B = \emptyset.$$

Biroq, mos ravishda A va B to'plamlarni saqllovchi, L da ochiq har qanday U_A va U_B to'plamlar jufti uchun ushbuga egamiz

$$U_A \cap U_B \neq \emptyset.$$

Shunday qilib, L normal fazo emas ekan.

II BOB BO‘YICHA XULOSA

Mazkur bobda topologiya kiritish usullari o‘rganildi. Topologiya kiritishga doir teoremlar keltirildi va misollar orqali tushuntirildi.

Keyin uzluksiz akslantirishlarga ta’rif berildi. Ochiq va yopiq akslantirishlar haqida tushunchalar berildi.

Keyingi mavzuda topologik fazolarning ajrimlilik aksiomalari, ularga oid misollar, xossalari bayon etildi.

III BOB. UZLUKSIZ FUNKSIYALARI FAQATGINA O'ZGARMASLARDAN IBORAT FAZONI QURISH

3.1-§. $A(m)$ fazoni qurish va uning ayrim xossalari

Mayli X – quvvati $m \geq \aleph_0$ ga teng bo'lgan ixtiyoriy cheksiz to'plam bo'lsin, bunda $x_0 \in X$ – bazibir nuqta. Quyidagi

$$\tau = \{U \subset X: x_0 \notin U\} \cup \{U: |X \setminus U| < \infty\}$$

oilani aniqlaymiz.

(X, τ) – topologik fazo ekanligini aniqlash oson, u $A(m)$ bilan belgilanishi qabul qilingan. Barcha bir nuqtali $x \in X \setminus \{x_0\}$ to'plamlar uchun $\{x\}$ ochiq-yopiq, $\{x_0\}$ yopiq to'plam, lekin ochiq emas. Bunda faqat va faqat x_0 ni o'z ichiga olgan va to'ldiruvchilari chekli bo'lgan U to'plamlar x_0 nuqtaning ochiq atrofi bo'ladi. Barcha bir nuqtali $\{x\}$, $x \in X \setminus \{x_0\}$ to'plamlardan va chekli to'ldiruvchili barcha U to'plamlardan tashkil topgan oila (X, τ) fazoning bazasini tashkil etadi.

$A \subset A(m) = (X, \tau)$ qism to'plamining $\bar{A}$ yopilmasi (ya'ni $\bar{A}$ har bir ochiq atrofi A ni kesib o'tuvchi barcha $x \in X$ nuqtalar to'plami) quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\bar{A} = \begin{cases} A, & \text{agar } A \text{ chekli bo'lsa,} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{agar } A \text{ cheksiz bo'lsa.} \end{cases}$$

Haqiqatan ham, agar A chekli va $x \notin A$ bo'lsa, $x \neq x_0$ uchun $\{x\}$ to'plam x nuqtaning ochiq atrofi va $\{x\} \cap A = \emptyset$; agar $x_0 \notin A$ bo'lsa, $U = X \setminus A$ to'plam x_0 nuqtaning ochiq atrofi va $U \cap A = \emptyset$ bo'ladi. Shunday qilib, agar A chekli bo'lsa, X fazoning A to'plamga kirmagan har bir nuqtasi A bilan kesishmaydigan atrofga ega. Demak, $\bar{A} = A$.

Agar A cheksiz va $x \notin A$ bo'lsa, $x \neq x_0$ uchun $\{x\}$ to'plam x nuqtaning ochiq atrofi va $\{x\} \cap A = \emptyset$ bo'ladi. Bu esa $x \notin \bar{A}$ ekanligini bildiradi. x_0 nuqtaning har bir atrofi $U = X \setminus F$ ko'rinishga ega bo'lib, bu yerda F – chekli to'plamdir. A ni har qanday chekli F to'plamga kiritish mumkin emasligi sababli, U va A to'plamlari albatta kesishadi. Demak, yopilma ta'rifiga ko'ra biz ushbu $\bar{A} =$

$A \cup \{x_0\}$ tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan quyidagilar kelib chiqadi:

(Cl₁) $A(m) = (X, \tau)$ fazoning cheksiz qism to'plami faqatgina x_0 nuqtani o'z ichiga olsagina yopiq bo'ladi;

(Cl₂) $A(m) = (X, \tau)$ fazoning ixtiyoriy ikkita yopiq cheksiz qism to'plamlarining kesishmasi bo'sh emas.

X topologik fazoning x nuqtasi, agar $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ bo'lsa, $A \subset X$ to'plamning to'planish nuqtasi (chegaraviy nuqtasi) deyiladi, ya'ni x nuqtaning har bir Ox atrofi x dan farqli kamida bitta $A \cap Ox$ kesishmaga tegishli y nuqtaga ega bo'ladi.

x_0 nuqta $A(m) = (X, \tau)$ topologik fazoning yagona to'planish nuqtasidir.

$A(m) = (X, \tau)$ topologik fazo uchun $A \subset X$ qism to'plamining ichi $IntA$ (ya'ni, har biri A da yotuvchi ochiq atrofga ega bo'lgan barcha $x \in A$ nuqtalar to'plami) quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$IntA = \begin{cases} A, & \text{agar } X \setminus A \text{ chekli bo'lsa,} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{agar } X \setminus A \text{ cheksiz bo'lsa.} \end{cases}$$

Haqiqatan ham, agar $X \setminus A$ chekli bo'lsa, har bir $x \in A$, $x \neq x_0$ uchun uning ochiq atrofi $\{x\}$ A da yotadi. Agar $x_0 \in A$ bo'lsa, unda $U = X \setminus (X \setminus A) = A$ to'plam x_0 n $U \subset A$ ning ochiq atrofi bo'ladi. Demak, bu holda, $IntA = A$.

Endi $X \setminus A$ cheksiz bo'lsin. U holda har bir $x \in A$, $x \neq x_0$ uchun uning ochiq atrofi $\{x\}$ A da yotadi. Lekin, F chekli to'plam bo'lgan x_0 nuqtaning $U = X \setminus F$ atrofi A to'plamda yotmaydi. Shuning uchun $x_0 \notin IntA$, ya'ni $IntA = A \setminus \{x_0\}$ bo'ladi.

Bundan kelib chiqadiki:

(Int₁) $A(m) = (X, \tau)$ fazoning chekli to'ldiruvchili istalgan ikkita ochiq qism to'plami bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega;

(Int₂) $A(m) = (X, \tau)$ fazoning cheksiz to'ldiruvchili qism to'plami faqat x_0 ni o'zida saqlamasagina ochiq bo'ladi.

3.2-§. $A(m)$ ko‘rinishidagi fazolardagi uzluksiz funksiyalarning doimiylik to‘plamlari

Ixtiyoriy uzluksiz $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya uchun va har bir natural $i \in \mathbb{N}$ uchun $\varphi^{-1}\left(\left(\varphi(x_0) - \frac{1}{i}, \varphi(x_0) + \frac{1}{i}\right)\right)$ to‘plam x_0 nuqtaning ochiq atrofi bo‘ladi $\left(\left(\varphi(x_0) - \frac{1}{i}, \varphi(x_0) + \frac{1}{i}\right)\right)$ ochiq to‘plamining proobrazi sifatida). U holda (Int_2) xossa $X_i = X \setminus \varphi^{-1}\left(\left(\varphi(x_0) - \frac{1}{i}, \varphi(x_0) + \frac{1}{i}\right)\right)$ to‘plam cheksiz bo‘la olmasligini bildiradi. Demak har bir X_i chekli, bunda $i = 1, 2, \dots$. Shuning uchun $X_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ yig‘indi ko‘pi bilan sanoqli bo‘ladi. Bundan tashqari, har bir $i = 1, 2, \dots$ uchun $x_0 \notin X_i$, unda $x_0 \notin X_0$.

$$\begin{aligned} x \in X \setminus X_0 &= X \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (X \setminus X_i) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left(\varphi^{-1}\left(\left(\varphi(x_0) - \frac{1}{i}, \varphi(x_0) + \frac{1}{i}\right)\right) \right) = \\ &= \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left(\varphi(x_0) - \frac{1}{i}, \varphi(x_0) + \frac{1}{i}\right)\right) \end{aligned}$$

nuqta uchun $\varphi(x) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left(\varphi(x_0) - \frac{1}{i}, \varphi(x_0) + \frac{1}{i}\right)$ ga ega bo‘lamiz. Shuning uchun barcha $x \in X \setminus X_0$ nuqtalar uchun $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ bo‘ladi.

Shu bilan birga quyidagi keyingi xossa kelib chiqadi.

(1₀) Ixtiyoriy uzluksiz $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya uchun sanoqlitadan ko‘p bo‘lmagan nuqtani saqllovchi $X_0 \subset X$ to‘plam topiladiki, $x_0 \notin X_0$ va $x \in X \setminus X_0$ da $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ bo‘ladi.

Yoki boshqacha aytganda:

(2₀) Ixtiyoriy uzluksiz $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya uchun $\varphi(x) \neq \varphi(x_0)$ bo‘ladigan barcha $x \in X$ nuqtalar to‘plami X_0 ko‘pi bilan sanoqlita nuqtadan iborat. Bunda, ravshanki, $x_0 \notin X_0$

Mayli $X = A(m)$, $Y = A(n)$ bo‘lsin, bunda $\aleph_0 < m < n$. x_0 va y_0 –nuqtalar mos ravishda X va Y fazolarning to‘planish nuqtalari bo‘lsin. $Z = X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$ bo‘lsin. $x \in X \setminus \{x_0\}$ uchun quyidagi

$$Y_0(x) = \{y \in Y: f(x, y) \neq f(x, y_0)\} \subset Y \setminus \{y_0\}$$

to'plamni aniqlaymiz va

$$Y_0 = \bigcup_{x \in X \setminus \{x_0\}} Y_0(x) .$$

ni qo'yamiz. Bizga ravshanki, $Y_0 \subset Y \setminus \{y_0\}$.

Barcha $x \in X \setminus \{x_0\}$ va barcha $y \in Y \setminus Y_0$ uchun quyidagi tenglik o'rinli

$$f(x, y) = f(x, y_0). \quad (3.2.1)$$

Qism to'plamlar uchun (2_0) xossasidan foydalanib

$$Y_0(x) \cong \{(x, y) \in \{x\} \times Y: f(x, y) \neq f(x, y_0)\} \subset \{x\} \times Y$$

bundan $|Y_0(x)| \leq \aleph_0$ ga ega bo'lamiz. Demak, $|Y_0| \leq m$.

Endi ixtiyoriy $\bar{y} \in Y \setminus (Y_0 \cup \{y_0\})$ ni tanlaymiz va

$$X_0 = \{x \in X: f(x, \bar{y}) \neq f(x_0, \bar{y})\} \subset X \setminus \{x_0\}. \quad (3.2.2)$$

to'plamni aniqlaymiz. Bizda yana (2_0) dan $|X_0| \leq \aleph_0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi

$$Z_0 = (X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)$$

ni qo'yamiz.

$r = f(x_0, \bar{y})$ bo'lsin. (1) va (2) xossalarga ko'ra har qanday $(x, y) \in Z \setminus Z_0$ nuqta uchun quyidagiga ega bo'lamiz

$$f(x, y) \underset{(1)}{=} f(x, y_0) \underset{(1)}{=} f(x, \bar{y}) \underset{(2)}{=} f(x_0, \bar{y}) = r$$

bunda, $x \neq x_0$.

$(Z \setminus Z_0) \setminus (\{x_0\} \times (Y \setminus \{y_0\}))$ to'plam $Z \setminus Z_0$ fazoning hamma joyida zich.

Demak, $(x_0, y) \in Z \setminus Z_0$ dan $f(x_0, y) = r$ degan xulosa kelib chiqadi.

Shunday qilib, keyingi xossa isbotlandi.

(3₀) Ixtiyoriy uzluksiz $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya uchun shunday r haqiqiy soni va

$X_0 \subset X \setminus \{x_0\}$, $Y_0 \subset Y \setminus \{y_0\}$ to'plamlar topiladiki, $|X_0| \leq \aleph_0$, $|Y_0| \leq m$ bo'ladi, hamda $(x, y) \in Z \setminus Z_0$ nuqtalar uchun ushbu tenglik bajariladi:

$$f(x, y) = r.$$

3.3-§. Regulyar bo‘lib, to‘la regulyar bo‘lmaydigan fazo misoli

Mayli $X = A(m)$, $Y = A(n)$ bo‘lsin, bunda $\aleph_0 < m < n$. x_0 va y_0 –nuqtalar mos ravishda X va Y fazolarning to‘planish nuqtalari bo‘lsin. $Z = X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$ bo‘lsin. Har bir i musbat butun soni uchun $Z_i = Z \times \{i\}$ to‘plamni aniqlaymiz. Aytaylik $Z^* = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i$ bo‘lsin. Shuni eslatamizki, o‘zaro kesishmaydigan Z_i to‘plamlar uchun $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i$ orqali quyidagi topologik fazo belgilanadi: $U \subset \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i$ to‘plam har bir i uchun $U \cap Z_i$ kesishma ochiq bo‘lgandagina $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i$ da ochiq bo‘ladi. Ya’ni:

$$U \subset \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i: \left(U \in \tau_{\bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i} \right) \Leftrightarrow (U \cap Z_i \in \tau_{Z_i}, \forall i).$$

Ixtiyoriy $z \notin Z^*$ elementni olamiz va $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in T^*}$ atroflar tizimidan foydalanib $T^* = Z^* \cup \{z\}$ to‘plamga topologiya kiritamiz, bunda $\mathcal{B}(x)$ har qanday $x \in Z^*$ uchun x ni saqlaydigan Z^* dagi barcha ochiq to‘plamlar oilasi. z nuqta uchun $\mathcal{B}(z)$ oila ushbu ko‘rinishda:

$$\mathcal{B}(z) = \{U_i(z)\}_{i=1}^{\infty},$$

bu yerda $U_i(z) = T^* \setminus \left(\bigcup_{j=1}^i Z_j \right)$.

Olingan T^* fazo to‘la regulyar fazodir. Ravshanki, Z^* to‘plam T^* fazoning fazoosti bo‘ladi.

$t_1 = t_2$ yoki quyidagi shartlardan biri bajarilgan taqdirdagina $t_1 E t_2$ ni o‘rnatish orqali T^* bo‘yicha E ekvivalentlik munosabatini aniqlaymiz:

$$x \in X \setminus \{x_0\} \text{ va toq } i \text{ uchun } \{t_1, t_2\} = \{(x, y_0, i), (x, y_0, i + 1)\}, \quad (3.3.1)$$

$$y \in Y \setminus \{y_0\} \text{ va juft } i \text{ uchun } \{t_1, t_2\} = \{(x_0, y, i), (x_0, y, i + 1)\}. \quad (3.3.2)$$

Demak, har bir toq i uchun $A \times \{i\}$ va $A \times \{i + 1\}$ dagi mos nuqtalarni aniqlash va har bir juft i uchun $B \times \{i\}$ va $B \times \{i + 1\}$ dagi mos nuqtalarni aniqlash orqali $T = T^*/E$ factor fazosi olinadi. Bu yerda

$$A = \{(x, y_0): x \in X \setminus \{x_0\}\} \subset Z,$$

$$B = \{(x_0, y): y \in Y \setminus \{y_0\}\} \subset Z.$$

Ko‘rinib turibdiki,

$$|A| = |X| = m > \aleph_0 \text{ va } |B| = |Y| = n > m > \aleph_0.$$

Bundan tashqari

har bir toq i uchun $z \notin A \times \{i\}$,

har bir juft i uchun $z \notin B \times \{i\}$

ekanligi aniq.

Agar $t = (x, y, i) \in T^*$, $x \neq x_0$, $y \neq y_0$, $i = 1, 2, \dots$ yoki $t = z$ bo'lsa, E ga nisbatan $[t]$ ekvivalentlik klassi yagona $t = (x, y, i)$ element yoki mos ravishda $t = z$ dan iborat bo'ladi; u holda $q: T^* \rightarrow T$ tabiiy akslantirishdagi $[t] \in T$ nuqtaning to'liq proobrazi bir nuqtadan iborat, ya'ni $q^{-1}[t] = \{(x, y, i)\}$ yoki $q^{-1}[t] = \{z\}$. $x \in X \setminus \{x_0\}$ va toq i uchun $q^{-1}[(x, y_0, i)] = q^{-1}[(x, y_0, i + 1)] = \{(x, y_0, i), (x, y_0, i + 1)\}$ ga ega bo'lamiz. Xuddi shunday, $y \in Y \setminus \{y_0\}$ va juft i uchun $q^{-1}[(x_0, y, i)] = q^{-1}[(x_0, y, i + 1)] = \{(x_0, y, i), (x_0, y, i + 1)\}$ ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $q: T^* \rightarrow T$ tabiiy akslantirish ostidagi nuqtalarning to'liq proobrazlari bir nuqtali yoki ikki nuqtali to'plamlardir. Shuning uchun T fazoning har bir nuqtasi (ya'ni har bir ekvivalentlik sinfi) yopiq to'plamni hosil qiladi, ya'ni T fazo T_1 -fazodir.

Bundan tashqari, T fazo T_3 -fazodir.

Demak, T regulyar fazo.

T regulyar fazo emasligini aniqlaylik. $t = q(z)$ nuqta va $F = q(A \times \{1\})$ yopiq to'plamni olaylik. $t \notin F$ deb olamiz. Har bir uzluksiz $f: T \rightarrow [0, 1]$, funksiya uchun $f(F) = \{1\}$ tenglik $f(t) = 1$ bo'lishini ko'rsataylik. Ushbu funktsiyani qaraymiz

$$f_i = f \circ (q|_{Z_i}): Z_i \rightarrow [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots$$

(3₀) xossaga ko'ra har bir uzluksiz $f_i: Z_i \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots$, funksiya uchun shunday r_i haqiqiy son va shunday $X_{0,i} \subset X \setminus \{x_0\}$, $Y_{0,i} \subset Y \setminus \{y_0\}$ to'plamlar topiladiki, $|X_{0,i}| \leq \aleph_0$, $|Y_{0,i}| \leq m$ bo'ladi, hamda $(x, y) \in Z \setminus Z_{0,i}$ nuqtalarda

$$f_i(x, y, i) = r_i$$

bo'ladi. Bu yerda $Z_{0,i} = (X_{0,i} \times Y) \cup (X \times Y_{0,i})$.

$X_0^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_{0,i}$, $Y_0^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_{0,i}$ va $Z_0^* = (X_0^* \times Y) \cup (X \times Y_0^*)$ deb faraz qilsak, $(x, y) \in Z \setminus Z_0^*$ va $i = 1, 2, \dots$ uchun

$$f_i(x, y, i) = r_i \quad (3.3.3)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shuni ta'kidlab o'tishimiz kerakki, $Z \setminus Z_0^* \neq \emptyset$. Haqiqatan ham, qurilishi bo'yicha biz $|X_0^*| \leq \aleph_0$ va $|Y_0^*| \leq m$ larga ega bo'lamiz. Shuning uchun $A \setminus (X_0^* \times Y) \neq \emptyset$ va $B \setminus (X \times Y_0^*) \neq \emptyset$ bo'ladi. Boshqa tomondan, $x \in X$ uchun $(x, y_0) \in A$ va $(x, y_0) \notin X \times Y_0^*$, ya'ni $A \cap (X \times Y_0^*) = \emptyset$; xuddi shunday, $y \in Y$ uchun $(x_0, y) \in B$ va $(x_0, y) \notin X_0^* \times Y$, ya'ni $B \cap (X_0^* \times Y) = \emptyset$. Shuning uchun

$$A \setminus Z_0^* \neq \emptyset \quad \text{va} \quad B \setminus Z_0^* \neq \emptyset \quad (3.3.4)$$

bo'ladi. Shuni ta'kidlash kerakki, $A \subset Z$ va $B \subset Z$.

(3.3.1) va (3.3.2) dan shunday xulosa kelib chiqadi:

$x \in X \setminus \{x_0\}$ va har qanday toq i uchun $f_i(x, y_0, i) = f_{i+1}(x, y_0, i + 1)$,

$y \in Y \setminus \{y_0\}$ va har qanday juft i uchun $f_i(x_0, y, i) = f_{i+1}(x_0, y, i + 1)$.

Endi (3.3.3) va (3.3.4) munosabatlari $i = 1, 2, \dots$ uchun $r_{i+1} = r_i$ ekanligini bildiradi. Shu bilan birga $f_1(A \times \{1\}) = f(F) = \{1\}$, unda $i = 1, 2, \dots$ uchun $r_i = 1$ bo'ladi. To'plamning yopilmasi

$$M = \{q(x, y, i): (x, y) \in Z \setminus Z_0^*, i = 1, 2, \dots\}$$

t nuqtani o'z ichiga oladi. (3.3.3) dan $f(M) = \{1\}$, f ning uzluksizligidan esa $f(t) = 1$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, T fazoning to'la regulyar emasligi aniqlandi.

3.4-§. Har bir uzluksiz funksiyasi o'zgaras bo'ladigan regulyar fazo misoli

Aytaylik $X = A(m)$, $Y = A(n)$ bo'lsin, bunda $\aleph_0 < m < n$. x_0 va y_0 – nuqtalar mos ravishda X va Y fazolarning to'planish nuqtalari bo'lsin. $Z = X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$ bo'lsin. Har bir musbat butun son i uchun $Z_i = Z \times \{i\}$ va $Z_{-i} = Z \times \{-i\}$ to'plamlarni aniqlaymiz. Aytaylik

$$Z^{**} = (\bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i) \cup (\bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_{-i})$$

bo'lsin.

$z, z' \notin Z^{**}$, $z \neq z'$ ixtiyoriy elementlarni olib, $H^* = Z^{**} \cup \{z, z'\}$ to'plamda $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in H^*}$ atroflar tizimi orqali kiritamiz. Bu yerda har bir $x \in Z^{**}$ uchun $\mathcal{B}(x)$ oila x ni saqllovchi Z^{**} da ochiq barcha to'plamlar oilasi. z va z' nuqtalar uchun bu oilalar quyidagichi aniqlanadi:

$$\mathcal{B}(z) = \{U_i(z)\}_{i=1}^{\infty}, \text{ bunda } U_i(z) = H^* \setminus (\bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_{-i} \cup \{z'\} \cup \bigcup_{j=1}^i Z_j) \text{ va}$$

$$\mathcal{B}(z') = \{U_i(z')\}_{i=1}^{\infty}, \text{ bunda } U_i(z') = H^* \setminus (\bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i \cup \{z\} \cup \bigcup_{j=1}^i Z_{-j}).$$

Bunda olingan H^* fazo to'la regulyar fazodir. Z^{**} fazo H^* fazoning qism fazosi ekanligi aniq.

R ning H^* ga ekvivalentlik munosabatini aniqlaymiz, unga ko'ra ekvivalentlik sinflari quyidagi ko'rinishga ega

$$x \in X \setminus \{x_0\} \text{ va toq } i \text{ uchun } \{(x, y_0, -i-1), (x, y_0, -i), (x, y_0, i), (x, y_0, i+1)\},$$

$$y \in Y \setminus \{y_0\} \text{ va juft } i \text{ uchun } \{(x_0, y, -i-1), (x_0, y, -i), (x_0, y, i), (x_0, y, i+1)\},$$

$$x \in X \setminus \{x_0\}, y \in Y \setminus \{y_0\} \text{ va har bir } i \text{ uchun } \{(x, y, i)\},$$

$$\{z\} \text{ va } \{z'\}.$$

Demak, $H = H^*/R$ faktor fazosi har bir toq i uchun $A \times \{i\}$, $A \times \{i+1\}$, $A \times \{-i\}$ va $A \times \{-i-1\}$ dagi mos nuqtalarni aniqlash orqali va har bir juft i uchun $B \times \{i\}$, $B \times \{i+1\}$, $B \times \{-i\}$ va $B \times \{-i-1\}$ dagi mos nuqtalarni aniqlash orqali olinadi. Bu yerda yuqoridagi kabi

$$A = \{(x, y_0): x \in X \setminus \{x_0\}\} \subset Z,$$

$$B = \{(x_0, y): y \in Y \setminus \{y_0\}\} \subset Z.$$

Bizga ravshanki,

har bir toq i uchun $z, z' \notin A \times \{i\}$ va $z, z' \notin A \times \{-i\}$,

har bir juft i uchun $z, z' \notin B \times \{i\}$ va $z, z' \notin B \times \{-i\}$.

$q: H^* \rightarrow H$ tabiiy akslantirish ostidagi nuqtalarning to'liq proobrazlari bir nuqtali yoki to'rt nuqtali to'plamlardir. Shuning uchun H fazoning har bir nuqtasi (ya'ni har bir ekvivalentlik sinfi) yopiq to'plamni hosil qiladi, ya'ni H fazo T_1 -fazodir. Bundan tashqari, H fazo T_3 -fazodir. Demak, H fazo regulyar fazodir.

$t = q(z)$, $t' = q(z')$ nuqtalarni va $F = q(A \times \{1\})$ va $F' = q(A \times \{-1\})$ yopiq to'plamlarni olamiz. Ekvivalent R munosabatni tuzib, $F' = F$ ga ega bo'lamiz. $t \notin F$ va $t' \notin F$ ekanligi ravshan. Endi shuni ta'kidlash kerakki, $f(F) = \{r\}$ bo'ladigan har bir uzluksiz $f: T \rightarrow [0, 1]$ funksiyasi uchun ushbu tengliklar o'rinli: $f(t) = f(t') = r$.

Endi S – ixtiyoriy regulyar fazo, H – yuqorida aniqlangan fazo bo'lsin. $Y = S \times H$ ko'paytmasini atroflar tizimi bilan tuzilgan topologiya bilan ta'minlaymiz:

$(s, h) \in S \times H$, $h \neq t$ nuqtalar uchun $O(s, h) = \{s\} \times V$ ko'rinishdagi, bunda $V \subset H \setminus \{t\}$ – barcha mumkin bo'lgan ochiq to'plamlar bo'lib, bunda $h \in V$;

$(s, t) \in S \times H$ nuqtalar uchun $O(s, t) = \bigcup_{s' \in U} (\{s'\} \times V_{s'})$ ko'rinishdagi, bunda U – S fazodagi s nuqtaning atrofi, $V_{s'}$ esa – H fazodagi t nuqtaning atrofi.

Shu bilan birga S fazoda S yopiq va H fazoda $\{t'\}$ yopiq bo'lgani uchun $S \times \{t'\}$ to'plam $Y = S \times H$ fazoda yopiq bo'ladi. Y fazoning $S \times \{t'\}$ qismini nuqta sifatida aniqlaymiz. U holda har bir uzluksiz $f: H(S) \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya S regulyar fazoda doimiydir.

III BOB BO'YICHA XULOSA

Mazkur bob dissertatsiya ishining asosiy bobi bo'lib, to'rtta paragrafni o'z ichiga olgan. Bunda $A(\mathbf{m})$ fazoni qurish va uning ayrim xossalari keltirilgan. Shu bilan birga $A(\mathbf{m})$ ko'rinishidagi fazolardagi uzluksiz funksiyalarning doimiylik to'plamlari haqida tushunchalar berilgan.

Keyingi mavzuda regulyar bo'lib, to'la regulyar bo'lmaydigan fazo misoli ko'rsatilgan. Undan tashqari, har bir uzluksiz funksiyasi o'zgarmas bo'ladigan regulyar fazo misoli keltirib o'tildi.

XULOSA

Mazkur magistrlik dissertatsiyasi uzluksiz funksiyalari faqatgina o'zgarmlardan iborat fazoni qurishga bag'ishlangan. Bunda, $A(\mathfrak{m})$ fazoni qurish va uning ayrim xossalari o'rganish, $A(\mathfrak{m})$ ko'rinishidagi fazolardagi uzluksiz funksiyalarning doimiylik to'plamlarini aniqlash va regulyar bo'lib, to'la regulyar bo'lmaydigan fazo misolini ko'rib chiqish muhim ahamiyatga ega.

Mazkur dissertatsiya ishida quyidagi masalalar o'rganilgan:

- Kompaktli fazo va kesmaning kompaktiligini o'rnatish metodikasi keltirilgan;
- Lokal kompaktli fazolar. Bitta nuqtasi chiqarib tashlangan aylana va to'g'ri chiziqning o'zaro gomeomorfliyini isbotlash metodikasi keltirilgan;
- Topologiya kiritish usullari keltirib o'tilgan;
- Uzluksiz akslantirishlar. Ochiq va yopiq akslantirishlar, gomeomorfizm haqida ta'riflar keltirilgan;
- Topologik fazolarning ajrimlilik aksiomalari keltirilgan;
- $A(\mathfrak{m})$ fazoni qurish va uning ayrim xossalari o'rganilgan;
- $A(\mathfrak{m})$ ko'rinishidagi fazolardagi uzluksiz funksiyalarning doimiylik to'plamlari aniqlangan;
- Regulyar bo'lib, to'la regulyar bo'lmaydigan fazo misoli keltirilgan;
- Har bir uzluksiz funksiyasi o'zgarmlar bo'ladigan regulyar fazo misoli keltirilgan.

Magistrlik dissertatsiyasi uchta bobdan iborat bo'lib, quyida olingan natijalarni keltiramiz:

S – ixtiyoriy regulyar fazo, H – yuqorida aniqlangan fazo bo'lsin. $Y = S \times H$ ko'paytmasini atroflar tizimi bilan tuzilgan topologiya bilan ta'minlaymiz:

$(s, h) \in S \times H$, $h \neq t$ nuqtalar uchun $O(s, h) = \{s\} \times V$ ko'rinishdagi, bunda $V \subset H \setminus \{t\}$ – barcha mumkin bo'lgan ochiq to'plamlar bo'lib, bunda $h \in V$;

$(s, t) \in S \times H$ nuqtalar uchun $O(s, t) = \bigcup_{s' \in U} (\{s'\} \times V_{s'})$ ko'rinishdagi,

bunda U – S fazodagi s nuqtaning atrofi, $V_{s'}$ esa – H fazodagi t nuqtaning atrofi.

Shu bilan birga S fazoda S yopiq va H fazoda $\{t'\}$ yopiq bo'lgani uchun $S \times \{t'\}$ to'plam $Y = S \times H$ fazoda yopiq bo'ladi. Y fazoning $S \times \{t'\}$ qismini nuqta sifatida aniqlaymiz. U holda har bir uzluksiz $f: H(S) \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya S regulyar fazoda doimiydir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Ishmetov A. Ya., On C-properties of the space of idempotent probability measures. //Bulletin of the Institute of Mathematics. 2020.№ 3.
2. Savchenko A., Zarichnyi M. Fuzzy ultrametrics on the set of probability measures. //Topology, 48:2-4, 2009, 130-136.
3. Zaitov A. A. On a metric on the space of idempotent probability measures. //Applied General Topology, 21:1, 2020, 35-51.
4. Zaitov A. A. On categorical of order-preserving functionals. //Methods of Functional Analysis and Topology, 9:4, 2003,357-364.
5. Zaitov A. A. Order-preserving variants of the basic principles of functional analysis //Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 2:1, 2019, 10-17.
6. Zaitov A., Ishmetov A. On paracompact type properties of the space of idempotent probability measures and absolute retracts. //V Congress of the Turkic World mathematicians. Kyrgyzstan, Issyk-Kul, June 5-7, 2014, 232.
7. Архангельский А. В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локальные бикомпактные пространства. //Матем. Сборник, 67:1, 1965, 55-85.
8. Бешимов Р. Б. Об одном категорном свойстве Стоун-Чеховской компактификации. //Матем. труды,10:1, 2007, 132-140.
9. Борсук К. Теория ретрактов. – М.: Мир. – 1971.
10. Борсук К. Теория шейпов. – М.: Мир, – 1976.
11. Зайтов А.А. Теорема об открытом отображении пространств слабо аддитивных однородных функционалов. //Математические заметки, 88:5, 2010, 683-688.
12. Зайтов А.А., Ишметов А.Я. Функтор идемпотентных вероятностных мер и C -абсолютные ретракты. //Международная конференция Прикладной и геометрический анализ. Самарканд 22-25 сентября

2014. Стр.56.

- 13.Зайтов А. А., Ишметов А. Я. О монаде, порожденной функтором I_β .
//Вестник НУУз, 2, 2013, 61-64.
- 14.Зайтов А. А. О продолжении слабо аддитивных функционалов.
//ДАН РУзб., 5, 2005, 3-7.
- 15.Зайтов А. А., Ишметов А. Я. Гомотопические свойства пространства $I_f(X)$ идемпотентных вероятностных мер. //Матем. заметки, 106:4, 2019, 531-542. doi.org/10.4213/mzm12166.(Scopus)
- 16.Зайтов А. А., Ишметов А. Я. О монаде, порожденной функтором I_β .
//Вестник НУУз, 2, 2013, 61-64.
- 17.Зайтов А. А., Тожиев И. И. Функтор идемпотентных вероятностных мер и равномерная метризуемость функторов. //Узбекский математический журнал, 2, 2011, 66-74.
- 18.Зайтов А. А., Тожиев И. И. Функциональные представления замкнутых подмножеств компакта //Узбекский математический журнал, 1, 2010, 53-63.
- 19.Ишметов А. Я. О функторе идемпотентных вероятностных мер с компактными носителями. //Узбекский математический журнал, 1, 2010, 72-80.
- 20.Колокольцов В. Н., Маслов В. П. Идемпотентный анализ как аппарат теории управления. I //Функц. Анализ и его прил., 23:1, 1989, 1-14.
- 21.Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход //Матем. Заметки, 69:5, 2001, 758-797.
- 22.Тожиев И. И. Об одной метрике пространства идемпотентных вероятностных мер. //Узбекский математический журнал, 4, 2010, 165-172.
- 23.Radul T. Idempotent measures: absolute retracts and soft maps //arxiv:

- 1810.09140 v1. [math.GN] 22 Oct 2018.
24. Radul T. N. On the functor of order-preserving functionals //Comment. Math. Univ. Carol. 39:3, 1998, 609-615.
 25. Eilenberg S., Moore J. Adjoint functors and triples //Illinois J. Math., 9:3. 1965, 381-398.
 26. Haydon R. On a problem of Pełczyński: Milutin spaces, Dugundji spaces and $AE(0\text{-dim})$. //Studia Math., 52:1, 1974, 23-31.
 27. Hubal O., Zarichnyi M. Idempotent probability measures on ultrametric spaces. //J. Math. Anal. Appl. 343:2, 2008, 1052-1060.
 28. Ishmetov A. Ya. On homeomorphism between the infinite production or real line and the space of idempotent probability measures. //Modern methods of scientific research in system of Global higher education international scientific conference. April 9, 2015, Tashkent, 67-68.
 29. Ishmetov A. Ya. On the monad $\mathbb{I}^f$. //Abstracts of the international conference “Modern problems of geometry and topology and its applications”. November 21-23, 2019, Tashkent, 44-45.
 30. Ishmetov A. Ya. The functor of idempotent probability measure with compact support and open maps. //STEMM. ABSTRACTS of Uzbek-Israel joint international conference. May 13-17, 2019, Tashkent, 65-66.
 31. Zaitov A., Ishmetov A. Functor I_β lifts onto the category Metrb . //Abstracts of the conference problems of modern topology and its applications. 11-12 may 2017, Tashkent. pp.108-109.
 32. Жураев Т. Ф. Некоторые геометрические свойства подфункторов функтора P вероятностных мер, (ВИНИТИ АН СССР, М., МГУ, №4471–В89)
 33. Жураев Т. Ф. О функторе P вероятностных мер. //Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1, 1990, 26-30.
 34. Jiemuratov R., Atabaeva Q. Непрерывное отображение Magistrantlardin

ilimiy miynetleriniń toplamı. Nokis 2021, 7-may 9/8.7-sanlı bayanlaması B.55-57.

35. Atamuradova D., Atabaeva Q. Методы введения топологии Oriental Renaissance: Innovatie, educational, natural and social sciences. ISSN 2181-1784, VOLUME 1, ISSUE 9. Impact Factor: 5.423, October 2021 B. 544-550

Nukus davlat pedagogika instituti II kurs magistratura talabasi
Atabaeva Qunduz Azatjanovnaning “Uzluksiz akslantirishlari faqatgina
o’zgarmaslardan iborat fazo misoli” mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasiga

XULOSA

Mamlakatimizda tabiiy va aniq fanlarga e’tibor sezilarli darajada kuchaytirildi, xususan, optimallashtirish va optimal boshqarish masalalarini tadbiq qilishga alohida e’tibor qaratildi. Ushbu sohada maqsadli ilmiy izlanishlarni, xususan, topologik fazolardagi idempotent ehtimollik o’lchovlari fazolarining geometrik va topologik xossalarini qo’llash muhim vazifalardan biridir. Atabaeva Qunduz Azatjanovnaning “Uzluksiz akslantirishlari faqatgina o’zgarmaslardan iborat fazo misoli” mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasi topologik fazolardagi uzluksiz akslantirishlar nazariyasini rivojlantirishda muhim ahamiyatga ega. Bunda qaralayotgan topologik fazo Tikhonov fazosi bo’lishi muhimligi ko’rsatishga alohida e’tibor berilgan. Xususan, Tikhonov fazosi bo’lmaydigan shunday regulyar fazo topilib, undagi uzluksiz akslantirishlar faqatgina o’zgarmas funksiyalar bo’lishi ko’rsatilgan.

Ish kirish, uchta bob, xulosa qismlaridan iborat. Dissertatsiyaning Kirish qismida mavzuning dolzarbligi, o’rganilganlik holati, belgilangan maqsad va vazifalar, tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati kabi umumiy masalalar yoritilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi **“Umumiy topologiyaning tayanch tushunchalari”** deb nomlangan. Izlanuvchi ushbu bobda topologik fazoga umumiy ta’rif berib, topologik fazoning asosiy tushunchalarining mohiyatini yoritgan. Topologik fazoning asosiy tushunchalari bo’lgan ochiq to’plam, topologik fazo bazasi, salmog’i, xarakteriga ta’rif berib, misollar orqali tushuntirgan. kompaktli va lokal kompaktli fazolar o’rganilgan. Tabiiy topologiya bilan ta’minlangan son o’qidagi har qanday kesma kompaktli bo’lishini isboti bilan keltirgan. Bundan tashqari, ixtiyoriy bo’sh bo’lmagan kesmaning kompaktli bo’lishini oliy ta’lim muassasalarida o’rnatishning metodikasi taklif qilingan. Bitta

nuqtasi chiqarib tashlangan aylana va son o'qi lokal kompaktli fazolar bo'lishini ko'rsatish metodikasi yoritilgan va bu ikki fazolar orasida o'zaro bir qiymatli, o'zaro teskari akslantirishlar qurilgan.

“Topologik fazolar sinflari” deb nomlangan ikkinchi bobda topologiya kiritishning turli usullari o'rganilgan. Topologiya kiritishga doir teoremlar keltirib o'tilgan va misollar orqali tushuntirilgan. Shu bilan birga topologik fazolarning ajrimlilik aksiomalari, ularga oid misollar, xossalari bayon etilgan.

Ishning uchinchi bobi **“Uzluksiz funksiyalari faqatgina o'zgarmaslardan iborat fazoni qurish”** deb nomlangan. Ushbu bobda $A(m)$ fazoni qurish va uning ayrim xossalari keltirilgan. Shu bilan birga $A(m)$ ko'rinishidagi fazolardagi uzluksiz funksiyalarning doimiylik to'plamlari haqida tushunchalar berilgan.

Bundan tashqari, regulyar bo'lib, to'la regulyar bo'lmaydigan fazo misoli ko'rsatilgan va har bir uzluksiz funksiyasi o'zgarmas bo'ladigan regulyar fazo misoli keltirib o'tilgan.

Dissertatsiyaning “Umumiy xulosalar” qismida tadqiqot asosida yuzaga kelgan ilmiy xulosalari birlashtirilib sodda tilda bayon qilingan. Q. Atabaeva ishni yozish davomida o'zbek va chet el adabiyotlarini o'rgangan, mavzuga oid turlicha tavsiyalar berilgan.

Atabaeva Qunduz Azatjanovnaning “Uzluksiz akslantirishlari faqatgina o'zgarmaslardan iborat fazo misoli” mavzusidagi magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan dissertatsiyasi Nizom talablariga javob beradi. Ishni tugallangan tadqiqot sifatida rasmiy himoyaga tavsiya etaman.

Ilmiy rahbar:



fiz.-mat.f.d., prof. A. A. Zaitov

Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogik instituti magistratura bo'limining 5A110101 – Aniq va tabiiy fanlarni o'qitish metodikasi (matematika) mutaxassisligi 2-kurs magistranti Q.Atabaevaning “Uzluksiz akslantirishlari faqatgina o'zgarmaslardan iborat fazo misoli” mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasiga

TAQRIZ

Hozirgi kunda tabiiy va aniq fanlarga e'tibor sezilarli darajada kuchaytirildi, xususan, optimallashtirish va optimal boshqarish masalalarini tadbqiq qilishga alohida e'tibor qaratildi. Ushbu sohada maqsadli ilmiy izlanishlarni, xususan, topologik fazolardagi idempotent ehtimollik o'lchovlari fazolarining geometrik va topologik xossalarini qo'llash muhim vazifalardan biridir.

Q.Atabaevaning magistrlik dissertatsiya ishi shunday masalalardan biri bo'lgan uzluksiz akslantirishlari faqatgina o'zgarmaslardan iborat fazo misolini o'rganishga bag'ishlangan.

Magistrlik dissertatsiya ishi uch bob hajmida yozilgan bo'lib, birinchi bobida topologik fazoga umumiy ta'rif berilgan. Topologik fazoning asosiy tushunchalari bo'lgan ochiq to'plam, topologik fazo bazasi, salmog'i, xarakteriga ta'rif berilib, kompaktli va lokal kompaktli fazolar o'rganilgan. Tabiiy topologiya bilan ta'minlangan son o'qidagi har qanday kesma kompaktli bo'lishi isboti bilan keltirilgan. Bundan tashqari, ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan kesmaning kompaktli bo'lishini oliy ta'lim muassasalarida o'rnatishning metodikasi taklif qilingan bo'lsa, ikkinchi bobida topologiya kiritishning turli usullari, uzluksiz akslantirishlar, ochiq va yopiq akslantirishlar haqida tushunchalar berilgan. Topologik fazolarning ajrimlilik aksiomalari, xossalari bayon etilgan.

Magistrlik dissertatsiya ishining uchinchi bobida $A(m)$ fazoni qurish va uning ayrim xossalari keltirilgan. Shu bilan birga $A(m)$ ko'rinishidagi fazolardagi uzluksiz funksiyalarning doimiylik to'plamlari haqida tushunchalar berilgan. Bundan tashqari, regulyar bo'lib, to'la regulyar bo'lmaydigan fazo misoli ko'rsatilgan va har bir uzluksiz funksiyasi o'zgarmas bo'ladigan regulyar fazo misoli keltirib o'tilgan.

Xulosa o'rnida Q.Atabaevaning "Uzluksiz akslantirishlari faqatgina o'zgarmaslardan iborat fazo misoli" mavzusidagi magistrlik dissertatsiya ishi unga qo'yiladigan barcha talablarga javob beradi, shuning uchun uning egasi magistr akademik darajasini olishga loyiq deb hisoblayman.

Rasmiy opponent:



[Signature]

f.-m.f.n. R.Jiemuratov

<i>[Signature]</i>
qol tanbasin tasdiqlayman
K.B. inspektor <i>[Signature]</i>

TAQRIZ

Hozirgi kunda tabiiy va aniq fanlarga e'tibor sezilarli darajada kuchaytirildi, xususan, optimallashtirish va optimal boshqarish masalalarini tadbiq qilishga alohida e'tibor qaratildi. Ushbu sohada maqsadli ilmiy izlanishlarni, xususan, topologik fazolardagi idempotent ehtimollik o'lchovlari fazolarining geometrik va topologik xossalarini qo'llash muhim vazifalardan biridir.

Q. Atabaevaning magistrlik dissertatsiya ishi shunday masalalardan biri bo'lgan uzluksiz akslantirishlari faqatgina o'zgarmaslardan iborat fazo misolini o'rganishga bag'ishlangan.

Magistrlik dissertatsiya ishi uch bob hajmida yozilgan bo'lib, birinchi bobida topologik fazoga umumiy ta'rif berilgan. Topologik fazoning asosiy tushunchalari bo'lgan ochiq to'plam, topologik fazo bazasi, salmog'i, xarakteriga ta'rif berilib, kompaktli va lokal kompaktli fazolar o'rganilgan. Tabiiy topologiya bilan ta'minlangan son o'qidagi har qanday kesma kompaktli bo'lishi isboti bilan keltirilgan. Bundan tashqari, ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan kesmaning kompaktli bo'lishini oliy ta'lim muassasalarida o'qitishning metodikasi taklif qilingan bo'lsa, ikkinchi bobida topologiya kiritishning turli usullari, uzluksiz akslantirishlar, ochiq va yopiq akslantirishlar haqida tushunchalar berilgan. Topologik fazolarning ajrimlilik aksiomalari, xossalari bayon etilgan.

Magistrlik dissertatsiya ishining uchinchi bobida $A(m)$ fazoni qurish va uning ayrim xossalari keltirilgan. Shu bilan birga $A(m)$ ko'rinishidagi fazolardagi uzluksiz funksiyalarning doimiylik to'plamlari haqida tushunchalar berilgan. Bundan tashqari, regulyar bo'lib, to'la regulyar bo'lmaydigan fazo misoli ko'rsatilgan va har bir uzluksiz funksiyasi o'zgarmas bo'ladigan regulyar fazo misoli keltirib o'tilgan.

Magistrlik dissertatsiya ishining uchinchi bobida $A(m)$ fazoni qurish va uning ayrim xossalari keltirilgan. Shu bilan birga $A(m)$ ko'rinishidagi fazolardagi uzluksiz funksiyalarning doimiylik to'plamlari haqida tushunchalar berilgan. Bundan tashqari, regulyar bo'lib, to'la regulyar bo'lmaydigan fazo misoli ko'rsatilgan va har bir uzluksiz funksiyasi o'zgarmas bo'ladigan regulyar fazo misoli keltirib o'tilgan.

Xulosa o'rnida Q. Atabaevaning "Uzluksiz akslantirishlari faqatgina o'zgarmaslardan iborat fazo misoli" mavzusidagi magistrlik dissertatsiya ishi unga qo'yiladigan barcha talablarga javob beradi, shuning uchun uning egasi magistr akademik darajasini olishga loyiq deb hisoblayman.

Rasmiy opponent:



