

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

O L I Y M A T E M A T I K A

fanidan ma'ruzalar matni

“Oliy matematika” kafedrasining 2013 yil 4-iyul 8-yig'ilishida muhokama etilib,
menejment va marketing ta'lim yo'nalishi o'quv jarayonida foydalanish uchun tavsiya
qilingan

Kafedra mudiri.....Қаршибоев Х.Қ
Tuzuvchidos. Begmatov A.

SAMARQAND • 2013

1-maruza. Oliy matematika fani haqida

Reja

1. Kirish.
2. Matematika va modellar hamda modellashtirish tushunchalari.
3. O'rganiladigan asosiy matematik tushunchalar haqida.

*Matematika g'oyat bir yuksak fanki,
unda bir olam mo'jiza yotadi.*

Mirzo Ulug'bek

1. Kirish. *O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimovning O'zbekiston Respublikasi Oliy Majlisi Qonunchilik palatasi va Senatining qo'shma majlisidagi «Mamlakatimizni modernizasiya qilish va kuchli fuqarolik jamiyati barpo etish – ustuvor maqsadimizdir» hamda 2009 yilning asosiy yakunlari va 2010 yilda O'zbekistonni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirishning eng muhim ustuvor yo'nalishlariga bag'ishlangan Vazirlar Mahkamasining majlisidagi «Asosiy vazifamiz – Vatanimiz taraqqiyoti va xalqimiz farovonligini yanada yuksaltirishdir» nomli ma'ruzalari mustaqil davlatimizning 2010 yil va keyingi yillarga mo'ljallangan rivojlanish dasturini belgilab berdi. Ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanishning eng muhim maqsadi va asosiy ustuvor vazifasi – bu islohotlarni davom ettirish va chuqurlashtirish, mamlakatimizni yangilash va modernizasiya qilish, 2009-2012 yillarga mo'ljallangan Inqirozga qarshi choralar dasturini so'zsiz bajarish va shu asosda iqtisodiy rivojlanishning yuqori va barqaror sur'atlarini, samaradorligini hamda makroiqtisodiy muvozanatni ta'minlashdan iborat ekanligini ko'rsatib berib, oldimizga yuksak vazifalar qo'ydi. Bu yuksak maqsad, vazifa va rejalar – mamlakatimizning taraqqiy topgan davlatlar qatoriga chiqishi yo'lidagi yangi qadamdir.*

Hozirgi zamonda iqtisodga, ishlab chiqarishga qo'yilayotgan yuksak talablarni bajarishda kadrlarning umumiy malakasi oldingi o'ringa qo'yilmoqda. Bu yuksak talablar hamma mutaxassislariga tegishlidir.

Bunday yuksak vazifalarni kar tomonlama kamol topgan, yuksak ma'lakali mutaxassislar amalga oshiradi. Yuksak malakali mutaxassislar tayyorlashda «Oliy matematika» fanining katta ahamiyatga ega ekanligi kyeche kimda shubha tushdirmasa kerak.

Hamma sohalarda matematik qonuniyatlarga asoslangan zamonaviy komp'yuterlarning muvaffaqiyat bilan tatbiq etilishi hamda uning kundan-

kunga rivojlanib borayotganligi, yosh mutaxassislarning tegishli sohalar, masalalarining matematik modellarini tuza bilishi va unda hisoblash texnikasini joriy etish vazifalarini qo'ymoqda. Bu masalalarni modellashtirish matematik amallar va usullar yordamida amalga oshiriladi.

Ma'lumki, matematikadagi mavjud, natural sonlar, arifmetik amallardan boshlab, hozirgi zamonaviy, chiziqli algebra va analitik geometriya, differensial va integral hisob hamda differensial tenglamalargacha tushunchalar real dunyoning modellaridir. Bu tushunchalarning hammasi insoniyat ehtiyojlaridan-narsalarni sanash, xo'jalik hisobi kabi tirikchilik uchun zarur masalalardan kelib chiqqan va rivojlanib bormoqda.

Matematika o'z rivojlanish tarixida mexanika, fizika, biologiya kabi fanlardan tashqari ijtimoiy fanlarga ham jadal kirib, rivojlanib bormoqda. Matematikani insoniyat taraqqiyotida vujudga kelgan va uning rivojlanishida katta ahamiyatga ega bo'lgan fanlarning yetakchilaridan desak xato qilmagan bo'lamiz. Bu fikrimizning isbotini matematika iborasi yunoncha "matema" - "bilim, ilm, fan" deyilishi bilan ham izohlasa bo'ladi.

Ma'lumki, matematik tushuncha va modellar universallik xususiyatiga ega, ya'ni aynan bitta model fizikada o'z ma'nosiga, biologiyada ham, iqtisodiyotda ham ma'lum ma'nolarga ega. Bunday modellar tabiiy fanlarda bir necha asrlardan beri qo'llanib rivojlanib kelmoqda. Lekin, ijtimoiy (iqtisodiyot, psixologiya, jamiyatshunoslik va boshqalar) fanlarda qo'llash XIX-XX asrlarda intensiv rivojlanishi bilan xarakterlanadi. XX asrda ijtimoiy fanlar muammolarini yechadigan matematikaning sohalari vujudga kela boshladi. Keyingi o'n yilliklarda matematika usullari, kishilik jamiyatining jarayonlarini va munosabatlarini o'rganishda yanada chuqurroq kirib bormoqda. Matematika, shunday universal qurolki, real borliqdagi mavjud bog'lanish va munosabatlarni aniqlashda, hamda ulardan hodisa va jarayonlarni ilmiy baholab bashorat qilishda foydalanish imkoniyatlari rivojlanib bormoqda.

Shunday qilib, Mirzo Ulug'bek bobomiz ta'kidlagan qoida (tezis) ijtimoiy fanlarida ham o'z ifodasini topib, rivojlanmoqda.

Matematikani o'rganishning bevosita amaliy tatbiqlaridan tashqari yosh mutaxassislarni har taraflama rivojlangan komil inson qilib tarbiyalashda uning alohida o'ringa egaligini ta'kidlamasdan bo'lmaydi. Tahliliy mulohaza, mantiqiy mushohada, fazoviy tasavvur, abstrakt tafakkur inson faoliyatining barcha sohasi uchun zarur qobiliyatki, bular matematikani o'rganish jarayonida shakllanib, rivojlanadi.

2. Matematika va modellar hamda modellashtirish tushunchalari

Model lotincha modulus so'zidan olingan bo'lib, narsa yoki hodisalarning asosiy xususiyatlarini o'zida ifodalovchi shartli (moddiy yoki abstrakt) tasvirdir. U tekshiruvchi shaxsi tomonidan tuzilib, tekshirilayotgan obyekt, originalning asosiy xususiyatlari (tuzilishi, o'zaro bog'liqligi, xossalari va hokazo)ni tekshirish maqsadiga muvofiq holda taxminan ifodalaydi. Model iborasi inson faoliyatining ko'p sohalarida ishlatiladi. Modelni tekshirish natijasida original haqida yangi axborotlar olinadi. Modellarning oddiy turlari qadim zamonda ham bo'lgan. Modellarga misol sifatida Yer sharining modeli globusni, rassom yasagan rasmni, biror joyning haritasini va hokazolarni ko'rsatish mumkin.

Har bir obyektни sistema (tizim) deb qarash mumkin. **Sistema** - (grekchadan olingan bo'lib. qismlardan tuzilgan butun, birlashma, tizim) o'zaro bog'liq elementlardan tuzilgan to'plam bo'lib, aniq yaxlitlikni ifodalaydi. Sistemalar o'ta xilma-xil bo'lib, inson ilmiy va amaliy faoliyatining hamma jabhalarida uchraydi. Biz ko'proq **iqtisodiy sistemalar** haqida fikr yuritamiz. Iqtisodiy sistemalarning misollari qilib, xalq xo'jaligining turli tarmoqlarini, ishlab chiqarish korxonalarini, firmalarni va hokazolarni ko'rsatish mumkin. **Iqtisodiy sistema** deb biror mahsulot ishlab chiqarishni olsak, uning elementlari sifatida ishchi kuchi -odamlarni, stanoklarni, xom ashyolarni qarash mumkin.

Sistemaning elementlari o'zaro bir-biri bilan bog'liq bo'ladi. Masalan, xalq xo'jaligi sistemasining elementlari ishlab chiqarish korxonalari va birlashmalari bir-biriga xom ashyolar, materiallar, jihozlar yetishtirib beradi. Ishlab chiqarish korxonalari, birlashmalar o'z navbatida, transport, qurulish va boshqa tashkilotlardan tashkil topgan sistemalarni tashkil etadi. Yuqoridagi har bir sistema elementini yana mustaqil sistema sifatida qarash mumkin.

Sistema tushunchasi favqulodda keng sohalarda foydalaniladi. Sistemalarni shartli ravishda **moddiy** va **abstrakt** (g'oyaviy) turlarga ajratish mumkin..

Moddiy (material) sistema insondan tashqarida real olamdagi elementlar to'plamidan tashkil topgan sistemadir. Bunga stanoklarni, mexanizmlarni va boshqalarni kiritish mumkin.

Abstrakt sistema inson fikri, tasavvuri bo'lib unga bilimlar, nazariyalar, gipotezalar sistemasini kiritish mumkin.

Sistemalarni tahlil qilish jarayonida ko'p sondagi tekshirishlar, tajribalar o'tkazilib ulardan eng qulayini tanlash masalasi kelib chiqadi. Buni mavjud (real) sistemalarda o'tkazish juda murakkab va juda ko'p vaqtni oladi, hamda iqtisodiy tomondan katta harajatlarga olib keladi. **Sistemaning modelini tuzish** va unda tajriba, tekshirishlar o'tkazish masalasi yuzaga keladi.

Modellashtirish deganda mavjud sistemani almashtira oladigan o'xshashini, modelini tuzish va uni tekshirish natijasida original (asli) haqida

yangi axborotlar olish tushuniladi. Tuzilgan model, modellashtirilayotgan sistemani to'liq yoki qisman xususiyatlarini mujassamlashtiradi.

Modellashtirishda uchta: 1) **subyekt** sifatida tekshiruvchi, inson shaxsi; 2) **tekshirish obyekti** (sistema); 3) obyektning modeli elementlarining mavjudligini payqash lozim.

Modellashtirish jarayoni qaytarilish xususiyatiga ega bo'lib, ko'rsatilgan bosqichlar bir necha marta takrorlanish jarayonida model ketma-ket mukammallashtiriladi. Masalan, kemandagi modeli yasab uni bir necha marta o'rganib, tekshirib, natijada suvda suzadigan **asl kema** yasaladi. Bichuvchi oldin buyumning modelini yasab uni har taraflama tekshirib, keyin uni materialga qo'yib kiyimni bichadi va bu jarayonda material iqtisod qilinadi.

Amaliyotda qo'llaniladigan modellarni shartli ravishda ikki, **fizik** va **simvolik** (belgilik) turlarga ajratish mumkin. O'z navbatida fizik model **geometrik o'xshashlik** modeli va **analog-modellarda** ifodalanadi.

Geometrik o'xshashlik modelida asosan originalning tuzilishi va uning geometrik xususiyatlari mujassamlashadi. Modelning o'lchamlari originalga nisbatan proporsional holda kichiraytirilishi yoki kattalashtirilishi mumkin. Masalan, tekshirish uchun samolyot, kema, mashina, ko'priklar, binolarning modellari originalga nisbatan kichiraytiriladi. Atomning modeli kattalashtiriladi.

Geometrik o'xshashlik modellarini yasashda har bir tekshiriladigan sistema uchun model tuziladi yoki eskisini qaytadan yasaladi, bunga ko'p vaqt ketadi hamda ancha moddiy harajatlarga olib keladi. Bundan tashqari bunday turdagi modellar sistema dinamikasini tekshirishda qiyinchiliklarga olib keladi.

Analog-modellarda originalda kechadigan fizik jarayonlar mo'jassamlashadi. Modellarning bunday turi texnik qurilmalar modellarini yasashda ishlatiladi.

Simvolik modellarda original tuzilishi hamda ularga tegishli bog'liqliklar simvollar va ular orasidagi munosabatlar yordamida ifodalanadi. Simvolik modellar orasida matematik va mantiqiy bog'lanishni ifodalaydigan **matematik (tenglama, tengsizlik, funksiya va boshqalar) modellar** asosiy o'rinni egallaydi.

Ma'lumki, insoniyat jamiyatining uzluksiz o'sib boruvchi ehtiyojini to'laroq qondirish uchun matematika fani vujudga keldi va rivojlandi. Buni arifmetika, geometriya va algebra fanlarining kelib chiqishi hamda rivojlanishi tarixidan ham tushunish mumkin. Masalan, tomonlari a dan iborat kvadrat yuzining modeli $s = a \cdot a = a^2$ dir. A mahsulot 5 kg ning narxi 200 so'm bo'lsa, uning 1 kg ning narxi x uchun $5x=200$ tenglama o'rinni bo'lib, $x=40$ so'm ekanligini topamiz. Xulosa qilib, matematikadagi har bir

ifoda, tenglama, tengsizlik, formula, funksiya, hosila, integral va hokazolar borliqning modellari ekanligini payqash qiyin emas.

Matematik modelda mavjud sistema (original) tuzilishi hamda elementlarining bo'liqligi matematik va mantiqiy munosabatlar sistemasi orqali ifodalanadi. Matematik model o'zining tabiati bilan originaldan farq qiladi. Originalning xususiyatlarini matematik model orqali tekshirish juda qulay va arzon bo'ladi. Bundan tashqari ko'p matematik modellar **universal** bo'lib, ular yordamida turli sistemalarni tekshirish mumkin. Masalan, ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

berilgan bo'lsin. (1) sistemaning ma'nosi nima? Har xil yo'nalishdagi mutaxassislar: bu aktiv qarshilikli elektr zanjiridagi kuchlanish yoki tok kuchi modeli, stanoklarni yuklash tenglamasi, bu sistema orqali tovarlarni realizasiya qilish shartlari ifodalangan deyish mumkin. Bu a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 , b_2 o'zgarmas koeffitsiyentlar va x_1 , x_2 noma'lumlar simvollarining nimani ifodalashi bilan bog'liq. Bu matematik yozuvning universalligi shundaki, u yuqoridagi hamma holatlar, asosiy qonuniyatlarini ifodalaydi.

Matematik modellashtirish rivojlanishida har xil murakkablikdagi hisoblashlarni va mantiqiy amallarni katta tezlik bilan bajaradigan zamonaviy komp'yuterlarning ahamiyati kattadir.

Iqtisodiy hodisa va jarayonlarning matematik modellari qisqacha **iqtisodiy-matematik model** (IMM)lar deb ataladi.

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish tabiiy fanlardagiga nisbatan ancha murakkabroq kechadi, bu birinchi navbatda iqtisod, ishlab chiqarish jarayonlaridan tashqari, **ishlab chiqarish munosabatlarini** ham qamrab olishidadir. **Ishlab chiqarish munosabatlarida** esa odamlarning xulq-odad, hatti-harakatlari, qiziqishi va shaxsan yechim qabul qilishlarini hisobga olmasdan modelni yasab bo'lmaydi.

Bu fikrning to'g'riligini quyidagi oddiy misoldan ham payqash mumkin. Usta (master) boshchiligida bir necha kishi ishlaydigan jamoa kam seriyali mahsulot ishlab chiqarishini olaylik. Usta har kuni ishchilar o'rtasida har xil detallarni yasashni taqsimlaydi. Ishchilar bir-biridan umumiy malakasi bilan ham ishlab chiqarish amallarini bajarishi bilan ham farq qiladi. Har bir ishchining, har bir amalni bajarishini ish unumdorligiga qarab detallarni eng kam vaqt sarf qilgan holda topshirilgan vazifani bajarishning matematik modelini yasab uni chiziqli dasturlash masalasiga keltirib yechish mumkin. Lekin yechilgan masala boshliqni (ustani) qanoatlantirmasligi mumkin. Gap shundaki amallar (detailarni) bajarish ish haqiga nisbatan qulay, noqulay

bo'lishi va bu amallarni bajarayotgan ishchilar uchun ish haqi ular hohlagan hamda usta hohlaganday muayyan normada bo'lishini modellashtirish qiyin. Bunda ustani, ishchini nima qiziqtiradi **buni oddiy holda ham matematik ifodalash ancha murakkab**. Bu sohada ham e'tiborga molik ishlar qilinmoqda.

Iqtisodiy-matematik modellashtirish amaliyotida shunday aniq qonun-qoidalar ishlab chiqilganki, ularni keyingi kurslarda o'rganiladigan matematik (matematik dasturlash, iqtisodiy matematik modellar va usullar va boshqalar) kurslarda qaraladi.

3. Asosiy matematik tushunchalar haqida.

„Oliy matematika“ fani kursida sistemalarning matematik modellarini tuzishda qo'llaniladigan **asosiy matematik apparatni** (amaldagi dastur asosida) o'rganishni maqsad qilib qo'yamiz.

Iqtisodiy jarayon yoki hodisalarning matematik modelini tuzishda va uni tekshirishda koordinatlar usulidan keng foydalaniladi. Misol tariqasida ushbuni qaraymiz.

1-misol. Biror xil mahsulotdan ikki donasini ishlab chiqarish uchun 6 ming so'm harajat qilinadi, o'n donasi uchun esa harajat 26 ming so'm bo'lsin. Xarajat funksiyasi chiziq (to'g'ri chiziq) li bo'lsa, shu mahsulotdan sakkiz dona ishlab chiqarish harajatini topish uchun masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish. Ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdorini x , uni ishlab chiqarish uchun ketgan harajat miqdorini y bilan belgilasak, xOy koordinatlar tekisligida masala shartiga asosan $A(2; 6)$ va $B(10; 26)$ berilgan nuqtalar hosil bo'ladi. berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{x-2}{10-2} = \frac{y-6}{26-6} \quad \text{ëku} \quad y = 2,5x + 1$$

matematik modelni hosil qilamiz va $x = 8$ bo'lganda $y = 2,5 \cdot 8 + 1 = 21$ ming so'm harajat bo'lishi kelib chiqadi, koordinatlar usuli **tekislik va fazodagi analitik geometriya mavzularida** o'rganiladi.

Turli xil iqtisodiy sistemalarning matematik modellarini tuzish va uni tahlil qilishda chiziqli va nochiziqli (chiziqli bo'lmagan) modellar deb ataluvchi matematik modellar qo'llaniladi. Ushbu misollarni qaraymiz.

2-misol. Firma palto va kurtka (kalta kamzul) ishlab chiqarish uchun to'rtta turdagi resurslardan foydalanadi. Resurslar sarfi quyidagicha: bitta palto ishlab chiqarish uchun 1-turdagi resursdan a_1 birlik, 2-turdagi resursdan a_2 birlik, 3-turdagi resursdan a_3 birlik, 4-turdagi resursdan esa a_4 birlik miqdorda ishlatiladi; bitta kurtka uchun esa 1,2,3,4-turdagi resurslardan

mos ravishda b_1, b_2, b_3, b_4 birlik miqdorda ishlatiladi. Resurslar chegaralangan bo'lib, ular mos ravishda c_1, c_2, c_3, c_4 birlik miqdorda berilgan bo'lsin.

Palto va kurtka ishlab chiqarish uchun resurslar sarfi matematik modelini tuzing.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan paltolar miqdorini x_1 , ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan kurtkalar miqdorini x_2 bilan belgilaylik. Bu holda $a_1 \cdot x_1$ ko'paytma palto ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur resurs miqdorini xuddi shunga o'xshash $b_1 x_2$ kurtka ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur resurs miqdorini ifodalaydi. Demak, 1-tur resursning umumiy sarfi $a_1 x_1 + b_1 x_2$ bo'lib,

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1$$

tenglik hosil bo'ladi. Yuqoridagiga o'xshash 2, 3, 4-tur resurslar sarfi uchun mos ravishda

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = c_2$$

$$a_3 x_1 + b_3 x_2 = c_3$$

$$a_4 x_1 + b_4 x_2 = c_4$$

tengliklarni hosil qilamiz. Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modeli

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = c_2$$

$$a_3 x_1 + b_3 x_2 = c_3$$

$$a_4 x_1 + b_4 x_2 = c_4$$

ikki noma'lumli, to'rtta chiziqli tenglamalar sistemasi bo'ladi. Bu modelda o'zgaruvchilar (noma'lumlar) faqat birinchi darajali bo'lganligi uchun chiziqli model deb yuritiladi.

Bu sistemaning koeffitsiyentlaridan hamda ozod hadlardan ushbu jadvallarni tuzish mumkin:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

Bunday jadvallarga matrisalar deb aytiladi. Yuqoridagiga o'xshash modellarni tuzishda va tahlil qilishda oliy algebra (determinantlar, matrisalar, chiziqli tenglamalar sistemasi va boshqalar) elementlaridan keng

foydalaniladi, bu matematik apparat **oliy algebra(chiziqli algebra)** elementlari mavzusida o'rganiladi.

3-misol. Ma'lumki, biror mahsulotni sotishdan olingan ja'mi daromad y , mahsulot narxi p bilan, uning miqdori x ning ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$y = px \quad (2)$$

bo'ladi.

Ikkinchi tomondan sotiladigan mahsulotning miqdori uning narxiga bog'liq, odatda narx qancha arzonroq qo'yilsa ko'proq miqdorda, narx ko'tarilsa esa kamroq miqdorda mahsulot sotiladi. Bu bog'lanish oddiy, chiziqli deb olaylik, ya'ni

$$p = ax + b \quad (3)$$

ko'rinishda bo'lsin. Narxning (3) formuladagi qiymatini (2) tenglikka qo'ysak

$$y = px = (ax + b)x = ax^2 + bx$$

matematik model kelib chiqadi. Bu model **nochiziqli modellarga** misol bo'ladi (x o'zgaruvchi ikkinchi darajada).

Tekshirilayotgan iqtisodiy sistema butun xalq xo'jaligi bo'ladimi yoki uning tarmoqlarimi, ayrim fermer xo'jaliklari bo'ladimi ularni modellashtirishda ko'rsatkichlar orasidagi funksional bog'lanishni, ya'ni mahsulot ishlab chiqarish uchun u yoki bu resurslarning sarfi orasidagi bog'lanishni topishdan iborat bo'ladi. Bunday funktsiyani odatda **ishlab chiqarish funksiyasi** deb ataladi. Ishlab chiqarish funksiyasini umumiy holda

$$F(x, y, a) = 0 \quad (4)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda x resurslarning sarfi, y ishlab chiqarish ko'rsatkichi (miqdori), a parametr (son). Bu bog'lanish analitik (formulalar) ko'rinishida yoki jadval ko'rinishida bo'lishi mumkin. Bu funktsiyaning ko'rinishini umumiy iqtisodiy yoki texnologik mulohazalardan hamda axborotlarni statistik o'rganishlardan olish mumkin. (4) tenglikni

$$y = f(x, a) \text{ } \ddot{e}ku \text{ } x = \varphi(y, a)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, bular mos ravishda ishlab chiqarish va sarf funksiyalari deb ataladi. Funktsiyalar kaqidagi boshlanhich tushunchalar matematik taklilga kirish bobida qaraladi.

Ma'lumki, o'rtacha miqdor tushunchasi ko'p so'kalarda ishlatiladi, masalan, biror yer maydoniga ekilgan bug'doy ekinining o'rtacha hosildorligi, sutdagi bo'lgan o'rtacha yog' miqdori, bozorda sotilayotgan tovarning o'rtacha miqdori, ma'lum oyning kunlaridagi biror shakarga kelgan turistlar soni va boshqalar. Tijorat ishlarida ham o'rtacha miqdor ahamiyatga ega, misol uchun haftaning kunlarida sotilgan mahsulot miqdori, kunning soatlarida oshxonaga kelgan xo'randalar soni, yilning oylaridagi korxonaning o'rtacha daromadi va boshqalar. Lekin o'rtacha miqdorni bilish bilan ko'p

hollarda maqsadga erishib bo'lmaydi. Istalgan tadbirkorlik ishlarini amalga oshirishda ushbu savolga to'g'ri kelish mumkin, mahsulot ishlab chiqarishda qilinayotgan harajatni biror miqdorga oshirganda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori qanchaga ko'payadi yoki aksincha harajat biror miqdorga qisqartirilganda mahsulot ishlab chiqarish qanday bo'ladi. Bunday hollarda o'zgaruvchi miqdorlar ortishi haqida fikr yuritilib, qaralayotgan o'zgaruvchilar orttirmasi nisbatining limiti qiymatini yoki limitik samaradorlik haqida mulohaza qilishga olib keladi. Misol uchun limitik harajat tushunchasini qaraylik. Tabiiyki, biror mahsulot ishlab chiqarilganda ishlab chiqarish harajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdoriga bog'liq. Mahsulot miqdorini x birlik bilan, ishlab chiqarish harajatlari y bilan belgilasak,

$$y = f(x)$$

funksional bog'lanish kelib chiqadi. Mahsulot ishlab chiqarishni Δx ga orttirilsa, $x + \Delta x$ mahsulotga mos keluvchi harajat $f(x + \Delta x)$ bo'ladi. Demak, mahsulot miqdorining Δx orttirmasiga, mahsulot ishlab chiqarish harajati

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

orttirmasi mos keladi. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatga mahsulot ishlab chiqarishning o'rtacha harajati deyiladi.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ga esa ishlab chiqarishning limitik harajati deyiladi, bunday masalalarni yechish matematikadagi **funksiya hosilasi** tushunchasiga olib keladi, bu tushunchalar **differensial hisob** mavzusida o'rganiladi.

4-misol. Mahsulot ishlab chiqarish harajati y va mahsulot hajmi x orasida ushbu funksional bog'lanish bo'lsin:

$$y = 200x - \frac{1}{20}x^2.$$

Ishlab chiqarish hajmi:

a) $x = 100$; b) $x = 150$ bo'lgandagi limitik harajatlarni toping.

Yechish. Berilgan funksiya hosila olsak $y' = 200 - \frac{1}{10}x$

bo'lib, $x = 100$ bo'lganda, $y'(100) = 200 - \frac{1}{10} \cdot 100 = 190$ va $x = 150$

bo'lganda esa, $y'(150) = 200 - \frac{1}{10} \cdot 150 = 185$ bo'ladi. Bu topilganlarning

iqtisodiy ma'nosi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi 100 birlik bo'lganda, mahsulot ishlab chiqarish harajati kelgusi mahsulotni ishlab chiqarishga o'tishda, 190

birlikni tashkil etadi, ishlab chiqarish hajmi 150 birlik bo'lganda esa, u 185 ni tashkil etadi.

Qaralayotgan masalalarda bir necha variantlardan optimal (eng qulay) ini topish masalasi qo'yilgan bo'lsa, uning uchun tuzilgan matematik modelda uning optimal qiymatini topish masalasi qo'yiladi. Masalan, biror firma yaqin kelajak rejasida ishlab chiqarish funksiyasi, faqat ishlab chiqarishda band bo'lgan shaxslar soniga bog'liq bo'lib,

$$y = 4,5x^2 - 0,1x^3$$

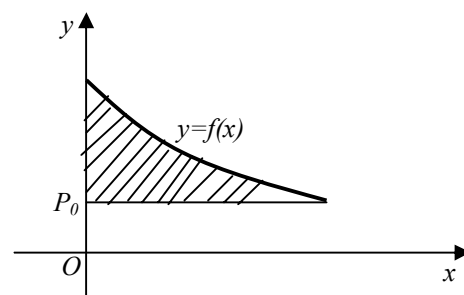
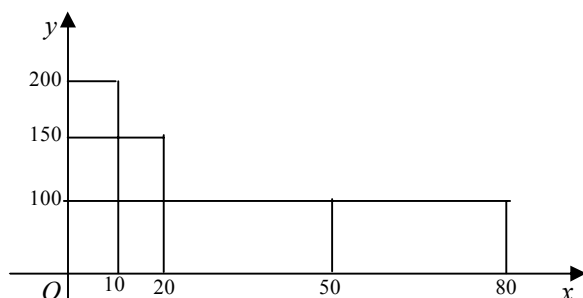
ko'rinishda bo'lsin, bunda y ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori, x ishlovchi shaxslar soni. Ishlovchi shaxslar sonining shunday qiymatini topish kerakki ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori maksimal bo'lsin. Bu holda ishlab chiqarish funksiyasidan hosila olib, uni 0 ga tenglashtirib kritik (stasionar) nuqtalarni topamiz:

$y' = 9x - 0,3x^2$, $9x - 0,3x^2 = 0$, bundan $x_1 = 0$ bo'lganda funksiya minimumga $x_2 = 30$ da maksimumga ega bo'ladi. Tabiiyki ishchilar soni 0 bo'lganda hech qanday mahsulot ishlab chiqarilmasligi tushunarli, $x_2 = 30$ bo'lganda,

$$y(30) = 4,5 \cdot 30^2 - 0,3 \cdot 30^3 = 1250$$

bo'lib, maksimum qiymatga ega bo'ladi. Optimallik sharti qatnashgan modellarga **optimizatsiyaviy** (optimizasion) modellar deb ataladi.

Ma'lumki, iste'molchi biror tovarni bozordagi narxdan yuqoriroq narxda sotib olishga qodir bo'lib, uni pastroq, bozor narxida harid qilib ortiqcha pul mablag'iga ega bo'ladi. Iste'molchining bunday jami pul mablag'iga iste'molchilar ortiqcha pul mablag'i deb ataylik. Biror tovarga talab quyidagicha ifodalansin: tovarning narxi 200 so'm bo'lsa uni 10 nafar iste'molchi bir donadan, 150 so'm bo'lsa 20 nafar, 100 so'm bo'lsa yana 50 nafar iste'molchi bir donadan harid qilsin, bunda iste'molchilarning umumiy sarfi $S_1 = 200 \cdot 10 + 150 \cdot 20 + 100 \cdot 50 = 10000$ so'm bo'ladi. Tovarga narx birdaniga 100 so'm bo'lganda uni 80 nafar iste'molchi bir donadan harid qilib umumiy sarf $S_2 = 100 \cdot 80 = 8000$ so'm bo'lar edi. Demak iste'molchilar $S_1 - S_2 = 10000 - 8000 = 2000$ so'm pulni iqtisod qiladi. Bu holatni grafik ko'rinishda 1-chizmadagi yuzalar ayirmasi sifatida ifodalash mumkin.



1-chizma.

2-chizma

Umumiy holda, talab $y = f(x)$ funksiya bilan berilgan bo'lib, p_0 bozordagi muvozanat narx bo'lsa, iste'molchilar ortiqcha mablag'ini kisoblash, yuqoridan talab chizig'i quyidan $y = p_0$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yuzani hisoblashga olib keladi (2-chizma). Bunday ko'rinishdagi masalalar matematikaning integral hisob deb ataluvchi apparatini o'rganishga olib keladi, bu apparat **aniqmas va aniq integral hisob** mavzularida qaraladi.

Tabiat va jamiyatdagi hodisa hamda jarayonlar bir necha faktorlarga bog'liq bo'ladi. Masalan, biror yer maydoniga ekilgan bug'doydan olinadigan hosilning miqdori, bir necha faktorlarga: ekilgan bug'doy urug'iga, yerning tuzilishiga, uning sug'orilishiga, o'g'it berilishiga, ob-havoning kelishiga, parvarish qilayotgan shaxsning saviyasiga va boshqalarga bog'liq.

Iqtisodiyotni qaraydigan bo'lsak, umuman yuqorida qayd etilgan mahsulot ishlab chiqarish, ishlab chiqarish uskunalari, ishchi kuchi, ishchi shaxs saviyasi, uning kayfiyati, ishlab chiqaruvchining moliyaviy ahvoli va boshqalarga bog'liq, ya'ni uni

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ko'rinishda ifodalash kerak bo'ladi. Bunday turdagi masalalarni modellashtirish va tekshirish matematikaning ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi bo'limi yordamida amalga oshiriladi..

5 - misol. Ikki xildagi tovar ishlab chiqarilayotgan bo'lib, x_1 va x_2 ularning miqdorlari, $p_1 = 14$ va $p_2 = 20$ mos ravishda bu tovarlarning narxlari bo'lsin. $C(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ harajat funksiyasi ko'rinishda ifodalansin. Tovlar ishlab chiqarishdan maksimum foyda olishning matematik modelini tuzing.

Yechish. $\Phi(x_1, x_2)$ foyda funksiyasi bu holda

$$\Phi(x_1, x_2) = 14x_1 + 20x_2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$$

bo'ladi. Bu foydaning matematik modelidir. Foydaning maksimum qiymatini topish uchun ikki o'zgaruvchili funksiya ekstremumini topish qoidasidan foydalaniladi. Bu qoidani **ko'p o'zgaruvchili funksiyalar** mavzusida qaraladi.

Bank aholidan yiliga foiz stavkasi (hissasi) h hamda qo'shimcha stavka mijoz hisob raqamiga har oy oxirida o'tkazish sharti bilan pul mablag'ini qabul qiladi. Bu holda mijoz qo'ygan pul har bir oyda $i = \frac{h}{12}$ miqdorda ko'payadi. Masalan, mijoz a_0 so'm miqdordagi pulni bankka qo'ygan bo'lsin. Birinchi oy oxirida mijoz hisob raqamida

$$a_1 = a_0 + a_0 \cdot i = a_0(1 + i)$$

pul bo'ladi. Ikkinchi oy oxirida esa

$$a_2 = a_1 + a_1i = a_1(1 + i) = a_0(1 + i)(1 + i) = a_0(1 + i)^2$$

bo'lib, uchinchi oy oxirida esa

$$a_3 = a_2 + a_2i = a_2(1 + i) = a_0(1 + i)^3$$

bo'ladi. Xuddi yuqoridagiga o'xshash kelgusi oylar uchun $a_4, a_5, a_6, \dots$ va hokazolarni aniqlash mumkin.

Shunday qilib, birinchi hadi a_1 maxraji $q = 1 + i$ bo'lgan geometrik progressiya

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

sonlar ketma-ketligi kelib chiqadi. Bunday matematik modellar sonli ketma-ketliklar tushunchasiga olib keladi. Sonlar ketma-ketligidan tuzilgan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

cheksiz yig'indi xususiyatlarini o'rganish esa qatorlar nazariyasiga olib keladi. Bu nazariya **qatorlar** mavzusida qaraladi.

Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib, u tayin p narxda sotilayotgan bo'lib, $y(t)$ vaqtning t oni (momenti)dagi realizasiya qilingan mahsulot miqdori bo'lsin. Bu holda mahsulotni realizasiya qilishdan olingan daromad

$$p \cdot y(t)$$

modeli bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi, albatta, ishlab chiqarish $J(t)$ investisiyasiga sarflanadi, ya'ni

$$J(t) = m \cdot p \cdot y(t) \quad (6)$$

bo'ladi, bunda m investisiya me'yori o'zgarmas son hamda $0 < m < 1$.

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to'liq realizasiya qilinayotgan bo'lsa, daromadning bir qismi ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o'sishi (akselerasiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi $y'(t)$, $J(t)$ investisiyaga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$y'(t) = l J(t) \quad (7)$$

bo'lib, bunda $1/l$ akselerasiya me'yori, (6) va (7) tengliklardan

$$y'(t) = l \cdot m \cdot p \cdot y(t) \text{ yoki } y'(t) = ky(t) \quad (8)$$

tenglik qilib chiqadi, bunda $k = lmp$.

(8) tenglik ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o'sishining matematik modeli bo'lib, differensial tenglama deb ataladi. Bu **differensial tenglamalar nazariyasi** mavzusida o'rganiladi.

O'quv qo'llanmani tayyorlashda, ushbularga erishishni maqsad qilib olindi:

- 1) matematikaning hozirgi zamon taraqqiyotidagi o'rni va ahamiyatiga e'tiborni jalb qilish;
- 2) o'quvchini matematik apparatning qo'llanilishiga qiziqtirib o'rgatish;
- 3) amaldagi dastur asosida matematik apparatni o'rgatish;
- 4) ayrim masalalarning matematik modellarini tuza bilish va uni tahlil qilish;
- 5) matematik fikrlash va xulosa chiqarish;
- 6) matematik bilimlarni chuqurlashtirishga yo'naltirib, bu bilimlarni o'z faoliyatida qo'llash.

Shuni ta'kidlaymizki, „Oliy matematika“ fani oliy ta'limda asosiy tayanch fan ekanligi, uning usullari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, informatika, chiziqli va nochiziqli dasturlash, makro va mikro iqtisod, ekonometriya, iqtisodiy

tahlil, moliyaning miqdoriy metodlari, logistika va boshqa fanlarning asosiy bilimlarini egallashda asosiy qurol sifatida ishlatilishi e'tiborga olindi.

Takrorlash uchun savollar

1. Hozigi zamon talablari nimalardan iborat deb bilasiz?
2. Zamon talablarini bajarishda kadrlarning malakasi qanday bo'lishi kerak?
3. Komp'yuterlarning tatbiqlari soha mutaxassislaridan nimalarni bilishni talab qiladi?
4. Matematika fanini o'rganishning ahamiyati nimada deb hisoblaysiz?
5. Model nima?
6. Oddiy modellarga misollar keltiring?
7. Modelda nima ifodalanadi?
5. Arifmetika, geometriya va algebra fanlaridagi ifoda va belgilarning modelga aloqasi bormi?
6. Sistema nima?
7. Iqtisodiy sistemaga misollar keltiring?
8. Sistemaning elementlari nima?
9. Sistemani qanday turlarga ajratish mumkin?
10. Moddiy sistema nima?
12. Abstrakt (g'oyaviy) sistema nima?
13. Modellashtirish deganda nimani tushinasiz?
14. Model originalning xususiyatlarini to'liq ifodalaydimi?
15. Modellashtirishning asosiy mohiyati nima?
16. Simvolik (belgilik) model nima?
17. Matematik model qanday ifodalanadi?
18. Matematik modellarning universalligini qanday tushinasiz?
19. Iqtisodiy-matematik modellar, modellarning qanday turiga kiradi?
20. IMM lar tabiiy fanlardagi modellardan nima bilan farq qiladi?
21. Optimizasiyaviy modellarning mohiyati nimada?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Arifmetikadagi oddiy modellarni bilasizmi? Ulardan bir nechtasini sanab chiqing.
2. Geometriyadagi modellarni bilasizmi?
3. Algebrada modellar bormi? Bor bo'lsa misollar keltiringchi?
4. Sistema deganda nimani tushunasiz va bir nechta misollar keltiring, ularning elementlarini sanab chiqing.
5. Moddiy va abstrakt sistemalarga misollar keltiring.
6. Modellashtirish yordamida original haqida yangi ma'lumotlar olinadi, misollar keltiring.
7. Geometrik o'xshashlik, analog-model va simvolik modellarga misollar keltiring.

8. Matematik modellarga bir necha misollar keltiring.
9. Oila daromadini x , uning harajatini y desak $y = \frac{x}{2}$ modelda daromadning ortishi bilan nimani kuzatasiz?
10. Respublikamiz xalq xo'jaligi tarmoqlari va ularning elementlarini iqtisodiy sistemaga misol qilib bo'ladimi? Mumkin bo'lsa sistema va uning elementlari nimalar bo'ladi? Muayyan tarmoqlar misolida tushuntiring.
11. Yashash joyingiz yoki unga yaqin, biror mahsulot ishlab chiqarishni sistema deb olib uning elementlarini sanab chiqing(birnecha misollar keltiring).

Oliy algebra elementlari

2-ma'ruza. Determinantlar va ularning xossalari

Reja

1. Algebra va uning rivojlanish tarixidan.
2. 2,3-tartibli determinantlar.
3. Determinantlarning xossalari.
4. Minor va algebraik to'ldiruvchilar.
5. n - tartibli determinantlar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Algebra, algoritm, 2,3 va n -tartibli determinantlar, bosh diagonal, yordamchi diagonal, minor, algebraik to'ldiruvchi, uchburchaklar qoidasi, diagonal qoidasi, determinantlarning xossalari, determinantni biror satri (ustuni) elementlari bo'yicha yoyish.

1. Algebra va uning rivojlanish tarixidan. Algebra matematikaning bir qismi va u turli miqdorlar ustida amallarni hamda shu amallar bilan bog'liq tenglamalarni yechishni o'rganadi. Kengroq ma'noda algebrada ixtiyoriy tabiatli to'plamning elementlari ustida sonlarni qo'shish va ko'paytirish kabi odatdagi amallarni umumlashtiruvchi amallarni o'rganuvchi fan tushuniladi.

Uch og'aynning yoshlari 30, 20, 6 da. Necha yildan keyin eng kattasining yoshi ikkala ukasi yoshining yig'indisiga teng bo'ladi. $30 + x = (20 + x) + (6 + x)$, $x = 4$. Bunday tenglamalar eramizdan avval 2 minginchi yillarda qadimgi Misrda ma'lum edi. Lekin ular harflardan foydalanmagan. Eramizdan avvalgi 2 minginchi yil boshida qadimgi bobilliklar yanada murakkabroq masalalarni yechishgan.

III asrda yashagan Iskandariyalik olim Diofant geometrik bayonni rad etib harfiy ifodalardan foydalanadi. Unda manfiy ko'rsatkichli darajalar, manfiy sonlar, musbat va manfiy sonlarni ko'paytirish qoidalarini yozish uchun qisqacha belgilar bor edi.

Algebraning keyingi rivojiga Diofant o'rgangan algebraik tenglamalar kuchli ta'sir ko'rsatgan.

VI asrdan boshlab matematik tadqiqotlar markazi Hindiston, Xitoy, Yaqin Sharq va O'rta Osiyo mamlakatlariga ko'chdi. Xitoylik olimlar chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishda noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usulini topishgandi. Ammo algebra, tenglamalarni yechish masalalariga bog'liq muammolarni bayon etuvchi matematikaning maxsus tarmog'i sifatida Yaqin Sharq va O'rta Osiyo olimlari ishlarida shakllandi. IX asrda o'zbek matematigi va astronomi Muhammad ibn Muso al Xorazmiy (783-850) «Al-jabr val muqobala» asarini yozdi. Bu asarda Xorazmiy chiziqli tenglamalarni yechishning umumiy qoidasini berdi va kvadrat tenglamalarni sinflarga ajratib, har bir sinf uchun yechish yo'llarini ko'rsatdi. Al-jabr (tiklash) so'zi tenglamadagi manfiy hadlarni

uning ikkinchi qismiga ishorasini o'zgartirib o'tkazishni bildirgan. Yangi fan «***Algebra***» ning nomi o'sha «Al-jabr» so'zidan olingan.

Qisqacha, al-Xorazmiy to'g'risida ma'lumotlarni qaraganda Xorazmiy o'qish, yozish va sanashni mahalliy diniy maktab, madrasada oldi. U ilmiy masalalarni o'z o'qituvchilaridan yaxshiroq tushunar, juda ko'p o'qir, o'z ustida tinimsiz ishlar, madrasaning majburiy darsliklari bilan chegaralanib qolmas edi.

Xorazmiyning yoshlik davri Xorazmni arablar zabt etgan davrga to'g'ri keladi. Beruniyning yozishicha, arab istilochilari Xorazmning milliy madaniyatini yo'q qilib yuborgani, kitoblarning kuydirilganini, olimlarni o'zlari bilan olib ketganini, bo'ysunmaganlarini o'ldirganini yozadi. Shu sabab bo'lsa kerak, VIII asr oxirida Xorazmiy Bag'dodga keladi. Bu asr o'rtalarida davlat boshiga abbosiylar kelgan va Sharqiy arab xalifaligida hayot o'z iziga tusha boshlagan edi. Bag'dodda turli kasb egalari, olimlar to'plana boshlaydi. Fanning rivojlanishi Xorun ar-Rashid (786-809) va uning o'g'li Al-Ma'mun xalifalik qilgan (813-833) davrga to'g'ri keladi. Al-Ma'mun Bag'dodda «Bayt al-hikmat» (Donishmandlar uyi)ni qurdiradi. Bunda yaxshi rasadxona, boy kutubxona bor edi. Uni o'z davrining Akademiyasi desa bo'lar edi. Xorazmiy Bag'dodga kelib ilmiy ishlar bilan shug'ullanadi. Tez orada Xorazmiy matematika, astronomiya, geografiya, tarix va tabobat ilmi bo'yicha butun O'rta Sharqda shuhrat qozondi. U «Donishmandlar uyi»da ilmiy ishlarga, kutubxonaga, rasadxonaga rahbarlik qildi. Uni Fanlar Akademiyasining birinchi prezidenti deyish mumkin.

Xorazmiyning matematikaga qo'shgan hissasi beqiyos. Uning «Hind hisobi» nomli asari o'nli sistema raqamlari 0, 1, 2, . . . , 9 ga bag'ishlangan. Ularni soddalashtiradi va birinchi marta arab tilida bayon etadi. Bu raqamlar Xorazmiy asari orqali arablarga, keyin Yevropaga o'tadi. Matematikadagi *algoritm* termini ham Xorazmiyning nomi bilan bog'liq, Al-Xorazmiy lotincha al-goritm deyilgan va shu so'zdan kelib chiqqan.

Xorazmiy o'rta asr Sharqida yaratilgan birinchi matematik-astronomik jadvallarning muallifi. Amerikalik sharqshunos olim Sorton Xorazmiyni «barcha zamonlarning eng buyuk matematiklaridan biridir» deb ta'riflaydi.

2. 2, 3 - tartibli determinantlar. Determinantlarni hisoblashga keltiriladigan ushbu masalani qaraylik. Masala. A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 turdagi xom ashyodan foydalaniladi. Bitta A mahsulotni ishlab chiqarish uchun 5 birlik 1-tur va 4 birlik 2-tur xom ashyo sarflanadi, bitta B mahsulotni ishlab chiqarish uchun esa, 3 birlik 1-tur va 5 birlik 2-tur xom ashyo ishlatiladi. 1-tur xom ashyo 62 birlik, 2-tur xom ashyo 73 birlikda berilgan bo'lsa, eng katta foyda olinadigan ishlab chiqarishni rejalashtirish uchun xom ashyo sarfi modelini tuzing.

Bu masalaning matematik modelini tuzish maqsadida x_1 bilan ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan A mahsulot miqdorini, x_2 bilan esa ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan B mahsulot miqdorini belgilaylik. Bu holda $5x_1$ A mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini, $3x_2$ esa B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini ifodalaydi. $5x_1 + 3x_2$ A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan

1-tur xom ashyo jami sarfi miqdorini ifodalaydi, bu xom ashyo chegaralangan bo'lib, 62 birlikda mavjud, demak $5x_1 + 3x_2 = 62$ tenglama kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib, 2-tur xom ashyo sarfi uchun $4x_1 + 5x_2 = 73$ tenglamani hosil qilish mumkin. Shunday qilib,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 62, \\ 4x_1 + 5x_2 = 73 \end{cases}$$

ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu tenglamalar sistemi berilgan A va B mahsulotlarni ishlab chiqarishda, xom ashyo sarfining matematik modelini ifodalaydi.

Biz yuqorida eng oddiy iqtisodiy masalani qaradik, hamda uning modeli ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga keltirilishini ko'rsatdik. Fan va texnikaning juda ko'p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemi orqali ifodalanadi. Bu holatlar chiziqli tenglamalar nazariyasini umumiy holda qarashimiz lozimligini ko'rsatadi.

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ bo'lsa, (1) tenglamalar sistemi yagona

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2)$$

yechimga ega bo'ladi. (2) formuladagi sur'at va mahrajdagi ifodalar 2- tartibli determinant (aniklovchi)lar deyiladi. 2-tartibli determinantni

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bilan belgilanadi. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ larga determinantning elementlari deyiladi. Shunday qilib, (2) formulalarni determinantlar yordamida

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (4)$$

ifodaga **3- tartibli determinant deyiladi** va

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

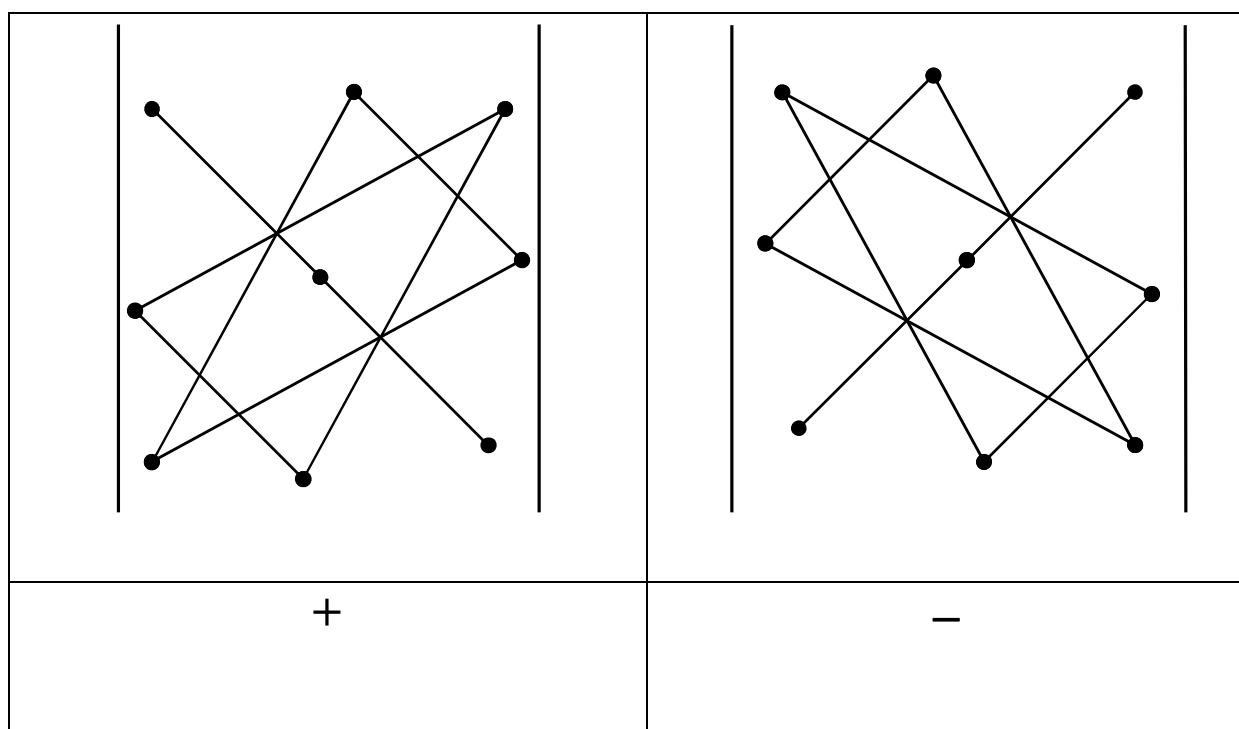
bilan belgilanadi.

a_{11}, a_{22}, a_{33} elementlar **bosh diagonalni**, a_{13}, a_{22}, a_{31} **yordamchi diagonalni** ifodalaydi. (4) tenglikda 2- tartibli determinantlarni kattaliklari bilan almashtirsak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} \quad (5)$$

bo'ladi. (5) formulani esda saqlash **uchun uchburchak qoidasidan** foydalanish mumkin. Elementlarni nuqtalar bilan belgilasak, ushbu sxema hosil bo'ladi :



(+) ishora bilan,

(-) ishora bilan olinadi.

3. Minor va algebraik to'ldiruvchilar.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ determinantda } i - \text{ satrni va } j - \text{ ustunni o'chirishdan 2- tartibli}$$

determinant hosil bo'ladi, bunga a_{ij} elementga mos **minor** deyiladi va M_{ij} bilan belgilanadi. Masalan,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

va boshqalar.

a_{ij} **elementning algebraik to'ldiruvchisi** deb unga mos minorning musbat yoki manfiy ishora bilan olingan kattaligiga aytiladi, bunda $i + j$ juft bo'lsa, musbat ishora bilan, $i + j$ toq bo'lsa manfiy ishora olinadi. a_{ij} elementning algebraik to'ldiruvchisini A_{ij} bilan belgilanadi. Demak,

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bo'ladi va boshqalar.

4. Determinantlarning xossalari.

Determinantlar quyidagi xossalarga ega:

1. Determinantning barcha satridagi elementlarini mos ustunelementlari bilan almashtirilsa uning kattaligi o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1-misol. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 - 0 - 0 + 4 - 0 = 22$

bo'lib, bu determinantda barcha satrlarini mos ustunlar bilan almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 + 0 - 0 + 4 - 0 = 22$$

bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, ikkala holda ham bir xil kattalik hosil bo'ldi, bu birinchi xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.

2. Ikkita satr (ustun)ni o'zaro almashtirilsa determinant kattaligining ishorasi teskarisiga o'zgaradi; haqiqatan ham 1- misoldagi determinantda 1-satrini 3-satri bilan o'zaro almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - 24 - 0 + 6 = -28 + 6 = -22$$

bo'lib, bu 2-xossaning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

3. Ikkita bir xil satr (ustun)li determinant kattaligi no'lga teng; ikkita satri bir xil bo'lgan determinantni hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 0 + 36 - 0 - 0 = 0$$

bo'ladi, bu esa 3-xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.

4. Determinantning biror satr (ustun) ning hamma elementlarini $m \neq 0$ songa ko'paytirilsa, uning kattaligi shu m songa ko'payadi.

Haqiqatan ham, 1-xossada keltirilgan determinantning 2-satri elementlarini 2 ga ko'paytirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 12 + 0 - 0 + 8 - 0 = 44$$

bo'lib, bu xossaning ham to'g'riligi ko'rinadi.

5. Determinantning ikkita satri (ustuni) elementlari o'zaro proporsional (mutanosib) bo'lsa, uning kattaligi no'lga teng, misol uchun,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant berilgan bo'lsin. Bu determinantning 1 va 2-satri elementlari o'zaro proporsional, uni hisoblasak

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 12 - 0 + 6 + 12 = 0$$

bo'lib, bu esa 5-xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.

6. Determinantning kattaligi, biror satri (ustuni) elementlarini unga mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shilganiga teng. 1-xossada keltirilgan misolni qaraymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

bu determinantni 3-satr elementlari bo'yicha yoyib yozsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 28 = 22$$

kelib chiqadi, bu esa 6-xossaning ham o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

7. Determinant biror satri (ustuni)ning har bir elementi ikkita qo'shiluvchidan iborat bo'lsa, u holda bu determinant ikkita determinant yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} (a_{11} + e_1) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + e_2) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31} + e_3) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & a_{12} & a_{13} \\ e_2 & a_{22} & a_{23} \\ e_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ushbu determinantni

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

quyidagicha almashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2+2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

keyingi ikkita determinantni hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 0 - 3 - 18 + 3 - 0 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 3 + 18 + 1 - 0 = 22;$$

1-xossadagi misoldan ma'lumki, u 22 ga teng edi, keyingi ikki determinant yig'indisi ham 22ga teng bo'ladi, bu esa 7-xossaning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

8. Determinantning biror ustini (satri) elementlariga boshqa ustini(satri)ning mos elementlarini istalgan umumiy ko'paytuvchiga ko'paytirib qo'shilsa, uning kattaligi o'zgarmaydi, ya'ni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11} + \lambda a_{12}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + \lambda a_{22}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31} + \lambda a_{32}) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Misol uchun,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantning 2-ustun elementlarini 2 ga ko'paytirib, 1-ustunning mos elementlariga qo'shib, hosil bo'lgan determinantni hisoblasak:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 6 = 22$$

bo'ladi. Bu determinantning kattaligi 1- misolda hisoblaganimizdek 22 ga teng edi, bu esa 8-xossaning ham to'g'riligini ko'satadi;

Determinantlarning xossalaridan foydalanish ko'p hollarda qulay hisoblashlarga olib keladi. Ushbu misolni qaraymiz.

$$2\text{-misol. } \Delta = \begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20537 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix} \text{ determinantning kattaligini hisoblang.}$$

Yechish. Bu determinantni uchburchak qoidasi bilan hisoblash ko'p xonali sonlar bo'lganligi uchun ancha noqulayliklarga olib keladi. Shuning uchun bu determinantni hisoblash uchun, uning xossalaridan foydalanishga urinamiz. Ikkinchi satr elementlarini -2 ga ko'paytirib 1-satr mos elementlariga qo'shamiz, bu holda ushbu determinant hosil bo'ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix};$$

hosil bo'lgan determinantni 1- satr elementlari bo'yicha yoyib,ushbuni

$$\Delta = 0 \cdot \begin{vmatrix} 8268 & 10268 \\ 689 & 126 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 10268 \\ 513 & 126 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} (-12)$$

olamiz. Oxirgi determinant 2-satr elementlarini (-12) ga ko'paytirib 1-satr mos elementlariga qo'shib ushbu natijaga ega bo'lamiz:

$$\begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = 1 \cdot 689 - 0 \cdot 513 = 689.$$

Bu misoldan ko'rinadiki, determinantlarni hisoblashda uning xossalariidan foydalanish ancha qulayliklarga olib keladi.

3 -tartibli determinantni **diagonal usuli** deb ataluvchi ushbu usul bilan ham hisoblash mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

1-misoldagi determinantni diagonal usulidan foydalanib hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 - (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = 24 - 6 = 18.$$

bo'ladi.

5. n - tartibli determinantlar haqida. Ko'pgina masalalarni yechishda 2 va 3-tartibli determinantlardan tashqari yanada yuqori tartibli determinantlar ham uchraydi. Masalan, 4-tartibli determinant ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Umumiy holda n -tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ mos ravishda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ elementlarning algebraik to'ldiruvchilaridir. Ma'lumki, algebraik to'ldiruvchilar $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ ning tartiblari $(n-1)$ bo'ladi. Determinantlarning hamma xossalari n -tartibli determinant uchun ham o'rinlidir.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda determinantlarning 6-xossasidan foydalanib, uning tartibini pasaytirish bilan 3 yoki 2-tartibli determinantlarga keltirib hisoblanadi. Masalan, 4-tartibli determinantni 1-satr elementlari bo'yicha yoysak ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Bundan yuqori tartibli determinantlarning ham kattaligi yuqoridagiga o'xshash hisoblanadi. Masalan, 6-tartibli determinantning kattaligini hisoblash kerak bo'lsa, uni biror satri yoki ustuni elementlari bo'yicha yoyib 5-tartibli determinantlarga, keyin o'z navbatida 5-tartibli determinantlarni ham biror satri yoki ustuni elementlari bo'yicha yoyib, 4-tartibli determinantlarga keltiriladi va hokazo.

Determinantlarning yuqorida ko'rsatilgan xossalari hamma tartibli determinantlar uchun ham to'g'ri. Endi yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga misol qaraymiz. Ushbu determinantning kattaligini hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish. Berilgan determinantni 1-satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2 \left[3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right] + 3 \cdot \left[(-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= 2(-9 + 4 + 16) + 3(2 + 6 - 16) = 22 - 24 = -2.$$

Determinantlarni hisoblashda uning biror satri yoki ustunlarida no'llar ko'proq bo'lsa, o'sha satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblash ancha qulaylik keltiradi, masalan, yuqoridagi misolda 1-satr elementlari bo'yicha yoyganimiz uchun, ya'ni unda 2 ta no'l element bo'lgani uchun 2 ta 3- tartibli determinantlarni hisoblab chiqishga hojat qolmadi. Bunday satr yoki ustunlar

bo'lmasa determinantlarning 8-xossasidan foydalanib, uni bunday satrga yoki ustunga ega bo'ladigan qilib o'zgartirish mumkin, misol uchun ushbu

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblaylik. Buning uchun 1-ustun elementlarini oldin 2 ga keyin mos ravishda 5 ga, -4 ga ko'paytirib, 2,3 va 4- ustunlarning mos elementlariga qo'shamiz, bu holda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix}$$

bo'lib, keyingi 3-tartibli determinantni 2-satr elementlari bo'yicha yoysak:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-33 + 21) = 7 \cdot (-12) = -84$$

bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi determinantlar birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblansin:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}.$$

2. Quyidagi determinantlar nollar eng ko'p bo'lgan satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblansin:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Quyidagi determinantlar hisoblansin:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Ushbu determinantlarni tartibini pasaytirish usulidan foydalanib hisoblang:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$5. \text{ Ushbu } 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 35436 & 46343 & 22429 \\ 17718 & 23171 & 11214 \\ 5906 & 7723 & 3727 \end{vmatrix}$$

determinantlarning kattaligini hisoblang.

17. Ushbu

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantlarni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblang.

Takrorlash uchun savollar

1. Algebra va algoritm iborasi nima bilan bog'liq?
2. 2-tartibli determinant qanday belgilanadi va u nimaga teng?
3. 3-tartibli determinant qanday belgilanadi va u qanday hisoblanadi?
4. Determinantlarning xossalari nimalardan iborat.
5. 4-tartibli determinantlarning kattaligi qanday hisoblanadi?
6. 5,6,...,n-tartibli determinantlar qanday belgilanadi va hisoblanadi?

3,4-ma'ruzalar. Matrisalar va ular ustida amallar

Reja

1. Matrisalar haqida umumiy tushunchalar.
2. Matrisalar ustida amallar.
3. Matrisaning rangi va uni hisoblash.
4. Teskari matrisa va uni topish.

Tayanch ibora va tushunchalar

Matrisa, matrisaning o'lchami, matrisaning determinanti, maxsus matrisa, maxsusmas matrisa, bosh diagonal, diagonal matrisa, birlik matrisa, transponirlangan matrisa, teng matrisalar, matrisalarning yig'indisi, matrisani songa ko'paytirish, matrisalar ko'paytmasi, matrisaning κ -tartibli minori, matrisaning rangi, elementar almashtirishlar, teskari matrisa.

1 Matrisalar haqida umumiy tushunchalar. Sistemalarni modellashtirishda matrisalar algebrasi degan tushuncha muhim ahamiyatga ega. Rejalashtirish muammolari, yalpi mahsulot, jami mehnat sarfi, narxni aniqlash va boshqa masalalar hamda ularda kompyuterlarni qo'llash matrisalar algebrasini qarashga olib keladi. Ishlab chiqarishni rejalashtirish, moddiy ishlab chiqarish orasidagi mavjud bog'lanishlarni ifodalashda va boshqalarda, ma'lum darajada tartiblangan axborotlar sistemasiga asoslangan bo'lishi lozim. Bu tartiblangan axborotlar sistemasi muayyan jadvallar ko'rinishida ifodalangan bo'ladi. Misol o'rnida moddiy ishlab chiqarish tarmoqlari orasidagi o'zaro bog'liqlik axborotlari sistemasini qaraylik. Ishlab chiqarish 5 ta (masalan, mashinasozlik, elektroenergiya, metal, ko'mir, rezina ishlab chiqarish sanoatlari) tarmoqdan iborat bo'lsin. Bunda ular orasidagi o'zaro bog'liqlik 1-jadval bilan ifodalansin.

1-jadval.

Tarmoqlar	1	2	3	4	5
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Bu jadvalda a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) lar bilan, i -tarmoqning j -tarmoqqa yetkazib beradigan (ta'minlaydigan) mahsuloti miqdori belgilangan, chunki, $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{25}$ lar 2-tarmoqning mos ravishda hamma tarmoqlarga; $a_{31}, a_{32}, \dots, a_{35}$ lar esa 3-tarmoqning mos ravishda hamma tarmoqlarga yetkazib beradigan mahsulotlari miqdorini bildiradi. a_{22}, a_{33} lar mos ravishda 2,3-tarmoqlarning o'z ehtiyojlariga sarfini ifodalaydi.

Yuqoridagiga o'xshash ishlab chiqarish mezonini (normasi) axborotlari sistemasiga sonli misol qaraylik. Korxona 3 turdagi xom ashyo ishlatib 4 xildagi mahsulot ishlab chiqaradigan bo'lsin, bunda xom ashyo sarfi normasi sistemasi 2-jadval bilan berilgan bo'lsin.

2-jadval.

Xom ashyolar	Mahsulotlar			
	1	2	3	4
1	2	3	2	0
2	4	0	3	5
3	3	5	2	4

2-jadvalda masalan, 1-turdagi xom ashyo sarfi normasi mos ravishda 1,2,3,4-xildagi mahsulotlar ishlab chiqarish uchun 2,3,2,0 bo'ladi.

1 va 2 jadvallar, matematikada o'rganiladigan matrisalar tushunchasining misollari bo'laoladi. Matrisalar iqtisodiy izlanishlarda keng qo'llanilmoqda, xususan, ulardan foydalanish ishlab chiqarishni rejalashtirishni osonlashtirib, mehnat sarfini kamaytiradi, hamda rejaning har xil variantlarini tuzishni ixchamlashtiradi. Bundan tashqari har xil iqtisodiy ko'rsatkichlar orasidagi bog'liqlikni tekshirishni osonlashtiradi. Bu holatlar matrisalarni umumiy holda qarashga olib keladi.

1-ta'rif. m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri burchakli $m \cdot n$ ta elementdan tuzilgan jadval

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ **o'lchamli matrisa** deyiladi. A matrisani qisqacha (a_{ij}) ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) bilan ham belgilash mumkin. Matrisalarda

satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, bunday matrisalar **kvadrat matrisa** deb ataladi.

Har bir n tartibli kvadrat matrisa uchun uning elementlaridan tuzilgan determinantni hisoblash mumkin, bu determinantga A matrisaning determinanti deyiladi va $\det A$ yoki $|A|$ bilan belgilanadi. $\det A = 0$ bo'lsa, A matrisaga maxsus matrisa, $\det A \neq 0$ bo'lsa, maxsusmas matrisa deyiladi. Kvadrat matrisaning $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlar joylashgan diagonalini bosh diagonal, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ elementlari joylashgan diagonalini yordamchi diagonal deyiladi. Bosh diagonaldagi elementlar 0 dan farqli boshqa barcha elementlari 0 ga teng kvadrat matrisa diagonal matrisa deyiladi. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisa diagonal matrisadir. Diagonaldagi barcha elementlari 1 ga teng diagonal matrisa birlik matrisa deyiladi va

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

bilan belgilanadi.

Faqat bitta satrdan iborat $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14})$ matrisaga satr matrisa deyiladi. Faqat bitta ustunga ega

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

matrisaga ustun matrisa deb ataladi.

Barcha elementlari 0 lardan iborat bo'lgan matrisaga no'l matrisa deyiladi va O bilan belgilanadi.

A matrisaga quyidagi matrisani mos qo'yish mumkin:

[illegible]

Bu matrisaning har bir satri A matrisaning unga mos ustunidan iborat.
 A^T matrisani A matrisaga nisbatan transponirlangan deyiladi.

$A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) matrisalarning mos elementlari $a_{ij} = b_{ij}$ teng bo'lsa, bunday matrisalar teng deyiladi.

2. Matrisalar ustida amallar. Matrisalarni qo'shish, songa ko'paytirish va bir-biriga ko'paytirish mumkin.

Bir xil o'lchamli $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) matrisalarning yig'indisi deb, elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ravishda aniqlanadigan uchinchi $C = (c_{ij})$ matrisaga aytiladi. Ravshanki, C matrisaning o'lchami oldingi matrisalarning o'lchami bilan bir xil bo'ladi. Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisalar yig'indisi

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 0+3 \\ 3-2 & 1+4-1+2 & \\ 0+5 & 4+0 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} = C$$

bo'radi. Matrisalarni qo'shish amali quyidagi o'rin almashtirish va guruhlash xossalariga ega, ya'ni

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Matrisalarni qo'shishda biror matrisaga O matrisani qo'shish odatdagi sonlarni qo'shishdagi no'l soni rolini o'ynaydi, ya'ni

$$A + O = A.$$

masalan,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

A matrisani λ songa ko'paytirish deb uning hamma elementlarini shu songa ko'paytirishga aytiladi, ya'ni

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

masalan,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

matrisani $\lambda = 3$ ga ko'paytirsak,

$$\lambda A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

$m \cdot k$ o'lchamli $A = (a_{ij})$ matrisaning $k \cdot n$ o'lchamli $B = (b_{ij})$ matrisaga, ko'paytmasi deb $m \cdot n$ o'lchamli shunday $C = (c_{ij})$ matrisaga aytiladiki uning c_{ij} elementi A matrisa i -satri elementlarini B matrisa j -ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

Matrisalar ko'paytmasi $C = AB$ bilan belgilanadi. Demak, matrisalarni ko'paytirish uchun birinchi ko'paytuvchining ustunlari soni, 2- ko'paytuvchining satrlari soniga teng bo'lishi talab qilinadi. Shu sababli, umuman $AB \neq BA$.

1-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ matrisalar berilgan. A va

B matrisalarni ko'paytiring.

Yechish. Birinchi matrisaning ustunlar soni, ikkinchi matrisaning satrlar soniga teng, shuning uchun bu matrisalarni ko'paytirish mumkin:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 & 4 \cdot 7 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 & 2 \cdot 7 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 13 & 26 \\ 25 & 36 \end{pmatrix}.$$

Matrisalarni ko'paytirish ushbu

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

guruhlash hamda

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

taqsimot

xossasiga

ega.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

bo'lsin. Bu holda

$$A \cdot (BC) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -3 & -6 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ -14 & -110 \end{pmatrix}.$$

Endi $(AB) \cdot C$ ko'paytirishni bajaramiz:

$$(AB)C = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 14 & 46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 13 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 14 \cdot (-1) + 46 \cdot 0 & 14 \cdot 2 + 46 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ -14 & -110 \end{pmatrix}$$

Shunday qilib

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

xossa o'rinli bo'ladi. Endi taqsimot xossasini qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

bo'lsin. Oldin taqsimot xossasining chap tomonini

$$(A + B) \cdot C$$

hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} (A + B) \cdot C &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 34 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O'ng tomoni

$$\begin{aligned} AC + BC &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 6 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 34 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

bo'ladi.

Shunday qilib

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Istalgan kvadrat matrisa A ni mos birlik E matrisaga ko'paytirganda

$$AE = EA = A$$

tenglik o'rinli bo'ladi, masalan

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ -3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) & -3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Xuddi shunga o'xshash $EA = A$ tenglikni ham tekshirib ko'rish mumkin (buni bajarishni o'quvchiga havola qilamiz).

3. Matrisaning rangi va uni hisoblash. A $m \times n$ o'lchovli matrisada k satr va k ta ustunini ajratamiz, bunda, k, m va n sonlardan kichik yoki ularning kichigiga teng bo'lishi mumkin. Ajratilgan satr va ustunlarning kesishuvida hosil bo'lgan k -tartibli determinantga A **matrisaning k -tartibli minori deyiladi.**

Ta'rif. A matrisaning 0 dan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga A **matrisaning rangi** deyiladi. A matrisaning rangi $\text{rang} A$ yoki $r(A)$ bilan belgilanadi.

Matrisa rangini bevosita hisoblashda ko'p sondagi determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Quyidagi amallardan foydalanib matrisa rangini hisoblash qulayroq. Matrisada: 1) faqat 0 lardan iborat satri (ustuni)ni o'chirishdan; 2) ikkita satr (ustun)ning o'rinlarini almashtirishdan; 3) biror satr (ustun)ning elementlarini

biror $\lambda \neq 0$ songa ko'paytirib, boshqa satr (ustun) mos elementlariga qo'shish; 4) matrisani transponirlashdan, uning rangi o'zgarmaydi. Bu amallarga odatda **elementar almashtirishlar** deyiladi.

$$\text{1-misol. } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

matrisaning rangini hisoblang.

Yechish. A matrisaning rangini hisoblash uchun elementar almashtirishlardan foydalanamiz. Birinchi satr elementlarini ikkinchi satr elementlariga, birinchi satr elementlarini (-2) ga ko'paytirib, uchinchi satr elementlariga, hamda uchinchi satr elementlarini to'rtinchi satr elementlariga qo'shib quyidagi matrisani hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Keyingi matrisada 2-satirini (-1) ga ko'paytirib to'rtinchi satriga qo'shsak

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisa hosil bo'ladi. Bu matrisada

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0$$

bo'lib, to'rtinchi tartibli minorlar 0 ga teng. Shunday qilib, berilgan matrisaning rangi 3 ga teng.

4. Teskari matrisa va uni topish. A kvadrat matrisa uchun $AB = BA = E$ birlik matrisa bo'lsa, B kvadrat matrisa A matrisaga **teskari matrisa** deyiladi. Odatda, A matrisaga teskari matrisa A^{-1} bilan belgilanadi.

Teorema: A kvadrat matrisa teskari matrisaga ega bo'lishi uchun A matrisaning determinanti 0 dan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir. (Bu teoremani isbotsiz keltirdik, uning isbotini kengroq dasturli kurslardan topish mumkin, masalan, V.Ye.Shneyder va boshqalar. «Oliy matematika qisqa kursi» 1tom. T. O'qituvchi. 1985. 407 b.)

A kvadrat matrisa uchun $\det A \neq 0$ bo'lsa, unga teskari bo'lgan yagona matrisa A^{-1} mavjud.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisaga teskari A^{-1} matrisa

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

formula bilan topiladi. Bunda A_{ij} mos ravishda a_{ij} elementlarning algebraik to'ldiruvchilari va $\Delta = \det A$.

Teskari matrisani topishga misol qaraymiz.

2-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

matrisaga teskari matrisani toping.

Yechish. Oldin A matrisaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2 \neq 0.$$

Yuqoridagi teorema asosan teskari matrisa mavjud, chunki

$$\Delta = 2 \neq 0$$

ya'ni, berilgan matrisa maxsusmas matrisadir. A^{-1} ni topish uchun A matrisa hamma elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Teskari matrisani topish

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

formulasiga asosan

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. A^{-1} teskari matrisaning to'g'ri topilganligini

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

tenglikning bajarilishi bilan tekshirib ko'rish mumkin, haqiqatan ham,

$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2.5 & 4 & -1.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2.5) + 1 \cdot 0.5 & 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1.5) + 1 \cdot 0.5 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2.5) + 4 \cdot 0.5 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1.5) + 4 \cdot 0.5 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2.5) + 9 \cdot 0.5 & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + 9 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1.5) + 9 \cdot 0.5 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ya'ni, $AA^{-1} = E$ birlik matrisa hosil bo'ladi, bu A^{-1} teskari matrisaning to'g'ri topilganligini isbotlaydi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matrisa deb nimaga aytiladi?
2. Matrisaning o'lchovi nima va u qanday yoziladi?
3. Kvadrat matrisa deb qanday matrisaga aytiladi?
4. Matrisaning determinanti nima?
5. Maxsus va maxsusmas matrisalar qanday matrisalar?
6. Diagonal matrisa deb nimaga aytiladi?
7. Birlik matrisa deb qanday matrisaga aytiladi?
8. Transponirlangan matrisa deb nimaga aytiladi?
9. Qanday matrisalar teng bo'ladi?
10. Matrisalar yig'indisi nima?
11. Matrisani songa ko'paytirish qanday bo'ladi?
12. Qanday matrisalarni ko'paytirish mumkin?
13. Matrisalar qanday ko'paytiriladi?
14. Matrisaning rangi nima?
15. Elementar almashtirishlar deb qanday amallarga aytiladi?
16. Teskari matrisa qanday topiladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ matrisalarni ko'paytiring.}$$

2-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisalarni ko'paytiring.

3-misol. Ushbu

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ matrisalarga teskari matrisalarni toping.}$$

4-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 34 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1-3 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisalarning rangini hisoblang.

5,6- ma'ruzalar. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechisi usullari

Reja

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushunchalar.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar yordamida yechish.
4. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.

Tayanch iboralar

Chiziqli tenglamalar sistemasi (ChTS), tenglamalar sistemasining yechimi, yagona yechim, sistema birgalikda, aniq bo'lmagan sistema, ekvivalent sistema, birgalikda bo'lmagan sistema, noma'lumlarni yo'qotish, teskari qadam, Gauss usulining xususiyati, sistema birgalikda va aniqlanmas, sistema birgalikda emas, Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi usuli.

1. ChTS haqida umumiy tushunchalar. Ma'lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi hamma tenglamalar chiziqli (1-darajali) bo'lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar o'rniga ma'lum sonlar majmuini qo'yganda, sistemaning hamma tenglamalari ayniyatga aylansa, bunday sonlar majmuiga tenglamalar sistemasining yechimi (ildizi) deyiladi. Bunday sonlar majmui bitta bo'lsa, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lib, bu sistema aniqlangan (tayin, muayyan) deb ataladi va bu tenglamalar sistemasi birgalikda deyiladi. Birgalikda bo'lgan sistema bittadan ko'p yechimga ega bo'lsa, bunday sistema aniq bo'lmagan sistema deyiladi.

Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuiga ega bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

Tenglamalar sistemasi birorta ham yechimga ega bo'lmasa, bunday sistemaga birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini 0 dan farqli songa ko'paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo'shish bilan hosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo'ladi (bu xossadan kelgusida ko'p foydalaniladi).

Fan va texnikaning ko'p sohalarida bo'lganidek, iqtisodiyotning ham ko'p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini tuzishga iqtisodiyotdan misol qaraymiz.

1-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalarini 1-jadvalda berilgan.

1-jadval.

xom ashyo xillari	Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari			xom ashyo zahirasi
	1	2	3	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Berilgan xom ashyo zahirasi ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish: Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xom ashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2,3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2, 7x_3$ bo'lib, uning uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi: $5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000$. Yuqoridagiga o'xshash 2,3-xil xom ashyolar uchun

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$

$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Demak, masala shartlarida quyidagi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070. \end{cases}$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo'ldi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishni umumiy holda qaraymiz.

2.Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishni oldin ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemi uchun qaraymiz. Ushbu ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

dan, birinchi tenglamani a_{22} ga, ikkinchi tenglamani $-a_{12}$ ga hadma-had ko'paytiramiz va hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shamiz, natijada

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad (1)$$

tenglama hosil bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, 1-tenglamani $-a_{21}$ ga, 2-tenglamani a_{11} ga hadma-had ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shib ushbuni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y &= b_2a_{11} - b_1a_{21} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \\ b_2a_{11} - b_1a_{21} &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

bo'lgani uchun, quyidagi belgilashlarni kiritib

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(1) va (2) tengliklarni

$$\Delta x = \Delta_1, \quad \Delta y = \Delta_2$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan $\Delta \neq 0$ bo'lsa,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

bo'ladi, yoki determinantlar orqali yozsak

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Bu formulalarga Kramer formulalari deyiladi, bunda Δ_1 yordamchi determinant Δ determinantning birinchi ustunini ozod hadlar bilan, Δ_2 da esa ikkinchi ustun ozod hadlar bilan almashtiriladi. Δ determinantga tenglamalar sistemasining determinanti deyiladi.

Shunday qilib, berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti 0 dan farqli bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Endi sistemaning determinanti 0 ga teng, ya'ni

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad \text{ёku} \quad a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$$

bo'lsin. Bu holda 1-tenglamaning noma'lumlari oldidagi koeffitsiyentlari 2-tenglamaning noma'lumlari oldidagi koeffitsiyentlariga proporsionaldir. Haqiqatan, koeffitsiyentlardan biri, masalan a_{11} noldan farqli bo'lsin deb

$\frac{a_{22}}{a_{11}} = \lambda$ bilan belgilasak, bundan $a_{21} = \lambda a_{11}$ bo'ladi. U holda

$$a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12} \quad \text{tenglikdan}$$

$a_{11}a_{22} = \lambda a_{11}a_{12}$ bo'lib, $a_{22} = \lambda a_{12}$ kelib chiqadi. Bularni hisobga olib, berilgan sistemani

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2 \end{cases} \quad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. bunda ikkita xususiy hol bo'lishi mumkin:

1) ikkala Δ_1 va Δ_2 determinantlar 0 ga teng, ya'ni $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0$, $\Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0$ bundan $b_2 = \lambda b_1$, chunki $a_{22} = \lambda a_{12}$.

Bu holda a_{21} , a_{22} , b_2 sonlar a_{11} , a_{12} , b_1 sonlarga proporsional bo'lib, berilgan tenglamalar sistemasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = \lambda b_1 \end{cases}$$

Shunday qilib, sistemaning ikkinchi tenglamasi, birinchi tenglamasidan uning ikkala qismini λ ga ko'paytirish bilan hosil qilinadi, ya'ni u 1-tenglamaning natijasidir. Bu holda berilgan sistema cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'ladi. Masalan, y ga ixtiyoriy qiymatlar berib, x ning tegishli

$$\text{qiymatini } x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$$

tenglikdan topamiz.

2) Δ_1 va Δ_2 determinantlardan hych bo'lmaganda bittasi 0 dan farqli, masalan,

$\Delta_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \neq 0$ bo'lsin. U holda $b_2 a_{11} \neq b_1 a_{21}$ bo'ladi, demak $b_2 \neq \lambda b_1$.

bu holda (3) sistemadan ma'lum bo'ladiki, $\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2$ tenglama birinchi $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ tenglamaga qarama-qarshidir. Demak, berilgan sistema yechimga ega emas, ya'ni birgalikda emas.

Endi uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistema noma'lumlari koeffitsiyentlaridan ushbu determinantni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bunga (4) **sistemaning determinanti** yoki aniqlovchisi deyiladi. $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (4) sistema yagona

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \quad (5)$$

yechimga ega bo'ladi, bunda

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

(5) formulaga ham ikki noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasidagidek ***Kramer formulalari*** deyiladi. Kramer formulalari n noma'lumli n ta tenglamalar sistemasi uchun ham umumlashtiriladi.

Endi misollar qaraymiz:

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini toping.

Yechish. Bu sistemaning determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 2 + 9 = 11 \neq 0.$$

Demak, berilgan tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 \cdot 3 = 55, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 3 = 33.$$

$$\text{Shunday qilib, } x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{55}{11} = 5, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3.$$

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema determinantini tuzib, uning uchinchi satri elementlarini (-1)ga ko'paytirib, 1 satr mos elementlariga qo'shib, hosil bo'lgan determinantni 1-satr elementlari bo'yicha yoyib quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Oxirgi 3-tartibli determinantda 1- ustun elementlarini (-2)ga ko'paytirib 3- ustun mos elementlariga qo'shib, hamda 3- ustun elementlari bo'yicha yoyib

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$$

ni hosil qilamiz. $\Delta \neq 1$, demak, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega. Endi boshqa determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta x_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4.$$

(Bu determinantlarni hisoblab ko'rishni o'quvchiga havola etamiz).

Shunday qilib, Kramer formulalariga asosan,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2, \quad x_2 = \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 = \frac{-3}{1} = -3, \quad x_4 = \frac{4}{1} = 4$$

bo'ladi.

Topilgan yechimni tenglamalar sistemasiga bevosita qo'yib uning to'g'riligiga ishonamiz.

3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini toping.

Yechish. Oldin sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 18 + 4 + 18 - 24 - 4 = 0.$$

Sistema determinanti 0 ga teng, bunda ikki hol bo'lishi mumkin. Tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lmasligi yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi mumkin. Buni aniqlash uchun $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ikkinchi va birinchi tenglamalarni solishtirib, ikkinchi tenglama birinchi tenglamadan ikkiga ko'paytirish bilan hosil bo'lganligini payqaymiz. Demak, berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \quad (6)$$

tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'ladi. Bu sistemaning birorta noma'lumiga ixtiyoriy qiymatlar berish bilan cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz, masalan,

$x_3 = 1$ bo'lsin, uni oxirgi sistemaga qo'ysak,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

sistema hosil bo'lib, $x_1 = -\frac{5}{11}, \quad x_2 = \frac{18}{11}$ bo'ladi. Bu holda

$\left(-\frac{5}{11}, \frac{18}{11}, 1\right)$ yechim hosil bo'ladi. $x_3 = -2$ bo'lsin, buni (6) sistemaga qo'yib,

quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\det A \neq 0$ bo'lsa, teskari matrisa A^{-1} mavjud va $A^{-1}AX = A^{-1}B$ hosil bo'ladi. Shunday qilib, noma'lum X matrisa $A^{-1}B$ matrisaga teng bo'ladi, ya'ni

$$X = A^{-1}B.$$

Bu (7) tenglamalar sistemasini yechishning matrisaviy yozuvini bildiradi.

1-misol. Matrisalar yordamida ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}.$$

Yechish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisalar yordamida berilgan tenglamalar sistemasini

$$AX = B \quad (9)$$

ko'rinishda yozamiz. Endi A matrisaning determinantini hisoblaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 2.$$

A matrisaning determinanti 0 dan farqli bo'lganligi uchun, unga teskari yagona A^{-1} matrisa mavjud va tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi. Endi A^{-1} teskari matrisani topish uchun Δ determinant elementlarining hamma algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Teskari A^{-1} matrisani topish formulasiga asosan,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

(9) tenglikning ikki tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytirsak, $A^{-1}AX = A^{-1}B$ yoki $X = A^{-1}B$ bo'lib, ya'ni

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ -2,5 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + (-1,5) \cdot 2 \\ 0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 4 + 0,5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tenglik hosil bo'ladi.

Shunday kilib, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ yoki $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$.

(Topilgan yechimlarni tenglamalar sistemasiga bevosita qo'yib, yechimning to'g'riligini tekshirib ko'rish mumkin).

4. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning eng ko'p ishlatiladigan usullaridan biri Gauss usulidir. Uning mohiyatini uch noma'lumli uchta chiziqli tenglama uchun ko'rsatamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1)$$

Bunda $a_{11} \neq 0$ bo'lsin. Birinchi tenglamaning hamma hadlarini a_{11} ga bo'lamiz va uni $-a_{21}$, $-a_{31}$ ga ko'paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo'shamiz. Bu holda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2, \\ \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

bu yerda $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\alpha_{23} = a_{23} - a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}}$ va h.k.

1. $a_{11} = 0$ bo'lib, boshqa tenglamalarda nomalumlar oldidagi koeffitsiyentlari orasida no'ldan farqlilari bo'lsa, u holda bu tenglamalardan birini birinchi tenglamaning o'rni bilan almashtiramiz, keyin yuqoridagi amallarni bajaramiz. Bu birinchi qadam bo'ladi. Demak, birinchi qadamda birinchi tenglamada x_1 -

noma'lum qolib, qolgan tenglamalardan ketma-ket x_1 - **noma'lumni yo'qotamiz**. Ikkinchi qadamda birinchi tenglama o'z o'rnida qolib, ikkinchi va uchinchi tenglama uchun yuqoridagi amallarni bajaramiz, ya'ni ikkinchi tenglamada x_2 noma'lumni qoldirib, uchinchi tenglamadan uni yo'qotamiz. Shunday qilib, bu amallar natijasida (1) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x_1 + \alpha'_{12}x_2 + \alpha'_{13}x_3 = \beta'_1, \\ \alpha'_{22}x_2 + \alpha'_{23}x_3 = \beta'_2, \\ \alpha'_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases} \quad (2)$$

ko'rinishga keladi. Endi hamma noma'lumlarni so'nggi tenglamadan boshlab **teskari qadam** bilan topish qoldi.

1-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani (-4) va (-3) ga ko'paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ (4 - 4)x_1 + (1 - 8)x_2 + (4 - 12)x_3 = 9 - 4 \cdot 6, \\ (3 - 3)x_1 + (5 - 6)x_2 + (2 - 9)x_3 = 10 - 3 \cdot 6 \end{cases}$$

ya'ni

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 7x_2 - 8x_3 = -15 \\ -x_2 - 7x_3 = -8 \end{cases}$$

bo'ladi.

Shu bilan birinchi qadam tugadi.

Ikkinchi qadamda, birinchi tenglamani o'z o'rnida qoldirib, ikkinchi tenglamani (-7) ga bo'lib yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun ikkinchi tenglamani (-1) ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ \frac{41}{7}x_3 = \frac{41}{7}. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan $x_3 = 1$ ni topamiz. $x_3 = 1$ ni ikkinchi tenglamaga qo'ysak, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ yoki $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1$, $x_2 = 1$ bo'ladi. $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ larni birinchi tenglamaga quysak $x_1 = 1$ bo'ladi. Shunday qilib, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Gauss usulining xususiyati shundan iboratki, unda sistemaning birgalikda masalasini oldindan aniqlab olish talab etilmaydi va:

1) sistema birgalikda va aniq bo'lsa, u holda usul yagona yechimga olib keladi;

2) sistema **birgalikda va aniqmas bo'lsa**, bu holda biror qadamda ikkita aynan teng tenglama hosil bo'ladi va shunday qilib, tenglamalar soni noma'lumlar sonidan bitta kam bo'lib qoladi;

3) sistema **birgalikda bo'lmasa**, u holda biror qadamda chiqarilayotgan (yo'qotilayotgan) noma'lum bilan birgalikda qolgan barcha noma'lumlar ham yo'qotiladi, o'ng tomonda esa noldan farqli ozod had qoladi.

Jardono-Gauss modifikasiyalashgan usuli. Ma'lumki, Gauss usuli bilan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda tenglamalar sistemasi uchburchak ko'rinishdagi sistemaga keltiriladi. Noma'lumlarning qiymati bevosita topiladigan, ya'ni teskari qadam bilan noma'lumlar qiymatini ketma-ket topishga hojat qolmaydigan usulni qaraymiz. Bu usulni ushbu chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan ifodalaymiz.

2-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechimini toping.

Yechish. 1-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib sistemaning qolgan tenglamalaridan x_1 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 1- tenglamani ketma-ket (-4) , (-1) ga ko'paytirib mos ravishda 3,4-tenglamalarga hadma-had qo'shib ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 21, \\ 0 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 15. \end{cases}$$

Endi 2–tenglamani o'zgarishsiz qoldirib, boshqa tenglamalardan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 2 tenglamani (-2) , $8,1$ larga ketma-ket ko'paytirib, mos ravishda $1,3,4$ – tenglamalarga hadma –had qo'shamiz va ushbuni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 5x_2 - 2x_3 = -22, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 2x_3 + 6x_4 = 30. \end{cases}$$

Endigi qadamda 3-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan x_3 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 3- tenglamani ketma-ket $(5/21)$, $(-3/21)$ $(-2/21)$ larga ko'paytirib mos ravishda $1,2,4$ – tenglamalarga hadma-had qo'shsak, ushbu tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + \frac{3}{21}x_4 = \frac{33}{21}, \\ 0 + x_2 + 0 - \frac{6}{21}x_4 = \frac{18}{21}, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi qadamda 4-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan, x_4 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 4 – tenglamani ketma-ket $(-\frac{21}{3})$, $(\frac{21}{6})$, (-9) larga ko'paytirib, mos ravishda $1,2,3$ - tenglamalarga hadma-had qo'shamiz natijada, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 0 + 0 = 1, \\ 0 + x_2 + 0 + 0 = 2, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 0 = 63, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi sistemadan $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$ yagona yechimni olamiz. Yuqoridagi tenglamalar sistemasini yechishda x_1 , x_2, x_3 , x_4 noma'lumlarni ketma-ket yo'qotdik, hisoblashlarni ixchamlashtirish uchun har safar koeffitsiyenti 1 ga teng bo'lgan noma'lumni chiqarish ham mumkin edi.

U usulda ham Gauss usulining xususiyatlari o'z kuchida qoladi, ya'ni tenglamalar sistemasi aniq bo'lsa, bu usul yagona yechimga, tenglamalar sistemasi birgalikda lekin aniq bo'lmasa biror qadamda $0=0$ tenglik hosil bo'lib cheksiz ko'p yechimga olib keladi. Tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmasa, biror qadamda tengliklarning birining chap tomonida 0 o'ng tomonida 0 dan farqli son bo'lib, sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli tenglamalar sistemasi qachon yagona yechimga ega bo'ladi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lsa, u qanday topiladi?
4. Kramer formulalari nimadan iborat?
5. Tenglamalar sistemasining matrisali yozuvi qanday bo'ladi?
6. Tenglamalar sistemasi matrisalar yordamida qanday yechiladi?
7. Teskari matrisa qanday topiladi?
8. Qanday tenglamalar sistemasiga birgalikda deyiladi?
9. Gauss usulining mohiyati nima?
10. Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishning 1-qadami nimadan iborat?
11. Ikkinchi qadam qanday?
12. Teskari qadam nima?
13. Sistema birgalikda va aniq degani nima?
14. Sistema birgalikda va aniqmas deganda nima tushuniladi?
15. Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi nimadan iborat?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Ushbu

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{array} \right\}$$

tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bilan yeching.

2. Ushbu

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 + 13 &= 0 \\ 5x_1 - 19x_2 - 14 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

3. Ushbu

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y + 7z + 1 = 0, \\ -2x + 5y - 3z - 1 = 0, \\ 5x - 6y + 11z + 3 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Kramer formulalari yordamida yeching.

4. Ushbu

$$1) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5 \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27 \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Gauss usulidan foydalanib yeching.

5. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$1) \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 12x_2 - 2x_3 = -1, \\ 4x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

1- teorema. (Kroneker-Kapelli teoremasi). Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lishi uchun sistema matrisasi A ning rangi sistema kengaytirilgan B matrisasining rangiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. (1) sistema birgalikda bo'lsin. $k_1, k_2, \dots, k_s$ uning yechimlaridan biri bo'lsin. Bu sonlarni sistemadagi noma'lumlar o'rniga qo'yib, s ta ayniyat hosil qilamiz. Bu ayniyatlar B matrisaning oxirgi ustuni qolgan barcha ustunlarining mos ravishda koeffitsiyetlar bilan ko'paytmasidan olingan yig'indisi ekanligini ko'rsatadi. B matrisaning har qanday boshqa ustuni A matrisaga ham kiradi va shuning uchun u matrisaning barcha ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Aksincha, A matrisaning har qanday ustuni B matrisani ham ustuni bo'ladi, ya'ni bu matrisaning ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Bundan A va B matrisalarning ustunlari sistemasi o'zaro ekvivalent ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun bu matrisalarning rangi bir xil bo'ladi, ya'ni $r(A) = r(B)$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. A va B matrisalar bir xil rangga ega bo'lsin. Bundan A matrisa ustunlarining istalgan maksimal chiziqli erkli sistemasi B matrisada ham maksimal chiziqli erkli sistema bo'lib qolishligi kelib chiqadi. Shunda qilib A matrisa ustunlari sistemasi orqali B matrisaning oxirgi ustuni chiziqli ifodalanadi. Demak, shunday $k_1, k_2, \dots, k_s$ sonlar majmui mavjud bo'ladiki, A matrisaning bu sonlar bilan ko'paytirishdan olingan ustunlari yig'indisi ozod hadlardan iborat ustunga teng, ya'ni $k_1, k_2, \dots, k_s$ sonlar (1) sistemaning yechimi bo'ladi, shunday qilib, A va B matrisalar ranglarining bir xilda bo'lishidan (1) sistemaning birgalikda bo'lishi kelib chiqadi. Teorema to'liq isbotlandi.

Kroneker-Kapelli teoremasi yechim mavjud ekanligini tasdiqlaydi, lekin bu sistemaning barcha yechimlarini amalda topish uchun usulni bermaydi. Endi, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning quyidagi qoidasini keltiramiz.

A matrisaning rangi B matrisaning rangiga teng bo'lib, $r(A) = r(B) = k$ bo'lsin. Bunda k son A matrisaning chiziqli erkli satrlarining maksimal soniga teng bo'lib, k noma'lumlar soniga teng bo'lsa, u holda sistema tenglamalari soni noma'lumlari soniga teng va uning determinanti noldan farqli bo'ladi, bunday sistemaning yechimi yagona bo'lib uni Kramer qoidasi bo'yicha topish mumkin bo'ladi.

Endi matrisalarning rangi k noma'lumlar sonidan kichik, ya'ni $k < n$ bo'lsin. Bu holda k - tartibli minor noldan farqli bo'ladi. Sistema tenglamalarining har qaysisida $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ noma'lumli hadlarini tenglamalarning o'ng tomoniga o'tkazamiz va bu noma'lumlar uchun biror $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ qiymatlari majmuini tanlab olib k noma'lumli k ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Hosil bo'lgan sistemaga Kramer qoidasini qo'llash mumkin va yagona $c_1, c_2, \dots, c_k$ yechim majmui mavjud bo'ladi. Sistema tenglamalarining o'ng tomoniga o'tkazilgan noma'lumlarni **ozod noma'lumlar** deb ataymiz. Chap tomondagi nomalumlar **bosh(basis) o'zgaruvchilar**, Ozod noma'lumlar uchun $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ sonlarni ixtiyoriy tanlab olishiiz mumkin bo'lganligi uchun

hosil bo'lgan sistemaning cheksiz ko'p turlicha yechimlari shu yo'l bilan hosil qilinadi. Shunday qilib, bu holda cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz.

$x_1, x_2, \dots, x_k$ noma'lumlarning $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ ozod noma'lumlar qatnashgan yechimiga **umumiy yechim** deb ataladi, chunki boshqa cheksiz ko'p yechimlar $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ ozod noma'lumlarga ixtiyoriy qiymatlar majmuini berish bilan olinadi.

Tenglamalar sistemasini yechishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini tekshring:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Yechish. Sistema koeffitsiyentlaridan matrisa tuzamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning rangi 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0$$

bo'lib,

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -6 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

bo'ladi. Kengaytirilgan matrisa

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ning rangi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

$r(A) = 2$, $r(B) = 3$ bo'lib, $r(A) \neq r(B)$ bo'ladi, demak isbotlangan teoremaga asosan sistema birgalikda emas.

2-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini tekshring:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12. \end{cases}$$

Yechish. Sistema koeffitsiyentlaridan tuzilgan matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

bo'lib, $r(A) = 2$, chunki $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, lekin 3-tartibli minori yo'q.

Kengaytirilgan matrisaning rangi ham 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 7 & 10 & 12 \end{vmatrix} = -144 + 40 - 14 + 112 - 24 + 30 = 0.$$

Birinchi ikkita tenglamaning chap qismlari chiziqli erkli, bu ikkita tenglamalar sistemasini yechib, noma'lumlar uchun ushbu qiymatlarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Bu yechim 3-tenglamani ham qanoatlantiradi.

3-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Yechish. Sistema matrisasining rangi $r(A) = 2$, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

bo'lganligini, ya'ni kengaytirilgan matrisaning barcha 3-tartibli minorlari 0 ga teng bo'lganligi uchun, uning ham rangi $r(B) = 2$. Shunday qilib, sistema birgalikda va $r(A) = r(B) = k = 2 < 4$ noma'lumlar sonidan kichik, bu holda birinchi va uchinchi tenglamalar sistemasini olaylik, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

bundan

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 5x_1 + 3x_2 = 1 - 8x_3 - x_4 \end{cases}$$

bo'lib, tenglamalar sistemasini x_1, x_2 asosiy noma'lumlarga nisbatan yechsak:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ 1 - 8x_3 - x_4 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{2}{7} - 4x_3 + \frac{4}{7}x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 5 & 1 - 8x_3 - x_4 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}x_3 - 2x_4$$

bo'ladi. Ozod noma'lumlarni $x_3 = C_1, x_4 = C_2$ deb

$$x_1 = \frac{2}{7} - 4C_1 + \frac{4}{7}C_2,$$

$$x_2 = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}C_1 + 2C_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0 lardan iborat satrni tashlab

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisani hosil qilamiz. Bunday almashtirishlarda B

matrisa rangini aniqlash bilan A matrisaning ham rangini aniqlash imkoniyati tug'iladi. Shunday qilib, B matrisaning rangi 2 ga teng, A matrisaning rangi ham 2 ga teng. Demak, berilgan sistema birgalikda bo'ladi. Ma'lum bo'ldiki, uchinchi tenglama birinchi ikkita tenglamalarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. Shuning uchun uchinchi tenglamani chiqarib

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

to'rt noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Ikkita noma'lumni qolganlari orqali ifodalaymiz. Ma'lumki, x_1, x_2 noma'lumlarga nisbatan yechish mumkin emas, chunki ularning koeffitsiyentlaridan tuzilgan determinant 0 ga teng. Sistemani x_2, x_3 larga nisbatan yechish mumkin, ya'ni

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_1 - x_4, \\ x_2 + 2x_3 = -x_1 - x_4 \end{cases}$$

x_2, x_3 larni **bosh (bazi) o'zgaruvchilar**, x_1, x_4 lar esa ozod(erkin) o'zgaruvchilar bo'ladi. Bu sistemani yechib $x_3 = -1, x_2 = 2 - x_1 - x_4$ ni aniqlaymiz. x_1, x_4 o'zgaruvchilarga ketma-ket qiymatlar berib, cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz. Masalan, $x_1 = 0, x_4 = 1$ bo'lganda $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 1$ yechim hosil bo'ladi va hokazo. Tekshirib ko'rish mumkinki, bu yechim berilgan sistemani qanoatlantiradi.

5-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matrisasining rangini topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Birinchi uchta satrini qo'shib, to'rtinchi satridan ayiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

hosil bo'lgan matrisaning rangi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Shunday kilib, A matrisaning rangi 3 ga teng, noma'lumlar soni to'rtta, 2-teoremaga asosan sistema 0 dan farqli yechimga ega. Berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli. x_1, x_2, x_3 noma'lumlar koeffitsiyentidan tuzilgan determinant 0 dan farqli bo'lgani uchun x_4 ni o'ng tomonga o'tkazib tenglamalar sistemasini yechamiz.

$$\Delta = 21, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 - 1 - 3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 - x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4, \quad x_2 = \frac{43}{21}x_4, \quad x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Bu yechimni berilgan sistemaga bevosita qo'yib yechimning to'g'riligiga ishonish mumkin.

Takrorlash uchun savollar

1. Kroneker-Kapelli teoremasining sharti nimadan iborat?

2. Qanday matrisaga kengaytirilgan matrisa deyiladi?
3. Bir jinsli sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
4. Bir jinsli sistema qanday holda birgalikda?
5. Bir jinsli sistema no'ldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
6. Bosh (baza) o'zgaruvchilar nima?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining birgalikdaligini tekshiring va ularning yechimini toping.

2. Quyidagi tenglamalar sistemasini tekshring:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$$

3. Quyidagi bir jinsli tenglamalar sistemasini tekshring:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 12x_2 + 13x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

4-7. Quyidagi tenglamalar sistemasini tekshring:

4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6. \end{cases}$$

8-ma'ruza. Tekislikda to'g'ri chiziq va uning tenglamalari

Reja

- 1. Geometriyaning rivojlanish tarixidan.**
- 2. Koordinatlar usuli va sodda masalalar.**
- 3. Chiziq va uning tenglamasi haqida.**
- 4. To'g'ri chiziq va uning tenglamalari:**
 - 1). To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.**
 - 2). Berilgan bitta va ikkita nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari.**
 - 3). To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari.**
 - 4). To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.**
 - 5). To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.**

Tayanch ibora va tushunchalar

1. Geometriya rivojlanish tarixi, analitik geometriya, koordinatlar usuli va sodda(asosiy) masalalar, nuqta koordinatlari, ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish, uchburchak yuzini topish. Tekislikda chiziq va uning tenglamasi, burchak koeffitsiyent, to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi, to'g'ri chiziqning o'qlardan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi, berilgan bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi, to'g'ri chiziqning normal, to'g'ri chiziqning normal tenglamasi.

1. Geometriyaning rivojlanish tarixidan. Geometriya fani qadimiy tarixga ega bo'lib, unga oid boshlang'ich tushunchalar bundan 4000 yil muqaddam Misr va Bobilda vujudga kelgan. Geometrik bilimlarning vujudga kelishi odamlarning amaliy faoliyati bilan bog'liq. Bu ko'pgina geometrik figuralarning nomlarida o'z aksini topgan. Masalan, trapesiya nomi yunoncha trapezion - so'zidan olingan bo'lib, «stolcha» ni bildiradi. «Chiziq» termini lotincha limem - «zig'ir ip» so'zidan hosil bo'lgan.

Qadimdayoq geometriya aksiomalar sistemasiga asosan tuzilgan qat'iy mantiqiy fanga aylangan. U uzluksiz rivojlanib yangi teoremlar, g'oyalar va usullar bilan boyib borgan.

Eramizdan avvalgi III asrda yunon olimi Yevklid «Negizlar» nomli asarini yozadi. Yevklid shu davrgacha bo'lgan geometrik bilimlarni jamladi va bu fanning tugallangan aksiomatik bayonini berishga harakat qildi. Yevkliddan so'ng yashagan olimlar uning «Negizlar»iga ba'zi mavzularni qo'shdilar, aniqliklar kiritdilar.

Geometriyaning hozirgi zamon fizikasi bilan bog'lanishini kuzatish g'oyat qiziqarli. Ko'pincha matematikani boyitgan yangi tushunchalar fizika hamda ximiya va tabiatshunoslikning boshqa bo'limlaridan keladi. Masalan, vektor mexanikadan olinganligi misol bo'laoladi. Geometriyaning kelgusi rivojlanishida esa matematikaning ichki talabi va o'ziga xos mantiqiy rivojlanishi natijasida uning ichida vujudga kelgan, yangi geometrik tushunchalar yangi zamonaviy fizikani yaratishga yo'l ochdi. Masalan, Lobachevskiy geometriyasi nisbiylik nazariyasini ochishga asos bo'lib xizmat qildi.

Hozirgi zamon geometriyasi juda ko'p yo'nalishlarga ega. Ulardan biri geometriyani sonlar nazariyasi bilan, ikkinchisi kvant fizikasi bilan, uchinchi esa matematik tahlil bilan yaqinlashtiradi. Hozirgi zamon matematikasi bo'limlari shundayki unda geometriya ko'proqmi, algebrami yoki tahlil (analiz) aytish qiyin.

Geometriyaning rivojlanishida Markaziy Osiyodan chiqqan matematiklar Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniy, Abu Ali ibn Sino, Abdurahmon al-Xaziniy, Abul Vafo Buzmoniy, Umar Xayyom, Mirzo Ulug'bek, G'iyosiddin al-Koshiy va boshqalarning xizmati kattadir.

XVII asrda fransuz matematigi va filosofi Rene Dekart ishlari tufayli, butun matematikani, xususan geometriyani inqilobiy qayta qurgan koordinatlar usuli (metodi) vujudga keldi. Algebraik tenglik (tengsizlik) larni geometrik obraz (grafik) lar orqali talqin qilish va aksincha geometrik masalalarni yechishni analitik, formulalar, tenglamalar sistemalari yordamida izlash imkoniyatini paydo qildi. Matematika fanining yangi tarmog'i ***analitik geometriya vujudga keldi.***

Analitik geometriyaning mohiyati shundaki, geometrik obyektlarga uning algebraik (analitik) ifodasini mos qo'yib, ularning xususiyatlarini o'rganishni, unga mos algebraik ifodalarni tekshirish orqali amalga oshiriladi.

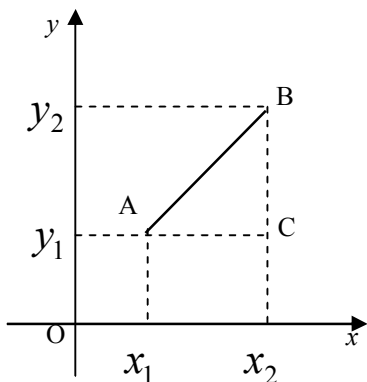
2. Koordinatlar usuli va sodda masalalar. Ma'lumki, o'zaro perpendikulyar bo'lgan gorizontal va vertikal sonlar o'qi Dekart to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasini tashkil qiladi. Bu sistema orqali tekislikdagi nuqta bilan bir juft haqiqiy son o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Tekislikda nuqta $A(x, y)$ bilan belgilanadi. x, y sonlarga uning **koordinatlari** deyiladi. „Nuqta berilgan“ degan ibora uning koordinatlarining berilganligini, „Nuqtani toping“ degan ibora esa, shu koordinatlarni topishni tushuniladi. Koordinatlar sistemasi orqali o'rnatilgan bunday moslikka **koordinatlar usuli** deyiladi.

Bu usulni geometriyaning **sodda masalalarini yechishga** qo'llaymiz:

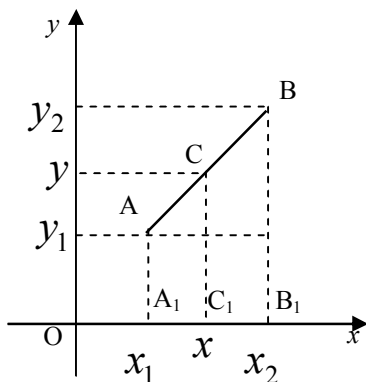
1) tekislikda berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish talab etilsin. Ma'lumki, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$ (1-chizma). ABC to'g'ri burchakli uchburchakdan, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, bo'lib,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

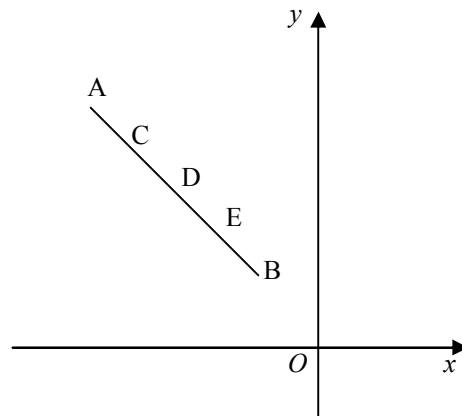
bo'ladi. (1) formulaga tekislikda **berilgan ikkita nuqta orasidagi masofani topish** formulasi deyiladi .



1-chizma



2-chizma



3-chizma

2) AB kesma berilgan bo'lib, uning uchlari $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ bo'lsin. AB kesmani $AC : BC = \lambda$ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtani topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. O'rta maktab geometriyasidan ma'lumki (2-chizma),

$$AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = \lambda,$$

yoki

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$$

bo'lib,

$$A_1C_1 = x - x_1, \quad B_1C_1 = x_2 - x$$

bo'lganligi uchun,

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda, \quad x - x_1 = \lambda (x_2 - x); \quad x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2;$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

bo'ladi. Xuddi shunday, ushbu tenglikka ega bo'lish mumkun:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Demak, C nuqtaning koordinatlari uchun

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (2)$$

formulani hosil qildik. (2) formulaga AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqta koordinatlarini topish formulasi deyiladi. Xususiyl holda $C(x; y)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'lsa, u holda

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1 \text{ bo'lib, } x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

kesmani teng ikkiga bo'lish formulasi kelib chiqadi.

1-**misol**. $M(5; 3)$ va $N(2; -1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. Shartga ko'ra: $x_1 = 5, y_1 = 3, x_2 = 2, y_2 = -1$. Bularni (1) formulaga qo'ysak:

$$MN = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

bo'ladi.

2-**misol**. Tekislikda $A(5;3), B(2;1)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani $\frac{AC}{CB} = \lambda = 0,2$ nisbatda bo'luvchi $C(x; y)$ nuqtaning koordinatlarini toping.

Yechish. Shartga ko'ra $x_1 = 5, x_2 = 2, y_1 = 3, y_2 = 1, \lambda = 0,2$.
(2) formulaga asosan:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{5 + 0,2 \cdot 2}{1 + 0,2} = \frac{5 + 0,4}{1,2} = \frac{5,4}{1,2} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2} = 4,5;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{3 + 0,2 \cdot 1}{1 + 0,2} = \frac{3 + 0,2}{1,2} = \frac{3,2}{1,2} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}.$$

Shunday qilib, $C\left(4,5; \frac{8}{3}\right)$ bo'ladi.

3. Chiziq va uning tenglamasi haqida. Analitik geometriyaning eng muhim tushunchalaridan biri, **chiziq tenglamasi** tushunchasidir. Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida L chiziq berilgan bo'lsin(4-chizma).

Ta'rif. L chiziqda yotuvchi istalgan $M(x, y)$ nuqtaning koordinatlari

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

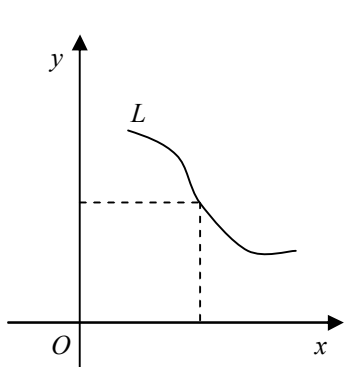
tenglamani qanoatlantirib, unda yotmagan nuqtalarning koordinatlari qanoatlantirmasa, bu tenglama L chiziqning tenglamasi deyiladi. Bundan L chiziq, koordinatlari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar

to'plamidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Chiziqning tenglamasini tuzish deganda unga tegishli ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtaning koordinatlari orasidagi munosabatni(bog'lanishni) tenglama ko'rinishida ifodalashdan iborat. Topilgan chiziq tenglamasi uchun: chiziqdagi istalgan nuqtaning koordinatlari uni

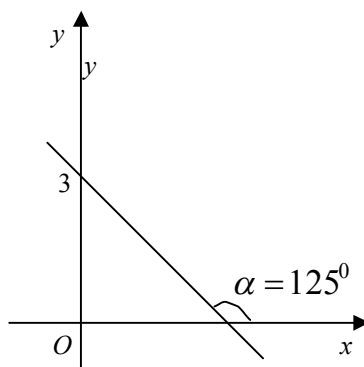
qanoatlantiradi va aksincha, nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantirsa, bu nuqta shu chiziqda yotadi.

4. To'g'ri chiziq va uning tenglamalari. *To'g'ri chiziq* tushunchasi analitik geometriyaning asosiy tushunchalaridan biridir. Quyida har xil holatlarda to'g'ri chiziqning analitik ifodalarini (tenglamalarini) keltirib chiqaramiz va ular yordamida to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyatlarini o'rganamiz.

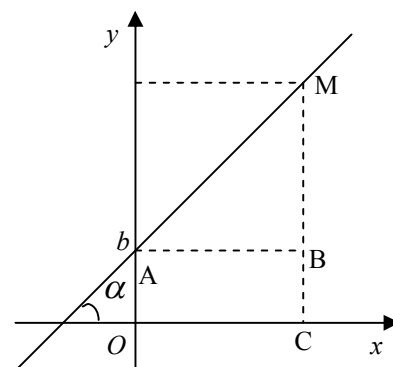
1) To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To'g'ri chiziqning OX o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi α va to'g'ri chiziqning ordinatlar o'qidan ajratgan kesmasining kattaligi b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo'ladi. Masalan, $b = 3$, $\alpha = 125^\circ$ bo'lsa, uning holati aniq bo'ladi (5-chizma).



4-chizma



5-chizma



6-chizma

Yuqoridagi miqdorlar berilganda to'g'ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x, y)$ to'g'ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin (6-chizma).

AMB to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ bundan } BM = AB \operatorname{tg} \alpha$$

6-chizmadan $y = BC + BM$; yoki $y = AB \operatorname{tg} \alpha + b$, $AB = x$ bo'lganligi uchun $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$ bo'ladi. $\operatorname{tg} \alpha$ to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsiyenti** deyiladi va $\operatorname{tg} \alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \quad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsiyentli tenglamasi** deyiladi. $b = 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq koordinatlar boshidan o'tib, tenglamasi $y = kx$ bo'ladi. $k = 1$ bo'lsa, $y = x$ bo'lib, bu birinchi koordinatlar burchagining bissektrisasi bo'ladi.

1-misol. OX o'qi bilan 120° burchak hosil qiluvchi va OY o'qini $A(0; 3)$ nuqtada kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra, to'g'ri chiziq OY o'qini $A(0; 3)$ nuqtada kesib o'tadi, demak $b = 3$. Bu nuqtadan OX o'qiga parallel chiziq o'tkazamiz, hamda shu to'g'ri chiziq bilan 120° burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi.

Endi shu to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo'lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}x + 3$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi bo'ladi.

2) Berilgan bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

$$y = kx + b \quad (3)$$

to'g'ri chiziq A nuqtadan o'tsin. Bu holda A nuqtaning koordinatlari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni $y_1 = kx_1 + b$ bo'ladi. (3) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (4)$$

hosil bo'ladi. (4) tenglamaga berilgan **bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi** deyiladi.

To'g'ri chiziq $B(x_2, y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o'tsa,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo'lib,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo'ladi. k ning yuqoridagi qiymatini (4)ga qo'yib,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) **berilgan ikki** $A(x_1, y_1)$ **va** $B(x_2, y_2)$ **nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

2-misol. Biror xil mahsulotdan 100 donasini ishlab chiqarishga 300 ming so'm xarajat qilinsin. 500 donasi uchun esa xarajat 1300 ming so'm bo'lsin. Xarajat funksiyasi chiziqli (to'g'ri chiziq) bo'lsa, shu mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish xarajatini toping.

Yechish. Masala sharti bo'yicha $A(100, 300)$ va $B = (500, 1300)$ nuqtalar berilgan. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{y - 300}{1300 - 300} = \frac{x - 100}{500 - 100}, \text{ yoki } y = 2,5x + 50$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglamadan $x = 400$ uchun, $y = 1050$ ekanligini topamiz. Demak, mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish uchun 1050 ming so'm xarajat qilinadi.

3). To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari. Ikki noma'lumli

$$Ax + By + C = 0$$

tenglamani qaraymiz.

Bundan, $By = -Ax - C$, $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ bo'lib, $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ bilan

belgilasak, $y = kx + b$ tenglama hosil bo'ladi. Shunday qilib, $Ax + By + C = 0$ tenglama ham to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligi kelib chiqadi.

$$Ax + By + C = 0 \quad (6)$$

tenglamaga to'g'ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

To'g'ri chiziq umumiy tenglamasining hususiy hollari: 1) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ bo'lsa, $Ax + By = 0$ bo'lib, to'g'ri chiziq koordinatlar boshidan o'tadi, chunki $O(0;0)$ nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantiradi;

2) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ bo'lsa, $y = -\frac{C}{B}$ bo'lib, OY o'qdan $-\frac{C}{B}$ kesma ajratib, OX o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi;

3) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ bo'lsa, $x = -\frac{C}{A}$ bo'lib, OX o'qdan $-\frac{C}{A}$ kesma ajratib, OY o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi;

4) $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$ bo'lsa, $y = 0$ bo'lib, OX o'qining tenglamasi hosil bo'ladi;

5) $B = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$ bo'lsa, $x = 0$ bo'lib, OY o'qining tenglamasi hosil bo'ladi;

6) $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ bo'lsa, $C = 0$ bo'lib, o'zgarmas miqdor, bir paytda 0 dan farqli hamda 0 ga teng kelib chiqadi, bunday bo'lishi mumkin emas.

3-misol. $x - 2y + 6 = 0$ to'g'ri chiziq uchun k va b parametrlarni toping.

Yechish: Buning uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz:
 $2y = x + 6$, $y = 1/2 \cdot x + 3$ bundan (2) tenglama bilan taqqoslab,
 $k = 1/2$, $b = 3$, ekanligini topamiz. Shunday qilib, to'g'ri chiziq umumiy tenglamasini burchak koeffitsiyentli tenglamaga keltirib k va b parametrlarni topdik.

4). To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. To'g'ri chiziq koordinat o'qlaridan mos ravishda a va b kesmalar ajratib o'tsin(7-chizma). To'g'ri chiziq $A(a; 0)$ va $B(0; b)$ nuqtalardan o'tadi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}, \quad \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a}, \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$

yoki
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (7)$$

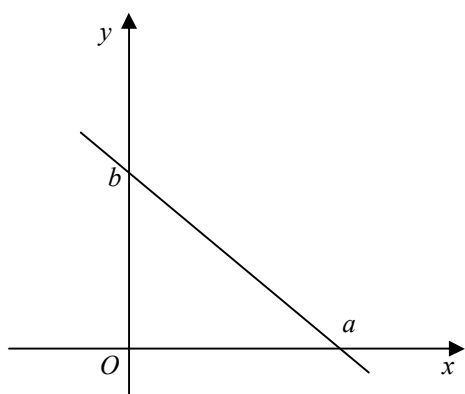
tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaga to'g'ri chiziqning **kesmalarga nisbatan tenglamasi** deyiladi.

4-misol. $3x + 5y - 15 = 0$ to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va uni yasang.

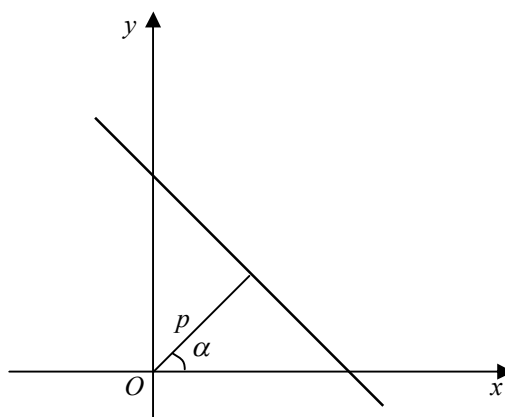
Yechish. $3x + 5y - 15 = 0$ to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini (7) ko'rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

$$3x + 5y = 15, \quad \frac{3x}{15} + \frac{5y}{15} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

bu to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi bo'ladi. Endi koordinat o'qlaridan mos ravishda 5 va 3 kesmalarni ajratib, ajratilgan kesmalar oxiridan yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziqni o'tkazamiz.



7- chizma.



8- chizma.

5). To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. To'g'ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning OX o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to'g'ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo'ladi (8-chizma) va uning tenglamasi

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (8)$$

bo'ladi. (8) tenglamaga to'g'ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi. Ma'lumki, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak. To'g'ri chiziq umumiy tenglamasini normal tenglama keltirish uchun

$$M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

normallovchi ko'paytuvchini hisoblab, uni

$$Ax + By + C = 0$$

tenglamaga ko'paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

normal tenglama hosil bo'ladi. Normallovchi ko'paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

5-misol. Normalning uzunligi $p = 3$ va uning OX o'qi bilan hosil qilgan burchagi 30^0 bo'lsa, to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra normal OX o'qi bilan 30^0 li burchak tashkil etadi. Bu burchakni yasaymiz va uning qo'zg'aluvchi tomoni normal to'g'ri chiziq bo'ladi. Shu to'g'ri chiziqda $p = 3$ kesma ajratib uning oxiridan unga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi. Endi to'g'ri chiziqning tenglamasini yozamiz. Shartga ko'ra normalning uzunligi va uning OX o'qi bilan hosil qilgan burchagi berilgan, bu holda ma'lumki, to'g'ri chiziqning (8) normal tenglamasini yozamiz. $p = 3$, $\alpha = 30^0$ bo'lganligi uchun $x \cos 30^0 + y \sin 30^0 - 3 = 0$ *ëku* $\sqrt{3}/2 \cdot x + 1/2 \cdot y - 3 = 0$

Natijada $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ tenglama hosil bo'ladi.

6-misol.. $4x - 3y - 5 = 0$ to'g'ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring.

Yechish. Normallovchi ko'paytuvchini topamiz: $M = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$ bo'ladi.

Berilgan tenglamani $M = 1/5$ ko'paytirib, $4/5 \cdot x - 3/5 \cdot y - 1 = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to'g'ri chiziqning normal tenglamasi, chunki

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1, \quad (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1) \text{ edi.}$$

Takrorlash uchun savollar

1. Geometriya qachon paydo bo'lgan va qanday tarixga ega?
2. Geometrik bilimlarning kelib chiqishi nima bilan bog'liq?
3. Geometriya tabiatshunoslikning boshqa bo'limlari bilan qanday bog'langan?
4. Geometriyaning rivojida katta hissa qo'shgan Markaziy Osiyolik olimlardan kimlarni bilasiz?
5. Koordinatlar usuli nima?
6. Analitik geometriya nimani o'rganadi?
7. Berilgan ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
8. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish qanday bajariladi?
9. Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?
10. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi qanday yoziladi?
11. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deb nimaga aytiladi?
12. Berilgan bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?
13. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi qanday?
14. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari nimalardan iborat?
15. To'g'ri chiziqning koordinat o'qlaridan ajratgan kesmalariga nisbatan tenglamasi qanday yoziladi?
16. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi qanday?
17. Normalning uzunligi nima?
18. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglamaga qanday qilib keltiriladi?
19. To'g'ri chiziqning tenglamasi normal ko'rinishdaligini qanday tekshiriladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Koordinatlar boshidan $A(-3; 4)$ nuqttagacha bo'lgan masofani toping.

2. Uchlari $A(4; 3)$, $B(0; 0)$ va $C(10, -5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning perimetrini toping.
3. OY o'qida $A(4; 5)$ va $B(3; 2)$ nuqtalardan teng uzoqlikda yotgan $C(x; y)$ nuqtani toping.
4. OX o'qida $A(0; 5)$ va $B(-3; -2)$ nuqtalardan teng uzoqlikda bo'lgan nuqtani toping.
5. $A(5; -4)$ nuqta va AB kesmaning o'rtasi $C(0; -3)$ berilgan. Kesmaning ikkinchi $B(x, y)$ uchini toping.
6. Uchlari $A(3; 4)$, $B(7; 7)$, $C(4; 3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning teng yonli ekanligini ko'rsating.
7. $A(2; 8)$ va $B(6; -4)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesma C, D, E nuqtalar bilan 4 ta teng bo'laklarga bo'lingan. C, D , va E nuqtalarni toping.
8. AB kesma $C(-1; -2)$ va $D(2; 0)$ nuqtalar orqali teng uch bo'laklarga bo'lingan. A va B nuqtalarni toping.
9. OY o'qidan $b = 4$ kesma ajratib OX o'qi bilan 135° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.
10. OY o'qidan $b = -2$ kesma ajratib OX o'qi bilan 60° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.
11. Koordinatlar boshidan o'tib, OX o'qi bilan:
 - 1). 45° , 2). 120° , 3). 60° , 4). 90° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqlarni yasang va ularning tenglamalarini yozing.
12. 1) $3x + 5y + 15 = 0$; 2) $3x + 2y = 0$; 3) $y = -2$; 4) $x/4 + y/4 = 1$ to'g'ri chiziqlar uchun k va b parametrlarni aniqlang.
13. 1) $4x + 3y - 12 = 0$; 2) $4x + 3y = 0$; 3) $2x - 7 = 0$; 4) $2y + 7 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesmalarga nisbatan tenglamalarini yozing va ularni yasang.
14. $A(2; 3)$ nuqtadan o'tib, OX o'qi bilan 60° burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

15. 1) $2x - 3y - 6 = 0$; 2) $3x - 2y + 4 = 0$ to'g'ri chiziq tenglamalarini, kesmalar bo'yicha tenglamasiga keltiring.

16. $Ax + 5y - 40 = 0$ to'g'ri chiziq A ning qanday qiymatlarida koordinat o'qlaridan bir xil kesmalar ajratadi.

17. Uchlari $A(3; 4)$, $B(6; 2)$ va $C(-1; 5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozing.

18. To'g'ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o'qi bilan $\alpha = 45^\circ$ burchak hosil qilsa, to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

19. $x - y + 3 = 0$ to'g'ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o'qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

20. Ushbu 1) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y - 6 = 0$, 2) $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 7 = 0$
3) $\frac{3}{5}x + \frac{3}{4}y - 2 = 0$, 4) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 4 = 0$

to'g'ri chiziq tenglamalaridan qaysilari normal ko'rinishda?

21. Ushbu 1) $5x + 12y - 26 = 0$, 2) $3x - 4y + 10 = 0$,
3) $y = 3x + 5$, 4) $2x + 2y + 7 = 0$

to'g'ri chiziq tenglamalarini normal ko'rinishga keltiring.

9-ma'ruza. To'g'ri chiziqlarga doir asosiy masalalar

Reja

- 1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.**
- 2. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.**
- 3. Ikki to'g'ri chiziqning kesishuvi.**
- 4. Nuqtadan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa.**

Tayanch ibora va tushunchalar

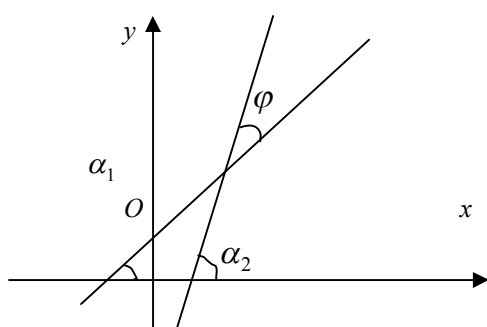
To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligi va parallelligi, ikkita to'g'ri chiziqlarning kesishuvi, berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa, ikkita parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa.

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita

$$y = k_1x + b_1,$$

$$y = k_2x + b_2$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bunda $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$ bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmasin va ular orasidagi burchakni topish talab etilsin. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.



1-chizma.

Ya'ni, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (1-chizma). Ma'lumki,

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

yoki

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (1)$$

bo'ladi. (1) ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning tangensini topish for- mulasi deb ataladi.

1-misol. $y = 3x + 1, y = 2x + 5$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. (1) formulaga asosan,

$$\varphi = \frac{3-2}{1+2 \cdot 3} = \frac{1}{7} \text{ bo'lib, } \varphi = \arctg \frac{1}{7} \approx \arctg 0.14 \approx 8^0, \varphi \approx 8^0$$

bo'ladi.

2. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, ular orasidagi burchak

$$\varphi = 90^0 \text{ bo'lib, } \tg 90^0 = \infty \text{ yoki } \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty, \quad 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$$

kelib chiqadi, bundan

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

bo'ladi, bunga ikki to'g'ri chiziqning **perpendikulyarlik sharti** deyiladi.

To'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, $\varphi = 0$ bo'lib, $\tg 0^0 = 0$, yoki

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0, \quad k_2 - k_1 = 0, \quad k_1 = k_2$$

kelib chiqadi.

$$k_1 = k_2$$

tenglikka **ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti** deyiladi.

3. Ikki to'g'ri chiziqning kesishuvi. Ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechib, kesishish nuqtasining koordinatlari topiladi.

$$\text{2-misol.} \quad \begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. Ikkinchi tenglamani (-1) ga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamalarni hadma-had qo'shib $x - 1 = 0$, $x = 1$ ni hosil qilamiz. $x = 1$ ni birinchi tenglamaga qo'ysak, $2 \cdot 1 + y - 3 = 0$ yoki $y = 1$ bo'ladi. Shunday qilib, bu to'g'ri chiziqlar $A(1;1)$ nuqtada kesishadi.

4. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. $M(x_0; y_0)$ nuqta va $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Berilgan nuqtadan, berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p| \quad (2)$$

formula yordamida topiladi. To'g'ri chiziq tenglamasi umumiy

$$Ax + By + C = 0$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3)$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $A(3; \sqrt{5})$ nuqtadan $2x + \sqrt{5}y - 2 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. To'g'ri chiziq tenglamasi umumiy holda berilgan. Shuning uchun (3) formulaga asosan,

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 2|}{\pm \sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2}} = \frac{|6 + 5 - 2|}{3} = \frac{9}{3}, \quad d = 3$$

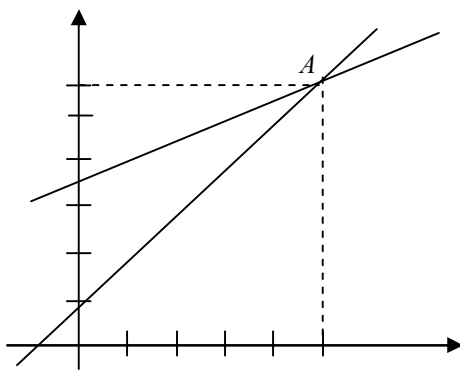
bo'ladi.

4-misol. Ikki xil transport vositasida yuk tashish xarajatlari funksiyasi

$$y = 100 + 50x \quad \text{va} \quad y = 200 + 30x$$

bilan ifodalansin. Bunda, y transport xarajati, x har yuz kilometr ga yuk tashish masofasi. Qanday masofadan boshlab 2-xil transport vositasi bilan yuk tashish tejamliroq bo'ladi.

Yechish. Masala shartida berilgan $y = 100 + 50x$ va $y = 200 + 30x$ to'g'ri chiziqlar kesishadigan nuqtani topamiz: tengliklarning chap tomonlari teng bo'lganligi uchun $100 + 50x = 200 + 30x$ tenglamani hosil qilamiz, bundan $x = 5$, $y = 350$ bo'ladi. Demak, to'g'ri chiziqlar $A(5, 350)$ nuqtada kesishadi. Endi to'g'ri chiziqlarni yasaymiz: (2-chizma).



2- chizma

10-chizmadan ko'rinadiki, yuk tashish masofasi 500 km dan ortiq bo'lganda 2-xil transport vositasi bilan yuk tashilsa, xarajat kamroq bo'ladi.

5. Ikkita parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani topish

$$5x - 2y + 10 = 0 \quad \text{va} \quad 5x - 2y + 36 = 0$$

parallel to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani topish uchun, bu to'g'ri chiziqlarning bittasida ixtiyoriy bir nuqtani tanlaymiz va tanlangan nuqtadan ikkinchi to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topamiz: birinchi to'g'ri chiziqda $x = 4$ desak, $y = 15$ bo'lib, $A(4,15)$ 1-to'g'ri chiziqdagi nuqta bo'ladi. $A(4,15)$ nuqtadan ikkinchi $5x - 2y + 36 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani (3) formulaga asosan, hisoblasak,

$$d = \left| \frac{5 \cdot 4 - 2 \cdot 15 + 36}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{26}{\sqrt{29}}, \quad d = \frac{26}{\sqrt{29}}$$

bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
2. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti nima?
3. Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti qanday bo'ladi?
4. Ikkita to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
5. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa qanday formuladan foydalanib topiladi?
6. Ikkita parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani topish qanday bajariladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $y = 1/2 \cdot x + 4$ to'g'ri chiziq berilgan. Uning koordinat o'qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.
2. Boshlang'ich ordinatasi $b = -3$ bo'lgan va $y = 2x + 3$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqni yasang va tenglamasini yozing.
3. $y = \sqrt{3}x - 2$ va $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$ to'g'ri chiziqlar berilgan. Ularning absissa o'qi bilan tashkil qiladigan burchaklarini toping.
4. $y = -2/5 \cdot x + 3$; $y = 3/7 \cdot x + 2/7$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.
5. $6x + 8y + 5 = 0$; $2x - 4y - 3 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.
6. 1) $3x - 15y + 16 = 0$, 2) $3x + 15y - 8 = 0$, 3) $6x - 30y + 13 = 0$,
4) $30x + 6y + 7 = 0$ to'g'ri chiziqlardan qaysilari perpendikulyar va qaysilari parallel.
7. Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklarni toping:
 - 1) $y = 2/3 \cdot x - 7$;
 $y = 5x + 9$
 - 2) $2x - 4y + 9 = 0$
 $6x - 2y - 3 = 0$
 - 3) $y = 3/7 \cdot x - 2$
 $7x + 3y + 5 = 0$
 - 4) $x/4 - y/5 = 1$
 $x/2 + y/18 = 1$

8. Tomonlari $4x - 3y + 5 = 0$, $3x + 4y + 4 = 0$, $x - 7y + 18 = 0$ to'g'ri chiziqlarda yotgan uchburchakning ichki burchaklarini toping.

9. $A(4; 5)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglama-sini yozing va ulardan $2x - 3y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar va parallel bo'lganlarini ajrating.

10. Uchburchak tomonlari

$$7x - 6y + 9 = 0; \quad 5x + 2y - 25 = 0; \quad 3x + 10y + 29 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uning uchlarini va balandliklarining tenglamalarini toping.

11. Uchlari $P(-4; 0)$, $Q(0; 4)$ va $R(2; 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak medianalarining tenglamalarini toping.

12. To'g'ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o'qi bilan $\alpha = 45^\circ$ burchak hosil qilsa, to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

13. $x - y + 3 = 0$ to'g'ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o'qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

14. Uchlari $P(0; 5)$, $Q(-3; 1)$ va $R(-1; -2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning R nuqtasidan o'tkazilgan balandligining uzunligini toping.

15. $5x - 12y - 26 = 0$, $5x - 12y - 65 = 0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

16. Trapesiya asoslarining tenglamalari $3x - 4y - 15 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$ berilgan. Trapesiyaning balandligini toping.

17. Uchlari $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ va $C(4; 0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlarining, AE medianasining, AD balandligining tenglamalarini hamda AE mediananing uzunligini toping.

10-ma'ruza Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Reja

1. Ikkinchi tartibli chiziq va uning tenglamasi.

2. Aylana va uning tenglamasi.
3. Ellips hamda uning tenglamasi.
4. Giperbola va uning tenglamasi.
5. Parabola va uning tenglamasi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikkinchi tartibli chiziq, aylana, ellips, giperbola, parabola, ellips va giperbola yarim o'qlari, asimptota, qo'shma giperbola, kanonik tenglama, simmetriya markazi, simmetriya o'qi, eksentrisitet, fokus, direktrisa, parabola fokusi.

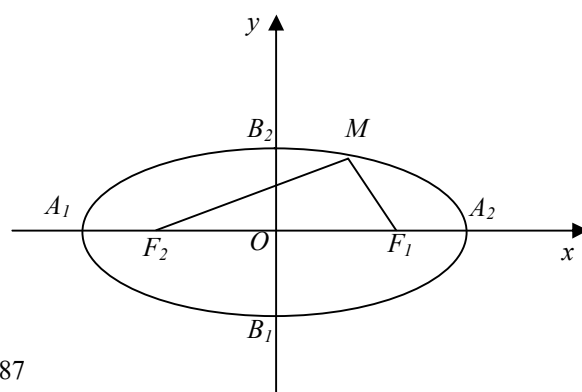
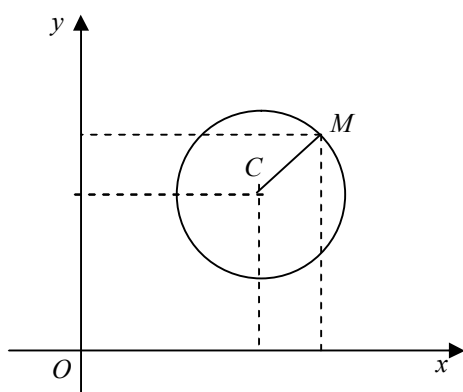
1. Ikkinchi tartibli chiziq va uning tenglamasi. Ma'lumki, tekislikda to'g'ri chiziq x va y o'zgaruvchi kordinatlarga nisbatan birinchi darajali edi. Endi tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni o'rganamiz. Ikkinchi tartibli chiziqlar x va y o'zgaruvchi koordinatlarga nisbatan ikkinchi darajali tenglama bilan ifodalanadi. **Tenglamasi Ikkinchi darajali yani umuman**

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lgan chiziqqa ikkinchi tartibli egri chiziq deyiladi. Quyida muayyan hollarda, ikkinchi tartibli chiziqlarning analitik ifodalarini topib, ularning xususiyatlarini o'rganamiz.

2. Aylana va uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda biror $C(a, b)$ nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o'rniga aylana deyiladi.

$M(x, y)$ aylanaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin (1-chizma). Aylana ta'rifiga ko'ra CM masofa o'zgarmas, bu masofani R bilan belgilaylik.



1-chizma

2-chizma

ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan,

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \text{ëku} \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikning ikkala tarafini kvadratga ko'tarib,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (2)$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaga markazi $C(a, b)$ nuqtada, radiusi R ga teng aylananing kanonik(qonuniy) tenglamasi deb ataladi.

(2) dan

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$$

yoki

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

bo'ladi. Bu tenglama (1) tenglamaning $A = C$, $B = 0$ bo'lgan xususiy holidir.

Demak, aylana ikkinchi tartibli chiziqdır.

1-misol. Ikkinchi tartibli chiziq $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Uning aylana ekanligini ko'rsating hamda markazini va radiusini toping.

Yechish. x va y li hadlar bo'yicha to'la kvadratlar ajratamiz:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 23 = 0,$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 23 = 0 \quad \text{yoki} \quad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$$

bo'ladi. Bu aylananing kanonik tenglamasidir. Uning markazi $C(3; -2)$, nuqtada, radiusi $R = 6$ bo'ladi.

3. Ellips hamda uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas miqdordan iborat bo'lgan nuqtalar geometrik o'rniga *ellips* deyiladi.

Berilgan nuqtalar F_1 va F_2 bo'lsin. Bu nuqtalarga ellipsning fokuslari deyiladi. O'zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilab, koordinatlar sistemasini shunday olamizki, OX o'qi fokuslardan o'tsin va koordinatlar boshi F_1F_2 masofaning o'rtasida bo'lsin (2-chizma). $M(x, y)$ ellipsga tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsa, ta'rifga ko'ra

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (3)$$

bo'ladi. Ma'lumki, $F_1(+c; 0)$ va $F_2(-c; 0)$ bo'lib, ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamadan irrasyonallikni yo'qotib,

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

ko'rinishga keltiramiz. $a^2 - c^2 = b^2$ bilan belgilaymiz (chunki, $a > c$). Bu holda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz. (4) tenglamaga **ellipsning kanonik** tenglamasi deyiladi.

Koordinatlar boshi, ellipsning **simmetriya markazi**, koordinatlar o'qi **simmetriya o'qlari** bo'ladi.

$$A_1(-a, 0), \quad A_2(a, 0), \quad B_1(0, -b), \quad B_2(0, +b)$$

nuqtalar ellipsning uchlari,

$a = OA_2$ va $b = OB_2$ masofalar mos ravishda **ellipsning katta va kichik yarim o'qlari** deyiladi. $2c$ fokuslar orasidagi masofa bo'lib, ma'lumki bu 3ta parametr orasida $a^2 - c^2 = b^2$ bog'lanish bor.

Shunday qilib, ellips ikkita simmetriya o'qiga, simmetriya markaziga ega bo'lgan yopiq egri chiziqdir.

$\varepsilon = c/a < 1$ kattalik **ellipsning eksentrisiteti** deyiladi. Aylanani ellipsning $a = b$, $\varepsilon = 0$ bo'lgan xususiy holi deb qarash mumkin.

$M(x, y)$ nuqtadan fokuslarga bo'lgan masofaga ellipsning **fokal radiuslari** deyiladi, ularni r_1 va r_2 bilan belgilasak, $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ bo'ladi.

2-misol. $16x^2 + 25y^2 = 400$ ellipsning yarim o'qlarini, fokuslarini va ekssentrisitetini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani 400 ga bo'lib,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglamadan $a^2 = 25$, $b^2 = 16$ bo'lib, yarim o'qlari

mos ravishda $a = 5$, $b = 4$ bo'ladi. Ma'lumki, $b^2 = a^2 - c^2$, bo'lib,

$c^2 = 25 - 16 = 9$, $c = \pm 3$ bo'ladi. Demak, fokuslari $F_1(3, 0)$ va $F_2(-3, 0)$

nuqtalarda bo'ladi. Ekssentrisiteti esa, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

4. Giperbola va uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita (fokuslar) nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasi o'zgarmas miqdordan iborat bo'lgan nuqtalar geometrik o'rniga **giperbola** deyiladi (ko'rsatilgan ayirma absolyut qiymati bo'yicha olinib, u fokuslar orasidagi masofadan kichik va 0 dan farqli).

O'zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ va koordinat o'qlarini ellipsdagidek olib, $c^2 - a^2 = b^2$ belgilash kiritib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) tenglamaga **giperbolaning kanonik** tenglamasi deyiladi. Giperbolaning fokuslari $F_1(+c; 0)$ va $F_2(-c; 0)$ bo'ladi (3-chizma).

Koordinatlar o'qi **simmetriya o'qlari** va koordinatlar boshi $O(0; 0)$ **simmetriya markazidir**. Giperbola kordinat o'qlarini $A_1(-a; 0)$ va $A_2(a; 0)$ nuqtalarda kesib o'tib, bu nuqtalarga **haqiqiy uchlari** va $a = 0$ A_2 masofa **haqiqiy yarim o'qi**

deyiladi. $B_1(0, -b)$, ea $B_2(0, b)$ nuqtalar giperbolaning **mavhum uchlari**, $b=0$ B_2 – **mavhum yarim o'qi** deyiladi.

Giperbola ikkita asimptotalarga ega bo'lib, uning tenglamalari

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad (6)$$

bo'ladi.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1 \text{ kattalikka } \textbf{giperbolaning eksentrisiteti} \text{ deb}$$

ataladi.

Giperbola o'qlari $a = b$ bo'lsa, unga **teng tomonli giperbola** deyiladi va uning tenglamasi

$$x^2 - y^2 = a^2$$

bo'ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

giperbolalarga **o'zaro qo'shma giperbolalar** deb ataladi.

3-misol. $9x^2 - 16y^2 = 144$ giperbolaning yarim o'qlarini, fokuslarini, eksentrisitetini hamda aksimptotalarining tenglamalarini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani 144 ga bo'lib tenglamani kanonik

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

ko'rinishga keltiramiz. Bundan $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ bo'lib, haqiqiy yarim o'q

$a = 4$, mavhum yarim o'q $b = 3$ bo'ladi. $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 16 + 9$, $c = \pm 5$

bo'lib, fokuslari $F_1(+5; 0)$, $F_2(-5; 0)$ nuqtalarda bo'ladi. Eksentrisitet

$$\varepsilon = c/a = 5/4.$$

a va b larning qiymatini (6) asimptota tenglamasiga qo'yib,

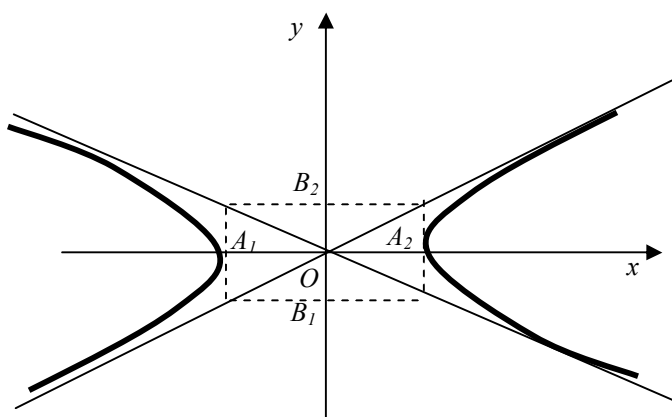
$$y = \pm \frac{3}{4} x$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bu asimptotalar tenglamasidir.

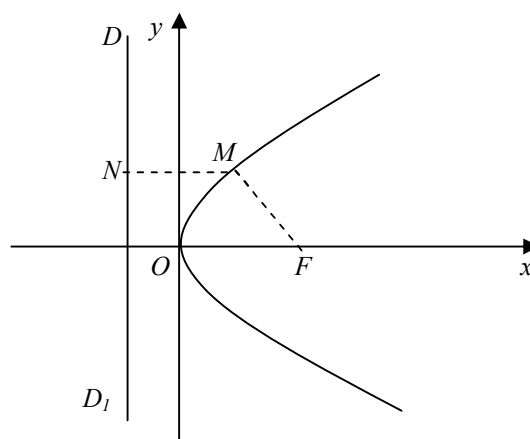
$M(x, y)$ nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofaga giperbolaning fokal radiuslari deyiladi, ularni r_1 va r_2 bilan belgilasak, nuqta o'ng shoxlarida bo'lganda

$r_1 = \varepsilon x - a$, $r_2 = \varepsilon x + a$ nuqta chap shoxlarida bo'lganda

$r_1 = -\varepsilon x + a$, $r_2 = -\varepsilon x - a$ bo'ladi.



3-chizma



4-chizma

5. Parabola va uning tenglamasi. **Ta'rif.** Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan nuqta(fokus)gacha va berilgan to'g'ri chiziq (direktrisa)gacha masofalari o'zaro teng bo'lgan nuqtalar geometrik o'rniga **parabola** deyiladi.

Koordinatlar sistemasini shunday olamizki, OX o'qi F (fokus)dan o'tib, DD_1 direktrisa ga perpendikulyar, OY o'qi esa fokus va direktrisaning o'rtasidan o'tsin(4-chizma). $M(x, y)$ parabolaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin. F nuqtadan DD_1 to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani p ($p > 0$) bilan belgilaymiz. Bunda $F(p/2, 0)$ bo'lib, direktrisaning tenglamasi

$$x = -\frac{p}{2}$$

bo'ladi.

Ta'rifga asosan, $MN = MF$. $N(-\frac{p}{2}, y)$.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan,

$$x + p/2 = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

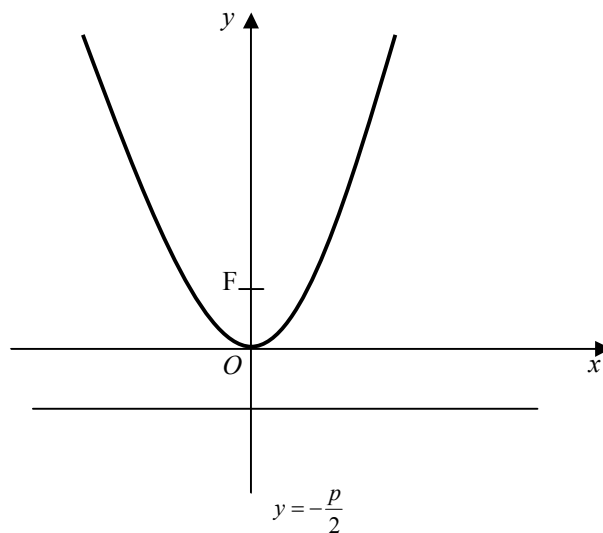
Bu tenglamadan irrasionallikni yo'qotib,

$$y^2 = 2px \quad (7)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu absissalar o'qiga simmetrik *parabolaning kanonik* tenglamasi bo'ladi. Ordinatlari o'qi *simmetriya o'qi* bo'lsa, parabola tenglamasi

$$x^2 = 2py (p > 0)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu holda $y = -p/2$ direktrisa tenglamasi, $F = (0; p/2)$ nuqta fokus bo'ladi(5-chizma).



5-chizma

$M(x, y)$ nuqtadan $F(p/2; 0)$ fokusgacha masofaga fokal radius deyiladi va $r = x + p/2$. $M(x, y)$ nuqtadan $F(0, p/2)$ fokusgacha masofa $r = y + p/2$ bo'ladi.

4-misol.. $y^2 = 12x$ parabolaning fokusini va direktrisasining tenglamasini toping. $M(3; 6)$ nuqtadan fokusgacha bo'lgan masofani aniqlang.

Yechish. Berilgan tenglamani (7) tenglama bilan solishtirib $2p = 12$, bundan $p = 6$, $p/2 = 3$. Shunday qilib, fokus $F(3; 0)$ nuqtada direktrisa tenglamasi $x = -3$ ekanligini topamiz. $M(3; 6)$ nuqta uchun $x = 3$, bo'lib, fakol radius $r = 3 + 3 = 6$, $r = 6$ bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

- 1.. Ikkinchi tartibli chiziqlar deb qanday chiziqlarga aytiladi?
2. Aylana, ellips, giperbola va parabola deb nimalarga aytiladi va ularning kanonik tenglamalari qanday bo'ladi?
3. Ellips va giperbolalarning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi?
4. Ekssentrisitet aylana uchun nimaga teng?
5. Ellips, giperbola va parabolalarning fokal radiuslari nima?
6. Ellips va giperbolalarning simmetriya markazi va simmetriya o'qlari bormi?
7. Ellips va giperbolalarning yarim o'qlari nimalardan iborat?

Mustaqil yechish uchun misollar

1.. $N(7; -2)$ nuqtadan o'tib, markazi $C(3; -5)$ nuqtada bo'lgan aylana tenglamasini yozing.

2. $M(4; 2)$ va $N(12; 8)$ nuqtalar berilgan. Diametri MN kesmadan iborat bo'lgan aylana tenglamasini yozing.

3. Ushbu 1) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$;

2) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y - 29/3 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 7x = 0$;

4) $5x^2 + 5y^2 + 9y = 0$

aylanalarning markazlarini va radiuslarini toping.

$$4. \quad x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0, \quad \text{va} \quad x^2 + y^2 + 8x + 12y - 14 = 0$$

aylanalar markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini yozing.

5. Fokuslari orasidagi masofa 24, katta o'qi 26 ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing va uni yasang.

6. Quyidagilar berilganda ellipsning kanonik tenglamasini toping:

- 1) katta yarim o'q 10, eksentrisitet 0,8;
- 2) kichik yarim o'q 12, eksentrisitet $5/13$;
- 3) eksentrisitet 0,6, fokuslar orasidagi masofa 6.

7. 1) $9x^2 + 25y^2 = 225$, 2) $9x^2 + 12y^2 = 36$ ellipslar uchun o'qlarining uzunliklarini, fokuslarini va eksentrisitetlarini toping va yasang.

8. Koordinat o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgan ellips $M(2; \sqrt{3})$ va $N(0; 2)$ nuqtalardan o'tadi. Ellips tenglamasini yozing. M nuqtadan fokuslarga masofalarni toping.

9. Ellipsning eksentrisiteti ε berilgan. Ellips yarim o'qlarining b/a nisbatini toping.

10. Quyidagilar berilganda giperbolaning kanonik tenglamasini yozing:

- 1) fokuslari orasidagi masofa 10, eksentrisitet $5/3$;
- 2) haqiqiy yarim o'q $\sqrt{20}$ va giperbola $N(-10; 4)$ nuqtadan o'tadi;
- 3) fokuslar orasidagi masofa 10, uchlari orasidagi masofa 4.

11. 1) $144x^2 - 25y^2 = 3600$; 2) $9x^2 - 12y^2 = 144$ giperbolalar uchun o'qlarning uzunliklarini, fokuslarini va eksentrisitetini toping.

$$12. \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{giperbolada abssissasi 3 ga teng nuqta}$$

olingan. Bu nuqtaning fokal radiuslarini toping.

13. $x^2/25 + y^2/9 = 1$ ellips berilgan. Uchlari ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlari bo'lgan giperbola tenglamasini yozing va uni yasang.

14. Giperbola biror uchidan fokuslarigacha bo'lgan masofalar 9 va 1 bo'lsa, uning tenglamasini yozing.

15. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbolani va uning asimptotalarini yasang. Fokuslarini, ekssentrisitetini va asimptotalari orasidagi burchakni toping.
16. Koordinatlar boshidan va $N(-3; 6)$ nuqtadan o'tib, OX o'qiga simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini yozing va uni yasang.
17. Koordinatlar boshidan va $N(6; 3)$ nuqtadan o'tib, OY o'qiga simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini yozing va uni yasang.
18. 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -6x$; 3) $x^2 = -4y$; 4) $x^2 = 4y$ parabolalar uchun fokuslarini va direktrisalarining tenglamalarini toping.
19. $y^2 = 16x$ parabolada fokal radiusi 5 ga teng bo'lgan nuqtani toping.
20. OY o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan parabola, $x + y = 0$ to'g'ri chiziq va $x^2 + y^2 + 4y = 0$ aylana kesishgan nuqtalardan o'tadi. Parabola tenglamasini yozing. Aylanani, to'g'ri chiziqni va parabolani yasang.

Fazoda analitik geometriya

11-ma'ruza. Fazoda tekislik tenglamalari

Reja

1. Fazoda Dekart koordinatlar sistemasi va asosiy masalalar.
2. Fazoda sirt va uning tenglamasi.
3. Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi.
4. Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari.
5. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi.
6. Berilgan uchta nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Fazoda nuqtaning o'рни, aplikata, oktantlar, koordinat tekisliklari, ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish, sirt va uning tenglamasi, sirtning tartibi, sferik sirt, fazoda tekislik, normal vektor, tekislikning umumiy tenglamasi, tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi, berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik, ikki tekislik orasidagi burchak, nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa, ikki tekislikning parallelligi va perpendikulyarligi.

1. Fazoda Dekart koordinatlar sistemasi va asosiy masalalar. Tekislikdagi Dekart koordinatlariga o'xshash fazodagi koordinatlar ham aniqlanadi, o'zaro perpendikulyar OX , OY , OZ son o'qlari, umumiy O nuqtadan o'tsin. Fazoda A nuqtaga uchta haqiqiy son (x, y, z) va aksincha uchta haqiqiy songa bitta nuqta mos keladi. Bu moslik ham bir qiymatlidir. Bu sonlarga nuqtaning fazodagi koordinatlari deyiladi. x absissasi, y ordinatasi, z aplikatasi deb ataladi. Koordinat o'qlaridan o'tuvchi tekisliklarga **koordinat tekisliklari** deyiladi va ular fazoni 8 ta bo'laklarga - **oktantlarga** ajratadi. $A(x, y, z)$ nuqtaning koordinatlari, OA radius vektorning ham koordinatlari bo'ladi.

Fazodagi analitik geometriyada ham quyidagi sodda masalalar qaraladi:

- 1) fazodagi berilgan $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

formula bilan aniqlanadi;

2) AB kesmani $\lambda = AC : CB$ nisbatda bo'luvchi $C(x, y, z)$ nuqtaning koordinatlari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

formulalar yordamida topiladi.

2. Fazoda sirt va uning tenglamasi. Ma'lumki, tekislikda

$$F(x, y) = 0$$

tenglama biror chiziqni ifodalaydi.

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

tenglama $OXYZ$, R^3 fazoda koordinatlari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami, biror **sirt**ni aniqlaydi. Bu tenglamaga **sirt tenglamasi** deyiladi.

(1) tenglama darajasiga **sirtning tartibi** deb ataladi. Masalan, OYZ koordinat tekisligida yotgan istalgan $A(x, y, z)$ nuqtaning absissasi $x=0$ bo'ladi va aksincha $A(0, y, z)$ nuqta OYZ koordinat tekisligida yotadi. Demak, OYZ koordinat tekisligining tenglamasi $x=0$ bo'lib, u birinchi tartibli bo'ladi. Xuddi, yuqoridagidek $y=0, z=0$ mos ravishda OXZ va OXY koordinat tekisliklari tenglamalarini ifodalaydi.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

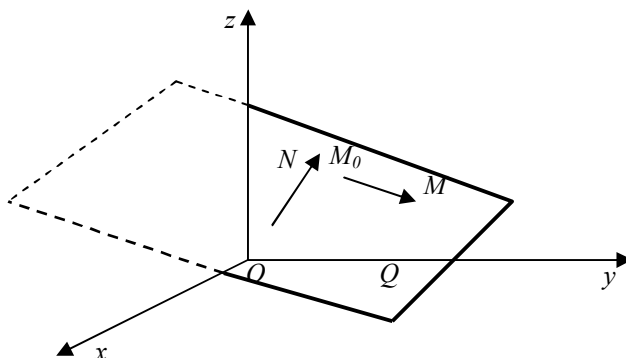
tenglama markazi $C(a, b, c)$ nuqtada radiusi R bo'lgan sferik sirt tenglamasi, ikkinchi tartibli.

3. Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi. $OXYZ$ to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektor berilgan bo'lsin. M_0

nuqtadan o'tuvchi, $\vec{N}$ vektorga perpendikulyar Q tekislikning fazodagi vaziyati

aniq bo'ladi. Uning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Q tekislikda ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqta olamiz(1-chizma).



1-chizma.

$\vec{M_0M}$ va $\vec{N}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lganda va faqat shundagina M nuqta Q tekislikda yotadi. Ma'lumki $\vec{M_0M}$ vektorning koordinatlari $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$ bo'ladi. Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

bo'ladi. Bu Q **tekislik tenglamasi** bo'ladi.

Ta'rif. Q tekislikka perpendikulyar $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektorga bu tekislikning **normal** vektori deyiladi.

1-misol. $M_0(4, -3, 5)$ nuqtadan o'tib, $\vec{N} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. (2) formulaga asosan,

$$2(x - 4) + (-3)(y + 3) + 4(z - 5) = 0, \quad 2x - 8 - 3y - 9 + 4z - 20 = 0$$

yoki

$$2x - 3y + 4z - 37 = 0$$

bo'lib, bu izlanayotgan tekislik tenglamasidir.

4. Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari.

(2) tenglamadan

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0 \text{ yoki } -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$$

bilan belgilashdan keyin

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. (3) tenglamaga fazoda tekislikning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

Umumiy tenglamaning xususiy hollarini qaraymiz:

- 1) $D = 0$ bo'lsa, $Ax + By + Cz = 0$ bo'lib, tekislik koordinatlar boshidan o'tadi;
- 2) $C = 0$ bo'lsa, $Ax + By + D = 0$ bo'lib, tekislik OZ o'qiga parallel; xuddi shunday $Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$ tekisliklar mos ravishda OY va OX o'qlariga paralleldir;
- 3) 2-holda $D = 0$ bo'lsa, tekislik tenglamalari $Ax + By = 0$, $Ax + Cz = 0$, $By + Cz = 0$ bo'lib, ular mos ravishda OZ , OY , OX koordinat o'qlaridan o'tadi;
- 4) $B = C = 0$, bo'lsa, $Ax + D = 0$ tekislik YOZ koordinat tekisligiga parallel, xuddi shunday $By + D = 0$, $Cz + D = 0$ tekisliklar mos ravishda XOZ , XOY koordinat tekisliklariga parallel bo'ladi;
- 5) $B = C = D = 0$ bo'lsa, $Ax = 0$ bo'lib, YOZ koordinat tekisligi bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $x = 0$, YOZ koordinat tekisligining tenglamasi bo'ladi. Xuddi shunday $y = 0$ va $z = 0$, mos ravishda XOZ va XOY koordinat tekisliklarining tenglamasini ifodalaydi.

5. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi. (3) tenglamada A, B, C, D koeffitsiyentlar hammasi 0 dan farqli bo'lsa, tekislik koordinat o'qlaridan OL , ON va OP kesmalar ajratadi(2-chizma). (3) tenglamani quyidagicha o'zgartiramiz:

$$Ax + By + Cz = -D, \quad \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Oxirgi tenglamada

$$-D/A = a, \quad -D/B = b, \quad -D/C = c$$

belgilash kiritsak,

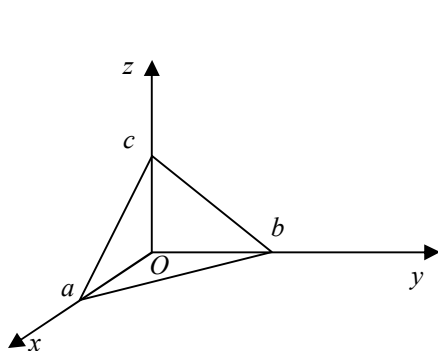
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglamaga fazoda **tekislikning kesmalarga nisbatan** tenglamasi deyiladi.

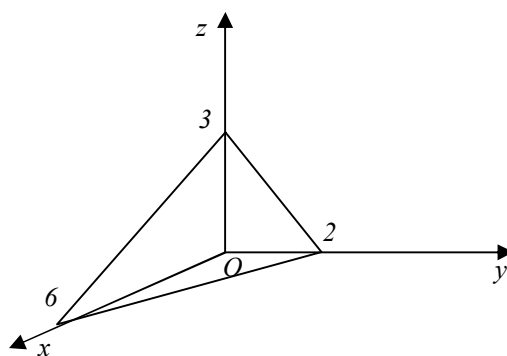
2-misol. Tekislikning $x + 3y + 2z - 6 = 0$ umumiy tenglamasi berilgan, bu tekislikni yasang.

Yechish. Tenglamani tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasiga keltiramiz:

$$x + 3y + 2z = 6, \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$



2-chizma



3-chizma

Oxirgi tenglamadan ma'lumki, tekislik koordinat o'qlaridan mos ravishda 6, 2, 3 kesmalar ajratadi. Bu kesmalarining oxiridan tekislikni o'tkazamiz (3-chizma).

6. Berilgan uchta $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ va $C(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

ko'rinishda bo'lib, uchta vektorning komplanarligidan kelib chiqadi. $M(x, y, z)$

tekislikdagi ixtiyoriy nuqta. $\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}$ vektorlar komplanardir.

7. Ikki tekislik orasidagi burchak. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 ,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

tekisliklar orasidagi burchak, ularning normal $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlari orasidagi burchakka teng bo'lib,

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (5)$$

formula o'rinli bo'ladi. (5) ga ikkita tekislik orasidagi burchak kosinusini topish formulasi deyiladi.

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normal vektorlar kollinear bo'lsa,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

bo'lib, **bu ikki tekislikning parallellik sharti deyiladi.**

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normal vektorlar perpendikulyar bo'lsa,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

bo'lib, **bu ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti** bo'ladi. $M_0(x_0, y_0, z_0)$

nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (6)$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $x + 2y - 3z + 4 = 0$ va $2x + 3y + z + 8 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. $n_1 (1, 2, -3)$ va $n_2 (2, 3, 1)$ mos ravishda berilgan tekisliklarning normal vektorlari bo'lganligi uchun (5) formulaga asosan,

$$\cos \varphi \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}, \quad \varphi \approx 69^{\circ}05'$$

bo'ladi.

4-misol. $2x - y - 2z + 4 = 0$ va $2x - y - 2z - 8 = 0$ tekisliklarning parallelligini ko'rsating va ular orasidagi masofani toping.

Yechish. Berilgan tekisliklarning normal vektorlari $n_1 (2, -1, -2)$ va $n_2 (2, -1, -2)$ parallellik shartini qanoatlantiradi, demak berilgan tekisliklar ham paralleldir. Endi birinchi tekislikda biror nuqtani aniqlab undan ikkinchi tekislikkacha bo'lgan masofani topamiz. $x = z = 0$ bo'lsa, birinchi tekislik tenglamasidan $y = 4$ bo'lib, $M_0 (0; 4; 0)$ nuqta birinchi tekislikdagi nuqta bo'ladi. (6) formulaga asosan,

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 8|}{\pm \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-12|}{3} = 4.$$

Demak, parallel tekisliklar orasidagi masofa $d = 4$ bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. R^3 fazoda nuqtaning o'rni qanday aniqlanadi?
2. Qanday moslikka bir qiymatli moslik deyiladi?
3. R^3 fazodagi koordinatlar qanday aniqlanadi?
4. Koordinat tekisliklari nima?
5. Koordinat tekisliklari R^3 fazoni nechta bo'lakka ajratadi?
6. R^3 fazoda ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
7. R^3 fazoda sirt va uning tenglamasi qanday aniqlanadi?
8. Sirtning tartibi deb nimaga aytiladi?
9. Sferik sirt nechanchi tartibli?
10. Berilgan nuqtadan o'tib va berilgan vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi qanday bo'ladi?
11. Qanday vektorga tekislikning normal vektori deyiladi?

12. Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari qanday bo'ladi?
13. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi qanday yoziladi?
14. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi determinant orqali qanday bo'ladi?
15. Ikkita tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
16. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa nima va u qanday topiladi?
17. Ikki tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlari nima?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $A(2, 5, 0)$ va $B(5, 1, 12)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.
2. Uchlari $A(5, 2, 6)$, $B(6, 4, 4)$, $C(4, 3, 2)$ va $D(3, 1, 4)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning kvadrat ekanligini ko'rsating.
3. $A(3, 7, 4)$ va $B(8, 2, 3)$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesmani $\lambda = 2:3$ nisbatda bo'luvchi $C(x, y, z)$ nuqtani toping.
4. AB kesmaning boshlang'ich nuqtasi $A(-1, 2, 4)$ va uni $\lambda = 1:2$ nisbatda bo'luvchi $C(2, 0, 2)$ nuqta berilgan. $B(x, y, z)$ nuqtani toping.
5. Uchlari $A(5, 3, -10)$, $B(0, 1, 4)$ va $C(-1, 3, 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning AE medianasining uzunligini toping.
6. $A(3, 6, -5)$ va $B(1, -1, 2)$ nuqtalarga parallel qo'nalgan F_1 va F_2 kuchlar qo'yilgan. Ularning teng ta'sir etuvchisi F qo'yilgan $N(x, y, z)$ nuqtani toping. $|F_1| = 5H$ va $|F_2| = 2H$. Ko'rsatma: Fizikadan ma'lumki parallel kuchlarni qo'shganda AN va NB yelkalar unga qo'yilgan kuchlarga teskari proporsionaldir, ya'ni $AN : NB = |F_2| : |F_1| = 2 : 5 = \lambda$ bo'ladi.
7. $M_1(4, 2, -6)$ va $M_2(2, -2, 4)$ nuqtalarga P_1 va P_2 parallel kuchlar qo'yilgan. $|P_1| = 2$, $|P_2| = 6$ bo'lsa teng ta'sir etuvchi P kuchning qo'yilgan nuqtasini toping.
8. $M(2; -3; 2)$ nuqtadan o'tib, $N(5, 4, 3)$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini yozing.

9. $M_0(2; 5; 4)$ nuqtadan o'tib, ordinat o'qidan $b = -6$, aplikata o'qidan $c = 3$ kesma ajratib o'tgan tekislik tenglamasini yozing.

10. OX o'qiga parallel va $P(4; 0; -2)$, $Q(5, 1, 7)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

11. Quyidagi tekisliklarni yasang:

1) $2x - 3y + z - 6 = 0$; 2) $x + 2y - 4 = 0$; 3) $y - 3 = 0$;

4) $2x + 3y = 0$; 5) $x - 2y - z = 0$; 6) $3z - 7 = 0$.

12. YOZ koordinat tekisligiga parallel va $M(2; -5; 4)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

13. $A(3, 5, 6)$ va $B(5, -7, 4)$ nuqtalar berilgan. A nuqtadan o'tib, $\overrightarrow{AB}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.

14. OY o'qiga parallel va $M_1(3, 2, 1)$, $M_2(4, -3, 5)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

15. $M(2, -6, 5)$ nuqtadan o'tib, absissalar o'qidan $a = 4$, ordinata-lar o'qidan $b = 3$ kesmalar ajratib o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

16. OY o'qidan va $M(2, 4, 1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglama-sini yozing.

17. OZ o'qdan va $M(2,3,4)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglama-sini yozing.

18. $M_1(1, 3, -2)$, $M_2(4, -5, 6)$ va $M_3(-3, 1, 2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

19. 1) $2x - 3y + 4z - 24 = 0$; 2) $4x + y - 6z - 2 = 0$ tekisliklarning koordinat o'qlaridan ajratgan kesmalarining kattaliklarini toping.

20. $2x - y - 2z + 3 = 0$ va $x + y - 5 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

21. $M_0(2, 4, -3)$ nuqtadan o'tib, $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini yozing.

22. $M(1, -4, -5)$ nuqtadan $6x - 3y - 6z + 7 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

23. $2x - 11y + 10z - 15 = 0$ va $2x - 11y + 10z + 45 = 0$ tekisliklar orasidagi masofani toping.

12-ma'ruza. Fazoda to'g'ri chiziq va uning tenglamalari

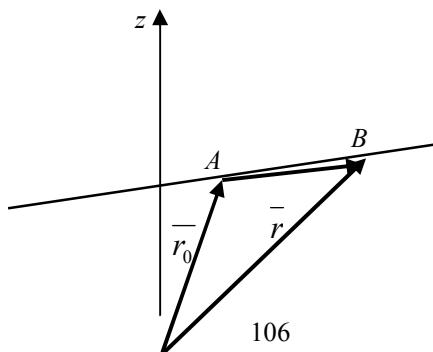
Reja

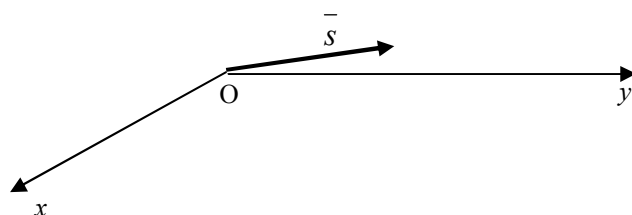
1. Fazoda berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lgan to'g'ri chiziq vektorli tenglamasi.
2. Fazoda to'g'ri chiziq (FTCh) ning parametrik va kanonik tenglamalari.
3. Fazoda umumiy va proyeksiyalarga nisbatan hamda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari.
4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
5. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.

Tayanch ibora va tushunchalar

Yo'naltiruvchi vektor, vektorli, parametrik, kanonik, umumiy, proyeksiyalarga nisbatan tenglamalar, ikki tekislikning kesimi, fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak hamda ularning parallelligi va perpendikulyarligi, fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak hamda ularning parallelligi, perpendikulyarligi, fazoda to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari.

1. Fazoda berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lgan to'g'ri chiziq vektorli tenglamasi. Fazoda to'g'ri chiziqning holati u o'tadigan biror $A(x_1, y_1, z_1)$ nuqta va to'g'ri chiziq parallel bo'lgan $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ yo'naltiruvchi vektorning berilishi bilan to'la aniqlanadi. Uning tenglamasini yozish uchun unda ixtiyoriy $B(x, y, z)$ nuqta olamiz (1-chizma).





1-chizma

Ma'lumki, $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ bo'lib, $\vec{AB}$ vektor $\vec{s}$ vektorga kollinear, ya'ni $\vec{AB} = t \vec{s}$, t – skalyar parametr. $\vec{OA} = \vec{r}_0$, $\vec{OB} = \vec{r}$ desak,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{s} \quad (1)$$

bo'ladi. (1) tenglikka **fazoda to'g'ri chiziqlarning vektorli tenglamasi** deyiladi.

2. Fazoda to'g'ri chiziq(FTCh)ning parametrik va kanonik tenglamalari.

$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, $\vec{r}_0 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, $\vec{s} = m \vec{i} + n \vec{j} + p \vec{k}$ bo'lganligi uchun (1) tenglamadan vektorlarning tengligiga asosan,

$$\begin{cases} x = x_1 + tm, \\ y = y_1 + tn, \\ z = z_1 + tp \end{cases} \quad (2)$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bunga **to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamasi** deyiladi, bunda t – parametr.

(2)tenglamadan t parametrni yo'qotsak, ya'ni

$$x - x_1 = tm, \quad \frac{x - x_1}{m} = t, \quad \frac{y - y_1}{n} = t, \quad \frac{z - z_1}{p} = t \quad \text{bo'lib}$$

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \quad (3)$$

tenglama kelib chiqadi. (3) tenglamaga to'g'ri chiziqlarning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

1-misol. $M_0 (2; -3; 5)$ nuqtadan o'tib koordinat o'qlari bilan $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/3$ burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqlarning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

Yechish. To'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektori sifatida

$$s = \cos \alpha \cdot i + \cos \beta \cdot j + \cos \gamma \cdot k = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k \quad \text{vektorni}$$

olamiz.

(3) tenglamaga asosan,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2} = \frac{y+3}{1/2} = \frac{z-5}{1/2}$$

to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamasini hosil qilamiz.

Oxirgi tengliklarning har birini t bilan belgilab,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2} = t \quad \frac{y+3}{1/2} = t \quad \frac{z-5}{1/2} = t \quad \text{yoki}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2;$$

$$y = \frac{1}{2}t - 3;$$

$$z = \frac{1}{2}t + 5$$

to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamasini hosil qilamiz.

3. Fazoda umumiy va proyeksiyalarga nisbatan hamda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari. Fazoda to'g'ri chiziqni **ikki tekislikning kesimidan** iborat deb ham qarash mumkin. Shuning uchun to'g'ri chiziqni analitik holda quyidagi sistema

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

orqali ham ifodalash mumkin. (4) tenglamada A_1, B_1, C_1 koeffitsiyentlar mos ravishda A_2, B_2, C_2 koeffitsiyentlarga proporsional bo'lmasa u to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Bunga to'g'ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

(4) sistemadan birinchi y noma'lumni, keyin x noma'lumni yo'qotsak,

$$\begin{cases} x = x_1 + mz, \\ y = y_1 + nz \end{cases} \quad (5)$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bunday birinchi tenglama OY o'qqa parallel bo'lgan tekislik, ikkinchisi OX o'qqa parallel bo'lgan tekislik bo'lib, berilgan to'g'ri chiziqni XOZ va YOZ koordinat tekisliklariga proyeksiyalaydi. (5) sistemaga to'g'ri chiziqning **proyeksiyalarga** nisbatan tenglamasi deyiladi.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tekislikda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidagidek ushbu ko'rinishda

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (6)$$

bo'ladi.

2-misol.
$$\begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqning proyeksiyalarga nisbatan va kanonik tenglamalarini yozing.

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasidan oldin y ni yo'qotamiz, buning uchun birinchi tenglamani (-2) ko'paytirib tenglamalarni hadma-had qo'shib $-x + 0 + 6z - 4 = 0$, yoki $x = 6z - 4$ tenglamani hosil qilamiz. Endi x noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun birinchi tenglamani (3) ga ikkinchi tenglamani (-2) ga ko'paytirib hadma - had qo'shib $-y - 7z + 5 = 0$ yoki $y = -7z + 5$ tenglamani keltirib chiqaramiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} x = 6z - 4, \\ y = -7z + 5 \end{cases}$$

sistema to'g'ri chiziqning proyeksiyalarga nisbatan tenglamasi bo'ladi.

Oxirgi tenglamalar sistemasini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\begin{aligned} x + 4 = 6z & \quad \text{yoki} \quad \frac{x + 4}{6} = z, & \frac{y - 5}{-7} = z. \\ y - 5 = -7z & \end{aligned}$$

$$\text{Demak,} \quad \frac{x + 4}{6} = \frac{y - 5}{-7} = \frac{z - 0}{1}.$$

Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasidir.

3-misol. Uchburchakning uchlari $A(3, -2, 1)$, $B(6, 5, -7)$ va $C(5, -4, 3)$ berilgan. BD mediananing kanonik tenglamasini yozing.

Yechish. D nuqta AC tomonni teng ikkiga bo'ladi. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulasiga asosan:

$$x_D = \frac{3+5}{2} = 4, \quad y_D = \frac{-2-4}{2} = -3, \quad z_D = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Demak, $D(4, -3, 2)$ bo'ladi. Mediana B va D nuqtalardan o'tadi. (6) formulaga asosan:

$$\frac{x-6}{4-6} = \frac{y-5}{-3-5} = \frac{z+7}{2+7} \quad \text{yoki} \quad \frac{x-6}{-2} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z+7}{9}.$$

Bu BD mediananing kanonik tenglamasidir.

4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Fazoda ikkita to'g'ri chiziq kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Bu **to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak**, ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng bo'lib,

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (7)$$

formula yordamida topiladi.

Berilgan to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (8)$$

bo'lib, bu fazoda **ikkita to'g'ri chiziqning parallellik sharti** deyiladi.

To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, yo'naltiruvchi vektorlar ham perpendikulyar bo'lib,

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0 \quad (9)$$

bo'ladi, bu **ikki to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartidir**.

$$1\text{-misol. } \frac{x-5}{7} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{1} \quad \text{va} \quad \frac{x-8}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-4}{-1}$$

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Oldin to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlarini topamiz:

$$\vec{s}_1 = 7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{s}_2 = 7\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}.$$

To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng. (7) formulaga asosan:

$$\cos \varphi = \frac{7 \cdot 7 + 5 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{7^2 + 5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = \frac{28}{15\sqrt{22}} \approx 0.3127,$$

$$\cos \alpha \approx 0.3127.$$

Jadvaldan $\varphi \approx 71^{\circ}48'$ ekanligini topamiz.

2-misol. $M_0 (2, -1, 3)$ nuqtadan o'tib,

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{4}$$

to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamasini yozing.

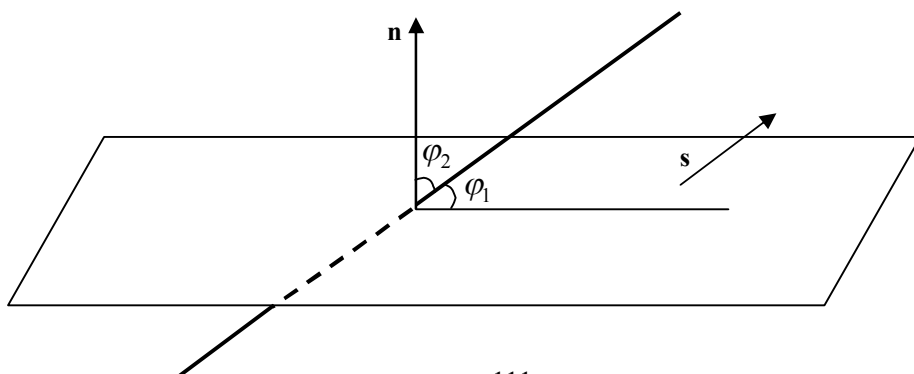
Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektori uchun berilgan to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektorini olish mumkin, chunki ular shartga ko'ra parallel,

ya'ni $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Berilgan nuqtadan o'tib, $\vec{s}$ yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lgan, izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi (3) ga asosan,

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

bo'ladi.

5.Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deb, to'g'ri chiziqlarning tekislikdagi proyeksiyasi bilan to'g'ri chiziq orasidagi qo'shni burchaklardan biri olindi (2-chizma).



2-chizma.

To'g'ri chiziq $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ kanonik tenglamasi bilan tekislik $Az + By + Cz + D = 0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin. φ_1 burchakni topish uchun to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ vektor bilan tekislikning normal vektori orasidagi φ_2 burchakni hisoblaymiz:

$$\cos \varphi_2 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + n^2}}.$$

φ_1 burchak φ_2 burchakni $\pi/2$ gacha to'ldiradi. Demak,

$$\cos \varphi_2 = \cos (\pi/2 - \varphi_1) = \sin \varphi_1$$

Shunday qilib,

$$\sin \varphi_1 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + n^2}} \quad (10)$$

bo'ladi. (10) fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni topish formulasi bo'ladi.

To'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lsa $\vec{s}(m, n, p)$ va $\vec{n}(A, B, C)$ vektorlar perpendikulyar bo'lib,

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad (11)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (11) tenglikka **to'g'ri chiziq va tekislikning *parallellik***

sharti deyiladi. To'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa, $\vec{s}(m, n, p)$ va $\vec{n}(A, B, C)$ vektorlar parallel bo'ladi va

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \quad (12)$$

munosabat kelib chiqadi. (12) tenglik **to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti** bo'ladi.

(11) shart bajarilmasa to'g'ri chiziq va tekislik kesishadi. Kesishish nuqtasini topish uchun, ushbu

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

uch noma'lumli tenglamalar sistemasini yechish kerak bo'ladi.

6-misol. $A(5, 1, -4)$ va $B(6, 1, -3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan $2x - 2y + z - 3 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. AB nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{s} = \vec{AB}(1,0,1)$ ni olamiz. Tekislikning normal vektori $\vec{n}(2,-2,1)$ bo'lganligi uchun (10) formulaga asosan:

$$\sin \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \varphi = \sqrt{2}/2, \quad \varphi = 45^\circ.$$

$$7\text{-misol.} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 3z - 7 = 0, \\ x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqni yasang.

Yechish. Ma'lumki to'g'ri chiziqni yasash uchun u o'tadigan ikkita nuqtani aniqlash yetarli. Buning uchun to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Bu nuqtalarga **to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari** deyiladi.

To'g'ri chiziqning XOY tekislikdagi **izini** topish uchun berilgan sistemada $z = 0$ deb olamiz, ya'ni

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemani x, y noma'lumlarga nisbatan yechsak, $x = 2, y = 1$ bo'ladi. Demak, berilgan to'g'ri chiziqning XOY koordinata tekisligidagi izi $M_1 (2, 1, 0)$ nuqta bo'ladi.

Endi to'g'ri chiziqning XOZ tekislikdagi izini topamiz. Buning uchun berilgan tenglamalar sistemasida $y = 0$ deb, hosil bo'lgan sistemani yechib, $x = 2, z = 1$ topamiz. Demak, to'g'ri chiziqning XOZ tekislikdagi izi $M_2 (2, 0, 1)$ bo'ladi. Topilgan M_1 va M_2 nuqtalardan to'g'ri chiziq o'tkazamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. R^3 fazoda to'g'ri chiziq qanday aniqlanadi?
2. To'g'ri chiziqning vektorli, parametrik va kanonik tenglamalari qanday yoziladi?
3. To'g'ri chiziqning umumiy va proyeksiyalarga nisbatan tenglamalari nimalardan iborat?
4. R^3 fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
5. Fazoda ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti qanday?
6. Fazoda ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti nima?
7. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deb qaysi burchak olinadi?
8. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik sharti nimadan iborat?
9. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti qanday?
10. . To'g'ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari nimadan iborat va qanday topiladi?
11. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori nima?

Mustaqil ish uchun toshiriqlar

1. $M_0 (2, 5, -4)$ nuqtadan o'tib $\vec{s}(3,6,7)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.
2. $M (1, -3, -5)$ nuqtadan o'tib, koordinat o'qlari bilan $\alpha = \pi / 4, \beta = 2\pi / 3, \gamma = \pi / 3$ burchaklar tashkil etuvchi to'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.
3. $M_1 (3, -2, 5)$ va $M_2 (6, 1, 7)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

$$4. 1) \begin{cases} 5x + y - 3z - 3 = 0, \\ 4x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases}; 2) \begin{cases} 2x - 5y + 3z + 4 = 0, \\ x - 2y - z + 3 = 0 \end{cases}.$$

to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalarga nisbatan va kanonik tenglamalarini yozing.

5. Uchlari $A(1, 4, 2)$, $B(3, 5, 4)$ va $C(-1, 1, 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak AD medianasining kanonik tenglamasini yozing.

$$6. \begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2 = 0, \\ 3x - 5y - 4z - 2 = 0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasini yozing.

7. $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ tekislikka koordinatlar boshidan o'tkazilgan perpendikulyarning kanonik tenglamasini yozing.

$$8. 1) \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2} \quad \text{va} \quad \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-4};$$

$$2) \begin{cases} 2x - 3y - 4z + 5 = 0, \\ x - 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{va} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{4}$$

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

$$9. \frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{va} \quad \begin{cases} -3y + z - 5 = 0, \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlarning parallelligini ko'rsating.

$$10. 1) \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-6}{-1} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0, \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 3x + 4y - z - 1 = 0, \\ 2x + 3y + z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 5 + t \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlarning o'zaro perpendikulyarligini ko'rsating.

$$11. \frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-6}{1} \quad \text{to'g'ri chiziq va} \quad 4x + 2y + 2z + 5 = 0$$

tekislik orasidagi burchakni toping.

12. $A(3, 6, 2)$ va $B(4, 5, -2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq va $2x + y - 2z - 5 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

13. $M_0(-2, 3, 4)$ nuqtadan o'tib, $3x - 2y + 5z - 6 = 0$ tekislikka perpen-dikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

14. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 2 = 0, \\ x + 2y - 5z - 3 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq va $2x - 7y + 12z - 15 = 0$

tekislikning parallelligini ko'rsating.

Matematik tahlilga kirish

13-ma'ruza. To'plamlar nazariyasi

Reja

1. To'plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar.
2. To'plamlar ustida amallar.
3. To'plamning quvvati.

Tayanch ibora va tushunchalar

To'plam, chekli va cheksiz to'plamlar, qavariq to'plam, nuqtaning atrofi, chegaralangan to'plam, to'plamning ichki nuqtasi, chegaraviy nuqta, quyuqlanish nuqtasi, yopiq va ochiq to'plamlar, to'plamlarning birlashmasi, to'plamlar kesishmasi, to'plamlarning farqi, to'plamlarning ekvivalentligi, kompakt, to'plamning quvvati.

Adabiyotlar

- [1] Karimov I.A. 2006 yilda mamlakatni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish yakunlari va 2007 yilda iqtisodiy islohatlarni chuqurlashtirishning eng muhim ustivor yo'nalishlariga bag'ishlangan Vazirlar Mahkamasi majlisidagi ma'ruzasi. Ma'rifat gazetasi. 13-son. 2007y. 14-fevral.
- [4] Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz. 1-qism. T.: O'qituvchi. 1992, 1994. 129-140 betlar,
- [9] Begmatov A.B. Oliy matematika. O'quv qo'llanma. Sam.KI. 2003. 92-94 betlar,.
- [10] Begmatov A.B. Oliy matematika. 1 – qism. Ma'ruzalar matni. SamKI. 2001. 86-95 betlar, [23] Rajabov G'. va bosh. Oliy matematika. T.: Turon-igbol. 2007. 116-126, betlar, [24] 106-116 betlar.

1. To'plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar. *To'plam* tushunchasi matematikaning boshlang'ich va muhim tushunchalardan biridir. Masalan: Natural sonlar to'plami, auditoriyadagi talabalar to'plami, bibleotekadagi kitoblar to'plami, bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami biror xildagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar to'plami va boshqalar.

To'plamni tashkil etgan narsalar to'plamning elementlari deyiladi. Matematikada to'plamlar bosh harflar bilan, masalan: $A, B, X, Y, \dots$ uning elementlari esa kichik harflar, masalan: $a, b, x, y, \dots$ bilan belgilanadi.

To'plam chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo'lsa, unga **chekli to'plam** deb ataladi. Masalan, bibleotekadagi kitoblar soni yoki guruhdagi talabalar soni chekli bo'ladi. Cheksiz elementlardan tashkil topgan to'plam **cheksiz to'plam** deb ataladi. Masalan, natural sonlar to'plami, bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami va boshqalar.

x element X to'plamga tegishli bo'lsa, $x \in X$ deb belgilanadi, aks holda $x \notin X$ yoziladi. $\{x \in X / P(x)\}$ belgi P xossaga ega bo'lgan $x \in X$ lar to'plamini bildiradi. Bo'sh to'plamni

$$\emptyset = \{x \in \emptyset / x \neq x\} \text{ deb yozish mumkin.}$$

1-misol. Quyidagi xossalarga ega bo'lgan to'plamlar elementlarini aniqlang.

$$1) A = \{x \in N \mid x \leq 5\}; 2) B = \{x \in N \mid x \leq 0\}; 3) C = \{x \in Z \mid |x| \leq 2\}$$

Yechish. 1) To'plam 5 dan kichik va teng bo'lgan natural sonlardan iboratligini bildiradi, ya'ni $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

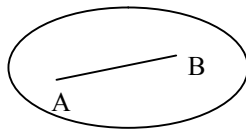
$$2) \text{ manfiy natural son yo'q shuning uchun } B = \emptyset ;$$

3) bu holda $|x| \leq 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi faqat butun sonlar olinadi, bu $[-2; 2]$ kesmada bo'ladi. Shunday qilib, $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

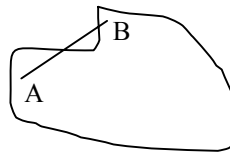
Qavariq to'plam. 1-ta'rif. Istalgan ikki nuqta shu to'plamga tegishli bo'lganda, bu nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi ham shu to'plamga tegishli bo'lsa, bunday to'plamga **qavariq to'plam** deyiladi(1,2-chizma).

Nuqtaning atrofi. 2-ta'rif. r biror musbat son bo'lsin. $M_0 \in R^n$ fazoning nuqtasi uchun $\rho(M, M_0) < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma $M \in R^n$ nuqtalar to'plamiga M_0 **nuqtaning r -atrofi** deyiladi va $S_r(M_0)$ bilan belgilanadi, ya'ni

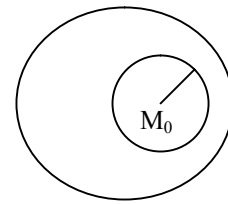
$$S_r(M_0) = \{M \in R^n \mid \rho(M, M_0) < r\}. \text{ (3-chizma)}$$



1-chizma



2-chizma



3-chizma

Masalan, $M_1(2; 3; -1; 3) \in S_2(M_0), M_0(1; 2; -1; 2)$ nuqtaning $S_r(M_0)$ atrofiga tegishli, chunki

$$\rho(M_1, M_0) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}$$

bo'lib, $\sqrt{3} < 2$ bo'ladi. $M_2(3; 3; -1; 3)$ nuqta $S_2(M_0)$ atrofga tegishli emas, chunki $\rho(M_2, M_0) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{6}$ bo'lib, $\sqrt{6}$ bo'lib, $\sqrt{6} > 2$ bo'ladi.

R^1 (sonlar o'qi) fazoda $M_0(a)$ nuqtaning r atrofi $(a-r, a+r)$ intervaldan iborat.

R^2 (tekislik) fazoda $M_0(a, b)$ nuqtaning r atrofi, radiusi r , markazi $M_0(a, b)$ nuqtada bo'lgan doiraning ichki nuqtalaridan iborat bo'ladi. R^3 fazoda esa, $M_0(a, b, c)$ nuqtaning r atrofi, radiusi, r , markazi. $M_0(a, b, c)$ nuqtada bo'lgan sharining ichki qismidan iborat bo'ladi.

To'plamning chegaralanganligi. 3-ta'rif. R^n fazoning V to'plamning istalgan $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$ nuqtasi uchun shunday $A > 0$ son mavjud bo'lib,

$$|x_1| \leq A, |x_2| \leq A, \dots, |x_n| \leq A$$

munosabatlar bajarilsa, V to'plamga **chegaralangan to'plam** deyiladi. Masalan, n o'lchovli fazoda istalgan nuqtaning r atrofi chegaralangan to'plamdir.

To'plamning ichki va chegaraviy nuqtalari. 4-ta'rif. $M_0 \in V$ nuqta V to'plamga o'zining biror r atrofi bilan kirs, unga V **to'plamning ichki nuqtasi** deyiladi.

5-ta'rif. $M_0 \in V$ nuqta o'zining har bir atrofida V to'plamga tegishli bo'lgan hamda tegishli bo'lmagan nuqtalar bilan kirs, M_0 nuqtaga V to'plamning **chegaraviy nuqtasi** deyiladi.

To'plamning quyuqlanish nuqtasi. 6-ta'rif. M_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofi V to'plamning M_0 nuqtadan farqli cheksiz ko'p nuqtalari (M_0 nuqtadan farqli)ni o'z ichiga olsa, M_0 nuqta V to'plamning **quyuqlanish nuqtasi** deyiladi. Quyuqlanish nuqtasi to'plamning o'ziga qarashli bo'lishi ham, qarashli bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, $V = [a, b]$ yoki $V = (a, b]$ bo'lsa, ikkala holda ham a nuqta V uchun quyuqlanish nuqtasi bo'ladi, lekin birinchi holda bu nuqta V to'plamda yotadi, ikkinchi holda esa u V to'plamda yotmaydi.

Yopiq va ochiq to'plamlar. 7-ta'rif. V to'plam o'zining hamma quyuqlanish nuqtalarini o'zida saqlasa, unga **yopiq to'plam** deyiladi. Masalan, $[a, b]$ kesma R^1 sonlar to'plamida, $\{M(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ R^2 doira tekislikda yopiq to'plamlardir.

8-ta'rif. V to'plamning hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo'lsa, bunday to'plamga **ochiq to'plam** deyiladi. Masalan, (a, b) R^1 da, $\{M(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ R^2 da ochiq to'plamlardir. R^n fazoda istalgan nuqtaning r atrofi ochiq to'plamdir.

R^n fazoda chegaralangan yopiq to'plamga **kompakt** deb ataladi.

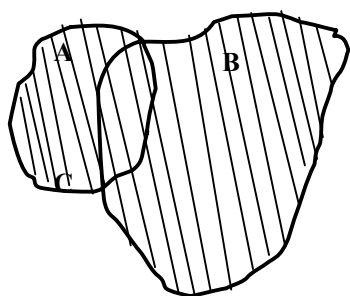
2. To'plamlar ustida amallar. B to'plamning har bir elementi A to'plamning ham elementi bo'lsa, B to'plamga A to'plamning **qism to'plami** deyiladi va $B \subset A$ yoki $A \supset B$ bilan belgilanadi. $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa, A va B to'plamlar teng deyiladi va $A = B$ bilan belgilanadi.

1) A va B to'plamlarning **birlashmasi (yig'indisi)** deb uchinchi bir C to'plamga aytiladiki, bu to'plamning istalgan elementi A yoki B to'plamga, yoki ikkalasiga ham tegishli bo'ladi va $A \cup B$ bilan belgilanadi, ya'ni

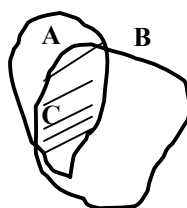
$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ } \bar{\text{e}}\text{ku } x \in B\} \text{ (4 -chizma).}$$

2) A va B **to'plamlarning kesishmasi (ko'paytmasi)** deb, uchunchi bir C to'plamga aytiladiki, uning har bir elementi A to'plamga ham, B to'plamga ham tegishli bo'ladi va $A \cap B$ bilan belgilanadi, ya'ni $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \in B\}$ (5 -chizma).

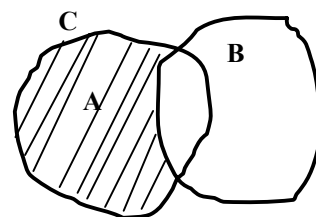
3) A to'plamdan B to'plamning **farqi (ayirmasi)** deb shunday uchunchi bir C to'plamga aytiladiki, uning har bir elementi A ga tegishli bo'lsa, B ga tegishli bo'lmaydi, va uni $A / B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \notin B\}$ (6-chizma).



4-chizma



5-chizma



6-chizma

2-misol. $A = \{1, 2\}$ to'plamning hamma qism to'plamlaridan iborat bo'lgan B to'plamni tuzing.

Yechish. Qism to'plam ta'rifiga asosan,

$$\emptyset \in A, \{1\} \in A, \{2\} \in A, \{1, 2\} \in A, \text{ Demak, } B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

3-misol. $A = (4, 8)$ va $B = (1, 4]$ bo'lsa, ularning birlashmasini va kesishmasini toping.

Yechish. Birlashmaning ta'rifidan $A \cup B = (1, 8)$ bo'lib kesishmaning ta'rifidan $A \cap B = \emptyset$ bo'ladi.

4-misol. $A = (-3, 7]$ va $B[5, 6]$ bo'lsa, ularning birlashmasi va kesishmasini toping.

$$\text{Yechish. Ta'rifga asosan } A \cup B = (-3, 7], \quad A \cap B = [5, 6] \text{ bo'ladi.}$$

5- m i s o l. Ushbu

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}, \quad C = \{1, 3\}$$

to'plamlarni qaraylik. Bu to'plamlar uchun

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\},$$

$$A \cap B = \{2, 4, 6\},$$

$$A \setminus B = \{1, 3, 5\},$$

$$B \setminus A = \{8\},$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A \cap C = \{1, 3\},$$

$$B \cap C = \emptyset,$$

$$B \times C = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 3), (8, 1), (8, 3)\}.$$

bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan

$$E \cup E = E, \quad E \cap E = E, \quad E \setminus E = \emptyset,$$

shuningdek $E \subset F$ bo'lganda

$$E \cup F = F, \quad E \cap F = E$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Barcha $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ - natural sonlardan iborat to'plam natural sonlar to'plami deyiladi va u N harfi bilan belgilanadi:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Barcha $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ - butun sonlardan iborat to'plam **butun sonlar to'plami** deyiladi va u Z harfi bilan belgilanadi:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Ravshanki,

$$N \subset Z$$

bo'ladi.

3. To'plamning quvvati. 1). Tartiblangan to'plamlar haqida

Agar biror E to'plamning elementlari uchun quyidagi tasdiqlar:

- 1) $n = m, \quad n > m, \quad n < m$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o'rinli;
- 2) $n < m, \quad m < p$ tengsizliklardan $n < p$ tengsizlik

o'rinli bo'lsa, E to'plam tartiblangan to'plam deyiladi.

Tartiblangan to'plamlarga dastlabki misol, $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ natural sonlar to'plami bo'ladi. Bundan tashqari butun, rasional, haqiqiy sonlar to'plamlari ham tartiblangan to'plamlarga misol bo'laoladi.

2). To'plamlarning ekvivalentligi

Ixtiyoriy ikkita E va F to'plamlar berilgan holda, tabiiyki, ularning qaysi birining elementi «ko'p» degan savol tug'iladi. Natijada to'plamlarni solishtirish (elementlar soni jihatidan solishtirish) masalasi yuzaga keladi. Odatda bu masala ikki usul bilan hal qilinadi:

- 1) to'plamlarning elementlarini bevosita sanash bilan ularning elementlari soni solishtiriladi ;
- 2) biror qoidaga ko'ra bir to'plamning elementlariga ikkinchi to'plamning elementlarini mos qo'yish yo'li bilan ularning elementlari solishtiriladi.

Masalan, $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 4, 9, 16\}$ to'plamlarning elementlari sonini solishtirib, F to'plamning elementlari soni E to'plamning elementlari sonidan ko'p ekanligini aniqlaymiz. Yoki, E to'plamning har bir elementiga F to'plamning bitta elementini

$$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 9$$

tarzda mos qo'yib, F to'plamda E to'plam elementiga mos qo'yilmay qolgan element borligini (u 16) hisobga olib, yana F ning elementlari soni E ning elementlari sonidan ko'p degan xulosaga kelamiz. Agar to'plamlar cheksiz bo'lsa, ravshanki, ularni 1- usul bilan solishtirib bo'lmaydi. Bunday vaziyatda faqat 2 - usul bilangina ish ko'riladi. Masalan, $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ natural sonlar to'plamining har bir n elementiga ($n = 1, 2, \dots$) juft sonlar to'plami $N_1 = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$ ning $2n$ elementini ($n = 1, 2, \dots$) mos qo'yish bilan ($n \rightarrow 2n$) solishtirib, ularning elementlari soni «teng» degan xulosaga kelamiz.

1 – t a ‘ r i f. Agar E to'plamning har bir a elementiga F to'plamning bitta b elementi mos qo'yilgan bo'lib, bunda F to'plamning har bir elementi uchun E to'plamda unga mos keladigan bittagina element bor bo'lsa, u holda E

va F to'plamlar elementlari orasida **o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan** deyiladi.

2 – t a ‘ r i f. Agar E va F to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, ular bir-biriga **ekvivalent to'plamlar** deb ataladi va

$$E \sim F$$

kabi belgilanadi.

6-m i s o l. 1. Ushbu

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad F = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$$

to'plamlar ekvivalent to'plamlar bo'ladi. Bu to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Uni quyidagicha

$$1 \leftrightarrow 1, \quad 2 \leftrightarrow \frac{1}{2}, \quad 3 \leftrightarrow \frac{1}{3}, \quad 4 \leftrightarrow \frac{1}{4}, \quad 5 \leftrightarrow \frac{1}{5},$$

o'rnatish mumkin. Demak, $E \sim F$.

7-misol. Ushbu

$$E = \{2, 4, 6, 8\}, \quad F = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

to'plamlar ekvivalent to'plamlar bo'lmaydi. Chunki bu to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatib bo'lmaydi.

8-misol. Ushbu

$$E = N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \quad F = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\},$$

to'plamlar ekvivalent to'plamlar bo'ladi. Bu to'plam elementlari orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik har bir n ga $(n \in N) \frac{1}{n}$ ni $(\frac{1}{n} \in F)$ mos qo'yish bilan

o'rnatiladi. Demak, $E \sim F$.

9-misol. Ushbu

$$E = N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \quad N_1 = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

to'plamlar o'zaro ekvivalent bo'ladi. Bu to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslikni quyidagicha o'rnatish mumkin: har bir natural n ($n \in N$) songa $2n$ son ($2n \in N_1$) mos qo'yiladi $n \leftrightarrow 2n$). Demak, $E = N \sim N_1$.

Ravshanki, $N_1 \subset N$. Bu esa to'plamning qismi o'ziga ekvivalent bo'lishi mumkin ekanligini ko'rsatadi. Bunday kolat faqat cheksiz to'plamlargina xosdir.

Yuqorida keltirilgan ta'rif va misollardan ikki chekli to'plamning o'zaro ekvivalent bo'lishi uchun ularning elementlari soni bir-biriga teng bo'lishi zarur va yetarli ekanligini ko'ramiz.

Ekvivalentlik munosabati quyidagi xossalarga ega:

- 1) $E \sim E$ (refleksivlik xossasi) ;
- 2) $E \sim F$ bo'lsa, $F \sim E$ bo'ladi (simmetrik xossasi) ;
- 3) $E \sim F$, $F \sim G$ bo'ladi (tranzitivlik xossasi).

To'plamlarning ekvivalentlik tushunchasi to'plamlarni sinflarga ajratish imkonini beradi.

Masalan,

$$\begin{aligned} N_1 &= \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}, \\ N_2 &= \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}, \\ N_3 &= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \end{aligned}$$

to'plamlar sanoqli to'plamlardir, chunki

$$\begin{aligned} N_1 &\sim N \quad (2n \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots), \\ N_2 &\sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots), \\ N_3 &\sim N \quad \left(\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots\right). \end{aligned}$$

3). To'plamning quvvati. To'plamning quvvati, to'plam "elementlarining soni" tushunchasining ixtiyoriy (chekli va cheksiz) to'plamlar uchun umumlashtirilganidir. To'plamning quvvati berilgan to'plamga ekvivalent bo'lgan barcha to'plamlarga, ya'ni elementlari berilgan to'plamning elementlari bilan o'zaro bir qiymatli moslikda bo'la oladigan barcha to'plamlarga umumiy bo'lgan narsa sifatida aniqlanadi.

To'plam quvvati tushunchasini matematikaga to'plamlar nazariyasining asoschisi nemis matematigi G.Kantor (1845-1918) kiritgan (1879 yilda). Kantor cheksiz to'plamlar uchun **har xil quvvatlar** mavjudligini isbotlagan.

3-ta'rif. Natural sonlar qatoriga ekvivalent bo'lgan to'plam, ya'ni hamma elementlarini natural sonlar bilan raqamlab (belgilab) chiqish mumkin bo'lgan to'plamga **sanoqli to'plam** deyiladi. Masalan,

$$\begin{aligned} N_1 &= \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}, \\ N_2 &= \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}, \\ N_3 &= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \end{aligned}$$

to'plamlar sanoqli to'plamlardir, chunki

$$\begin{aligned} N_1 &\sim N \quad (2n \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots), \\ N_2 &\sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots), \\ N_3 &\sim N \quad \left(\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots\right). \end{aligned}$$

Sanoqli to'plamning quvvati cheksiz to'plamlar quvvati orasida eng kichigi bo'lib hisoblanadi.

Sanoqli bo'lmagan to'plam sanoqsiz to'plam deb ataladi.

$0 \leq x \leq 1$ kesmadagi sonlarning L to'plamining quvvati nomi **kontinuum** deyiladi. L ni natural sonlar to'plamiga o'zaro bir qiymatli akslantirish mumkin emas. "**Kontinuum matematikasi**" termini uzluksizlik tushunchasi bilan bog'liq bo'lgan nazariyalarda qo'llanilib, u diskret matematikaga qarama-qarshi qo'yiladi. Kontinuum quvvat sanoqli to'plam quvvatidan katta. Bir necha o'n yil muqaddam sanoqli to'plam quvvatidan katta va kontinuum quvvatdan kichik bo'lgan to'plam mavjudmi? degan muammo qo'yilgan.

M a t y e m a t i k b y e l g i l a r h a q i d a . Matematikada tez-tez uchraydigan so'z va so'z birikmalari o'rniga maxsus belgilar ishlatiladi. Ulardan eng muhimlarini keltiramiz:

1) «Agar bo'lsa, u holda bo'ladi» iborasi « $\Rightarrow$ » belgisi orqali yoziladi;

- 2) ikki iboraning ekvivalentligi ushbu « $\Leftrightarrow$ » belgisi orqali yoziladi;
- 3) «Har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so'zlari o'rniga « $\forall$ » umumiylik belgisi ishlabitadi;
- 4) «Mavjudki», «topiladiki» so'zlari o'rniga « $\exists$ » mavjudlik belgisi ishlatiladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chekli va cheksiz to'plamlar qanday to'plamlar?
2. Qavariq to'plam qanday to'plam?
3. Nuqtaning atrofi deb nimaga aytiladi?
4. To'plamning ichki nuqtasi nima?
5. To'plamning chegaraviy nuqtasi qanday bo'ladi?
6. Ochiq to'plam deb nimaga aytiladi?
7. Yopiq to'plam deb qanday to'plamga aytiladi?
8. Ochiq va yopiq to'plamlar qanday xossalarga ega?
9. Qanday to'plamga chegaralangan deyiladi?
10. To'plamning quyuqlanish nuqtasi deb nimaga aytiladi?
11. Qism to'plam deb qanday to'plamga aytiladi?
12. Qanday to'plamlar teng deyiladi?
13. Birlashma (yig'indi) to'plam qanday to'plam?
14. To'plamlarning kesishmasi nima va u qanday belgilanadi?
15. To'plamlarning farqi (ayirmasi) nima?
16. O'zaro bir qiymatli moslik nima?
17. To'plamlarning ekvivalentligi qanday bo'ladi?
18. To'plamning quvvati nima?
19. Sanoqli to'plam deb nimaga aytiladi?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. N natural sonlar to'plami va Z butun sonlar to'plami birlashmasini toping.
2. G rasional sonlar to'plami, R haqiqiy sonlar to'plami bo'lsa, $G \cap R$ ni toping.
3. Rasional va irrasional sonlar to'plami birlashmasini toping.

4. A to'g'ri to'rtburchaklar to'plami, B romblar to'plami bo'lsa, $A \cap B$ ni toping.
5. A juft sonlar to'plami Z butun sonlar to'plami bo'lsa, ularning kesishmasini toping.
6. A juft sonlar to'plami B toq sonlar to'plami bo'lsa, A va B larning kesishmasini toping.
7. $\{0; 1,2\}$ bo'lsa hamma qism to'plamlar to'plamini toping.
8. A juft sonlar to'plami, B toq sonlar to'plami, C tub sonlar to'plami bo'lsa, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$ toping.
9. $\{1,2,4,6,9\}$, $B = \{3,4,5,8,10\}$ bo'lsa $A \setminus B$ va $B \setminus A$ larni toping.
10. toping. G rasional sonlar to'plami, R haqiqiy sonlar to'plami bo'lsa $G \setminus R$ ni toping.

14-ma'ruza. Sonli ketma-ketliklar

Reja

1. Sonli ketma-ketlik ta'rifi va umumiy tushunchalar.
2. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli ketma-ketliklar.
3. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar hamda ularning xossalari.
4. Sonli ketma-ketlikning limiti va uning xossalari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Sonli ketma-ketlik, umumiy had, chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar, quyidan chegaralangan, cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar, ketma-ketlikning limiti, yaqinlashuvchi ketma – ketlik, nuqtaning atrofi, cheksiz limit, chekli limit.

1. Sonli ketma-ketlik ta'rifi va umumiy tushunchalar

1-ta'rif. Natural sonlar qatoridagi

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

har bir n songa haqiqiy x_n son mos qo'yilgan bo'lsa,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

(1) haqiqiy sonlar to'plamiga sonli ketma-ketlik yoki qisqacha ketma-ketlik deyiladi.

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sonlarga sonli ketma-ketlikning hadlari deyilib, x_n ga ketma – ketlikning umumiy hadi yoki n – hadi deb ataladi, (1) sonli ketma-ketlikni qisqacha $\{x_n\}$ simvol bilan belgilanadi. Masalan, 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonlar ketma-ketligi

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

bo'ladi;

$$2) \left\{\frac{n}{n+1}\right\} \text{ sonlar ketma-ketligi } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

bo'ladi.

Sonli ketma-ketlikning umumiy hadini olish usuli ko'rsatilgan bo'lsa, u berilgan deyiladi. Misol uchun, 1) $x_n = 2 + (-1)^n$ bo'lsa, u 1, 3, 1, 3, 1, 3, ..., 1, 3, ... ;

3) $\frac{2}{3}$ kasrni o'nli kasrga aylantirganda verguldan keyin bitta, ikkita, uchta va hokazo raqamlarni olib,

$$x_1=0,6, x_2=0,66, x_3=0,666, \dots$$

sonlar ketma-ketligini olish mumkin;

$$4) a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$$

arifmetik progressiya ham sonli ketma-ketlikdir, bunda a_1 birinchi had, d arifmetik progressiya ayirmasi;

$$5) b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots, b_1 q^{n-1}, \dots$$

sonlar ketma-ketligi ham ketma-ketlikka misol bo'ladi, bu birinchi hadi b_1 maxraji q bo'lgan geometrik progressiyadir.

Sonli ketma-ketlikning ta'rifidan ma'lumki, u cheksiz sondagi elementlarga ega bo'lib, ular hech bo'lmaganda o'zlarining tartib raqami bilan farq qiladi.

Sonlar ketma-ketligining geometrik tasviri sonlar o'qidagi nuqtalar bilan ifodalanadi.

Sonli ketma-ketliklar ustida ushbu arifmetik amallarini bajarish mumkin: 1) $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligini songa ko'paytirish,

$$m x_1, m x_2, m x_3, \dots, m x_n, \dots$$

ko'rinishda bo'ladi;

2) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligining yig'indisi

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots;$$

ko'rinishda aniqlanadi;

3) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligini ayirmasi

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots$$

ko'rinishda bo'ladi;

4) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligi ko'paytmasi

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n, \dots;$$

kabi aniqlanadi;

5) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligining nisbati, maxraj 0 dan farqli bo'lganda,

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots$$

ko'rinishda bo'ladi hamda mos ravishda $\{mx_n\}$, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$,

$\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ simvollar bilan belgilanadi.

2. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli ketma-ketliklar. 1-ta'rif. $\{x_n\}$

sonlar ketma – ketligi uchun shunday M (m son) son mavjud bo'lib, ketma-ketlikning istalgan elementi uchun $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

2-ta'rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi quyidan va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday m va M sonlar mavjud bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning istalgan elementi uchun $m \leq x_n \leq M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

3-ta'rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi uchun shunday A musbat son mavjud bo'lib, x_n element mavjud bo'lib, $|x_n| > A$ (ya'ni $x_n > A$ yoki $x_n < -A$) tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi chegaralanmagan deyiladi.

Yuqoridagi ta'riflardan kelib chiqadiki, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsa, uning hamma elementlari $(-\infty, M]$ oraliqqa tegishli, $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan bo'lsa, uning hamma elementlari $[m, +\infty)$ oraliqqa tegishli, yuqoridan va quyidan chegaralangan bo'lsa, $[m, M]$ oraliqqa tegishli bo'ladi.

Misollar:

- 1) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ sonlar ketma-ketligi quyidan chegaralangan, lekin yuqoridan chegaralangan;
- 2) $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ sonlar ketma-ketligi yuqoridan chegaralangan;
- 3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan, chunki uning hamma elementlari uchun $0 \leq x_n \leq 1$ tengsizlik bajariladi, bunda $m = 0$ $M = 1$ bo'ladi;
- 4) $-1, 2, -3, 4, -5, \dots, -(-1)^n n, \dots$ sonlar ketma-ketligi chegaralanmagan, chunki qanday A son olmaylikki, bu ketma-ketlik ichida $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi elementlari mavjud bo'ladi.

3. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar hamda ularning xossalari

1-ta'rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi istalgan A son uchun, shunday N raqam mavjud bo'lib, hamma $n > N$ lar uchun $|x_n| > A$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi.

$\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan bo'ladi.

2-ta'rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N raqam mavjud bo'lib, $n > N$ lar uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik sonlar ketma-ketligi deyiladi.

Misollar:

- 1) natural sonlar ketma-ketligi $\{n\}$ cheksiz katta ketma-ketlikdir;
- 2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonlar ketma-ketligi cheksiz kichikdir, haqiqatan ham, istalgan $\varepsilon > 0$ son olsak, $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ dan $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bo'lib, N uchun $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ($\frac{1}{\varepsilon}$ butun qismi) olib, hamma $n > N$ lar uchun $\frac{1}{n} = |x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. 2-ta'rifga asosan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'ladi. Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar orasida ushbu bog'liqlik bor.

1-teorema. $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik va uning hamma elementlari 0 dan farqli bo'lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik va aksincha $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik va $\alpha_n \neq 0$ bo'lsa, $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsin. Istalgan $\varepsilon > 0$ son olib, $A = \frac{1}{\varepsilon}$ deylik. 1-ta'rifdan shu A son uchun shunday N raqam mavjudki, $n > N$ lar uchun $|x_n| > A$ bo'ladi. Bundan hamma $n > N$ uchun $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{A} = \varepsilon$ kelib chiqadi. Bu $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini bildiradi. (Teoremaning ikkinchi qismini isbot qilishni o'quvchiga havola etamiz).

Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega.

2-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklarning algebraik yig'indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsin. Bu cheksiz kichik ketma-ketliklar uchun, istalgan ε son uchun N_1 raqam topiladiki, $n > N_1$ lar uchun, $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik, N_2 raqam topiladiki, $n > N_2$ lar uchun $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi. $N = \max\{N_1, N_2\}$ desak, $n > N$ lar uchun birdaniga $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi. Shunday qilib,

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo'ladi.

Bu $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ekanligini bildiradi.

Natija. Istalgan chekli sondagi cheksiz kichiklarning algebraik yig'indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

3-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning ko'paytmasi, cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ lar cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsin. $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini isbotlash talab etiladi. $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik bo'lganligi uchun, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 raqam topiladiki, $n > N_1$ lar uchun $|\alpha_n| < \varepsilon$, $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lganligi uchun $\varepsilon = 1$ uchun shunday N_2 topiladiki $n > N_2$ lar uchun $|\beta_n| < 1$, bajariladi. $N = \max\{N_1, N_2\}$ deb olsak, $n > N$ lar uchun ikkala tengsizlik ham bajarilib,

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| \leq |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini bildiradi.

Natija. Istalgan sondagi cheksiz kichiklarning ko'paytmasi yana cheksiz kichik bo'ladi.

Eslatma. Ikkita cheksiz kichiklarning nisbati cheksiz kichik bo'lmasligi mumkin, masalan, $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ cheksiz kichiklarning nisbati hamma elementlari 1

lardan iborat chegaralanlan ketma-ketlikdir. $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}$ cheksiz kichik

ketma-ketliklarning nisbati $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \{n\}$ bo'lib, cheksiz katta ketma-ketlik hosil

bo'ladi. $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ bo'lsa, ularning nisbati $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichik

bo'ladi.

4-teorema. Chegaralangan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlikka ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. (Bu teoremaning isbotini o'quvchiga havola qilamiz).

4. Sonli ketma-ketlikning limiti va uning xossalari

1-ta'rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun unga bog'liq bo'lgan N son topilsaki, barcha $n > N$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $n \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{ëku} \quad n \rightarrow \infty \quad \partial a \quad x_n \rightarrow a$$

simvollar bilan belgilanadi. Chekli limitga ega sonli sonli ketma-ketlikka, yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Limitning ta'rifiga misol qaraymiz.

Limitning ta'rifidan foydalanib,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ekanligini ko'rsatamiz. Istalgan $\varepsilon > 0$ son olamiz.

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$$

bo'lganligi uchun, $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n larning qiymatini

topish, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ tengsizlik bilan bog'liq va $1 < \varepsilon(n+1)$ ëku $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ bo'ladi.

Shuning uchun N sifatida $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ sonning butun qismini olish mumkin, ya'ni

$N = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil$ bo'ladi. Bu holda $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlik hamma $n > N$ lar uchun

bajariladi. Masalan, $\varepsilon = 0,1$ bo'lsin, bu holda

$$N = \left\lceil \frac{1-0,1}{0,1} \right\rceil = \left\lceil \frac{0,9}{0,1} \right\rceil = 9. \quad n = 10 > N = 9$$

bo'lsin. Bunda

$$x_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

bo'lib,

$$|x_{10} - 1| = \left| \frac{10}{11} - 1 \right| = \frac{1}{11} < \varepsilon = 0,1.$$

Shunday qilib $n=10$ dan boshlab, hamma n lar uchun $|x_{10} - 1| < 0,1$ tengsizlik bajariladi.

Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Boshqa bir necha $\varepsilon > 0$ lar olib, qaysi raqamlardan boshlab, tengsizlikning bajarilishini ko'rsatishni o'quvchiga havola etamiz.

Eslatma 1. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi biror a limitga ega bo'lsa, uni $\alpha_n = x_n - a$ cheksiz kichik miqdor ko'rinishida ifodalash mumkin, chunki $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N topiladiki, $n > N$ lar uchun

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Shuning uchun a limitga ega bo'lgan $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligini

$$x_n - a = \alpha_n$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda α_n cheksiz kichik ketma-ketlik.

2-ta'rif. $\varepsilon > 0$ biror musbat son bo'lsin. $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik hamma n lar uchun bajarilsa, $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi a nuqtaning ε atrofida deyiladi.

2-eslatma. Ma'lumki $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizligi

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{ yoki } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

tengsizlik bilan teng kuchli bo'lib, x_n element a nuqtaning ε atrofida bo'ladi.

Shuning uchun, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin:- a nuqtaning ε atrofida uchun shunday N raqamni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, hamma $n > N$ lardan boshlab, hamma x_n elementlar a nuqtaning ε atrofida bo'lsa, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

3-eslatma. Ma'lumki cheksiz katta ketma-ketlik limitga ega emas yoki uni cheksiz limitga ega deyiladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

bilan belgilanadi. Ketma-ketlikning limitini cheksiz limitdan farq qilishi uchun chekli limit ham deb yuritiladi.

Eslatma. Tushunarliki, har bir cheksiz kichik ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti $a = 0$ ga teng.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonadir.

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan.

Eslatma. Chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lmazligi mumkin. Masalan,

$$-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

ketma-ketlik, chegaralangan, lekin limitga ega emas.

3. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo'lsa, ularning algebraik yig'indisi ham yaqinlashuvchi bo'lib, $a \pm b$ limitga ega bo'ladi.

4. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo'lsa, ularning ko'paytmasi ham yaqinlashuvchi bo'lib, limiti $a \cdot b$ ga teng bo'ladi.

5. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo'lsa, ularning nisbati ham maxrajning limiti noldan farqli bo'lganda, yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti $\frac{a}{b}$ ga teng bo'ladi.

Bu xossalarni, ketma-ketlikning limiti va cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalariidan foydalanib isbotlash mumkin. Masalan, 4-xossani isbotlaylik. Ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda α_n, β_n lar cheksiz kichik ketma-ketliklar. Bu holda

$$x_n \cdot y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$$

bo'ladi. $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n)$ ifoda cheksiz kichik ketma-ketlikning xossalriga asosan cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Demak $x_n y_n - ab$ ham cheksiz kichikdir, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n - ab) = 0 \quad \text{ëku} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$$

bo'ladi.

1-misol. Ushbu limitni hisoblang.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 - 5}$$

Yechish. $n \rightarrow \infty$ surat ham maxraj ham cheksiz katta bo'lib, nisbatning limiti haqidagi xossani qullash mumkin emas, chunki bu xossada surat va maxrajning limiti mavjud bo'lishi kerak edi. Shuning uchun, bu ketma-ketliklarni n^2 ga bo'lib, shaklini o'zgartiramiz hamda limitlarning xossalarni qo'llab, ushbuni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - \frac{5}{n^2})} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{3 + 0 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
2. Sonli ketma – ketlikning umumiy hadi nima?
3. Sonlar ketma – ketligi qanday belgilanadi?
4. Sonli ketma – ketlik qachon berilgan deyiladi?
5. Arifmetik va geometrik progressiyalar sonli ketma – ketliklarga misollar bo'ladimi?
6. Sonli ketma – ketlik nechta elementga ega?

7. Sonli ketma – ketlikning geometrik tasviri qanday bo'ladi?
8. Sonli ketma – ketliklar ustida qanday amallarni bajarish mumkin?
9. Qanday sonlar ketma – ketligi chegaralangan deyiladi va misollar keltiring?
10. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
11. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
12. Yuqoridan chegaralangan sonlar ketma-ketligiga misollar keltiring?
13. Chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
14. Chegaralanmagan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
15. Cheksiz ketma – ketlik deb nimaga aytiladi?
16. Cheksiz kichik ketma – ketlik qanday ta'riflanadi?
17. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklarga misollar keltiring?
18. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklar orasida qanday bog'lanish bor?
19. Cheksiz kichik ketma – ketliklar qanday xossalarga ega?
20. Ketma-ketlikning limiti deb nimaga aytiladi?
21. Qanday sonlar ketma – ketligi yaqinlashuvchi deyiladi?
22. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikni yig'indi ko'rinishda qanday ifodalash mumkin?
23. Nuqtaning atrofi nima?
24. Cheksiz katta sonlar ketma-ketlikning limiti nimaga teng?
25. Chekli limit deganda nima tushuniladi?
26. Cheksiz kichik sonlar ketma-ketligining limiti nimaga teng?
27. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qanday xossalarga ega?
28. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari qanday isbotlanadi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Ushbu

$$x_n = \frac{1}{3n}, \quad x_n = \frac{n}{5n-1}, \quad x_n = \frac{1}{4n-1}, \quad x_n = 3n$$

sonli ketma-ketliklarning $n=1,2,3,4,5$, bo'lgandagi qiymatlarini yozing?

2. $x_n = \frac{n}{n+2}$ sonli ketma-ketlikning chegaralanganligini ko'rsating.

3. $x_n = \frac{3}{n}, x_n = \frac{3(-1)^n}{2n}, x_n = 3 + (-1)^n$ sonlar ketma-ketligining

geometrik tasvirini $n=1,2,3,4,5,6$ bo'lganda ko'rsating.

4. Bir necha arifmetik va geometrik progressiyalarning umumiy (n -hadi)ni yozing va $n=1,2,3,4,5,6$ bo'lgandagi qiymatlarini yozing.

5. Ushbu

$$x_n = 3n, x_n = -5n + 1, x_n = \frac{1}{y_n + 1}, x_n = (-1)^n 3n$$

sonlar ketma-ketliklari chegaralanganmi va qanday?

6. Bir necha cheksiz katta va cheksiz kichik sonlar ketma-ketliklarini yozing.

7. Ushbu tengliklar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3$$

ning to'g'riligini sonli ketma-ketlikning limiti, ta'rifidan foydalanib, isbotlang va har biri uchun $\varepsilon > 0$ ni aniqlab qanday raqamdan boshlab tengsizlikning bajarilishini ko'rsating?

8. Ushbu sonlar ketma-ketliklarining limitlarga ega ekanligi yoki ega emasligi va u nimaga tengligini ko'rsating?

$$1) x_n = \frac{n}{3n+1}, 2) x_n = \frac{5n-1}{2n}, 3) x_n = \frac{(-1)^n n}{4n+1}, 4) x_n = \frac{3n+1}{n^2},$$

$$5) x_n = \frac{n}{4n-3}, 6) x_n = \frac{(-1)^n n}{3n-1}, 7) x_n = \frac{3n^2}{n+1}, 8) x_n = \frac{2n+5}{n^3}.$$

15-ma'ruza. Bir o'zgaruvchili funksiya haqida asosiy tushunchalar

Reja

1. O'zgarmas va o'zgaruvchi miqdorlar.
2. Funksiya tushunchasi.
3. Funksiyaning berilish usullari.
4. Funksiyaning ayrim hollari
5. Funksiyaning limit iva uning asosiy xossalari.
6. Aniqmasliklar va ularni ochish.

Tayanch iboralar va tushunchalar

O'zgarmas va o'zgaruvchi miqdorlar, funksiya tushunchasi, funksiya aniqlanish sohasi, qiymatlar to'plami, analitik usul, grafik usul, jadval usul, oshkor va oshkormas funksiyalar, funksiyaning algoritmik berilishi, murakkab funksiya, teskari funksiya, funksiya limiti va uning xossalari, ketma-ketlik, cheksiz katta miqdor, chap va o'ng limitlar, cheksiz kichik funksiya, ko'paytmaning va bo'linmaning limiti, birinchi ajoyib limit, aniqmasliklarni ochish,

1. O'zgarmas va o'zgaruvchi miqdorlar. Qaralayotgan jarayonda bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan miqdorlarga ***o'zgarmas miqdorlar*** deyiladi. Masalan, qanday radiusli aylana olmaylik, uning uzunligining deametriga nisbati bir xil π sonidan iborat bo'ladi. Bu holda nisbat o'zgarmas miqdordir.

Qaralayotgan jarayonda har xil son qiymatlari qabul qiladigan miqdorlarga ***o'zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi. Masalan, havo harorati (temperaturasi), vaqt, harakatning tezligi o'zgaruvchi miqdorlardir. Bunday misollarni ko'plab keltirish mumkin. Hamma o'zgaruvchi miqdorlarni birdaniga o'rganib bo'lmaydi. Endi ikkita o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanishni qaraymiz.

2. Funksiya tushunchasi. ***Funksiya tushunchasi*** matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, uning yordamida tabiat va jamiyatdagi ko'p jarayon va hodisalar modellashtiriladi.

Matematik tahlilda elementlari haqiqiy sonlardan iborat, bo'lgan to'plamlarni qaraymiz. X va Y lar haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. $x \in X$ to'plamda, $y \in Y$ to'plamda o'zgarsin.

Ta'rif. $x \in X$ har bir x ga biror qoida yoki qonun bo'yicha $y \in Y$ dan bitta y mos qo'yilsa, X to'plamda **funksiya berilgan (aniqlangan)** deb ataladi va u

$$y = f(x)$$

simvol bilan belgilanadi. Ayrim hollarda $y = xf$ ham deb belgilanadiki, bunda kompyuterda oldin x qiymati olinib, keyin hisoblanadigan simvol olinadi. Bunda X to'plamga funksiyaning **aniqlanish sohasi**, Y to'plamga o'zgarish sohasi yoki **qiymatlar to'plami** deyiladi. Odatda funksiya aniqlanish sohasini D , qiymatlar to'plamini E bilan belgilanadi.

Shunday qilib, har bir element $x \in X$ ga bitta va faqat bitta $y \in Y$ moslik o'rnatilgan bo'lsa, bu moslikka X to'plamda funksiya aniqlangan deyiladi. x ga **erкли o'zgaruvchi** yoki **argument**, y ga esa **erksiz o'zgaruvchi** yoki x **ning funksiyasi** deyiladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo'lishi uchun: 1) X to'plam berilishi kerak (ko'p hollarda uni x bilan y o'zgaruvchilarning bog'lanishiga ko'ra topiladi); 2) x o'zgaruvchining X to'plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo'yiladigan y ni aniqlaydigan qoida yoki qonun berilishi kerak. (ta'rifda uni f simvol bilan belgiladik).

Masalan; 1) $f: X = (-\infty, +\infty)$ to'plamga tegishli bo'lgan har bir songa uning o'zini o'ziga ko'paytirib, ya'ni kvadratga ko'tarib mos qo'yuvchi qoida bo'lsin. Bu holda $y = x^2$ funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan; 2) f har bir $x \in [0, +\infty)$ songa shu sondan olingan kvadrat ildizni mos qo'ysin. Bu $y = \sqrt{x}$ funksiyaning ifodalaydi. Uning aniqlanish sohasi $[0, +\infty)$ bo'ladi.

1-misol. $y = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Ma'lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning shunday qiymatlari to'plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo'lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$x - 3 \geq 0,$$

$$4 - x > 0$$

bo'lgandagina x ning har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo'ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x \geq 3$, $x < 4$ bo'lib, ya'ni $3 \leq x < 4$ bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3, 4)$ bo'ladi.

3. Funksiyaning berilish usullari. Funksiya ta'rifida keltirilgan x o'zgaruvchining har bir qiymatiga mos qo'yiladigan y ni aniqlovchi qoida yoki qonun turlicha bo'lishi mumkin. Demak, funksiyaning berilishi ham turlichadir. Funksiya **analitik, jadval va grafik hamda kompyuter** usullari yordamida berilishi mumkin:

1) funksiyaing **analitik usul** bilan berilishida, x o'zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati, x argument ustida algebraik amallarning bajarilishi natijasida, ya'ni formulalar yordamida beriladi. Masalan,

$$y = x^3 + 1, \quad y^2 = \frac{x+5}{x^2-3}, \quad y = 3^{x+1}, \quad y = \log_2(x+3);$$

2) o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish **jadval** ko'rinishida berilishi mumkin. Masalan, kuzatish natijasida sutni yopiq idishda qizdirilganda P_1 bosim ostida uning qaynash temperaturasi t_1 , P_2 bosim ostida qaynash temperaturasi t_2 va h.k. bo'lishini topganda qo'yidagi jadval kelib chiqadi.

Bosim P	P_1	P_2	...	P_n
Temperatura t	t_1	t_2	...	t_n

Bundan ko'rinadiki P bosim bilan t temperatura orasida bog'lanish bo'lib, P argument, t funksiya bo'ladi. Funksiyaning bunday berilishiga **jadval usulda** berilgan deyiladi. Bunday usul ko'proq tajribalarda ishlatiladi.

3) Funksiyaning **grafik usulida** berilishida, x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikdagi biror chiziq yordamida beriladi. Bunda X va Y to'plamlar orasidagi moslik grafik bilan beriladi. XOY tekislikda l chiziq berilgan bo'lsin. x ning qiymatiga mos kelgan y ning qiymatini, topish uchun x nuqtadan OX o'qiga perpendikulyar o'tkazamiz. U l chiziqni bitta A nuqtada kesib o'tadi. A nuqtadan OY o'qiga perpendikulyar o'tkazamiz, bu perpendikulyarning OY o'qi bilan kesishish nuqtasi, y ning x ga mos qiymati bo'ladi. Ma'lumki, bunday moslik l chiziq yordamida bajariladi. Funksiyaning bunday berilishi, **grafik usulda berilgan** deyiladi. Funksiyaning grafik usulida berilishidan, uni analitik usul bilan ifodalash qiyin bo'lgan hollarda va funksiyaning sifat o'zgarishi grafik usulda yaxshi ko'rinadigan hollarda foydalaniladi. Masalan, fizikaviy tajribalar jarayonida ossillografdan olinadigan grafik.

4) **algoritmik yoki kompyuter usuli**. Funksiyaning bunday usulda berilishida x ning har bir qiymati uchun, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaydigan algoritim yoki programma berilgan bo'ladi. Bunday programma EHMga qo'yilgan bo'lib funksiyaning qiymati avtomatik hisoblanadi.

4. Funksiyaning ayrim hollari

1. **Oshkor va oshkormas funksiyalar**. Funksiya $y = f(x)$ ko'rinishda, ya'ni y ga nisbatan yechilgan bo'lsa, unga **oshkor funksiya** deyiladi. Funksiya $F(x, y) = 0$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni y ga nisbatan yechilmagan bo'lsa, **oshkormas funksiya** ko'rinishda berilgan deyiladi. Masalan, $y = 3x^2 + 5$, $y = \sin x$, $y = 4^x$ funksiyalar oshkor ko'rinishda; $2x - 3y + 6 = 0$, $x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ funksiyalar oshkormas ko'rinishda berilgan. Shuni ta'kidlaymizki hamma $F(x, y) = 0$ ko'rinishdagi tenglik ham

funksiyani ifodalay bermaydi. Masalan, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ tenglama funksiyani ifodalamaydi, chunki x ning har bir qiymatiga y ning qaybiy son qiymatini mos qo'yish mumkin emas.

2. Murakkab funksiya. $y = f(u)$ bo'lib, $u = \varphi(x)$ funksiya berilgan bo'lsa, y funksiyaga $\varphi(x)$ **funksiyaning funksiyasi** yoki y ga x ning ***murakkab funksiyasi*** deyiladi. Masalan, $y = \lg(x^2 + 1)$ funksiyada $u = x^2 + 1$ bo'lib. y x ning murakkab funksiyasi bo'ladi. Bundan tashqari $y = \sin(x^2 + 1)$, $y = 3^{x+5}$, $y = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$ va h.k. lar ham, murakkab funksiyaga misol bo'laoladi.

3. Teskari funksiya. $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. y funksiyaning qiymatlar to'plamidagi har bir qiymatiga x argumentning aniqlanish sohasidan bitta qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, berilgan funksiyaga ***teskari*** $x = d(y)$ ***funksiya*** berilgan bo'ladi va $D(f) = E(d)$ va $E(f) = D(d)$ har bir $x_0 \in D(f) = E(d)$ va $y_0 = E(f) = D(d)$ bo'lib. $y_0 = f(x_0)$ faqat $x_0 = d(y_0)$ uchun bajariladi. Masalan $y = 2x - 3$ funksiyaga teskari funksiya $2x = y + 3$, $x = (y + 3)/2$ bo'ladi. $y = x^3$ funksiya $x = \sqrt[3]{y}$ teskari funksiyaga ega bo'ladi. O'zaro teskari bo'lgan funksiyalarning grafiklari $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi.

5. Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

1. 1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{yoki} \quad x \rightarrow a \quad \text{da} \quad f(x) \rightarrow A \quad \text{bo'ladi.} \quad (1)$$

Funksiya limitining ta'rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo'lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

2-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo'lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad (2)$$

bilan belgilanadi.

1-ta'rifda faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo'lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning **chap yoki o'ng limit** tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad (3)$$

bilan belgilanadi.

3-ta'rif. Limiti $A = 0$ bo'lgan funksiya **cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.)** deyiladi.

4-ta'rif. Limiti $A = +\infty$ yoki $A = -\infty$ bo'lgan funksiya **cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.)** deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (4)$$

simvollar bilan belgilanadi.

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki $y = C$ o'zgarmas miqdorning limiti o'ziga teng.

Funksiya limitining asosiy xossalari:

1) **yig'indining limiti.** Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti, qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x \rightarrow a$ dagi limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (5)$$

2) **chekli sondagi funksiyalar ko'paytmasining limiti** funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (6)$$

Natija: O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni,

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf_1(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \quad (7)$$

3) Ikki funktsiya nisbatining limiti, maxrajning limiti noldan farqli bo'lsa, bu funktsiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad (8)$$

bo'ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \quad e = 2,71828... \quad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda **birinchi va ikkinchi ajoyib** limitlar deyiladi.

6. Aniqmasliklar va ularni ochish

1. Aniqmasliklar. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limitni hisoblashda $f(x)$, $\varphi(x)$

funktsiyalar ch.kich.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \rightarrow a$ da **(0/0) ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi. $f(x)$, $\varphi(x)$ funktsiyalar ch.kat.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \rightarrow a$ da **(∞/∞) ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi.

Xuddi shunga o'xshash $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 aniqmasliklar

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) - \varphi(x)], \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] \text{ va } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$$

limitlarni hisoblashda kelib chiqadi. Bunday hollarda limitlarni hisoblashga **aniqmasliklarni ochish** deyiladi.

$(0/0)$ va (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda quyidagi xossadan foydalaniladi: $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning biror atrofidagi hamma nuqtalarda o'zaro teng bo'lsa, ularning $x \rightarrow a$ dagi limiti ham teng bo'ladi.

Masalan, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{2(x - 3)}$ va $\varphi(x) = \frac{x + 3}{2}$ funksiyalar x ning

$x = 3$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun teng, chunki

$$\frac{x^2 - 9}{2(x - 3)} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{2(x - 3)} = \frac{x + 3}{2}$$

Yuqoridagi xossaga asosan,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

natijaga ega bo'lamiz.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 6}{6x} = \frac{5}{6}$$

ekanligini funksiya limitining ta'rifidan foydalanib isbotlang.

Yechish. Buni isbotlash uchun $f(x) = (5x + 6)/6x$ o'zgaruvchi miqdor va $A = 5/6$ o'zgarmas miqdor orasidagi farq $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko'rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x + 6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{5x + 6 - 5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

$1/x$ o'zgaruvchi miqdor $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya iborat. Shunday qilib,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x + 6)/6x = 5/6..$$

2-misol.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$$

ekanligini isbotlang hamda x va $(2x^2 - 5x + 4)$ larning qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

Yechish. $x \rightarrow 3$ bo'lganligi uchun $x - 3 = \alpha$ cheksiz kichik miqdordir.

$x = 3 + \alpha$ ni $(2x^2 - 5x + 4) - 7$ ayirmaga qo'yib,

$$\begin{aligned} 2(3 + \alpha)^2 - 5(3 + \alpha) + 4 - 7 &= 2(9 + 6\alpha + \alpha^2) - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = \\ &= 18 + 12\alpha + 2\alpha^2 - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = 2\alpha^2 + 7\alpha \end{aligned}$$

natijaga ega bo'lamiz.

α cheksiz kichik funksiya bo'lganligi uchun $2\alpha^2 + 7\alpha$ ham cheksiz kichik

bo'ladi. Shunday qilib, $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$ isbot bo'ldi.

Endi yuqoridagi holatni x argument, $2x^2 - 5x + 4$ funksiya qiymatlari jadvali bilan ko'rsataylik. Ma'lumki $x \rightarrow 3$ intiladi.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3$
$2x^2 - 5x + 4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\rightarrow 7$

Bu jadvaldan ko'rinadiki, argumentning 3 ga yaqinlashib boruvchi qiymatlari uchun, funksiyaning mos qiymatlari 7 ga yaqinlashib boradi, ya'ni $x - 3$ cheksiz kichik miqdorga $2x^2 - 5x + 4 - 7$ ayirmaning ham cheksiz kichik miqdori to'g'ri keladi. Yuqoridagi jadvalda $x < 3$ bo'lib, $x \rightarrow 3$ holni qaradik. $x > 3$ bo'lib, $x \rightarrow 3$ holni o'quvchiga mustaqil ko'rsatishni tavsiya qilamiz.

3-misol.

$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 6x + 3)$ limitni hisoblang.

Yechish. Algebraik yig'indining limiti, (5) formula, o'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan chiqarish (7) formulalarga asosan:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2}(4x^2 - 6x + 3) &= \lim_{x \rightarrow 2} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 6x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 4 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = \\ &= 4(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 7\end{aligned}$$

hosil bo'ladi.

Yuqoridagi misolda, limitlarning xossalriga asosan, argument x ning o'rniga uning limitik qiymatini qo'yishga olib keldi.

4-misol.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 7) / (2x^2 - 5x + 6) \quad \text{limitni hisoblang.}$$

Yechish. Ikkita funksiya nisbatining limiti (8) formula hamda oldingi misolda foydalanilgan limitlarning xossalarini qo'llasak,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 7}{2x^2 - 5x + 6} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 5x + 6)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 4x + \lim_{x \rightarrow 1} 7}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 5x + \lim_{x \rightarrow 1} 6} = \\ &= \frac{3(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 - 4(\lim_{x \rightarrow 1} x) + 7}{2(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 1} x + 6} = \frac{3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 7}{2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6} = \frac{6}{3} = 2\end{aligned}$$

bo'ladi.

Rasional funksiyaing limitini hisoblash shu funksiyaning argument x ning limitik qiymatidagi, qiymatini hisoblashga keltirildi.

Eslatma. $f(x)$ elementar funksiylarning $x \rightarrow a$ intilgandagi limiti (a aniqlanish sohasiga tegishli) funksiyaning $x = a$ nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi. Masalan,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left[\lg(t + \sqrt{t^2 + 80}) + \sqrt{t^2 + 8} \right] = \lg(1 + \sqrt{1^2 + 80}) + \sqrt{1^2 + 8} = \lg 10 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

$$5\text{-misol.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 2} \quad \text{limitni hisoblang.}$$

Yechish. $x = 1$ da surat ham, maxraj ham nolga aylanib $(0/0)$ ko'rinishdagi aniqmaslik hosil bo'ladi.

Surat va maxrajni $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ formula yordamida chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz. Bunda x_1 va x_2 lar $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlari. Demak,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)} = \frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)} = 5/3\end{aligned}$$

bo'ladi.

6-misol. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \rightarrow \infty$ da (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmas ifodaga ega bo'lamiz. Bunday aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini x ning eng yuqori darajalisiga, ya'ni x^2 ga bo'lamiz, hamda limitlarning xossalariidan foydalansak

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 5/x + 4/x^2}{3 + 7/x - 2/x^2} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (6 + 5/x + 4/x^2)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + 7/x - 2/x^2)} = \frac{6 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 2\end{aligned}$$

bo'ladi. Bunda $5/x$, $4/x^2$, $7/x$, $2/x^2$ lar $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir.

7-misol. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x = 3$ da surat va maxraj 0 ga teng bo'ladi. Maxrajda $\sqrt{x+1}$ irrasional ifoda mavjud, uni suratga o'tkazamiz, buning uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+1} + 2$ ga ko'paytiramiz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{\sqrt{(x+1)^2 - 2^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x+1-4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) \cdot (\sqrt{x+1} + 2) = (3+3)(\sqrt{3+1} + 2) = 6 \cdot 4 = 24. \end{aligned}$$

8-misol. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \\ &= - \frac{1}{\cos \pi/4 + \sin \pi/4} = - \frac{1}{\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2} = - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

natijani olamiz.

9-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan

foydalanib hisoblang.

Yechish. $5x = \alpha$, deb almashtirsak, bundan $x = \alpha/5$, $x \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow 0$ bo'ladi.

Shuning uchun,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha/5} = 5 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 5 \cdot 1 = 5,$$

chunki

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

10-misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib

hisoblang.

Yechish. $x \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x = \alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x = 3/\alpha$ hamda $x \rightarrow \infty$ da $\alpha \rightarrow 0$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{3/\alpha} = \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} \right]^3 = e^3$$

kelib chiqadi.

Shundayqilib, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = e^3$.

11-misol. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x \rightarrow 1$ da $1/(x-1) \rightarrow \infty$ va $2/(x^2-1) \rightarrow \infty$ bo'lib, $(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Oydinki,

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1-2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Oxirgi ifoda $x \rightarrow 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo'ladi. Shunday qilib,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

12-misol. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \rightarrow +\infty$ da $(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ &= \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}. \end{aligned}$$

Oxirgi ifoda $x \rightarrow \infty$ da (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, 11-misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2 + 3x/x^2} + x/x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + 3/x} + 1} = \frac{3}{1 + 1} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

bunda $x \rightarrow +\infty$ da $3/x \rightarrow 0$ bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

- 1.. Qanday miqdorlar o'zgaruvchi deb ataladi?
2. Qanday holda funksiya aniqlangan deyiladi?
3. Funksional bog'lanish qanday belgilanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning qiymatlar to'plami nima?
6. Qanday moslik funksiyani ifodalashi mumkin?
7. Funksiya qanday o'zgaruvchi?
8. Argument qanday o'zgaruvchi?
9. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
10. Oshkor va oshkormas funksiyalar qanday?
11. Funksiyaning funksiyasi yoki murakkab funksiya deb nimaga aytiladi?
12. Teskari funksiya qanday funksiya?
13. Funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi va u qanday yoziladi?
14. Chap va o'ng limitlar nimalar va u qanday yoziladi?
15. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar qanday miqdorlar?
16. Ikki funksiya algebraik yig'indisining limiti nimaga teng?
17. Chekli sondagi funksiyalar ko'paytmasining limiti nimaga teng?
18. O'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan chiqarish mumkinmi?
19. Ikkita funksiya nisbatining limiti nimaga teng?
20. Birinchi ajoyib limit deb nimaga aytiladi?
21. Ikkinchi ajoyib limit nimaga teng?
22. Aniqlanish sohasini ochish nimadan iborat?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. $f(x) = x^2 + 1$ funksiya berilgan: 1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$;
4) $f(2a)$ larni hisoblang.
2. Quyidagi funksiyalarning $D(f)$ aniqlanish sohasini va $E(f)$ qiymatlar to'plamini toping:

$$1) f(x) = \ln(x+3); \quad 2) f(x) = \sqrt{5-2x}; \quad 3) f(x) = \sqrt{1-|x|}.$$

3. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

$$1) f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}; \quad 2) f(x) = (a+x)/(a-x);$$

$$3) f(x) = \lg(5x - x^2 - 6); \quad 4) f(x) = 2^{\arccos(1-x)}.$$

4. Hajmi $v=1$ birlikka teng bo'lgan silindr asosining radiusi r va balandligi h orasidagi funksional bog'lanishni toping.

$$5. 1) f(u) = 1 - u, u = x^2; \quad 2) f(u) = 1/(1 - u), u(x) = x - 1/x;$$

$$3) f(u) = u^2, u(x) = 4x$$

funksiyalardan x ning murakkab funksiyalarini tuzing.

6. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalarni toping va topilgan funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish sohalarini aniqlang:

$$1) f(x) = x^2 - 1, x \in [0, +\infty); \quad 2) f(x) = 2x + 3, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$3) f(x) = (x - 1)^3, x \in (-\infty, +\infty); \quad 4) f(x) = x^2 - 1, x \in (-\infty, 0].$$

7. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va ularning grafiklarini yasang.

$$1) y = \frac{1}{x}; \quad 2) y = -\frac{3}{x}; \quad 3) y = 2 - \frac{1}{x}; \quad 4) y = \frac{2}{x-1}.$$

$$8. 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3}{5x} = \frac{4}{5}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} (5x + 8) = 3, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x + 6) = 10$$

ekanligini funksiya limiti ta'rifidan foydalanib isbotlang xamda x va berilgan funksiyalar qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

9. Quyidagi limitlarni, limitlarning xossalariidan foydalanib hisoblang:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 7x + 6); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} (3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x + 7);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 6x + 4}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 6};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 5}; \quad 6) \lim_{t \rightarrow 3} [2t + \sqrt{t^2 - 8} + \lg(3t + \sqrt{t^2 - 8})].$$

10. Ushbu $(0/0)$ va (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarni oching:

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{4x^2 - 5x - 6}; \\
& 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 - 6x^2 + 7x + 5}{8 - 4x + 3x^2 - 2x^3}; \\
& 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 8x - 9}{3x^5 + 6x^3 + 4x^2 - 2x + 11}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 8x^6 + 5x^4 - 3x^2 - 12}{10x^6 + 7x^5 - 6x^3 - 4x - 17}.
\end{aligned}$$

11. Quyidagi limitlarni hisoblang:

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x - 1}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x} - 1}; \\
& 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}; \\
& 5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}.
\end{aligned}$$

12. Quyidagi limitlarni birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalanib hisoblang:

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x / 3}{x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x / 2}{x^2}; \\
& 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x} + 2 - \sqrt{2}}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin 1/x; \\
& 7) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2/n)^n; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{1/x}; \quad 9) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 5/n)^n; \\
& 10) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/3n)^n; \quad 11) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2x)^{1/x}; \quad 12) \lim_{n \rightarrow \infty} [n/(n+1)]^n.
\end{aligned}$$

13. Quyidagi aniqmasliklarni oching:

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x + 1} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right); \\
& 3) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right); \quad 4) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{6}{x^2 - 9} \right).
\end{aligned}$$

16-mavzu. Funksiyaning uzluksizligi va uzilishi

Reja

1. Funksiya orttirmasi.
2. Funksiya uzluksizligi ta'riflari.
3. Funksiyaning uzilish va uning turlari.
4. Iqtisodiyotda qo'llaniladiga ayrim asosiy funksiyalar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, funksiya uzluksizligi, funksiyaning uzilishi, oraliqda uzluksiz, ikkita uzluksiz funksiya yig'indisi, ko'paytmasi va nisbati uzluksizligi, kesmada uzluksiz funksiyalar xossalari, funksiyaning uzilishi, 1-tur uzilish, 2-tur uzilish, bartaraf etiladigan(yo'qotiladigan) uzilish, elementar funksiyalarning uzluksizligi va uzilishi.

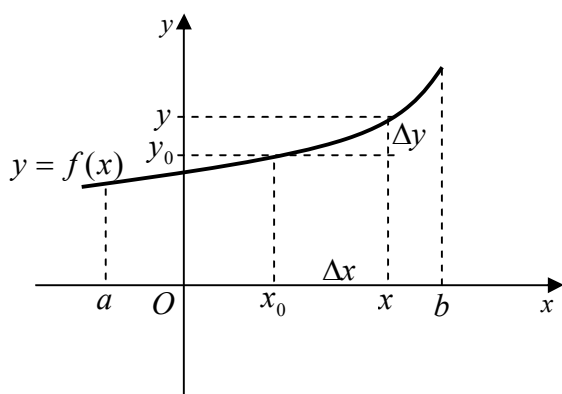
1. *Funksiya orttirmasi*

Uzluksizlik matematik tahlilning asosiy tushunchalaridan biridir. Matematika uzluksiz funksiya tushunchasiga birinchi navbatda turli harakat qonunlarini o'rganish natijasida keldi. Fazo va vaqt uzluksiz, masalan: harakatdagi nuqtaning bosib o'tgan yo'li s ning t vaqtga bog'lanishini ifodalovchi $s = f(t)$ qonun uzluksiz funksiyaga misol bo'ladi.

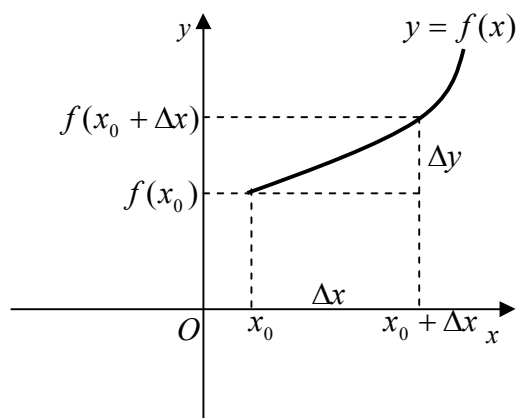
Qattiq jismlar, suyuqlik va gazlardagi holatlar hamda jarayonlar uzluksiz funksiyalar yordamida tavsiflanadi. Bunday uzluksiz jarayonlar iqtisodiyot modellarida ham mavjud. Bunday jarayonlar mexanika fizika va bir qancha maxsus fanlarda muayyan holda o'rganiladi.

Matematikada uzluksiz jarayonni umumiy holda o'rganamiz.

Funksiya orttirmasi. $y = f(x)$ funksiya biror $[a, b]$ kesmada aniqlangan va x_0 shu kesmadagi biror nuqta bo'lsin. x argumentning keyingi qiymati bo'lsa, $x - x_0 = \Delta x$ ga **argument orttirmasi** deyiladi (1-chizma).



1-chizma



2-chizma

$f(x) - f(x_0)$ funksiyaning qiymatlari orasidagi farqqa **funksiya orttirmasi** deyiladi va odatda Δy bilan belgilanadi. $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ yoki $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

1-chizmadan ko'rinadiki $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta y \rightarrow 0$ bo'ladi.

1-misol. $y = f(x) = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada argument $\Delta x = 0,5$ orttirma olgandagi funksiya Δy orttirmasini toping.

Yechish. $f(x_0) = 2^3 = 8$ funksiyaning boshlang'ich nuqtadagi qiymati. $f(x_0 + \Delta x) = f(2 + 0,5) = (2 + 0,5)^3$ funksiyaning keyingi qiymati, demak, funksiya orttirmasi

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2 + 0,5)^3 - 2^3 = \\ &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 2 \cdot 0,5^2 + 0,5^3 - 8 = 7,625 \end{aligned}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, $\Delta y = 7,625$.

2. Funksiya uzluksizligi ta'riflari. 1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo'lib, argumentning x_0 nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya'ni

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **uzluksiz deyiladi** (2-chizma). Bu ta'rifga qo'yidagi ta'rif ham teng kuchlidir.

2-ta'rif. x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan $y = f(x)$ funksiya shu nuqtada chekli limitga ega bo'lib, bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

Funksiya uzluksizligi ta'riflari quyidagi **shartlarni** o'z ichiga oladi:

- 1) funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;
- 2) funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o'ng limitlari

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

mavjud;

- 3) x_0 nuqtada chap va o'ng limitlar o'zaro teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x);$$

- 4) chap va o'ng limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

2-misol. $y = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada uzluksizligini tekshiring.

Yechish. Ma'lumki, $y = x^3$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada va uning istalgan atrofida aniqlangan. Uzluksizlikni 1-ta'rifga asosan tekshiramiz. Buning uchun $x_0 = 2$ nuqtadagi funksiya orttirmasini topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 = \\ &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot 2 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3 \end{aligned}$$

argument orttirmasi $\Delta x \rightarrow 0$ ga intilganda limitga o'tamiz.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (12 \cdot \Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3) = 12 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 + 0^3 = 0.$$

Shunday qilib, $\Delta x \rightarrow 0$ da $x_0 = 2$ nuqtada $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, bu esa 1-ta'rifga asosan

funksiya uzluksiz ekanligini bildiradi. Bu misolda x_0 nuqta o'rniga ixtiyoriy nuqtani olish mumkin (masalan, $x_0 = 3$ uchun uzluksizlikni tekshiring).

Funksiya oraliqning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u shu **oraliqda** uzluksiz deyiladi.

2-misolda $y = x^3$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqning hamma nuqtalarida uzluksizligi ravshan. Demak, $y = x^3$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzluksiz funksiyadir.

Elementar funksiyalarning hammasi o'zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdir.

$f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa:

1) $f(x) \pm \varphi(x)$; 2) $f(x) \cdot \varphi(x)$; 3) $f(x)/\varphi(x)$ ($\varphi(x_0) \neq 0$ bo'lganda) lar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Kesmada uzluksiz funksiyaning xossalari. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u: 1) shu kesmada chegaralangan; 2) shu kesmada eng kichik va eng katta qiymatlarga erishadi; 3) kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, shu kesmaning biror nuqtasida 0 ga teng bo'ladi; 4) $f(a)$ va $f(b)$ orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

$y = f(z)$ va $z = \varphi(x)$ funksiyalar o'z argumentlarining uzluksiz funksiyalari bo'lsa, $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham uzluksiz bo'ladi. $y = f(x)$ uzluksiz bo'lib, $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo'lsa, u ham uzluksizdir.

3. Funksiyaning uzilish va uning turlari

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan, lekin bu nuqtaning o'zida uzluksizlik shartlaridan birortasi bajarilmasa, funksiya x_0 nuqtada **uzilishga ega deyiladi**.

$f(x)$ funksiya uchun

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ chekli limitlar mavjud bo'lsa, chap va o'ng

limitlar hamda $f(x_0)$ sonlar o'zaro teng bo'lmasa, x_0 nuqta **1-tur uzilish nuqtasi** deyiladi.

Xususan, $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$ bo'lsa x_0 **bartaraf**

qilinadigan (yo'qotiladigan) uzilish nuqtasi deyiladi.

1-tur uzilish nuqtasi bo'lmagan uzilish nuqtalariga **2-tur uzilish nuqtalari** deyiladi. Bunday nuqtalarda, aqalli bitta tomonli limit qiymati cheksiz yoki mavjud bo'lmaydi.

1-misol. $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada 1-tur uzilishga ega

ekanligini isbotlang.

Yechish. funksiya $x_0 = 2$ nuqtada aniqlanmagan. Absolyut qiymat ta'rifidan $x-2 < 0$ yoki $x < 2$ va $x-2 > 0$ yoki $x > 2$ bo'lganda mos ravishda

$$f(x) = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1, \quad f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$$

bo'ladi.

Demak, $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 1$.

Shunday qilib, $x_0 = 2$ nuqta 1-tur uzilish nuqtasi bo'ladi. Bu uzilish nuqtasi **bartaraf** qilib (yo'qotib) bo'lmaydigan uzilish nuqtasiga kiradi.

2-misol. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, funksiya $x_0 = 0$ nuqtada aniqlanmagan,

lekin $x \neq 0$ hamma nuqtalarda aniqlangan.

Bir tomonli limitlar o'zaro teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Shunday qilib, berilgan funksiya uchun $x_0 = 0$ nuqta **bartaraf qilinadigan (yo'qotiladigan) uzilish** nuqtasi bo'ladi.

3-misol. $f(x) = 6/(x-3)^2$ funksiyaning $x=3$ nuqtada uzilishga ega ekanligini ko'rsating:

Yechish. Berilgan funksiya $x=3$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. $x < 3$ bo'lganda $f(x) > 0$ va $x > 3$ bo'lganda ham $f(x) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = +\infty \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = +\infty.$$

Bu 2-tur uzilishdir.

4. Iqtisodiyotda qo'llaniladiga ayrim asosiy funksiyalar

1. Chiziqli funksiya. Ma'lumki,

$$y = ax + b \quad (1)$$

formula bilan aniqlangan funksiya chiziqli funksiya deyiladi. Bu burchak koeffitsiyenti $k = a$, boshlang'ich ordinatasi b bo'lgan to'g'ri chiziqli tenglamasidir.

1-misol. Biror korxonada ishlab chiqarilayotgan bir xil mahsulot xarajatini ikki guruh:

1) mahsulot hajmiga, proporsional o'zgaruvchi xarajat, masalan, materiallar sarfi;

2) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmiga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas xarajatlar, masalan, ma'muriyat binosi ijarasiga, uni isitishga ketadigan va boshqa xarajatlar deb qarash mumkin.

O'zgarmas xarajatlarni b bilan, o'zgaruvchi xarajatlarni, mahsulotning bir birligi uchun a bilan belgilasak, biror davrda x birlik hajmdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan umumiy xarajat

$$y = b + ax$$

bo'lib, bu chiziqli funksiya.

2-misol. Mahsulotning umumiy bahosi uning soniga proporsional bo'lsin. a bitta mahsulot narxi bo'lsa, x birlik mahsulotning umumiy bahosi

$$y = ax$$

chiziqli funksiya bilan ifodalanadi, ma'lumki bu koordinatlar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasidir.

Chiziqli funksiya va uning grafigi, iqtisodiy miqdorlar orasida proporsionallik mavjud bo'lgan bog'lanishlarda ishlatiladi.

2. Darajali funksiya. Bunday funksiya

$$y = x^\alpha \quad (2)$$

formula bilan ifodalanadi, bunda α 0 dan farqli ixtiyoriy haqiqiy son. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi α ko'rsatgichga bog'liq. α natural son bo'lsa, hamma haqiqiy sonlar uchun aniqlangan, α butun manfiy son bo'lsa,

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

bo'lib, $x \neq 0$ bo'lgan hamma x lar uchun aniqlangan (bunda n natural son). $\alpha = 1/n$ ko'rinishdagi son bo'lsa,

$$y = f(x) = x^\alpha = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

bo'lib, n toq son bo'lsa, $(-\infty, +\infty)$ intervalda, n juft son bo'lsa, $[0, \infty)$ intervalda aniqlangan.

Umuman olganda darajali funksiya o'zining aniqlanish sohasida uzluksizdir.

3-misol. Italyan iqtisodchisi Pareto jamiyatda foydani taqsimlashning quyidagi qoidasini taklif etdi: y bilan x dan kichik bo'lmagan foydaga ega bo'lgan shaxslar sonini belgilasak,

$$y = \frac{a}{x^m}$$

bo'ladi, bunda a va m o'zgarmaslar.

Pareto qonuni katta foydaga ega bo'lganda, taqsimotni yetarli darajada aniqlik bilan ifodalaydi, past darajadagi foydaga ega bo'lganda aniq emas.

Biror jamiyatda foydani taqsimlash

$$y = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$$

formula bilan aniqlansin:

- 1) 100000 dan ko'p foydaga ega bo'lgan shaxslar soni;
- 2) 100 nafar eng boy shaxslar orasida, eng kam foydani toping.

Yechish. 1) masala sharti bo'yicha, $x = 100000$, uni taqsimot formulasiga qo'ysak:

$$\begin{aligned} \lg y &= \lg \frac{2000000000}{100000^{1,5}} = \lg 2000000000 - 1,5 \lg 100000 = \lg 2 \cdot 10^9 - 1,5 \lg 10^5 = \\ &= 9 + 0,301 - 1,5 \cdot 5 = 9,301 - 7,5 = 1,801, \\ y &= \frac{2000000000}{100000^{1,5}} \end{aligned}$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni logarifmlasak: ya'ni $\lg y = 1.801$ bo'ladi. Logarifmlar jadvalidan $y = 63,2$ ni topamiz. Shunday qilib, Pareto taqsimoti bo'yicha 63 kishi 100000 dan ko'p foydaga ega bo'ladi;

- 2) masala sharti bo'yicha $y = 100$, taqsimot formulasidan

$$100 = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan $x = 73700$ ekanligini aniqlash mumkin (uni bajarishni o'quvchiga havola etamiz).

Shunday qilib, 100 nafar eng boy kishilar ichida eng kichik foyda 73700 ni tashkil etadi.

Funksiyalarning iqtisodda qo'llanilishiga misollarni ko'plab keltirish mumkin. Bu mavzu bo'yicha talabalarning shug'ullanishini taklif etamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday jarayon uzluksiz bo'ladi?
2. Funksiya orttirmasi nima?
3. Qanday funksiya uzluksiz deyiladi?
4. Qanday funksiyaga oraliqda uzluksiz deyiladi?
5. Ikkita uzluksiz funksiya yig'indisi, ko'paytmasi va nisbati uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
6. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalar qanday xossalarga ega?
7. Qanday funksiyaga uzilishga ega deyiladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $y = x^2$ funksiyaning uzluksizligini, $x_0 = 3$, $x = 5$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko'rsating.
2. 1) $y = 3x^3 + 5x^2 - 7$, 2) $y = 4x^3 + 3x^2 + 5$ funksiyalar uzluksizligini $x_0 = 2$; $x_1 = -3$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko'rsating.
3. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning x ning hamma qiymatlari uchun uzluksiz ekanligini ko'rsating.
4. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

$$1) f(x) = \frac{8}{x+4}; \quad 2) f(x) = \frac{x}{x-4}.$$

5. Ushbu funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}.$$

Differensial hisob

17-ma'ruza. Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi

Reja.

1. Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida.
2. Funksiya hosilasining ta'rifi.
3. Hosilaning geometrik ma'nosi.
4. Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali.
5. Yuqori tartibli hosilalar.
6. Oshkormas va parametrik berilgan funksiyalarning hosilalari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Oniy tezlik, hosila, egri chiziqqa urinma, yuqori tartibli hosila, differensiallash, murakkab funksiya, oshkormas va parametrik funksiyalar hosilalari.

1. Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida

Oniy tezlik haqidagi masala. Amaliyotda har xil jarayonlarni tekshirishda birinchi navbatda, shu jarayonning kechishi tezligini aniqlash kerak bo'ladi. Tezlikni aniqlash haqidagi masala fan va texnikaning eng asosiy masalalaridan biridir.

Ma'lumki, tekis kechadigan jarayonlarda uning kechishi tezligi o'zgarmasdir. Masalan, tekis harakatda o'tilgan yo'lning shu yo'lni o'tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o'zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko'pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir. Masalan, og'ir moddiy nuqtaning bo'shliqda og'irlik kuchi ta'sirida erkin tushishi masalasini qaraylik. Fizikadan ma'lumki, bo'shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S = \frac{g}{2} t^2 \quad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu yerda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o'tgan yo'l, g erkin tushish tezlanishi, $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$. Bu harakat notekis bo'lib, uning tezligini topish masalasini qaraymiz.

Vaqtning biror aniq t momenti (oni)ni qaraylik. Bu momentda moddiy nuqta A holatda bo'lsin. OA yo'lning miqdori (1) formula bilan topiladi. Vaqt Δt miqdorga ortsin, ya'ni t , Δt orttirma qabul qiladi. $t + \Delta t$ momentda nuqta B holatda bo'ladi. AB , vaqt Δt orttirma olgandagi yo'l orttirmasi, uni $AB = \Delta S$

bilan belgilaymiz. (1) formulaga $t + \Delta t$ qo'yib,

$$S + \Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2, \quad \text{bundan} \quad \Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}$$

$$\text{yoki} \quad \Delta S = \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Oxirgi tenglikni Δt ga bo'lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t) \quad (2)$$

natijani olamiz. Oxirgi tenglikdan ma'lumki, $\Delta S / \Delta t$ nisbat t va Δt ga bog'liq.

Masalan: $\Delta t = 0,1$ sek, $t = 1$ sek bo'lganda,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 1 + 0,1) = 1,05g \text{ bo'lib, } t = 3 \text{ sek bo'lganda}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 3 + 0,1) = 3,05g \text{ bo'ladi.}$$

Shuning uchun, notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo'ladi. Shunday qilib, vaqtning har bir momentidagi **oniy tezlik** haqida gapirish kerak bo'ladi.

Oniy tezlik tushunchasini qanday aniqlash kerak?

(2) tenglikdan ma'lumki, t o'zgarmas bo'lganda, $\Delta S / \Delta t$ A dan B holatgacha oraliqdagi o'rtacha tezlik bo'lib, uni v_{yp} bilan belgilaymiz. Ma'lumki, (2) da Δt qancha kichik bo'lsa, t momentdagi tezlikni shuncha yaxshiroq ifodalaydi. Bundan shunday xulosaga kelamizki, erkin tushayotgan nuqtaning t momentidagi oniy tezligi v ni v_{yp} o'rtacha tezlikning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti kabi aniqlaymiz, ya'ni

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{yp}$$

Shunday qilib, oniy tezlikni hisoblash uchun qo'yidagi ko'rinishdagi limitni hisoblash kerak bo'ladi.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (3)$$

(3) ko'rinishdagi limitni hisoblashga ko'p sondagi amaliy masalalarni yechishda to'g'ri keladi.

Umuman, o'zgaruvchi miqdor o'zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi.

Shuning uchun (3) ko'rinishdagi limitlarni hisoblashni umumiy holda qarash zarur bo'ladi.

2. Funksiya hosilasining ta'rif. 1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, x_0 nuqtadagi funksiya Δy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining, argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga, $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi. Bu limit

$$y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$$

simvollardan biri bilan belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga asosan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi, bu limit mavjud bo'lsa, hosila x_0 nuqtada mavjud deyiladi.

Hosilani topish jarayoni ***differensiallash*** deb ataladi.

Biz o'rganayotgan $y = f(x)$ funksiya orqali qanday jarayon tavsiflanmasin, uning hosilasi $y = f(x)$ fizik nuqtai nazardan shu jarayon kechishining tezligini ifodalaydi.

Chunonchi, τ vaqt, Q biror reaksiya natijasida olingan moddaning τ momentdagi miqdori bo'lsa, demak Q τ ning funksiyasi bo'ladi. Q dan olingan hosila, reaksiya kechishining tezligini ifodalaydi. τ vaqt, Q biror o'tkazgich kesim yuzidan vaqt birligida o'tayotgan elektr miqdori bo'lsa, Q hosila tok kuchining o'zgarish tezligini ifodalaydi. Q isitilayotgan jismning o'zgaruvchi temperaturasi tavsiflasa, Q' hosila isish tezligini ifodalaydi.

Funksiya hosilasini hosila ta'rifiga asosan topishga bir necha misollar qaraymiz:

1-misol. $y = x^3$ funksiyaning hosilasini hosila ta'rifiga asosan toping.

Yechish. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitni

hisoblaymiz:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

;

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2) + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

Shunday qilib, $y' = 3x^2$.

2-misol. $y = \sin x$ funksiya hosilasini hosila ta'rifiga asosan, toping.

Yechish. argument x , Δx orttirma olganda, funksiya Δy orttirma oladi.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos(x + \Delta x / 2) \sin \Delta x / 2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x / 2)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)};$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \partial a \quad \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \rightarrow \cos x. \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)} = 1.$$

Shunday qilib, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$, $y' = (\sin x)' = \cos x$

bo'ladi.

Umuman, x va y o'zgaruvchilarning fizik, iqtisodiy, kimyoviy ma'nolaridan voz kechsak, y dan x bo'yicha olingan hosila, y ning x ga bog'liq bo'lib o'zgarishining tezligini ifodalaydi.

3. Hosilaning geometrik ma'nosi. Hosila muhim geometrik ma'noga ega. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi uning grafigiga $M(x_0, f(x_0))$ **nuqtada o'tkazilgan urinmaning** OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan

burchagining tangensiga teng. $y = f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

bo'ladi, bunda $y_0 = f(x_0)$. Funktsiya grafigiga urinish nuqtasi $M_0(x_0, y_0)$ da o'tkazilgan normalning tenglamasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), (f'(x_0) \neq 0)$$

bo'ladi.

3-misol. $y = \frac{x^3}{3} + 4$ egri chiziqqa absissasi $x_0 = 2$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normalning tenglamasini yozing.

Yechish.

$$y_0 = \frac{20}{3}, \quad y'(2) = 2^2 = 4, \quad y - \frac{20}{3} = 4(x - 2)$$

yoki

$3y - 20 = 12(x - 2), \quad 12x - 3y - 4 = 0$, bu $M_0(2, 20/3)$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning tenglamasi. Normalning burchak koeffitsiyenti

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{4}, \quad \text{demak,} \quad y - \frac{20}{3} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

yoki

$$12y - 80 = -3(x - 2), \quad 3x + 12y - 86 = 0$$

hali, bu M_0 nuqtadan o'tkazilgan normalning tenglamasi bo'ladi.

4. Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali

1). Agar $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, ya'ni $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya bo'lsa, $y = f(u)$ funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha hosilasi

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

bo'ladi.

Agar $y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ lar o'zaro teskari funksiyalar bo'lsa,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

bo'ladi.

2). Differensiallash qoidalarini eslatib o'tamiz:

x erkli o'zgaruvchi, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ uning differensiallanuvchi funksiyalari bo'lsin.

1., $C' = 0$ C – o'zgarmas miqdor.

2. $x' = 1$.

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

5. $(cu)' = c \cdot u'$.

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$.

3). Murakkab funksiya uchun hosilalar jadvali quyidagicha bo'ladi:

1) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad n \in R, \quad u > 0;$

2) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$

3) $(e^u)' = e^u \cdot u';$

4) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$

5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

8) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$

9) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$

$$10) (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$11) (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$12) (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$13) (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$14) (u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

5. Yuqori tartibli hosilalar. $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb, uning hosilasidan olingan hosilaga, ya'ni $(y')'$ ga aytiladi. Ikkinchi tartibli hosila quyidagilarning biri bilan belgilanadi:

$$y'', f''(x), d^2y/dx^2.$$

$y = f(x)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi deb uning $(n-1)$ tartibli hosilasidan olingan hosilaga aytiladi va quyidagilarning biri bilan belgilanadi $y^{(n)}, f^{(n)}(x), d^n y/dx^n$. Ta'rifga ko'ra $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

1-misol. $y = (2x^2 - 7)^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = [(2x^2 - 7)^3]' = 3(2x^2 - 7)^2 (2x^2 - 7)' = 3(2x^2 - 7)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2 - 7)^2;$$

$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= [12x(2x^2 - 7)^2]' = 12\{x'(2x^2 - 7)^2 + x[(2x^2 - 7)^2]'\} = \\ &= 12[(2x^2 - 7)^2 + 2x(2x^2 - 7) \cdot 4x] = 12(2x^2 - 7)(2x^2 - 7 + 8x^2) = \\ &= 12(2x^2 - 7)(10x^2 - 7). \end{aligned}$$

Demak, $y'' = 12(2x^2 - 7)(10x^2 - 7)$.

2-misol. $y = x^n$ funksiyaning n - tartibli hosilasini toping.

$$\text{Yechish. } y' = nx^{n-1}, y'' = n(n-1)x^{n-2}, y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}, \dots, y^{(n-1)} = \\ = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n - (n-2)]x^{n-(n-1)} = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2x \\ y^{(n)} = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$(n!)$ 1 dan n gacha bo'lgan sonlar ko'paytmasining qisqa yozilishi).

6.Oshkormas va parametrik berilgan funksiyalarning hosilalari 1). x o'zgaruvchining y funksiyasi *oshkormas ko'rinishda* $F(x, y) = 0$ berilgan bo'lsa, y' hosilani topish uchun $F(x, y) = 0$ tenglikni x bo'yicha differensiallab, so'ngra hosil bo'lgan tenglamadan y' ni topamiz. Ikkinchi va undan yuqori tartibli hosilalar ham shu kabi topiladi.

1-misol. $x^2 + y^2 = 100$ oshkormas ko'rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilani toping.

Yechish. $2x + 2y \cdot y' = 0$; $2yy' = -2x$, $y' = -x/y$; keyingi ifodadan yana hosila olib,

$$(y')' = -\frac{x'y - x(y)'}{y^2} = -\frac{y - xy'}{y^2}.$$

Endi, $y' = -\frac{x}{y}$ ni xisobga olsak,

$$y'' = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2}$$

yoki

$$y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}; y'' = -\frac{100}{y^3}$$

bo'ladi, chunki, $x^2 + y^2 = 100$ edi.

2). Funksional bo'lanish parametrik

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, dy/dx , d^2y/dx^2 hosilalar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \quad (1)$$

formula bilan topiladi.

2- misol.

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

parametrik ko'rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = a \cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a \sin t$$

(1) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-a \sin t \cdot (-a \sin t) - (-a \cos t) \cdot a \cos t}{(-a \sin t)^3} = \frac{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}{-a^3 \sin^3 t} = \\ &= -\frac{a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)}{a^3 \sin^3 t} = -\frac{1}{a \sin^3 t}. \end{aligned}$$

Demak,
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$$

bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Jarayonning kechishi tezligi nima?
2. Oniy tezlik nima bilan xarakterlanadi?
3. Funksiyaning kosilasi deb nimaga aytiladi?
4. Kosilaning geometrik ma'nosi nima?
5. Ikkinchi tartibli kosila nima?
6. Differensiallash ko'oidalari va formulalarini yoddan bilasizmi?
7. Qanday kosilaga n -tartibli kosila deyiladi?
8. Oshkormas va parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalar kosilalari qanday topiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning kosilalari topilsin:

$$1) y = x \ln x; \quad 2) y = \frac{1 + \ln x}{x}; \quad 3) y = \lg(5x).$$

$$4) y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}; \quad 5) y = \frac{\ln x}{x^2}; \quad 6) y = \ln(x^2 + 2x).$$

$$7) y = \ln(1 + \cos x); \quad 8) y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x.$$

$$9) y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}); \quad 10) y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}; \quad 11) y = \lg(5x + 3).$$

$$12) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}); \quad 13) y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - ax}}; \quad 14) y = \ln(\operatorname{tg} x).$$

2. ЎBuyidagi funksiyalarning kósilalari topilsin:

$$1) y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x; \quad 2) y = \arcsin \sqrt{1 - 4x}.$$

$$3) y = x - \operatorname{arctg} x; \quad 4) y = \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$5) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}; \quad 6) y = \arccos(1 - 2x).$$

$$7) y = x\sqrt{1 - x^2} + \arccos x; \quad 8) y = \arcsin(e^{3x}).$$

$$9) y = x \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad 10) y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$11) y = \arcsin \sqrt{x}; \quad 12) y = \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1}.$$

$$13) y = x \arccos(1 - x^2); \quad 14) y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}.$$

$$15) y = \arccos \sqrt{1 - 3x} + \sqrt{2x - 4x^2};$$

3. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sqrt{1 + x^2}$ funksiyalarning 2- tartibli kósilalari topilsin.

4. 1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = x \sin x$ funksiyalarning 3- tartibli kósilalari topilsin.

5. 1) $y = x \ln x$; 2) $y = te^{-t}$; 3) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ funksiyalarning 3- tartibli kósilalari topilsin.

6. 1) $y = \ln x$; 2) $y = e^{\frac{x}{a}}$; 3) $y = \sqrt{x}$ funksiyalarning n - tartibli kósilalari topilsin.

7. 1) $y = x^n$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = \cos^2 x$ funksiyalarning n - tartibli kósilalari topilsin.

18,19-ma'ruzalar. Funksiyaning differensial va differensial hisobning asosiy teoremlari

Reja

1. Funksiyaning differensial.
2. Funksiyaning differensialining taqribiy hisoblashga tatbiqi.
3. Differensial hisobning asosiy teoremlari

Tayanch ibora va tushunchalar

Funksiya differensial, ikkinchi tartibli differensial, differensial yordamida taqribiy hisoblash, cheksiz kichik funksiya, funksiya orttirmasi uchun formula, Ferma teoremasi, Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Chekli orttirmalar formulasi, Teylor va Makloren formulalari, qoldiq had formulasi.

1. Funksiyaning differensial. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi, ya'ni hosilaga ega bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \text{da} \quad \alpha \rightarrow 0$$

bo'lib, bunda α cheksiz kichik funksiya bo'ladi. Demak,

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x \quad (1)$$

bo'ladi. (1) formulaga **funksiya orttirmasi uchun formula** deyiladi.

1-ta'rif. Funksiya orttirmasining $y' \Delta x$ bosh qismiga **funksiya differensial** deyiladi va dy bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan,

$$dy = y' \Delta x \quad (2)$$

(2) formulada $y = x$ bo'lsa, $dx = x' \Delta x$ yoki $dx = \Delta x$ bo'lib, funksiya differensial

$$dy = y' dx$$

ko'rinishda bo'ladi.

Elementar funksiyalarning differensial jadvalini keltiramiz.

1. $d(x^n) = nx^{n-1} dx \quad (x > 0);$
2. $d(a^x) = a^x \ln a dx \quad (a > 0, a \neq 1);$
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e dx \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1);$
4. $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx;$
5. $d(\sin x) = \cos x dx;$
6. $d(\cos x) = -\sin x dx;$
7. $d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx;$
8. $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx;$

$$9. d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$10. d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$11. d(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2} dx;$$

$$12. d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

2. Funksiyaning differensialining taqribiy hisoblashga tatbiqi.

(1) formuladan $\Delta y \approx dy$ taqribiy tenglik kelib chiqadi, ya'ni Δx yetarlicha kichik bo'lganda, funksiya orttirmasi uning differensialiga taqriban teng deyish mumkin. Bunda $\Delta y \approx dy$ bo'lib, ya'ni $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ yoki

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (3)$$

(3) formuladan *funksiya qiymatini taqribiy hisoblashlarda* foydalaniladi.

2-ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning *ikkinchi tartibli differensial* deb funksiya differensialidan olingan differensialga aytiladi va

$$d^2 y = d(dy) = d(y' dx) = y'' dx^2$$

bilan belgilanadi.

Xuddi shunday, $\underline{d^3 y = y''' dx^3}$, ... , $d^n y = y^{(n)} dx^n$ differensiallar ham aniqlanadi.

1-misol. $y = \sqrt{1+x^2}$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping.

Yechish. Oldin birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = (\sqrt{1+x^2})' = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y'' = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{x'\sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot x/\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Shunday qilib,

$$dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{va} \quad d^2 y = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx^2$$

bᐁladi.

2-misol. $f(x) = 3x^2 - 7$ funksiyaning, argument 2 dan 2,001 gacha o'zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

Yechish. (3) formuladan foydalanamiz. $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.001$.
 $f'(x) = 6x$, $f'(x_0) = 6 \cdot 2 = 12$, $\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0) \Delta x = 12 \cdot 0.001 = 0.012$.

Funksiya orttirmasi o'rniga uning differensialini olib qancha xatoga yo'l qo'yilganini baholaymiz: buning uchun haqiqiy orttirmani topamiz,

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 7 - (3x_0^2 - 7) = \\ &= 3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 7 - 3x_0^2 + 7 = \\ &= 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 6 \cdot 2 \cdot 0.001 + 3 \cdot 0.000001 = 0.012003.\end{aligned}$$

Demak, absalyut xato

$$|\Delta y - dy| = |0.012003 - 0.012| = 0.000003.$$

Nisbiy xato

$$\frac{|\Delta y - dy|}{dy} = \frac{0.000003}{0.012} = 0.00025 \quad \text{yoki} \quad 0,025\%.$$

Taqribiy hisoblash xatosi ancha kichik, bu esa yuqoridagi taqribiy tenglikdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinligini ko'rsatadi.

3. Differensial hisobning asosiy teoremlari

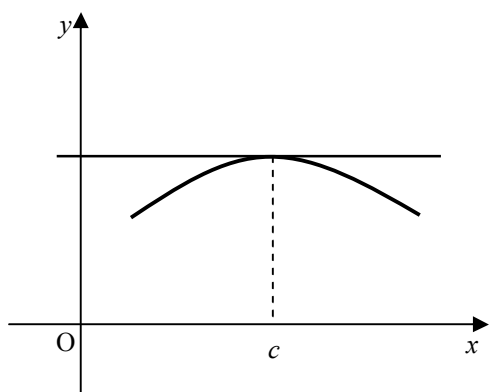
Biror funksiyaning hosilasini bilish funksional bog'lanish haqida xulosa chiqarishga imkoniyat yaratadi. Hosila tushunchasining har xil tatbiqlari, xususan iqtisodga qo'llanilishida sodda lekin muhim bo'lgan teoremlar va formulalar yotadi. Bu teoremlardan ayrimlarini isbotsiz keltiramiz.

1. Ferma teoremasi. (1602-1665y. - atoqli fransuz matematigi). $f(x)$ funksiya birorta X oraliqda aniqlangan va bu oraliqning ichki c nuqtasida eng katta (eng kichik) qiymatga ega bo'lib, hamda bu nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud bo'lsa,

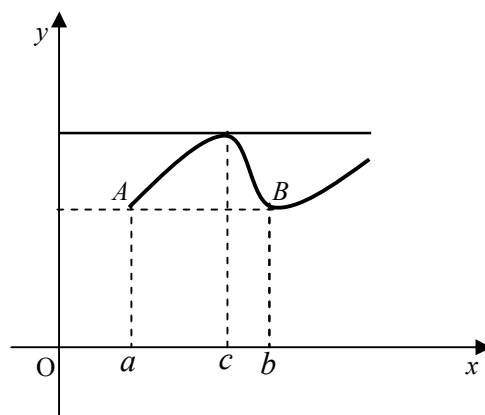
$$f'(c) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lishi zarur.

Ferma teoremasi sodda geometrik ma'noga ega. Teorema shartlari bajarilganda X oraliqda shunday c nuqta mavjud bo'ladiki, bu nuqtadan funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma OX o'qiga parallel bo'ladi (1-chizma).



1-chizma



2-chizma

2. Roll teoremasi. (Mishel Roll (1652-1719) fransuz matematigi). 1) $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz; 2) aqalli (a, b) oraliqda $f'(x)$ chekli hosila mavjud; 3) oraliqning chetki nuqtalarida funksiya teng $f(a) = f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, a va b orasida shunday c nuqta topiladiki,

$$f'(c) = 0$$

tenglik bajariladi ($a < c < b$).

Geometrik nuqtasi nazardan Roll teoremasi quyidagini bildiradi: $y = f(x)$ funksiyaning chetki ordinatalari teng bo'lsa, egri chiziqda shunday nuqta topiladiki, undan egri chiziqqa o'tkazilgan o'rinma, OX o'qiga parallel bo'ladi (2-chizma).

3. Lagranj teoremasi. (1736-1813y. mashhur fransuz matematigi va mexanigi). 1) $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz; 2) aqalli (a, b) ochiq oraliqda chekli $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, a va b orasida kamida bitta c ($a < c < b$) nuqta topiladiki

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Lagranj teoremasini geometrik tomondan quyidagicha ifodalash mumkin

(3-chizma): teorema shartlarida

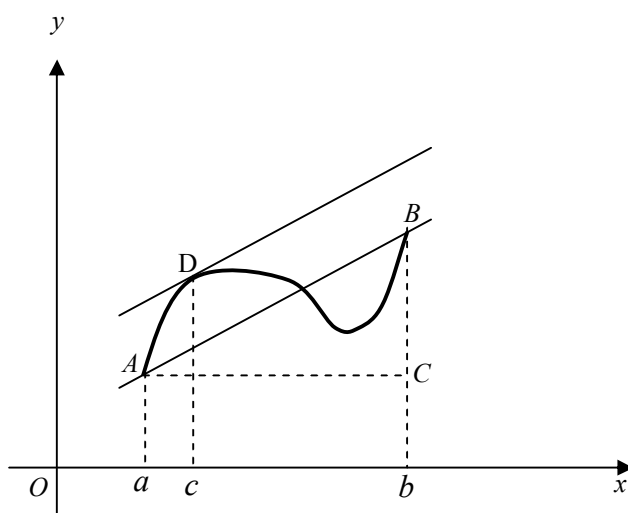
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{CB}{AC}$$

nisbat AB kesuvchining burchak koeffitsiyenti ekanini, $f'(c)$ esa $y = f(x)$ egri chiziqqa $x = c$ absissali nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti ekanini payqaymiz.

Shunday qilib, Lagranj teoremasining tasdig'i AB yoyda hyech bo'lmaganda bitta shunday D nuqta topiladiki, bu nuqtadan o'tkazilgan urinma, AB kesuvchiga parallel bo'ladi.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{yoki} \quad f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

formulaga Lagranj formulasi yoki chekli orttirmalar formulasi deyiladi.



3-chizma

Yuqoridagi teoremlarning isbotini matematik tahlilning kengroq dasturlari uchun yozilgan adabiyotlardan topish mumkin (masalan, Soatov Yo.U. Oliy matematika. j.I. -T.: O'qituvchi 1992. 193-197 b.)

4. Teylor teoremasi ((1685-1731y., ingliz matematigi). $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtani o'z ichiga olgan biror oraliqda $(n + 1)$ tartibgacha barcha hosillarga ega bo'lsa,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

formula o'rinli bo'ladi, bunda θ , $0 < \theta < 1$ bo'lgan son. Bu formulaga qoldiq hadi, Lagranj formasida

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

bo'lgan, **Taylor formulasi** deyiladi. Taylor formulasida $a = 0$ bo'lsa,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

formula hosil bo'ladi. Bunga **Makloren formulasi** deyiladi.

Taylor va Makloren formulalari funksiyalarni x ning darajalari bo'yicha yoyishda va taqribiy hisoblashlarda katta ahamiyatga ega.

1-**misol**. Ushbu $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ funksiya $(-1; 1)$ intervalning ichki $x = 0$ nuqtasida o'zining eng kichik qiymatiga erishsa ham, bu funksiya uchun Ferma teoremasining xulosasi o'rinli emas. Shuni ko'rsating.

Yechish. Berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada o'zining eng kichik qiymatiga erishadi. Biroq funksiya shu $x = 0$ nuqtada chekli hosilaga ega emas. Bu ushbu

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

nisbatning $\Delta x \rightarrow 0$ da chekli limitga ega emasligidan kelib chikadi.

Demak, Ferma teoremasining sharti bajarilmaydi. Binobarin, teoremaning xulosasi o'rinli emas.

2- **misol**. Ushbu $f(x) = x^2 + 3$ funksiya $[-1; 2]$ segmentda Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Ravshanki, berilgan funksiya $[-1; 2]$ segmentda uzluksiz va $(-1; 2)$ intervalda $f'(x) = 2x$ xosilaga ega.

Demak, $f(x) = x^2 + 3$ funksiya $[-1; 2]$ segmentda Lagranj teoremasiga ko'ra shunday s nuqta $(-1 < c < 2)$ topiladiki,

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c) = 2c$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan $c = \frac{1}{2}$ ekanini topamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning differensial deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya orttirmasi va differensial o'rtasida qanday bog'liqlik bor?
3. Differensialdan fodalanib taqribiy hisoblash mumkinmi?
4. Ikkinchi tartibli differensial nima?
5. Hisoblash xatosi nima?
6. Ferma teoremasining shartlari nimalardan iborat?
7. Ferma teoremasi tasdihi qanday bo'ladi?
8. Roll teoremasining nechta sharti bor va ularni sanang?
9. Roll teoremasi shartlarida, uning tasdihi nimadan iborat?
10. Geometrik tomondan Roll teoremasining tasdihi nimani ifodalaydi?
11. Ferma teoremasi geometrik nuqtai nazardan nimani anglatadi?
12. Lagranj teoremasi shartlarini sanab keling, ular nimalardan iborat?
13. Lagranj teoremasining tasdihi nima?
14. Lagranj teoremasi tasdihi geometrik tomondan nimani bildiradi?
15. Lagranj yoki chekli orttirmalar formulasini yozing?
16. Chekli orttirmalar deyilishini tushinasizmi?
17. Teylor formulasi nimadan iborat?
18. Makloren formulasi qanday olinadi?

Mustahil bajarish uchun topshiriqlar

1-8 misollarda funksiyalarning differensiallari topilsin.

1. 1) $y = x^n$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.
2. 1) $y = \sqrt{1+x^2}$; 2) $s = \frac{gt^2}{2}$.
3. 1) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$; 2) $x = \frac{1}{t^2}$.
4. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1 - \cos u)$.
5. 1) $d\left(\frac{a}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)$; 2) $d(\alpha + \ln \alpha)$;
6. 1) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; 2) $r = \sin(a - b\varphi)$; 3) $s = \sqrt{1-t^2}$.
7. 1) $y = \ln \cos x$; 2) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{4u-1}$; 2) $s = e^{-2t}$.
8. 1) $d(\sqrt{x} + 1)$; 2) $d(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$; 3) $d(bt - e^{-bt})$.

9. Ushbu $f(x)=\sin x$ funksiya uchun $[0; 2\pi]$ segmentda Roll teoremasining shartlari bajariladimi?

10. Ushbu $f(x)=e^x$, $g(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ funksiyalar $[0; 2\pi]$ segmentda Koshi teoremasining shartlarini kanoatlantiradimi?

11. Ushbu $f(x)=x(x^2-1)$ funksiya uchun $[0; 2\pi]$ va $[0, 1]$ segmentlarda Roll teoremasining shartlarini tekshiring.

12. $f(x)=\begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ булса} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ булса} \end{cases}$ funksiya uchun $[-1; 1]$ oralikda

Lagranj teoremasi o'rinlimi?

13. $f(x)=x^2-4x+3$ funksiya ildizlari orasida uning xosilasining xam ildizi bor ekani tekshirilsin.

14. Roll teoremasini $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaga $[-1; 1]$ segmentda tatbiq qilish mumkinmi?

15. $y=x^2$ parabolaning qaysi nuqtasida o'tkazilgan urinma $A(-1; 1)$ va $B(3; 9)$ nuqtalarni birlashtiruvchi vatarga parallel bo'ladi?

16. $[a, b]$ segmentda $f(x)=x^2$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va s topilsin. Grafik usul bilan tushuntirilsin.

17. $[1; 4]$ segmentda $f(x)=\sqrt{x}$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va s topilsin.

18. $f(x)=x^3$ va $g(x)=x^2$ funksiyalar uchun Koshining $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ formula yozilsin hamda s topilsin.

19. $f(x)=x^3$ funksiya uchun Lagranjning $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ formulasi yozilsin va s topilsin.

20. Quyidagi funksiyalar uchun Lagranj formulasi yozilsin va s topilsin:

1) $[0; 1]$ segmentda $f(x)=\arctg x$;

2) $[0; 1]$ segmentda $f(x)=\arcsin x$;

3) $[1; 2]$ segmentda $f(x)=\ln x$.

20,21-ma'ruzalar. Differensial hisobning tatbiqlari

Reja

1. Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish:

- 1) funksiyaning monotonligi;
- 2) funksiyaning ekstremumi;
- 3) funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari;
- 4) funksiya grafigining *qavariqlik, botiqlik* oraliqlarini va *egilish* nuqtalarini hosila yordamida tekshirish;
- 5) funksiya grafigining asimptotalari;
- 6) funksiyaning tekshirishning umumiy rejasi.

2. Hosila yordamida aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi.

3. Differensial hisobning iqtisodda qo'llanilishi haqida.

Tayanch iboralar va tushunchalar

Funksiya dinamikasi, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik qismlari, egilish nuqtasi, funksiyaning tekshirish, asiptota, Lopital qoidasi, ishlab chiqarish xarajatlari, mahsulot ishlab chiqarish orttirmasi, ishlab chiqarish xarajatlari orttirmasi, ishlab chiqarish xarajati o'rtacha orttirmasi, ishlab chiqarish limitik xarajati, savdo limitik pul mablag'i, funksiya egiluvchanligi, argument va funksiyaning nisbiy orttirmalari, nisbiy hosila, nisbiy egiluvchanlik, ikkita funksiya ko'paytmasi va nisbati egiluvchanliklari, talabning narxga nisbatan egiluvchanligi, talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi, taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi, to'la va o'rtacha xarajatlar egiluvchanliklari.

1. Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish

Ma'lumki, tabiat va iqtisodning ko'p qonunlari funksiya yordamida modellashtiriladi. Bunday funksiyalarni bilish ularning qaysi oraliqda o'suvchi yoki kamayuvchi hamda ular qanday nuqtalarda eng katta va eng kichik qiymatlarga erishishini aniqlash imkonini yaratadi. Bunga o'xshash tekshirishlar *funksiya dinamikasini* anglashga olib keladi.

1). Funksiyaning *monotonligi* mezonlari (kriteriyasi).

1-ta'rif. (a, b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy

ikkita nuqtalari uchun, $f(x_2) > f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda o'suvchi deyiladi.

2-ta'rif. (a, b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalari uchun $f(x_2) < f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda kamayuvchi deyiladi.

Oraliqda o'suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Monotonlikning zaruriy va yetarli shartlari:

1) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya musbat hosilaga ega, ya'ni $f'(x) > 0$, bo'lsa, funksiya shu oraliqda o'suvchi bo'ladi;

2) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya manfiy hosilaga ega, ya'ni $f'(x) < 0$, bo'lsa, funksiya shu oraliqda **kamayuvchi** bo'ladi.

1-misol. $y = f(x) = x^3 - 3/2 \cdot x^2 - 6x + 4$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish. Birinchi tartibli hosilani topamiz:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2), \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

bundan $x_1 = -1, x_2 = 2$ kritik nuqtalar bo'lib, ular funksiyaning aniqlanish sohasini $(-\infty; -1), (-1; 2), (2; +\infty)$ oraliqlarga ajratadi.

Bu oraliqlarning har birida hosilaning ishorasini tekshiramiz. $(-\infty; -1)$ oraliqdan ixtiyoriy nuqta olib, masalan, $x = -2$ bo'lsa, $f'(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4 > 0$ bo'ladi. Bunday tengsizlik oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi (buni tekshirib ko'ring). Demak, $(-\infty; -1)$ oraliqda funksiya o'suvchi (o'suvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan).

$(-1;2)$ oraliqning $x=0$ nuqtasida $f'(0) = -2 < 0$, b $\ddot{u}$ lib, bu oraliqning istalgan nuqtasi uchun, $f'(x) < 0$ tengsizlik bajariladi. Kamayuvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan, $(-1;2)$ oraliqda funksiya kamayuvchi bo'ladi.

$(2;+\infty)$ oraliqning $x=3$ nuqtasi uchun, $f'(3) = 3^2 - 3 - 2 = 9 - 5 = 4 > 0$, b $\ddot{u}$ lib, bu tengsizlik ham oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi, demak, funksiya $(2;+\infty)$ oraliqda o'suvchi.

2). Funksiyaning ekstremumi. Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi no'lga teng yoki uzilishga ega bo'ladigan nuqtalari **kritik** nuqtalar deyiladi.

1-ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **maksimumga** ega deyiladi.

2-ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **minimumga** ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimum nuqtalariga **ekstremum** nuqtalari deyiladi.

Ekstremumga ega bo'lishining zaruriy sharti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, $y' = f'(x_0)$ no'lga teng yoki u mavjud bo'lmaydi.

Eslatma. Har qanday kritik nuqta ham ekstremum nuqtasi bo'lavermaydi.

Ekstremumning yetarli shartlari. **Birinchi qoida.** x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta, funksiyaning ekstremum nuqtasi, va:

1) x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya **maksimumga**;

2) x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya **minimumga** ega bo'ladi.

Ikkinchi qoida. x_0 nuqtada birinchi hosila no'lga teng, ikkinchi hosila no'ldan farqli bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va :

- 1) $f''(x_0) < 0$ bo'lsa, **maksimum** nuqtasi;
- 2) $f''(x_0) > 0$ bo'lsa, **minimum** nuqtasi bo'ladi.

Shunday qilib, monotonlik oraliqlarini, funksiya ekstremumini topish uchun, oldin funksiyaning aniqlanish sohasini kritik nuqtalar yordamida monotonlik oraliqlariga bo'lish va ularda hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin monotonlik va ekstremumning yetarlilik shartlaridan foydalanib, o'sish va kamayish oraliqlarini, maksimum va minimum nuqtalarini aniqlaymiz.

2-misol. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ funksiyaninshg ekstremumini birinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x) = x^2 - x - 6, \quad x^2 - x - 6 = 0, \text{ bunda } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2};$$

bo'lib, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ bo'ladi.

Endi argumentning kritik nuqtalaridan o'tishda funksiya hosilasining ishoralarini tekshiramiz:

$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$, $x < -2$ bo'lsa, $x + 2 < 0$, $x - 3 < 0$ bo'lib, $(x + 2)(x - 3) > 0$, bo'ladi, ya'ni ishora musbat (+). $x > -2$ bo'lsa, $x + 2 > 0$; $x - 3 < 0$, $(x + 2)(x - 3) < 0$, ya'ni ishora manfiy (-). Demak, $x_1 = -2$ nuqtadan o'tishda funksiya hosilasining ishorasi musbatdan manfiyga o'zgaradi. Birinchi qoidaga asosan $x_1 = -2$ nuqtada berilgan funksiya maksimumga ega bo'ladi.

$$y_{\max} = \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 6(-2) + 8\frac{2}{3} = 10.$$

Endi $-2 < x < 3$ bo'lsa, $(x + 2) > 0$; $(x - 3) < 0$ bo'lib, $(x + 2)(x - 3) < 0$, hosilaning ishorasi manfiy (-), $x > 3$ bo'lsa, $(x + 2) > 0$; $(x - 3) > 0$ bo'lib, $(x + 2)(x - 3) > 0$, musbat (+) bo'ladi. Demak, $x_2 = 3$ nuqtadan o'tishda

funksiya hosilasi ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi, birinchi qoidaga asosan funksiya $x_2 = 3$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.

$$y_{\min} = 1/3 \cdot 3^3 - 1/2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8/3 = -65/6.$$

3-misol. $f(x) = 1/4 \cdot x^4 - 2x^3 + 11/2 \cdot x^2 - 6x + 9/4$ funksiya ekstremumini ikkinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad f''(x) = 3x^2 - 12x + 11.$$

endi kritik nuqtalarni topaylik:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = \\ &= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = \\ &= (x-1)(x^2 - 5x + 6), \quad x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x-1 = 0 \end{aligned}$$

bundan, $x = 1$ va

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

bo'ladi. Demak, kritik nuqtalar: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ bo'ladi. Endi ikkinchi tartibli hosilaning kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} f''(1) &= 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 11 = 2 > 0, \\ f''(2) &= 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 11 = -1 < 0, \\ f''(3) &= 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 11 = 2 > 0. \end{aligned}$$

Shunday qilib, ekstremumga ega bo'lishning ikkinchi qoidasiga asosan, $x_1 = 1$, $x_3 = 3$ nuqtalarda minimum, $x_2 = 2$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo'ladi. $\min f(1) = 0$; $\max f(2) = 0.25$; $\min f(3) = 0$.

3). Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari. $y = f(x)$

funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish uchun:

1) kritik nuqtalarni topamiz;

2) funksiyaning bu kritik nuqtalardagi va kesmaning chetlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz;

3) bu topilgan qiymatlardan eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

4-misol. $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz.

$$y' = 4x^3 - 4x, \quad 4x^3 - 4x = 0, \quad 4x(x^2 - 1) = 0,$$

bundan, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ kritik nuqtalar bo'ladi. Funksiyaning berilgan kesmaning chetki nuqtalaridagi hamda kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 5 = 16 - 8 + 5 = 13,$$

$$f(-1) = 4; \quad f(0) = 5; \quad f(1) = 4 \quad \text{va} \quad f(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^2 + 5 = 81 - 18 + 5 = 68.$$

Bu topilganlarni solishtirib, funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari, mos ravishda $y_{\text{экич}} = 4$, $y_{\text{экат}} = 68$ bo'ladi.

Shuni eslatamizki, funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatini topish katta amaliy ahamiyatga ega.

5-misol. Perimetri $2p$ ($p > 0$) bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar orasida eng katta yuzaga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak topilsin.

Yechish: Bunday to'g'ri to'rtburchakning asosi x bo'lsin. Bu holda to'g'ri to'rtburchakning balandligi $p - x$ ga, yuzi esa,

$$S = S(x) = x(p - x), \quad (0 < x < p)$$

bo'ladi.

$S(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$$S'(x) = p - 2x, \quad p - 2x = 0, \quad x = \frac{p}{2}$$

kritik nuqta bo'ladi. $S''(x) = -2$; $S''(p/2) = -2 < 0$.

Demak, $S(x)$ funksiya, $x = \frac{p}{2}$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

$$S_{\max} = \frac{p}{2} \left(p - \frac{p}{2} \right) = \frac{p^2}{4}.$$

Shunday qilib, eng katta yuzaga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak tomoni $\frac{p}{2}$ bo'lgan kvadratdan iborat ekan.

4). Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini hosila yordamida tekshirish. Funksiya grafigining asimptotalari.

1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a, b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o'tkazilgan urinmadan pastda yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda qavariq deyiladi.

2-ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a, b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o'tkazilgan urinmadan yuqorida yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda botiq deyiladi.

3-ta'rif. Funksiya grafigining qavariq qismini, botiq qismidan ajratuvchi $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqta egilish nuqtasi deyiladi.

Funksiya grafigining qavariq yoki botiq bo'lishining yetarli shartlari:

1) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy, ya'ni $f''(x) < 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'ladi;

2) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat, ya'ni $f''(x) > 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo'ladi.

$f''(x) = 0$ va $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarga 2-tur kritik nuqtalar deyiladi.

Egilish nuqtalari mavjud bo'lishining yetarli sharti. x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo'lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli

hosila bu nuqtadan o'tishda ishorasni o'zgartirsa, x_0 absissali nuqta egilish nuqtasi bo'ladi.

Shunday qilib, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik oraliqlarini, egilish nuqtalarini topish uchun, oldin funksiya aniqlanish sohasini ikkinchi tur kritik nuqtalar bilan oraliqlarga bo'lish va bu oraliqlarda ikkinchi tartibli hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin yetarli shartlardan foydalanib, qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari aniqlanadi.

5). Funksiya grafigining asimptotalari. 1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya grafigidagi nuqta shu grafik bo'ylab cheksiz uzoqlashganda, undan biror to'g'ri chiziqqa masofa no'lga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi deyiladi.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ bo'lsa, $x = a$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ va } b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

yoki

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ va } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx]$$

limitlar mavjud bo'lsa, $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi. $k = 0$ bo'lsa, $y = b$ gorizantal asimptota bo'ladi.

6-misol. Gauss egri chizig'i deb ataluvchi $y = e^{-x^2}$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlang.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = e^{-x^2} (-2x) = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = -2[x'e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})x] = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib, ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0, \quad e^{-x^2} \neq 0, \quad 4x^2 - 2 = 0, \quad x^2 = \frac{1}{2}; \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bular ikkinchi tur kritik nuqtalar bo'lib, sonlar o'qini

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ va } (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$$

oraliqlarga ajratadi.

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty) \text{ oraliqlarda } y'' > 0 \text{ bo'lib, } (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

oraliqda $y'' < 0$ bo'ladi.

Demak,

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ va } (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty) \text{ oraliqlarda funktsiya grafigi botiq,}$$

$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ oraliqda funktsiya grafigi qavariq bo'lib, } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

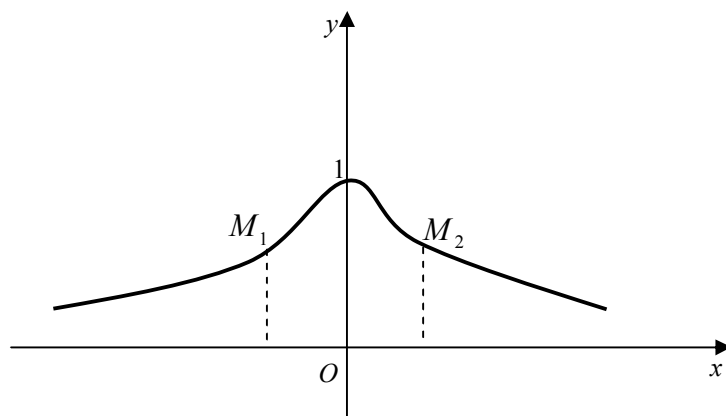
nuqtadan o'tishda $f''(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan

o'tishda manfiydan musbatga o'zgartiradi. Bu ikkala holda ham egilish bo'ladi:

$$f_{\text{эзл}} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}; \quad M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}). \quad f_{\text{эзл}}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$$

.

Yuqoridagilarga asosan funktsiya grafigini yasaymiz.



1-chizma

6). Funktsiyani tekshirishning umumiy rejasi. Funktsiyani hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funktsiyani tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

- 1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o'zgarishini tekshirish;
- 2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;
- 3) funksiyaning davriyligini aniqlash;
- 4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;
- 5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;
- 6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;
- 7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topish;
- 8) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlash;
- 9) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;
- 10) imkoniyati bo'lsa funksiya grafigining koordinat o'qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;
- 11) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini yasash.

7-misol. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ funksiyaning tekshirishini.

Yechish. Funksiyaning tekshirishining umumiy rejasidan foydalanamiz:

1) funksiya maxraji no'lga aylanadigan nuqtalardan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. Maxraj $x_1 = -2, x_2 = 2$ nuqtalarda no'lga teng, demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty, -2), (-2; +2), (2, +\infty)$ oraliqlardan iborat. Aniqlanish oraliqlarining chetlarida funksiyaning o'zgarishini tekshiramiz:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2-0} \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty$$

;

$$2) f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$$

bo'lganligi uchun toq funksiya;

3) funksiya $f(x+T) = f(x)$ tenglikni qanoatlantirmaydi, demak, davriy emas;

4) funksiya $x = \pm 2$ nuqtalarda uzilishga ega;

5) kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2}, \quad f'(x) = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm 2\sqrt{3}..$$

Bundan tashqari $f'(x)$, $x = \pm 2$ nuqtalarda mavjud emas. Demak, kritik nuqtalar:

$$x_1 = -2\sqrt{3}, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 2\sqrt{3}$$

bo'ladi;

$$6) \quad (-\infty, -2\sqrt{3}), \quad (-2\sqrt{3}, -2), \quad (-2, 0), \quad (0, 2), \quad (2, 2\sqrt{3}), \quad (2\sqrt{3}, +\infty)$$

oraliqlarning har birida $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz;

$(-\infty, -2\sqrt{3})$ va $(-2\sqrt{3}, +\infty)$ oraliqlarda $f'(x)$ funksiya hosilasi musbat, ya'ni funksiya bu oraliqlarda o'suvchi; $(-2\sqrt{3}, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, 2\sqrt{3})$ oraliqlarda $f'(x) < 0$, ya'ni kamayuvchi $x_1 = -2\sqrt{3}$ nuqtada funksiya maksimumga, $x_5 = 2\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega bo'ladi. $x = 0$ kritik nuqtadan o'tishda $f'(x)$ ishorasi o'zgarmaydi, demak bu nuqtada ekstremum yo'q.

$$\max f(x) = f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}; \quad \min f(x) = f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3};$$

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4)^2 - x^2(x^2 - 12) \cdot 2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4) - 4x^3(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^3} = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}. \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0, \quad 8x(x^2 + 12) = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm 2$$

nuqtalarda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. Demak ikkinchi tur kritik nuqtalar

$$x_1 = -2; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 2$$

bo'ladi ;

8) $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, +\infty)$ oraliqlarda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz: $x = -3$ bo'lsin.

$$f''(-3) = \frac{8(-3)[(-3)^2 + 12]}{[(-3)^2 - 4]} = \frac{-24 \cdot 21}{5^3} = -\frac{504}{125} < 0,$$

xuddi shunday

$$f''(-1) > 0, \quad f''(1) < 0, \quad f''(3) > 0 \quad \text{bo'lib,} \quad (-\infty, -2) \text{ va } (0, 2)$$

oraliqlarda funksiya grafigi qavariq, $(-2, 0)$ va $(2, +\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq bo'ladi. Ikkinchi tartibli hosila har bir ikkinchi tur kritik nuqtada ishorasini o'zgartiradi, lekin $x = \pm 2$ da funksiya uzilishga ega. Shuning uchun faqat $x = 0$ nuqtada funksiya grafigi egilishga ega bo'ladi $f(0)_{\text{egil}} = 0$;

9) funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \pm \infty \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow -2 \pm 0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \pm \infty.$$

Demak, $x = -2, x = 2$ funksiya grafigining vertikal asimptotalari bo'ladi.

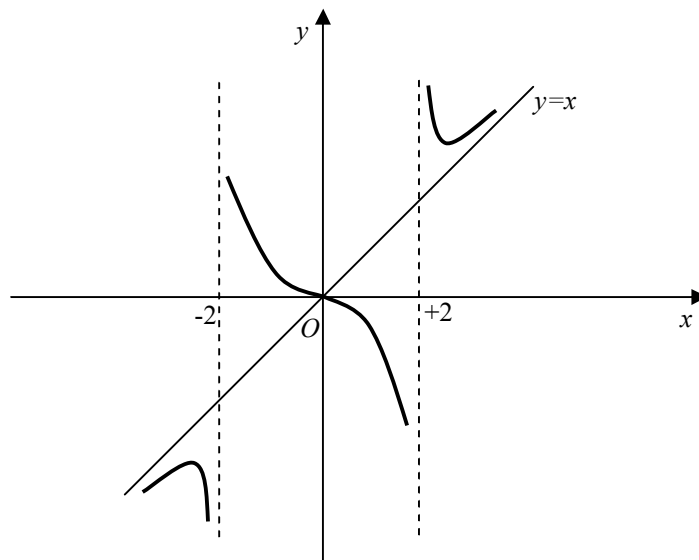
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 4)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4/x}{1 - 4/x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Shunday qilib, $y = x$ og'ma asimptota bo'ladi;

10) $x = 0$ bo'lganda $y = 0$ bo'lib, funksiya grafigi koordinatalar boshidan o'tadi;

11) yuqoridagi tekshirishga asosan, funksiya grafigini yasaymiz. (2-chizma)



2-chizma

2. Hosila yordamida aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi. $f(x)$

va $g(x)$ funksiyalar (a, b) oraliqda berilgan bo'lsin.

$$1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

bo'lsa, $x \rightarrow a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi.

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

bo'lsa, $x \rightarrow a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi.

Berilgan funksiyalar hosilalarga ega bo'lsa, ulardan foydalanib, aniqmaslikni ochish mumkin.

Lopital qoidasi

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ yoki $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bo'lib,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi. $x \rightarrow \infty$

da ham Lopital qoidasi o'rinli.

$(0 \cdot \infty)$ yoki $(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmasliklar algebraik almashtirishlar orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga keltirilib, keyin Lopital qoidasidan foydalaniladi.

1-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$ ni hisoblang.

Yechish. Bu limit $x \rightarrow 0$ da $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib,

Lopital qoidasini qo'llab,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x}$$

natijaga ega bo'lamiz. Oxirgi limit $x \rightarrow 0$ da yana $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik,

demak, Lopital qoidasini yana qo'llash mumkin:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{x'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - \sin x}{1} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Shunday qilib, ketma-ket Lopital qoidasini qo'llash bilan berilgan limitning 0 ga tengligini ko'rsatdik.

3. Differensial hisobning iqtisodda qo'llanilishi haqida.

1. **Hosilaning iqtisodiy ma'nosi haqida.** Hosilaning iqtisodiy ma'nosini quyidagi misolda qaraymiz. Biror xil mahsulot ishlab chiqarilganda ishlabchiqarish xarajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdoriga bog'liq. Mahsulot miqdorini x bilan, ishlab chiqarish xarajatlarini y bilan belgilasak

$$y = f(x)$$

funksional bog'lanish kelib chiqadi. Mahsulot ishlab chiqarishni Δx ga ko'paytirilsa $x + \Delta x$ mahsulotga mos keluvchi xarajat

$$f(x + \Delta x)$$

bo'ladi. Demak, mahsulot miqdorining Δx orttirmasiga, mahsulot ishlab chiqarish xarajatining orttirmasi

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

mos keladi.

1-ta'rif. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatga mahsulot ishlab chiqarish xarajatining o'rtacha orttirmasi deyiladi.

2-ta'rif.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

ga **ishlab chiqarish limitik xarajati** deb ataladi.

Yuqoridagiga o'xshash $\varphi(x)$ bilan x mahsulotni sotishdan olingan jami savdo pul mablag'i bo'lsa, quyidagi limit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

ga **savdo limitik pul mablag'i** deyiladi.

1-misol. Mahsulot ishlab chiqarish xarajati va mahsulot hajmi x orasida

$$y = 100x - \frac{1}{30}x^3$$

bog'lanish bo'lsin. Ishlab chiqarish hajmi, 5 birlik va 10 birlik bo'lganda limitik xarajatni toping.

Yechish. Masala shartiga asosan, $x = 5$, $x = 10$. Funktsional bog'lanish hosilasi

$$y' = 100 - \frac{1}{10}x^2$$

bo'lib,

$$f'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97.5, \quad f'(10) = 90$$

bo'ladi.

Bularning iqtisodiy ma'nosi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi 5 birlik bo'lganda, mahsulot ishlab chiqarish xarajati kelgusi mahsulotni ishlab chiqarishga o'tishda 97,5 ni tashkil etadi; ishlab chiqarish hajmi 10 birlik bo'lganda, esa u 90 ni tashkil etadi.

2. Ayrim iqtisodiy tushunchalarning ta'riflari . 1-ta'rif. Tovar va xizmatlarning ma'lum turiga, iste'molchining ma'lum vaqtda, narxlarning mavjud darajasida, sotib olishga qodir bo'lgan ehtiyoji talab deyiladi.

Talab miqdorining o'zgarishiga bir qancha omillar ta'sir qiladi. Ularning ichida eng ko'p ta'sir qiladigan omil narx omilidir.

2-misol. Biror mahsulotga talab va mahsulot narxi orasida bog'lanish

$$p = 20 - 3x$$

formula bilan ifodalansin, bunda x mahsulotga talab, p mahsulotning narxi.

Mahsulotni sotishdan olingan savdo puli

$$U = xp \quad \text{ëku} \quad U = x(20 - 3x) = 20x - 3x^2$$

bo'ladi. Bundan hosila

$$U' = 20 - 6x$$

bo'ladi. $x = 2$ bo'lsa, $U'(2) = 8$. Buning ma'nosi, talab 2 dan 3 birlikka ortsa, savdo puli 8 birlikka oshishini bildiradi.

3. Funksiyaning egiluvchanligi (elastikligi). Hosila yordamida erkli o'zgaruvchi (argument) orttirmasiga mos erksiz o'zgaruvchi (funksiya) orttirmasini hisoblash mumkin. Ko'p iqtisodiy masalalarni hal etishda nisbiy orttirma, ya'ni argumentning o'sish foiziga mos, funksiyaning o'sish foizini hisoblashga to'g'ri keladi. Bu funksiyaning egiluvchanligi yoki nisbiy hosila tushunchasiga olib keladi.

$$1\text{-ta'rif.} \quad \frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}$$

nisbatlarga, mos ravishda, argument va funksiya nisbiy orttirmalari deyiladi. Funksiya nisbiy orttirmasining argument nisbiy orttirmasiga nisbati

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

ni qaraymiz. Bu nisbatni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \quad (1)$$

$y = f(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

kelib chiqadi.

2-ta'rif. (2) munosabatga $y = f(x)$ funksiyaning x ga nisbatan egiluvchanligi deyiladi, va $E_x(y)$ bilan belgilanadi. Ta'rifga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

bo'ladi.

x ga nisbatan egiluvchanlik argumentning orttirmasi 1% ga oshganda unga mos funksiya orttirmasining foizlarda hisoblangan o'sishi (yoki kamayishi)ni taqriban ifodalaydi.

Funksiya egiluvchanligini topishga bir necha misollar qaraymiz.

3-misol. $y = 3x - 6$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish Egiluvchanlik ta'rifiga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{3x}{3x-6} = \frac{x}{x-2}.$$

Masalan, $x = 10$ bo'lsa, funksiya egiluvchanligi

$$\frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}$$

bo'ladi, ya'ni x 1% oshganda, y $\frac{5}{4}\%$ ga oshadi.

4-misol. $y = 1 + 6x^2 - 4x^3$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. Ta'rifga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{1+6x^2-4x^3} (12x-12x^2) = \frac{12x^2-12x^3}{1+6x^2-4x^3}$$

Masalan, $x = 1$ bo'lganda, $\frac{(12-12)}{7} = 0$. Bu argument 1% ga ya'ni 1

dan 1,01 ga oshganda, funksiya qiymati taqriban o'zgarmaydi.

Endi funksiya egiluvchanligini hisoblashda qo'llaniladigan ayrim qoidalarni eslatamiz.

1-teorema. Ikkita funksiya ko'patmasining egiluvchanligi shu funksiyalar egiluvchanliklari yig'indisiga teng.

Isbot. Ikkita funksiya ko'paytmasining hosilasi formulasiga asosan.

$$\begin{aligned} E_x(u \cdot v) &= \frac{x}{uv} (u \cdot v)' = \frac{x}{uv} (u'v + uv') = \\ &= \frac{x}{u} u' + \frac{x}{v} v' = E_x(u) + E_x(v), \text{ ya'ni } E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v). \end{aligned} \quad (3)$$

Bu teoremaning isbotidir.

5-misol. $y = x^2 \cdot e^{2x}$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. $u = x^2$, $v = e^{2x}$ ni olish mumkin. Demak, (3) formulaga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{x^2} (x^2)' + \frac{x}{e^{2x}} (e^{2x})' = 2 + 2x, \quad E_x(y) = 2(1 + x)$$

bo'ladi.

2-teorema. Ikkita funksiya nisbatining egiluvchanligi bo'linuvchi va bo'luvchi egiluvchanliklarining ayirmasiga teng, ya'ni

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v) \quad (4)$$

bo'ladi (bu tasdiqning isbotini o'quvchiga havola etamiz).

6-misol. $y = \frac{x^3 + 5}{e^{3x}}$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. $u = x^3 + 5$, $v = e^{3x}$ ekanligini hisobga olib (4) formulaga asosan:

$$\begin{aligned} E_x(y) &= E_x(x^3 + 5) - E_x(e^{3x}) = \frac{x}{x^3 + 5} \cdot 3x^2 - \frac{x}{e^{3x}} \cdot 3e^{3x} = \frac{3x^3}{x^3 + 5} - 3x, \text{ ya'ni} \\ E_x(y) &= \frac{3x^3}{x^3 + 5} - 3x \end{aligned}$$

bo'ladi.

4. Talab va taklif egiluvchanligi. Aniq bir mahsulotga talab va uning narxi orasidagi funksional bog'liqlikni (boshqa tovar narxi, iste'molchining daromadi va ehtiyoji o'zgarish bo'lgan shartlarda) talabga mos narxni aniqlash mumkin. Lekin ko'p iqtisodiy tekshirishlarda talabning miqdori emas, mahsulot narxining o'zgarishi bilan unga talabning qanday o'zgarishi muhimdir. Boshqacha aytganda, talabning narxga nisbatan egiluvchanligini hisoblash katta ahamiyatga ega.

Talab y , narx x ning funksiyasi bo'lsin, ya'ni

$$y = f(x).$$

Δx narx orttirmasi, Δy unga mos talab orttirmasi bo'lsa, narxning nisbiy o'zgarishi $\Delta x / x$, talabning nisbiy o'zgarishi $\Delta y / y$ bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

nisbat narx 1% oshganda unga mos talabni nisbiy o'zgarishi, ya'ni **talabning narxga nisbatan egiluvchanligi** qo'yidagi limitga teng:

$$E_x(y) = E_T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \quad (5)$$

$$\text{Demak, } E_T = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Shunday qilib, **talabning narxga nisbatan egiluvchanligi**, narx 1% ga oshganda, biror tovarga bo'lgan talabning qanday o'zgarishini taqriban ifodalaydi.

Ma'lumki, talab funksiyasi narxga nisbatan kamayuvchi funksiyadir, ya'ni $\frac{dy}{dx} < 0$ bo'ladi. Shuning uchun amalda manfiy sonlarni ishlatmaslik uchun

$$E_T = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (6)$$

qilib olinadi.

$E_T > 1$ bo'lsa, narxning 1%ga o'sishi, talabning taxminan 1% dan ko'p pasayishini ifodalaydi va talab egiluvchan deyiladi.

$E_T = 1$ bo'lsa, narxning 1% ga o'sishi, talabning taxminan 1% ga pasayishini bildirib, talab neytral deyiladi.

$0 < E_T < 1$ bo'lsa, narxning 1% ortishi unga mos talabning 1% dan kam bo'lishini ifodalab, talab egiluvchan emas deyiladi.

7-misol. Talab funksiyasi $y = 10 - x$ bo'lsa uning egiluvchanligini toping.

Yechish. (6) formulaga asosan:

$$E_T = -\frac{x}{y} y' = -\frac{x}{10-x} (-1) = \frac{x}{10-x} \quad x=2 \text{ bo'lsa, } E_T = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

bo'ladi. Buning ma'nosi narx 2 bo'lganda uni 1% orttirish, talabning $\left(\frac{1}{4}\right)\%$ ga kamayishini ko'rsatadi.

Talabning daromad (kirim, unum, tushum)ga nisbatan elastikligini qaraymiz. x iste'molchining daromadi bo'lsin. Talab funksiyasi y desak,

$$y = f(x)$$

bog'lanish kelib chiqadi. Bunda **daromadga nisbatan egiluvchanlik**

$$E_d(y) = \frac{x}{y} y'$$

bo'ladi.

8-misol. Tadbirkor biror mahsulotga talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi 0,2 ekanligini bilgan holda, uning narxini 10% oshirmoqchi bo'lsa uning oladigan daromadini hisoblang?

Yechish. Talabning egiluvchanligi 0,2 bo'lganligi uchun unga talab 2% ga kamayadi. Natijada tadbirkorning daromadi 8% tashkil etadi.

Taklif deganda biror mahsulotning vaqt birligida sotishga chiqarilgan hajmini tushuniladi. Ma'lumki, biror mahsulotning taklifi biror davrda, narxning o'suvchi funksiyasidir. Taklif funksiyasining ham egiluvchanligini talab egiluvchanligiga o'xshash topish mumkin.

$$y = f(x)$$

taklif funksiyasi bo'lsin bunda x narx, y taklif funksiyasi, demak

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y'$$

bo'ladi. ***Taklif funksiyasining egiluvchanligi narx 1% ga oshganda taklif funksiyasining foizlarda o'sishini taxminan ifodalaydi.***

5. To'la va o'rtacha xarajatlar egiluvchanligi. Korxona biror mahsulotdan x birlik miqdorda ishlab chiqarsa va $k(x)$ to'la xarajat funksiyasi aniqlangan bo'lsa, to'la xarajat egiluvchanligi

$$E_x(K) = E_k = \frac{x}{K} \cdot \frac{dK}{dx} = \frac{dK}{dx} : \frac{K}{x}, \quad (7)$$

bo'ladi, demak, **to'la xarajat egiluvchanligi limitik xarajatning** o'rtacha xarajatga nisbatini ifodalaydi..

O'rtacha xarajat $\Pi = \frac{K}{x}$ bo'lsa, uning egiluvchanligi,

$$\begin{aligned} E_x(\Pi) &= \frac{x}{\Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dx} = \frac{x}{K/x} \cdot \frac{x(dK/dx) - K}{x^2} = \frac{x^2}{K} \cdot \frac{xdK/dx - K}{x^2} = \\ &= \frac{x}{K} \cdot \frac{dK}{dx} - 1 = E_x(K) - 1, \end{aligned} \quad (8)$$

bo'ladi, demak, o'rtacha xarajat egiluvchanligi to'la xarajat egiluvchanligidan 1 ga kam ekan.

$E_T = 1$ bo'lsa, o'rtacha xarajat egiluvchanligi 0 ga teng, ya'ni $E_x(\Pi) = 0$ bo'lib, o'rtacha xarajat o'zgarmasligini bildiradi. Bundan

$$x \frac{dK}{dx} - K = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{dK}{dx} = \frac{K}{x}. \quad (9)$$

Shunday qilib, **to'la xarajat egiluvchanligi** 1 ga teng bo'lsa, to'la limitik xarajat o'rtacha xarajatga teng bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning monotonligi nima?
2. Funksiyaning ekstremumi nima?
3. Funksiya ekstremumga ega bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari nimalardan iborat?
4. Hosila yordamida ekstremumni tekshirishning ikkinchi qoidasi qanday?
5. Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik qismlari va uning egilish nuqtasi hosila yordamida qanday aniqlanadi?
6. Funksiya grafigining asimptotalari qanday topiladi?
7. Funksiyaning umumiy tekshirish nimalardan iborat?
8. Aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi nimadan iborat?
9. Funksiya hosilasini bilgan holda funksional bog'lanish haqida nima deyish mumkin?
10. Ishlab chiqarish xarajatlari, ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoriga bog'liqligi?
11. Ishlab chiqarish xarajatlari o'rtacha orttirmasi deb nimaga aytiladi?

12. Ishlab chiqarishning limitik xarajati qanday aniqlanadi?
13. Jami savdoning pul mablag'i nima?
14. Savdoning limitik pul mablag'i qanday aniqlanadi?
15. Biror mahsulotga talab va uning narxi orasida bog'lanish bormi?
16. Nisbiy orttirma nima?
17. Funksiyaning egiluvchanligi qanday aniqlanadi?
18. Funksiya egiluvchanligi $E_x(y)$ nimaga teng?
19. Argument x ga nisbatan funksiya y ning egiluvchanligi foizlarda nimani ifodalaydi?
20. Ikkita funksiya ko'paytmasining egiluvchanligi nimaga teng?
21. Ikkita funksiya nisbatining egiluvchanligi qanday aniqlanadi?
22. Talabning narxga nisbatan egiluvchanligi nimani ifodalaydi.
23. Talabning narxga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$ qanday topiladi?
24. Talab egiluvchan degani nima?
25. Talab neytral degani nimani ifodalaydi?
26. Talab egiluvchan emas deb nimaga aytiladi?
27. Talab daromadga bog'liqmi?
28. Talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi qanday hisoblanadi?
29. Taklif nima?
30. Taklif va narx orasida bog'lanish bormi?
31. Taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$ qanday aniqlanadi.
32. Taklif funksiyasining egiluvchanligi nimani ifodalaydi?
33. To'la xarajatlarning mahsulot hajmiga nisbatan egiluvchanligi $E_x(K)$ qanday aniqlanadi?
34. O'rtacha xarajt egiluvchanligi $E_x(II)$ qanday aniqlanadi?
35. To'la xarajat egiluvchanligining 1 ga teng bo'lishi nimani ifodalaydi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Kuyidagi funksiyalarning o'sishi va kamayishi oraliklari tekshirilsin.

1) $y = x^2$;

5) $y = \operatorname{tg} x$;

2) $y = x^3$;

6) $y = e^x$;

3) $y = \frac{1}{x}$;

7) $y = 4x - x^2$;

4) $y = \ln x$;

8) $y = 4x + x^3$

2. Kuyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va ularning grafiklari yasalsin.

1) $y = x^2 + 4x + 5$;

8) $y = \frac{1}{1 + x^2}$

2) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$;

9) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$;

3) $y = \frac{x^4}{4} - x^3$;

10) $y = x^2(1 - x)$;

4) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$;

11) $y = 1 - \sqrt[3]{(x - 4)^2}$;

5) $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$;

12) $y = 4x - \operatorname{tg} x \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ oralikda

6) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$;

13) $y = xe^{\frac{x}{2}}$;

7) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;

14) $y = x \ln x$.

3. Kuyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va jadvallari tuzilsin.

1. $y = 4x - x^2$;

6. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;

2. $y = x^2 + 2x + 3$;

7. $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$;

3. $y = \frac{x^3}{3} + x^2$;

8. $y = x - 2 \ln x$;

4. $y = \frac{x^2}{x - 2}$

9. $y = \sin 2x - x, \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ oralikda.

5. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$;

10) $y = 4x - x^3$

4. Ёуидаги функсияларнинг ъаваріълік va botіълік oralіъларини toping:

1) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$, $x > 0$;

2) $f(x) = e^x$;

3) $f(x) = \ln x$;

4) $f(x) = x^5 - 10x^2 + 3x$;

5) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$;

6) $y = x^5 + 5x - 6$;

7) $y = (x-4)^5 + 4x + 4$;

8) $y = e^{\frac{x^2}{2}}$;

9) $y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4}$.

5. Ёуидаги функсиялар графикларининг egilish нуъtalarини toping:

1) $y = x^5 + 5x - 6$;

2) $y = e^{\frac{x^2}{2}}$;

3) $y = xe^{1-x}$;

4) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$;

5) $y = \cos x$;

6) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

6. Ёуидаги функсияларнинг asimptotalarини toping.

$$1) y = \frac{x^2 + 1}{x};$$

$$2) y = \frac{x^2}{x-2};$$

$$3) y = x - \ln x;$$

$$4) y = \frac{e^x}{x};$$

$$5) y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x.$$

7. Ёbuyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:

$$1) y = 3x - x^3;$$

$$2) y = -x^3 + 4x - 3;$$

$$3) y = -4x + x^3;$$

$$4) y = x^5 - \frac{5}{3}x^3;$$

$$5) y = x(x-1)^3.$$

8. Quyidagi limitlar Lopital qoidasiga asosan topilsin.

1.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$	10.	$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$
2.	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^n - a^n}$	11.	$\lim_{x \rightarrow 0} x^x$
3.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$	12.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$
4.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$	13.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$
5.	$\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$
6.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$	15.	$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln x$

7.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$	16.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
8.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$	17.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$	18.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

9. To'la xarajatlar chizig'i tenglamasi $K = 6 \lg(1 + 3x)$ bo'lsa, limitik xarajat chizig'i tenglamasini yozing?

10. $E_x(f(x))$ $f(x)$ funksiyaning egiluvchanligi bo'lsa, $xf(x)$ funksiya egiluvchanligi $E_x(f(x)) + 1$ bo'lishini isbotlang.

11. $y = x^3 - 1$ funksiya egiluvchanligini hisoblang. $x = 1$ va $x = 5$ bo'lganda egiluvchanligi ko'rsatkichini toping.

12. $y = e^{6x}$ funksiya egiluvchanligini toping?
 $x = 1$, $x = 0$, $x = 2$ bo'lganda egiluvchanlik ko'rsatkichini toping?

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar

22(3)-ma'ruza. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar haqida asosiy tushunchalar Reja.

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar haqida asosiy tushunchalar
2. Ikki va ko'p argumentli funksiya limiti.
3. Ikki va ko'p argumentli funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.
4. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi va to'la differensial.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ko'p o'zgaruvchili funksiya, ikki o'zgaruvchili funksiya, ikki o'zgaruvchili funksiya aniqlanish va o'zgarish sohalari, berilish usullari, geometrik tasviri, limiti, uzluksizligi va uzilishi. Xususiy orttirma, xususiy hosila, to'la differensial, ikkinchi tartibli xususiy hosila, ikkinchi tartibli to'la differensial, taqribiy hisoblash.

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar haqida asosiy tushunchalar

Tabiat va jamiyatda juda ko'p masalalar borki o'zgaruvchi miqdorlar bog'lanishlarida bittasining sonli qiymati boshqa bir nechasining qiymati bilan aniqlanadi. Masalan, tomonlarining uzunliklari x va y dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi, uning tomonlarining uzunliklari o'zgarishi bilan o'zgarib boradi; parallelepipedning hajmi uning uchala o'lchovining o'zgarishi bilan o'zgaradi; biror yer maydonidan olinayotgan hosildorlik yerning tuzilishiga, unga o'g'it berishga, sug'orishga, dehqonning malakasiga va boshqa juda ko'p faktorlarga; sigirdan sog'ib olinayotgan sut miqdori, sigir zotiga, uning qanday yem-xashak bilan boqilishiga va hokozolarga bog'liq. Bunday misollarni istalgancha keltirish mumkin.

Bunday bog'lanishlarni tekishirish uchun **ko'p o'zgaruvchili (argumentli) funksiyalar** tushunchasini kiritamiz va ularni tekshirish apparati amallarini o'rganamiz.

1-ta'rif. R^2 fazoda biror D to'plamning bir-biriga bog'liq bo'lmagan x va y o'zgaruvchilari har bir (x, y) haqiqiy sonlari juftligiga biror qoidaga ko'ra E to'plamdagi bitta z haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, D to'plamda **ikki x va y o'zgaruvchilarning funksiyasi Z aniqlangan** deyiladi. Ikki o'zgaruvchining funksiyasi simvolik tarzda quyidagicha belgilanadi: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ (funksiya bilan o'zgaruvchilar mos ravishda x, t *ëku* x_1, x_2 lar bilan belgilangan bo'lsa $U = f(x, t)$ *ëku* $y = f(x_1, x_2)$ tarzda ifodalanishi ham mumkin va h.k.). Bunda x, y o'zgaruvchilarga yerkli o'zgaruvchilar yoki argumentlar, Z ga yerksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi.

D to'plamga funksiyaning aniqlanish sohasi, E to'plamga o'zgarish yoki qiymatlar sohasi deyiladi. Har bir juft haqiqiy songa biror tayin koordinat sistemasida bitta M nuqta va bitta nuqtaga bir juft haqiqiy son mos kelganligi

uchun ikki argumentli funksiyani M nuqtaning funksiyasi ham deb qaraladi, hamda $y = f(x_1, x_2)$ o'rniga $y = f(M)$ ham deb yozish mumkin.

Ikki o'zgaruvchili funksiya berilish usullari ham, bir o'zgaruvchili funksiyaga o'xshash har xil bo'lishi mumkin. Ko'proq funksiyaning **analitik usulda** berilishini qaraymiz. Masalan. 1) $y = x_1^2 + x_2^2$ bu funksiya analitik usulda bo'lib, $O X_1 X_2$ tekislikning hamma nuqtalari uchun aniqlangan. O'zgarish sohasi $[0, +\infty)$ dan iborat bo'ladi. 2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funksiya aniqlangan bo'lishi uchun $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ *ëku* $x^2 + y^2 \leq 4$ bo'lishi kerak, bunday nuqtalar to'plami markazi koordinatlar boshida radiusi 2 ga teng bo'lgan doiradan iborat. Qiymatlar to'plami $[0, 2]$ bo'ladi. 3) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$ funksiya

$x^2 + y^2 - 9 > 0$, ya'ni markazi koordinatlar boshida radiusi 3 ga teng bo'lgan doiradan tashqarida aniqlangan. Qiymatlar to'plami $(0, +\infty)$.

Ikki argumentli funksiyaning geometrik tasviri fazoda tenglamasi $z = f(x, y)$ bo'lgan sirtни ifodalaydi. Masalan: 1) $z = 2x + 3y - 12$ ikki argumentli funksiya fazoda $2x + 3y - z - 12 = 0$ tekislikni tasvirlaydi.

2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sfera tenglamasi bo'lib, $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ikki argumentli funksiyalar grafiklari sferani ifodalaydi.

2-ta'rif. D to'plamning har bir (x_1, x_2, x_3) haqiqiy sonlar uchligiga biror qoida bo'yicha E to'plamdagi bitta y haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, D to'plamda uch (x_1, x_2, x_3) o'zgaruvchining funksiyasi aniqlangan deyiladi.

Bunda x_1, x_2, x_3 yerli o'zgaruvchilar yoki argumentlar, y yesa yerksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi. Uch o'zgaruvchining funksiyasi $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $u = f(x, y, z)$, $u = A(x, y, z)$ va h.k. belgilanadi.

Geometrik nuqtai nazardan to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida haqiqiy sonlarning har bir (x, y, z) uchligiga fazoning yagona $P(x, y, z)$ nuqtasi mos keladi va aksincha. Shuning uchun uch o'zgaruvchining fuksiyasini $P(x, y, z)$ nuqtaning funksiyasi sifatida ham qarash mumkin. Shunday qilib, $u = f(x, y, z)$ o'rniga, $u = f(P)$ deb yozish ham mumkin. Uch o'zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi R^3 fazoning biror nuqtalar to'plami yoki butun fazo bo'lishi mumkin. Masalan: $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ funksiya aniqlanish sohasi: $25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ yoki $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ shartda aniqlanganligi uchun $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ sfera va uning ichida aniqlangan.

To'rt o'zgaruvchili va umuman n o'zgaruvchili funksiyaga ham yuqoridagidek ta'rif berish mumkin. Bunday funksiyalar mos ravishda $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *ëku* $u = f(x, y, z, t)$, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Simvollar bilan belgilanadi.

To'rt va undan ortiq o'zgaruvchiga bog'liq funksiyalarning aniqlanish sohasini chizmalarda ko'rgazmali namoyish yetish mumkin yemas. Ammo, uni tasvirlash mumkin bo'lmasa y yo'q deyish mumkin yemas. Masalan, to'rtinchi o'zgaruvchi fazodagi temperatura, beshinchisi zichlik va h.k. lar bo'lishi mumkin. Lekin, geometrik atamalarni davom yettirib, n o'zgaruvchining funksiyasini biror n o'lchovli fazo $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtasining funksiyasi sifatida qarash mumkin.

2. Ikki va ko'p argumentli funksiya limiti. $y = f(x)$ funksiya uchun nuqtaning atrofi shu nuqtani o'z ichiga olgan oraliq bo'lar yedi. Ikki argumentli $z = f(x, y)$ funksiya qaralganda **nuqtaning δ atrofi** deyilganda markazi $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada δ radiusli doiraning ichida yotuvchi barcha $P(x, y)$ nuqtalar tushuniladi.

Fazodagi nuqtaning δ atrofi ham shunga o'xshash aniqlanib markazi $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada radiusi δ bo'lgan sharning ichki nuqtalari bo'ladi.

n o'lchovli ($n > 3$) fazoda $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtaning δ atrofi shunga o'xshash aniqlanadi.

1-ta'rif. Ikki o'zgaruvchili $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya P_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsa, (P_0 nuqtada aniqlanmagan bo'lishi mumkin) va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, $\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x, y)$ nuqtalar uchun

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \quad \text{ëku} \quad |f(P) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A **o'zgarmas son** $z = f(x, y)$ **funksiyaning** $P \rightarrow P_0$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \quad \text{ëku} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki, A son $z = f(x, y)$ funksiyaning limiti bo'lsa, $|f(x, y) - A|$ ayirma $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ da cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Uch va undan ortiq o'zgaruvchi funksiyasining limiti ham yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi.

Bir necha o'zgaruvchili funksiyaning limiti 0 ga teng bo'lsa, bunday funksiya cheksiz kichik funksiya yoki cheksiz kichik miqdor deyiladi.

$y = f(x)$ funksiya uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremlar bir necha o'zgaruvchining funksiyasi uchun ham o'rinli yekanligini ta'kidlab o'tamiz.

3. Ikki va ko'p argumentli funksiyaning uzluksizligi va uzilishi. 1-ta'rif. $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada hamda uning biror atrofida aniqlangan va

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) \quad \text{ëku} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

bo'lsa, ya'ni funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti, funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, **funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz** deyiladi.

Bu ta'rifga teng kuchli 2-tarifni ham keltiramiz.

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

$z = f(x, y) = f(P)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi to'liq orttirmasi bo'lsin.

2-ta'rif. $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo'lib, argumentlarning Δx va Δy cheksiz kichik orttirmalariga funksiyaning ham Δz cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya'ni

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$$

bo'lsa, **funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz** deyiladi.

3-ta'rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmagan nuqtalar **uzilish nuqtalari** deyiladi. Ikki o'zgaruvchili funksiya uzilish nuqtalari butun chiziqni hosil qilishi mumkin.

4.1. 2-o'zgaruvchili funksiya xususiy va to'la orttirmalari.

1. 1-ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiya x o'zgaruvchiga biror Δx orttirma berib, y o'zgaruvchini o'zgarishsiz qoldirsak, funksiya $\Delta_x z$ orttirma olib, bu orttirmaga z funksiyaning **x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Xuddi shunday, y o'zgaruvchiga Δy orttirma berib x o'zgarishsiz qolsa, unga z funksiyaning **y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

2-ta'rif. x va y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx va Δy orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funksiya $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ **to'liq orttirma** oladi.

4.2. 2-o'zgaruvchili funksiya xususiy hosilalari. 1-ta'rif. a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli

limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning **x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi** deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial x}$ yoki $z'_x = f'_x(x, y)$ bilan belgilanadi.

b) $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning y

o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_y = f'_y(x, y)$

bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar ta'riflaridan ko'rinadiki, bir argumentli funktsiyani differensiallashning hamma qoida va formulalari o'z kuchida qoladi.

Istalgan chekli sondagi o'zgaruvchilar funksiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

1-misol. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Oldin y ni o'zgarmas deb z'_x ni topamiz:

$$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y,$$

yendi x ni o'zgarmas deb $\frac{\partial z}{\partial y}$ ni topamiz:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y.$$

2-misol. $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Hosila olish qoidalarini va formulalaridan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned} u'_x &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x = \frac{x'_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

(u'_y, u'_z larni mustaqil toping).

4.3. To'la differensial. Ma'lumki, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx va Δy orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funksiya $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ to'la orttirma oladi. Bu to'la orttirmaning Δx va Δy larga nisbatan chiziqli bo'lgan bosh qismi funksiyaning **to'la differensial** deyiladi va dz bilan belgilanadi. $z = f(x, y)$ funksiyaning to'la differensial

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (1)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. To'la differensialdan funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, ya'ni $\Delta z \approx dz$ yoki $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz$, bundan

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy \quad (2)$$

bo'ladi.

Uch argumentli $u = F(x, y, z)$ funksiyaning to'la differensial

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

1-misol. $z = \ln(x^2 + y^2)$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$z'_x = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

(1) formulaga asosan, $dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$ bo'ladi.

2-misol. $u = x^2 yz^2$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 yz^2)'_x = yz^2 (x^2)'_x = 2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 yz^2)'_y = x^2 z^2 (y)'_y = x^2 z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 yz^2)'_z = yx^2 (z^2)'_z = 2x^2 yz.$$

(3) formulaga asosan, $du = 2xyz^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 yz dz$ bo'ladi.

3-misol. O'lchovlari $a = 8\text{ m}$, $b = 6\text{ m}$, $c = 3\text{ m}$ bo'lgan parallelepipedning uzunligi va yeni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga ko'paytirilsa, balandligi yesa, 15 sm kamaysa, uning hajmi qanday o'zgaradi.

Yechish. Parallelepipedning hajmi $v = xyz$; x, y, z uning o'lchamlari. Hajm orttirmasini taqriban $\Delta V \approx dV$ formuladan hisoblash mumkin.

$$dV = yzdx + xzdy + xydz$$

bo'lib, shartga ko'ra

$$x = 8, \quad y = 6, \quad z = 3, \quad dx = 0.1, \quad dy = 0.05, \quad dz = -0.15$$

bo'lganligi uchun

$$\Delta V \approx dV = 6 \cdot 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 3 \cdot 0.05 + 8 \cdot 6 \cdot (-0.15) = -4.2$$

bo'ladi. Shunday qilib, hajm taxminan 4.2 m^3 ga kamayadi.

4-misol. To'la differensial formulasidan foydalanib:

$$1) \operatorname{arcctg}\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right), \quad 2) \sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02}$$

larni taqribiy hisoblang.

Yechish: To'la differensial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funksiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang'ich nuqtani shunday tanlash kerakki, funksiyaning va xususiy hosilalarning bu nuqtadagi qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo'lsin. Shundan keyin, (2) formuladan foydalanish mumkin bo'ladi.

$$1) \operatorname{arcctg}\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right) \text{ ifoda } f(x, y) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) \text{ funksiyaning}$$

$P_1(1.97; 1.02)$ nuqtadagi kiymati deyish mumkin. Boshlang'ich nuqta uchun $P_0 = (2; 1)$ ni olsak, $\Delta x = 1.97 - 2 = -0.03$, $\Delta y = 1.02 - 1 = 0.02$ bo'ladi. Yendi xususiy hosilalarni topib, ularning P_0 nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'_x(x, y) = \left[\operatorname{arcctg} \left(\frac{x}{y} - 1 \right)'_x \right] = - \frac{\left(\frac{x}{y} - 1 \right)'_x}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1 \right)^2} = - \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{(x-y)^2}{y^2}} = - \frac{y}{y^2 + (x-y)^2};$$

$$f'_y(x, y) = \left[\operatorname{arcctg} \left(\frac{x}{y} - 1 \right)'_y \right] = - \frac{\left(\frac{x}{y} - 1 \right)'_y}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1 \right)^2} = - \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{(y^2 + (x-y)^2)}{y^2}} = \frac{x}{y^2 + (x-y)^2};$$

$$f'_x(2;1) = - \frac{1}{1 + (2-1)^2} = -0.5; \quad f'_y(2;1) = \frac{2}{1 + (2-1)^2} = 1.$$

(2) formuladan foydalansak,

$$\operatorname{arcctg} \left(\frac{1.97}{1.02} - 1 \right) \approx \operatorname{arcctg} \left(\frac{2}{1} - 1 \right) + (-0.5)(-0.03) + 1 \cdot 0.02 = \frac{\pi}{4} + 0.015 + 0.02 = 0.82$$

bo'ladi.

2) $\sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02}$ ni $f(x, y, z) = \sqrt{x^y + \ln z}$ funksiyaning $P_1(1.04; 1.99; 1.02)$ nuqtadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang'ich nuqta uchun $P_0(1; 2; 1)$ ni tanlaymiz. Bu holda

$$\Delta x = 1.04 - 1 = 0.04, \quad \Delta y = 1.99 - 2 = -0.01, \quad \Delta z = 1.02 - 1 = 0.02$$

bo'ladi. Xususiy hosilalarni topib, ularning $P_0(1; 2; 1)$

nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f'_x(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_x(1; 2; 1) = \frac{2 \cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 1;$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_y}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{x^y \cdot \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_y(1; 2; 1) = \frac{1^2 \cdot 0}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 0;$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_z}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_z(1; 2; 1) = \frac{1}{2}.$$

(2) formulaning uch argumentli funksiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02} \approx \sqrt{1^2 + \ln 1} + 1 \cdot 0.04 + 0 \cdot (-0.01) + \frac{1}{2} \cdot 0.02 = 1.05$$

natijani olamiz.

4.4. ***Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar***

1) $z = f(x, y)$ **funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari** deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qo'yidagicha belgilanadi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}'' = f_{xx}''(x, y); & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}'' = f_{xy}''(x, y); \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx}'' = f_{yx}''(x, y); & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}'' = f_{yy}''(x, y).\end{aligned}$$

$f_{xy}''(x, y)$ va $f_{yx}''(x, y)$ xususiy hosilalar **aralash xususiy hosilalar** deyiladi. Aralash xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgan nuqtalarda ular o'zaro teng bo'ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ yozuv z funksiyani m marta x o'zgaruvchi

bo'yicha va $(n - m)$ marta y o'zgaruvchi bo'yicha differensiallashni bildiradi.

1-misol. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_x = 4x^3 + 8xy^3 + 7y, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_y = 4x^2 \cdot 3y^2 + 7x = 12x^2y^2 + 7x.\end{aligned}$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_x = 12x^2 + 8y^3, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_y = 24xy^2 + 7, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (12x^2y^2 + 7x)'_x = 24xy^2 + 7, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (12x^2y^2 + 7x)'_y = 24x^2y.\end{aligned}$$

2). ***Ikkinchi tartibli to'la differensial*** $d(dz) = d^2z$ kabi aniqlanib, xususiy hosilalar orqali quyidagi formula bo'yicha topiladi.

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \quad (1)$$

2-misol. $z = x^2 y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensialini toping.
Yechish. Xususiy hosilalarni topamiz:

$$z'_x = (x^2 y^3)'_x = 2xy^3; \quad z'_y = 3x^2 y^2; \quad z''_{xx} = 2y^3, \quad z''_{xy} = 6xy^2, \\ z''_{yx} = 6xy^2, \quad z''_{yy} = 6xy^2,$$

(1) formulaga asosan ikkinchi tartibli to'la differensial

$$d^2 z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2$$

bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning xususiy orttirmasi deb nimaga aytiladi?
2. Ikki argumentli funksiyaning xususiy xosilasi deb nimaga aytiladi?
3. Ikki o'zgaruvchili(argumentli) funksiyaning xususiy hosilalari nechta bo'ladi?
4. Ikki o'zgaruvchili(argumentli) funksiyaning to'la differensial deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning to'liq orttirmasi va to'la differensial orasida bog'lanish bormi?
6. To'la differensialdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinmi?
7. Ikkinchi tartibli xususiy hosila qanday topiladi?
8. Ikki o'zgaruvchili(argumentli) funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensial nimaga teng?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini toping:

$$1) z = x^3 + 3x^2 y - y^3; \quad 2) z = \frac{xy}{x-y}; \quad 3) u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z};$$

$$4) z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{y}.$$

2. Quyidagi funksiyalarning to'la differensiallarini toping:

$$1) z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}); \quad 2) u = x^{y^2 z}; \quad 3) u = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2};$$

$$4) s = x \ln t.$$

3. $z = xy$ funksiya uchun $P_0(5;4)$ nuqtada $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,2$ bo'lganda dz va Δz larni hisoblang.

4. 1) $(1,04)^{2,02}$; 2) $\sin 32^\circ \cdot \cos 59^\circ$ larni taqribiy hisoblang.

5. $z = x^3 y + y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

6. $s = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)$ funksiya uchun, $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ yekanligini tekshiring.

7. $u = \arctg(2x - t)$ bo'lsa, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = 0$ bajarilishini tekshiring.

8. $z = (x^2 + y^2)^2$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

9. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ funksiya $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

10. $u = x^4 y^2$ ikkinchi tartibli to'la differensialini toping.

11. $z = \sin x \cos y$ ikkinchi tartibli to'la differensialini toping.

12 1) $u = \frac{y^2}{x^2}$; 2) $u = x \ln \frac{y}{x}$ ikkinchi tartibli to'la differensiallarini toping.

4-ma'ruza. Ikki o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining tatbiqlari

Reja.

1. Ikki argumentli funksiya yekstremumi.

2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlarini topish.

Tayanch ibora va tushunchalar

Yekstremumga yega bo'lishning zaruriy va yetarli shartlari, yeng kichik va yeng katta qiymatlar, xarajat funksiyasi, foyda funksiyasi, tovarning limitik bahosi, limitik xarajat, foyda funksiyasi maksimumi. Integral yig'indi, ikki karrali integral, ichki integral, tashqi integral, silindrik jismning hajmi, statik momentlar, og'irlik markazi, inersiya momentlari.

1. **Ikki argumentli funksiya yekstremumi.** 1-ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning $P_0(x_0; y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya'ni

$$f(x_0; y_0) > f(x, y)$$

bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada **maksimumga** yega deyiladi.

2-ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning $P_1(x_1; y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo'lsa, ya'ni

$$f(x_1; y_1) < f(x, y)$$

bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_1(x_1; y_1)$ nuqtada **minimumga** yega deyiladi.

Funksiyaning maksimumi yoki minimumi uning yekstremumi deyiladi. Funksiya yekstremumga yega bo'lgan nuqta uning yekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya yekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

Yekstremumning zaruriy shartlari: $P_0(x_0; y_0)$ nuqta, uzluksiz $z = f(x, y)$ funksiyaning yekstremum nuqtasi bo'lsa,

$$\left. \begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

bo'ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning hiech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydi.

Bunday nuqtalarga yekstremum uchun **kritik (stasionar)** nuqtalar deyiladi. Shuni takidlaymizki, hamma kritik nuqtalar ham yekstremum nuqtalar bo'lavermaydi. Kritik nuqtada yekstremum bo'lmasligi ham mumkin.

Yekstremumning yetarli shartlari

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0); \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0); \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

bilan belgilaymiz va

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

ni tuzamiz.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada yekstremumga yega bo'lib: 1) $A < 0$ bo'lganda $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga; 2) $A > 0$ bo'lganda minimumga yega bo'ladi.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo'lsa, $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada yekstremum yo'q.

3. $\Delta = AC - B^2 = 0$ bo'lsa, yekstremum bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

1-misol. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funksiya yekstre- mumini tekshiring.

Yechish. Bu funksiya butun XOY tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; \quad f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

yekstremumga yega bo'lishning zaruriy shartidan:

$$\left. \begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y &= 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} y &= x - x^3 = x(1 - x^2) \\ y^3 + x - y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [x(1 - x^2)]^3 + x - x^{+x^3} &= 0, \\ (1 - x^2)^3 = -1, 1 - x^2 = -1, x^2 &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 &= 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{aligned} \right\}.$$

Demak, uchta $O(0,0)$, $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ va $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ kritik nuqtalarga yega bo'lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo'q, chunki $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ xususiy hosilalar XOY tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4; \quad f''_{xy}(x, y) = 4; \quad f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4.$$

$O(0,0)$ nuqtada yekstremumning yetarli shartini tekshiramiz:
 $A = -4, B = 4, C = -4; \Delta = AC - B^2 = -4 \cdot (-4) - 4^2 = 0$ bo'lib, yuqoridagi yetarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham bo'lishini ko'ramiz, masalan OX o'qi bo'yicha ($y = 0$)

$$f(x, y)_{y=0} = f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0.$$

$y = x$, bissektrisa bo'yicha,

$$f(x, y) \Big|_{y=x} = f(x, x) = 2x^4 > 0$$

bo'ladi. Shunday qilib, $O(0,0)$ biror atrofida $\Delta f(x, y)$ orttirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak yekstremum yo'q.

$P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz:

$AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ va $A = 20 > 0$ demak $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nuqtada funksiya minimumga yega. $f_{\min} = -8$;

$P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun $A = 20, B = 4, C = 20$ bo'lib, $\Delta = AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ va $A = 20 > 0$ bo'lganligi uchun $P_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funksiya minimumga yega bo'ladi, $f_{\min} = -8$

2-misol. $z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ funksiyaning yekstremumini tekshiring.

Yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}.$$

$P_0(1;1)$ nuqtada xususiy hosilalar mavjud yemas. Demak, $P_0(1;1)$ nuqta kritik nuqta bo'ladi. Bu nuqtada yekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nuqta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z = \sqrt{(1 + \Delta x - 1)^2 + (1 + \Delta y - 1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0,$$

bu ishora $P_0(1;1)$ nuqtaning istalgan atrofida saqlanadi, ya'ni $P_0(1;1)$ nuqtada funksiya minimumga yega $z_{\min} = f(1;1) = 0$.

2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlarini topish. Chegaralangan yopiq sohada differensiallanuvchi funksiya o'zining **yeng katta va yeng kichik qiymatiga** yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu soha chegarasida yerishadi.

1-misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funksiyaning $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Soha AOB uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

bundan $x = -1, y = -1$ bo'lib, $P_0(-1, -1)$ kritik nuqtaga yega bo'lamiz. Funktsiyani soha chegarasida tekshiramiz: AO chegarada $y = 0$ bo'lib, $z = x^2 + x$ funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiyaning yekstremumi:

$$z'_x = 2x + 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2} = -0,5 \text{ nuqtada bo'ladi.}$$

Demak, $P_1(-0,5, 0)$ AO chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x = 0$, BO chegarada $z = y^2 + y$ funksiya hosil bo'lib, $z'_y = 2y + 1 = 0 \quad y = -1/2$. Demak,

$$P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right) \text{ } BO \text{ chegaradagi kritik nuqta bo'ladi. Tenglamasi } y = -3 - x$$

bo'lgan AB chegarada $z = 3x^2 + 9x + 6$ funksiya hosil bo'lib, $z'_x = 6x + 9 = 0$
 $x = -\frac{3}{2}$. AB ning tenglamasidan $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, demak,

$$AB \text{ chegaradagi kritik nuqta } P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \text{ bo'ladi.}$$

Berilgan funksiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1, -1) = -1 ;$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4} ;$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} ;$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} ;$$

$$z_4 = f(O) = f(0, 0) = 0 ;$$

$$z_5 = f(A) = f(-3, 0) = 6 ;$$

$$z_6 = f(B) = f(0, -3) = 6 .$$

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab,

$$z_{eng\,kat.} = f(A) = f(B) = 6 \quad va \quad z_{eng\,kich.} = f(P_0) = -1$$

degan xulosaga kelamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki argumentli funksiyaning yekstremumga yega bo'lishining zaruriy sharti nima?

2. Ikki argumentli funksiyaning yekstremumga yega bo'lishining yetarli sharti nima?

3. Kritik nuqtalar qanday nuqtalar?

4. Ikki argumentli funksiyaning biror yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlari qanday topiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiylarning yekstremumini tekshiring.

1. $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.
2. $z = xy(12 - x - y)$.
3. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.
4. $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1$.
5. $z = x^2 + 3(y + 2)^2$.
6. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 6y + 20$.
7. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.
8. $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10$.
9. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
10. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

Berilgan $z = f(x, y)$ funksiyaning berilgan chiziqlar bilan chegaralangan D yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlarini toping.

1. $z = x^2 - y^2 - x + y$; $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$.
2. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; $x = 0$, $y = 0$, $5x - 3y + 45 = 0$.
3. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5$; $x + y = 5$, $x = -1$, $y = -1$.
4. $z = 3y - 2x - xy$; $x = 0$, $y = 0$, $3x - 4y = 12$.
5. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$.
6. $z = x^2 + 6xy - x + 3y$; $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$.
7. $z = x^2 + 2xy - 10$; $y = 0$, $y = x^2 - 4$.
8. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$; $x = -3$, $y = 0$, $x + y + 1 = 0$.

Bir o'zgaruvchili funksiy integral hisobi

5-ma'ruza. Aniqmas integral va uning xossalari

Reja

1. Boshlang'ich funksiya.
2. Aniqmas *integral* va *uning xossalari*.
3. Asosiy integrallar jadvali.

Tayanch ibora va tushunchalar

Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, integrallash, aniqmas integral xossalari, asosiy integrallar jadvali.

1. Boshlang'ich funksiya. Ma'lumki matematikada amallar juft-juft bo'lib uchrab keladi. Jumladan, qo'shish va ayirish, ko'paytirish va bo'lish, darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish va boshqalar. Funksiya hosilasini topishga yoki differensiallash amaliga teskari amal bormikan degan tabiiy savol tug'iladi.

Differensial hisobda funksiya berilgan bo'lsa, uning hosilasini topishni qaradik. Haqiqatda ham fan va texnikaning bir qancha masalalarini hal etishda teskari masalani yechishga to'g'ri keladiki, berilgan $f(x)$ funksiya uchun shunday, $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo'lsin. Ma'lumki, bunday $F(x)$ funksiyaga berilgan $f(x)$ funksiyaning ***boshlang'ich (dastlabki) funksiyasi*** deyiladi.

Masalan, $y = f(x) = x^4$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi, $F(x) = \frac{x^5}{5}$ bo'ladi, chunki $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4 = f(x)$ bo'ladi.

2. Aniqmas *integral* va *uning xossalari*. Ta'rif. $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, $F(x) + C$ (bunda C ixtiyoriy o'zgarmas) funksiyalar to'plami shu oraliqda $f(x)$ ***funksiyaning aniqmas integrali*** deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bilan belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o'zgaruvchisi, $\int$ integral belgisi deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx$ simvol, $f(x)$ funksiyaning hamma boshlang'ich funksiyalari to'plamini belgilaydi.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga integrallash deyiladi.

Aniqmas integralning xossalari:

1) aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiya, differensial esa integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{va} \quad d\int F(x)dx = F(x)dx;$$

2) biror funksiyaning hosilasidan hamda differensialidan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad \text{va} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Bu xossalar aniqmas integralning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, 1-xossadan $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ bo'ladi. (Qolganlarini keltirib chiqarish o'quvchiga havola etiladi).

Bu xossalardan differensiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin.

3) $\int Kf(x)dx$ ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni $K = \text{const} \neq 0$ bo'lsa,

$$\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx;$$

4) chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

3. Asosiy integrallar jadvali. Berilgan funksiya asosan uning boshlang'ichini topish, berilgan funksiyaning differensiallashga nisbatan ancha murakkabroq masaladir. Differensial hisobda asosiy elementar funksiyalarning, yig'indining, ko'paytmaning, bo'linmaning hamda murakkab funksiyalarning hosilasini topishni o'rgandik. Bu qoidalar istalgan elementar funksiyalarning hosilasini topishga imkon berdi. Elementar funksiyalarni integrallashda esa

differentiallashtirishdagi umumiy qoidalar yo'q. masalan, ikkita elementar funksiyalar boshlang'ichlarining ma'lum bo'lishiga qaramasdan, ular ko'paytmasining, bo'linmasining boshlang'ichini topishda aniq bir qoida yo'q.

Integrallashtirishda integral ostidagi ifodaning muayyan berilishiga qarab, unga mos individual usullardan foydalanishga to'g'ri keladi. Boshqacha aytganda, integrallashtirishda ancha kengroq fikr yuritish kerak bo'ladi. Funksiyani integrallashtirishda ya'ni boshlang'ich funksiyani topish metodlari bir qancha shunday usullarni ko'rsatadiki, ular yordamida ko'p hollarda maqsadga erishiladi.

Integrallashtirishda maqsadga erishish uchun quyidagi **asosiy integrallar jadvalini** yoddan bilish zarur.

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad 2) \int dx = x + C; \quad 3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4) \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 5) \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 6) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1); \quad 8) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad 10) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$11) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C; \quad 12) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - k}) + C.$$

Bu formulalarning to'g'riligini, tekshirish tengliklarning o'ng tomonidagi ifodalar differensial integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko'rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d\left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1} dx = x^n dx.$$

Integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralning 4 va 3 xossalariga asosan,

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \int x^3 dx + 5 \int \sin x dx - 9 \int dx$$

bo'ladi. Asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 4) formulalarga asosan,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1, \quad 5 \int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2), \quad -9 \int dx = -9(x + C_3).$$

Demak,

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - 9C_3).$$

Yuqoridagi integralni hisoblashda har bir uchta integralda o'zining ixtiyoriy o'zgarmasini qo'shdik, lekin oxirgi natijada bitta ixtiyoriy o'zgarmasni qo'shamiz, chunki C_1, C_2, C_3 ixtiyoriy o'zgarmalar bo'lsa, $C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$ ham ixtiyoriy o'zgarmas bo'ladi, shuning uchun, oxirgi natijani quyidagicha yozamiz:

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \cos x - 9x + C.$$

Integralning to'g'ri hisoblanganligini tekshirish uchun oxirgi tenglikning o'ng tomonini differensiallash bilan ko'rsatish mumkin (buni bajarishni o'quvchiga havola etamiz).

2-misol. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3 \sqrt{x^2}} \right) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Manfiy daraja xossasidan, hamda 4) xossadan foydalanib, jadvaldagi 1) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3 \sqrt{x^2}} \right) dx &= \int \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{3} \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C \end{aligned}$$

bᐃladi.

3-misol. $\int \frac{3 dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ayniyatdan hamda integralning 3) va 4) hossalardan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int \frac{3 dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 3 \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3 \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + 3$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) + C.$$

4-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Jadvaldagi 9) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Boshlang'ich funksiya qanday funksiya?
2. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral orasida qanday bog'lanish bor?

3. Integrallash amali nima?
4. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
5. Asosiy integrallar jadvali nimalardan iborat?
6. Integrallash to'g'ri bajarilganligini qanday tekshirish mumkin?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

$$1. \int \frac{5x^8 + 6}{x^4} dx; \quad 2. \int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) dx; \quad 3. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) dx \quad 4. \int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 3}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$5. \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx; \quad 6. \int \left(5^x + \frac{5^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad 7. \int \frac{5 + 3tg^2 x}{\sin^2 x} dx; \quad 8. \int \left(\frac{4}{9 + x^2} - \frac{5}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 - 49}; \quad 10. \int \frac{dx}{x^2 + 16}; \quad 11. \int \left(\frac{5}{\sqrt{9 - x^2}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3}} \right) dx; \quad 12. \int \left(\frac{7}{x^2 + 7} - \frac{6}{x^2 - 3} \right) dx.$$

6-ma'ruza. Integrallashning asosiy usullari

Reja

1. O'zgaruvchini almashtirish va bevosita integrallash.

2. Bo'laklab integrallash.

Tayanch ibora va tushunchalar

O'zgaruvchini almashtirish, bevosita integrallash, bo'laklab integrallash, bo'laklab integrallashning maqsadga muvofiqligi.

Shunday bir necha usullarni qaraymizki, ular yordamida ko'p hollarda integrallarni hisoblash, jadval integrallariga keltiriladi.

1. O'zgaruvchini almashtirish. Ko'p hollarda yangi o'zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash, jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x) = t$ almashtirish olinib, bunda t yangi o'zgaruvchi bo'lib, o'zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

ko'rinishda bo'ladi.

O'zgaruvchini almashtirish usuliga bir necha misollar qaraymiz

1-misol. $\int (3x+1)^7 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $3x+1 = t$ deb $3dx = dt$ yoki $dx = \frac{dt}{3}$ ekanligini hisoblasak,

$$\int (3x+1)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x+1)^8}{24} + C$$

bo'ladi.

2-misol. $\int \sqrt[3]{1+x^2} x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $1+x^2 = t$ o'zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bu holda $2x dx = dt$ yoki

$x dx = \frac{dt}{2}$ bo'lib,

$$\int \sqrt[3]{1+x^2} \cdot x dx = \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{1+x^2} + C$$

boʻlad.

3-misol. $\int \cos mx dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $dx = \frac{1}{m} d(mx)$ oʻzgartirish olib,

$$\int \cos mx dx = \frac{1}{m} \int \cos mx d(mx) = \frac{1}{m} \sin mx + C$$

natijaga ega boʻlamiz. Bunday integrallashga **bevosita integrallash** deb ataladi. Chunki $mx = t$ bilan oʻzgaruvchini almashtirib ham shu natijaga kelish mumkin edi. Yuqoridagi integralda oʻzgaruvchini almashtirib oʻtirmasdan uni fikrda bajardik.

4-misol. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\ln x = t$ bilan yangi oʻzgaruvchini almashtirib, $\frac{dx}{x} = dt$

ekanligini hisobga olsak,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

boʻlad.

5-misol. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x = t^2$ bilan yangi oʻzgaruvchi kiritamiz oxirgi tenglikdan differensial topib, $dx = 2tdt$ boʻlganligi uchun,

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

boʻlad. —

6-misol. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\cos x dx = d(\sin x)$ ni hisobga olib,

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

natijaga kelamiz.

Shunday qilib, oddiy hollarda

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad dx = \frac{1}{a}(ax + b), \dots$$

tengliklardan foydalanib, o'zgaruvchini almashtirishni fikrda bajarib, bevosita integrallash ham mumkin.

2. Bo'laklab integrallash. Bo'laklab integrallash usuli differensial hisobning ikkita funksiya ko'paytmasi differensial formulasi asoslangan.

Ma'lumki, $d(uv) = u dv + v du$, bundan $u dv = d(uv) - v du$. Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$$

natijaga ega bo'lamiz. Shunday qilib,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1)$$

formulani hosil qildik. (1) formulaga **bo'laklab integrallash** formulasi deyiladi.

Bu formula yordamida berilgan $\int u dv$ integraldan ikkinchi $\int v du$ integralga o'tiladi. Demak, bo'laklab integrallashni qo'llash natijasida hosil bo'lgan ikkinchi integral, berilgan integralga nisbatan soddaroq yoki jadval integrali bo'lgandagina bu usulni qo'llash maqsadga muvofiqdir. Bu maqsadga integral ostidagi ifodani u va dv ko'paytuvchilarga qulay bo'laklab olish natijasida erishish mumkin. Berilgan integral ostidagi ifodaning bir qismini u va qolgan qismini dv deb olgandan keyin (1) formuladan foydalanish uchun v va du larni aniqlash kerak bo'ladi. du ni topish uchun u ning differensial topilib, v ni topish uchun esa dv ifodani integralaymiz, bunda integral ixtiyoriy o'zgarmas C ga bog'liq bo'lib, uning istalgan bir qiymatini xususiyl holda $C = 0$ ni olish mumkin.

Shunday qilib, integral ostidagi ifodaning bir qismini u deb olishda u differensiallash bilan soddalashadigan, qolgan qismi dv bo'lib, qiyinchiliksiz integrallanadigan bo'lishi kerak.

Bo'laklab integrallash formulasi ko'proq:

$$1) \int p(x)e^{ax} dx, \int p(x)\sin mx dx, \int p(x)\cos ax dx \quad va$$

2) $\int p(x)\ln x dx, \int p(x)\arcsin x dx, \int p(x)\arccos x dx, \int p(x)\arctg x dx, \int p(x)\operatorname{arcctg} x dx$
(bular da $p(x)$ biror darajali ko'phad) ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi. Bu integrallarni hisoblashda 1) guruh integrallarda u uchun $p(x)$ ko'phad, qolgan qismi dv uchun olinib, 2) guruh integrallarda u uchun mos ravishda

$\ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctg x, \operatorname{arcctg} x$ lar,

qolgan qismi dv uchun olinadi.

Bo'laklab integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi ifodani $u = x, dv = \cos x dx$ deb

bo'laklasak, $du = dx, v = \int \cos x dx = \sin x$ bo'lib, (1) formulaga asosan,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\begin{matrix} u & dv & u & v & v & du \end{matrix}$$

natijaga ega bo'lamiz.

Bu integralda (1) formuladan foydalanish natijasida ikkinchi integral $\int \sin x dx$ hosil bo'ldi, bu jadval integrali bo'lganligi uchun osongina topildi.

2-misol. $\int x^2 e^{3x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek $u = x^2, dv = e^{3x} dx$ ko'rinishda bo'laklab olsak,

$$du = 2x dx, v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x}$$

hosil bo'ladi. (1) formulaga asosan

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} 2x dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

bo'ladi. Oxirgi hosil bo'lgan integral berilgan integralga nisbatan soddalashdi (berilgan integralda x ning 2- darajasi, ikkinchisida buning

darajasi bittaga kamaydi). Keyingi integralda yana (1) formulani qo'laymiz.

$$\int x e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{3x}, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$= x \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C_1 = \frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C_1.$$

Shunday qilib, natijada

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C_1 \right] = \frac{e^{3x}}{3} \left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} \right) + C$$

hosil bo'ladi.

3-misol. $\int x^3 \cos 2x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek emas, teskarisini ya'ni $u = \cos 2x$, $dv = x^3 dx$ bo'laklab olaylik; bu holda

$$du = -2 \sin 2x dx, \quad v = \frac{x^4}{4} \text{ bo'lib (1) formuladan foydalangandan}$$

keyin

$$\int x^3 \cos 2x dx = \cos 2x \cdot \frac{x^4}{4} + \int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \sin 2x dx = -\frac{x^4}{4} \cos 2x +$$

$$+\frac{1}{2} \int x^4 \sin 2x dx$$

ifoda hosil bo'ladi. Keyingi $\int x^4 \sin 2x dx$ integral berilgan $\int x^3 \cos 2x dx$ integralga nisbatan murakkabroqdir (x ning darajasi bittaga ortdi). Demak, bunday bo'laklab olish maqsadga muvofiq emas, ya'ni $u = x^3$, $dv = \cos 2x dx$ deb olish kerak edi. (Bu integralni hisoblashni o'quvchiga havola qilamiz).

4-misol. $\int \arccos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x, \quad du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x dx = \frac{dt}{2} \\ x dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = x \arccos x + \int -\frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = x \arccos x - \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} +$$

$$+ C = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Bu integralda bir marta bo'laklab integrallagandan keyingi hosil bo'lgan integralda o'zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib integralladik. Integrallash usullarini qo'llashda o'zgaruvchini almashtirganda yoki bo'laklab integrallaganda yozuvda tartib bo'lishi uchun yuqoridagi integralni hisoblangandagidek yozishga odat qilishni tavsiya etiladi.

5-misol. $J = \int e^x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bo'laklab integrallasak

$$J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx,$$

hosil bo'ladi.

Keyingi integral, berilgan integral bilan o'xshashdek tuyuladi, lekin oxirgi integralda bo'laklab integrallash formulasini ikkinchi marta qo'llash bilan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x, \quad du = \cos x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

Shunday qilib,

$$J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$$

J hisoblanishi kerak bo'lgan integralga nisbatan oddiy chiziqli tenglamaga keldik. Oxirgi tenglamadan

$$2J = e^x \cos x + e^x \sin x \quad \text{ëku} \quad J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$$

natijaga ega bo'lamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali nimaga teng?
2. O'zgaruvchini almashtirib integrallashning mohiyati nima?
3. Bevosita integrallash nima?
4. Bo'laklab integrallash usuli nimaga asoslanadi?
5. Bo'laklab integrallash formulasini yozing?
6. Bo'laklab integrallash qanday holda maqsadga muvofiq bo'ladi?
7. Qanday hollarda bo'laklab integrallashdan foydalaniladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu integrallarni hisoblang.

1. $\int \sin 3x dx$. 2. $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+5} dx$.
3. $\int e^{-x^3} x^2 dx$. 4. $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$. 5. $\int (e^x + e^{\frac{x}{2}}) dx$. 6. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.
7. $\int (5-2x)^9 dx$. 8. $\int \sqrt[3]{7-3x} dx$. 9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} dx$. 10. $\int \cos(1-3x) dx$.
11. $\int \sin(5x+7) dx$. 12. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$. 13. $\int 3^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 14. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.
15. $\int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x} dx$. 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$. 17. $\int x^2 \sin x dx$. 18. $\int x \ln x dx$. 19. $\int \arctg x dx$.
20. $\int \arcsin x dx$. 21. $\int x^2 e^{2x} dx$. 22. $\int e^x \sin x dx$. 23. $\int (x+3) \sin x dx$.
24. $\int x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$. 25. $\int x \arctg x dx$. 26. $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}$. 27. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6} dx$.

7,8-ma'ruzalar. Rasional va irrasional funksiyalarni integrallash

Reja

1. Rasional kasr funksiyalarni integrallash:

- 1). To'g'ri va noto'g'ri kasr rasional funksiyalar haqida;
- 2). To'g'ri kasr rasional funksiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash va ularni integrallash;
- 3). To'g'ri kasr rasional funksiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash.

2. Ayrim irrasional funksiyalarni integrallash.

Tayanch ibora va tushunchalar

Kasr rasional funksiyalar, to'g'ri va noto'g'ri kasr rasional funksiyalar, ko'p hadni ko'p hadga bo'lish, sodda kasrlar, rasional funksiya yoyilmasi, noma'lum koeffitsiyentlar usuli, irrasional funksiyalar.

1. Rasional kasr funksiyalarni integrallash. 1). To'g'ri va noto'g'ri kasr rasional funksiyalar haqida. Yuqorida ko'rsatilgan integrallash usullari yordamida hamma integrallarni hisoblash mumkin deb bo'lmaydi.

Shunday funksiyalar sinflari borki, ular uchun muayyan usullardan foydalanib ularni jadval integrallariga yoki integrallash usullaridan foydalanish uchun qulay holga keltirish mumkin, shunday funksiya sinflaridan ayrimlarini qaraymiz.

Ma'lumki, har qanday rasional funksiyaning ushbu ko'rinishida ifodalash mumkin, ya'ni

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Suratdagi ko'phadning darajasi maxrajdagi ko'phad darajasidan kichik, ya'ni $m < n$ bo'lsa, berilgan kasrga **to'g'ri kasr rasional funksiya** deyiladi. Suratdagi ko'phadning darajasi $m \geq n$ bo'lsa, **noto'g'ri kasr rasional funksiya** deyiladi. Kasr noto'g'ri kasr rasional funksiya bo'lsa, suratni maxrajga, ko'phadni ko'phadga bo'lish qoidasiga asosan bo'lib, uning butun qismini ajratib, uni butun

va to'g'ri kasr rasional funksiya keltirish mumkin. Masalan, $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x}$

noto'g'ri kasr rasional funksiyaning, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ kabi kadni $x^2 - x$ kabi kadga bo'lib,

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x} = x + 4 + \frac{7x + 1}{x^2 - x}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Umumiy holda, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ noto'g'ri kasr rasional funksiya bo'lsa, uni

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{P(x)}$$

shaklda ifodalash mumkin, bu yerda $T(x)$ butun rasional funksiya, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri rasional kasr funksiya iborat. $T(x)$ funksiya osongina integrallash mumkin.

Shunday qilib, noto'g'ri kasr rasional funksiya integrallashni, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr rasional funksiya integrallashga keltiriladi.

2). To'g'ri kasr rasional funsiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash va ularni integrallash

$$1) \frac{A}{x-a}; \quad 2) \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k > 1 \text{ butun son}); \quad 3) \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$$

ya'ni, kvadrat uch had haqiqiy ildizga ega emas);

$$4) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \quad (n > 1 \text{ butun son}, \quad \frac{p^2}{4} - q < 0) \quad \text{rasional to'g'ri}$$

kasrlarga **sodda kasr rasional funsiyalar** deyiladi. (A, B, p, q, a - haqiqiy sonlar).

Birinchi ikki xildagi funsiyalarni osongina integrallash mumkin, ya'ni,

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

bo'ladi. Endi ushbu

$$3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$$

integralni hisoblaymiz.

Oldin xususiyl hol $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx$ integralni qaraylik. x^2+px+q dan to'la

kvadrat ajratib, $x + \frac{p}{2} = t$ almashtirishdan keyin quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)},$$

bu yerda $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Oxirgi integralda 8) jadval integralidan foydalanib,

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \quad (2)$$

natijani hosil qilamiz.

Endi $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx$ integralni hisoblaymiz.

$$Ax + B = (2x + p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B$$

shakl o'zgartirishdan foydalanib, integralni quyidagicha yozamiz.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{(2x + p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2 + px + q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx. \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} = \ln|x^2 + px + q| + C_1$$

bo'lib, ikkinchi integral (2) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C_2.$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

natijaga ega bo'lamiz.

Bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int \frac{x^4}{x^2 + 9} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya noto'g'ri kasr rasional funksiyaning iborat. Uning butun qismini ajratamiz:

$$\begin{array}{r|l} -x^4 & x^2 + 9 \\ x^4 + 9x^2 & \\ \hline -9x^2 & \\ -9x^2 - 81 & \\ \hline 81 & \end{array}$$

$$\text{Demak, } \frac{x^4}{x^2+9} = x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9}$$

bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^2+9} dx &= \\ &= \int \left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 9x + 81 \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + C = \frac{x^3}{3} - 9x + 27 \arctg \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

2-misol. $\int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Maxrajdagi kvadrat uch haddan to'la kvadrat ajratamiz:
 $x^2 - 8x + 25 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 25 = (x-4)^2 + 9$, hamda $x-4=t$, $dx=dt$
 almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx = \int \frac{t+4+3}{t^2+9} dt = \int \frac{tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t^2+9| + \frac{7}{3} \arctg \frac{t}{3} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2-8x+25) + \frac{7}{3} \arctg \frac{x-4}{3} + C.$$

3. To'g'ri kasr rasional funsiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash.

$\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr rasional funksiyaning maxrajini

$$P(x) = (x-a)^r \cdot (x-b)^s \dots (x^2+2px+q)^t \cdot (x^2+2kx+\ell)^m \dots,$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, bu funksiyaning yagona

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{P(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{B_1}{(x-b)} + \dots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} + \dots + \\ &+ \frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \frac{F_1x+E_1}{(x^2+2kx+\ell)} + \dots + \frac{F_mx+E_m}{(x^2+2kx+\ell)^m} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda $r, s, \dots, t, m$, musbat butun sonlar, a, b, p, q, k, ℓ , haqiqiy sonlar.

$A_1, A_2, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$ lar ayrim haqiqiy sonlar. (1) tenglikka to'g'ri rasional funksiyaning **sodda kasrlar orqali yoyilmasi** deyiladi.

(1) yoyilmadagi $A_1, A_2, \dots, A_r, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$

koeffitsiyentlarni topish uchun uni $P(x)$ ga ko'paytiramiz. $R(x)$ ko'phad bilan (1) yoyilmaning o'ng tomonida hosil bo'lgan ko'phad o'zaro teng bo'lishi uchun bir xil darajali x lar koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'lishi kerak. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, \dots$, noma'lum

koeffisientlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini yechib aniqmas koeffisiyentlarni topamiz.

Rasional funkiya yoyilmasidagi noma'lum koeffisiyentlarni bunday usul bilan topishga **noma'lum koeffisiyentlar usuli** deyiladi.

Bu usulni bir necha misollarda qaraymiz.

1-misol. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ rasional funksiyaning sodda kasrlar yoyilmasi ko'rinishida yozing.

Yechish. Maxrajni $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$ chiziqli ko'paytuvchilarga ajratib, (1) formulaga asosan, qo'yidagicha yozamiz:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2}.$$

Oxirgi tenglikni $x^2 - 5x + 6$ ga ko'paytirib $2x-1 = A_1(x-2) + A_2(x-3)$ *ëku* $2x-1 = (A_1 + A_2)x - 2A_1 - 3A_2$ tenglikni hosil qilamiz. Bir xil darajali x lar koeffisiyentlarini tenglashtirib

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2, \\ -2A_1 - 3A_2 = -1 \end{cases}$$

A_1 va A_2 noma'lumlarga nisbatan, chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bundan $A_1 = 5$, $A_2 = -3$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

hosil bo'ldi.

2-misol. $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ rasional kasrni, sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishida yozing.

Yechish. (1) formulaga asosan, quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Oxirgi tenglikni $x(x^2+1)^2$ ga ko'paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-1 = A_1(x^2+1)^2 + (M_1x+N_1)x(x^2+1) + (M_2x+N_2)x \quad \text{ëku}$$

$x^2-1 = (A_1+M_1)x^4 + N_1x^3 + (2A_1+M_1+M_2)x^2 + (N_1+N_2)x + A_1$
 x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 larning koeffisiyentlarini tenglashtirib

$$x^4 \div 2A_1 + M_1 = 0,$$

$$x^3 \div N_1 = 0,$$

$$x^2 \div 2A_1 + M_1 + M_2 = 1,$$

$$x^1 \div N_1 + N_2 = 0,$$

$$x^0 \div A_1 = -1$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $A_1 = -1$, $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ bo'ladi. Shuning uchun yoyilma quyidagicha

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

bo'ladi.

Endi bir necha integrallarni hisoblaymiz.

3-misol. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ funksiyani $\left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$ ikkita sodda kasrning ayirmasi ko'rinishda yozish mumkin. Shuning uchun,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = -\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}\right) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + C$$

bo'ladi.

4-misol. $\int \frac{x-2}{x^3 + 2x^2} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{x-2}{x^2(x+2)}$ integral ostidagi to'g'ri rasional funksiyani sodda kasrlar

yig'indisi shaklida yozamiz:

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$

oxirgi tenglikni $x^2(x+2)$ ga ko'paytirib,

$$x-2 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2 \quad \text{yoki} \quad x-2 = (A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi x ning bir xil darajalilari koeffitsiyentlarini tenglashtirsak, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + C = 0 \\ x^1 & 2A + B = 1 \\ x^0 & 2B = -2 \end{array} \quad \text{bundan} \quad \begin{array}{l} A + C = 0 \\ 2A + B = 1 \\ B = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A = 1 \\ C = -1 \end{array}$$

bo'ladi. Shunday qilib,

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x+2}$$

Natijada

$$\int \frac{x-2}{x^3+2x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x| + \frac{1}{x} - \ln|x+2| + C = \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$$

bo'ladi.

2. Ayrim irrasional funksiyalarni integrallash. Irrasional funksiyalarni integrallash ko'p hollarda o'zgaruvchini almashtirish bilan rasional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunday irrasional funksiyalarning ayrimlarini ko'raymiz.

1. $\int x^m(a+bx^n)^p$ ko'rinishdagi integralni hisoblash talab etilsin, bunda m, n, p rasional sonlar, a va b lar no'ldan farqli o'zgarmaslar.
 - 1) p butun son bo'lsa, Nyuton binomi bo'yicha yoyish bilan integrallanadi;
 - 2) $\frac{m+1}{n}$ butun bo'lsa, $a+bx^n = t^s$ almashtirish orqali rasionallashtiriladi, bunda $s = p$ kasrning maxraji;
 - 3) $\frac{m+1}{n} + p$ butun bo'lsa, $ax^{-n} + b = t^s$ almashtirish olinib, rasional funksiyaga keltiriladi.

1-misol. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralni $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})dx$ ko'rinishida yozib,

$$m = -\frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}, p = \frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

bo'lganligi uchun $(1+x^{1/3}) = t^2$ almashtirish olsak,

$$x^{1/3} = t^2 - 1, \frac{1}{3}x^{-2/3} dx = 2tdt, x^{-2/3} dx = 6tdt$$

bo'ladi. Bularni berilgan integralga qo'ysak,

$$\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2} dx = \int t \cdot 6tdt = 6 \int t^2 dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = 2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2} + C$$

bo'ladi.

2-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1+x^4)^{-1/4} dx$, $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$

$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ (butun) bo'lganligi uchun $x^{-4} + 1 = t^4$ almashtirish olsak,

$x = (t^4 - 1)^{-1/4}$, $dx = -t^3 (t^4 - 1)^{-5/4} dt$, $\sqrt[4]{1+x^4} = t(t^4 - 1)^{-1/4}$

bo'ladi. Demak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C,$$

$t = \sqrt[4]{1+x^4}$ bo'lganligi uchun,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{1}{4} \ln \frac{|\sqrt[4]{1+x^4}| + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{1+x^4} + C$$

bo'ladi.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integralni qaraymiz.

Bunday ko'rinishdagi ifodalarni integrallash kvadrat uch haddan to'la kvadrat ajratish bilan $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ yoki $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}}$ jadval integrallaridan biriga keltiriladi.

3-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 4$ to'la kvadrat ajratib, $x+1 = u$ desak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + 4}| + C = \ln |(x+1) + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + C$$

bo'ladi.

3) $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integral, $\frac{1}{x+\alpha} = t$ almashtirish

orqali 2. ko'rinishdagi integralga keltiriladi.

4-misol. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{x+1} = t$ bilan almashtirsak,

$$t(x+1) = 1, \quad tx + t = 1, \quad tx = 1, \quad x = \frac{1-t}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

bo'lib,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}} &= \int \frac{t\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 + 2\frac{1-t}{t} + 2}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1-2t+t^2}{t^2} + \frac{2-2t}{t} + 2}} = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2+2t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \end{aligned}$$

bu jadval integraldir. (Oxirgi integralni mustaqil bajarishni o'quvchiga havola qilamiz).

Mustahkamlash uchun savollar

1. Butun rasional funksiya nimadan iborat?
2. Kasr rasional funksiyalar qanday?
3. To'g'ri va noto'g'ri kasr rasional funksiyalar deb nimaga aytiladi?
4. Noto'g'ri kasr rasional funksiyaning integrallash, to'g'ri rasional funksiyaning integrallashga qanday qilib keltiriladi?
5. Sodda kasr rasional funksiyalar deb nimaga aytiladi?
6. Sodda kasr rasional funksiyalar qanday integrallanadi?
7. Aniqmas koeffitsiyentlar usuli nima?
8. Qanday funksiyalar sinfiga irrasional funksiyalar deyiladi?
9. Irrasional funksiyalar qanday integrallanadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Ushbu rasional funksiyalarni integrallang.

- 1) $\int \frac{x^3}{x-3} dx$; 2) $\int \frac{x^4}{x^2+25} dx$; 3) $\int \frac{x-5}{(x-2)(x+4)} dx$; 4) $\int \frac{2x+9}{x^2+x+2} dx$;
- 5) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx$; 6) $\int \frac{5x-1}{2x^2+x-3} dx$; 7) $\int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)} dx$; 8) $\int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x} dx$.

2. Ushbu irrasional funksiyalarni integrallang.

- 1) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx$; 2) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx$; 3) $\int \frac{7x-5}{\sqrt{\sqrt{5+2x-x^2}}} dx$;

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}; \quad 5) \int \frac{\sqrt{x}+3}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx.$$

9-ma'ruza. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Reja

1. Harxil argumentli sinus va kosinuslar ko'paytmalari shaklidagi funksiyalarni integrallash.
2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.
3. Aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Trigonometrik funksiyalarni integrallash, trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indiga keltirish formulalari, sinus va kosinus funksiyalar ko'paytmasi darajalaridan birortasi toq, ikkalasi ham juft yoki toq, aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar.

1. Harxil argumentli sinus va kosinuslar ko'paytmalari shaklidagi funksiyalarni integrallash.

$$\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx \quad (1)$$

ko'rinishdagi integrallarni hisoblaymiz. Maktab kursidan ma'lum bo'lgan trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini, yig'indiga keltirish

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

formulalardan foydalanib, (1) ko'rinishdagi integrallarni

$$\int \sin ax dx, \int \cos bx dx$$

integrallardan biriga keltirib integrallanadi.

1-misol. $\int \sin 2x \cos 7x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi formulalarning birinchisidan

$$\sin 2x \cos 7x = \frac{1}{2} [\sin(2x + 7x) + \sin(2x - 7x)] = \frac{1}{2} (\sin 9x - \sin 5x),$$

$$\int \sin 2x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 9x - \sin 5x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 9x dx - \frac{1}{2} \int \sin 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} (-\cos 9x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} (-\cos 5x) + C = \frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{18} \cos 9x + C.$$

natijaga ega bo'lamiz.

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash. Bunda m, n

lar butun sonlar. Xususiyl hollarda m yoki n sonlardan birortasi 0 ga teng bo'lishi ham mumkin.

1) m yoki n sonlardan bittasi toq bo'lsin. Bu holda integral rasional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunda integrallash mohiyati quyidagi misollardan tushunarli bo'ladi.

3-misol. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx = -d(\cos x)$ va $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ekanligini hamda $\cos x = z$ almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x (-d \cos x) = \\ &= -\int (1 - z^2) z^4 dz = -\int (z^4 - z^6) dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

4-misol. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx = -d \cos x$ bo'lgani uchun, $t = \cos x$ almashtirish olsak,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \int \frac{1 - t^2}{t^2} (-dt) =$$

$$= -\int \frac{1}{t^2} dt + \int dt = \frac{1}{t} + t + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$$

bo'ladi.

Bu usuldan m va n sonlardan bittasi toq va musbat boshqasi ixtiyoriy haqiqiy son bo'lganda ham foydalanish mumkin.

2). Endi m va n sonlar ikkalasi ham toq yoki juft va musbat bo'lsin. Bunday hollarda

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

formulalardan foydalanib, darajalarni pasaytirib, integrallanadi.

6-misol. $\int \sin^2 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integralni izoqlarsiz hisoblaymiz:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

7-misol. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Trigonometrik funksiyalarning darajalarini pasaytirish formulalaridan foydalanib, quyidagi natijaga kelimiz:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 dx = \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x \cos 2x) dx = \\
&= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + C = \\
&= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

3. Aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar. Biz yuqorida elementar funksiyalarni o'z ichiga olgan muhim integrallash usullarini ko'rdik. Lekin praktikada faqat shu usullardan aynan foydalanamiz degan fikr bo'lmasligi kerak. Boshqacha qilib aytganda, integral ostidagi funksiyaning berilishiga qarab unga mos mulohazalardan foydalanish kerak. Masalan,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2 + 6x - 4}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} dx &= \int \frac{d(x^3 + 3x^2 - 4x + 5)}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \\
&= \ln|x^3 + 3x^2 - 4x + 5| + C
\end{aligned}$$

yoki

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3| + C$$

integrallashni bajarish mumkin.

Juda ko'p integrallarni hisoblashda ayrim xususiy usullardan foydalanib oldingi hisoblangan integrallarga keltiriladi. Shuning uchun praktikada integrallashda tayyor qo'llanmalardan foydalanish ham mumkin. Masalan [Yu.A. Брычков, O.I. Marichev, A.P. Prudnikov. Tablisy neopredelyonnykh integralov. M.: Nauka 1986-192s].

Integrallashning bayon etilishidan ma'lumki integrallash texnikasi differensiallashdan murakkabroqdir. Shuning uchun ham integrallashda shunday ko'nikmalar kerakki, bunga ko'p sondagi misollarni yechish natijasida erishish mumkin.

Ma'lumki differensial hisobda istalgan elementar funksiyaning hosilasini topish mumkin edi va u yana elementar funksiyalar bilan ifodalanar edi. Integral hisobda esa masala boshqacharoq bo'lib, ko'plab

misollar keltirish mumkinki, integral $\left(e^{-x^2}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x} \right)$ ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyalari mavjud bo'lishiga qaramasdan, ular elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Bunday integrallar yaxshi o'rganilgan va ulardan amaliyotda foydalanish uchun tayyor jadvallar, grafiklar tuzilgan.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Trigonometrik funksiyalarning ko'paytmasini yig'indiga keltiriladigan formulalarni yozing?
2. Qanday hollarda trigonometrik funksiyalar rasionallasadi?
3. Qanday hollarda trigonometrik funksiyalarning tartibini pasaytirish bilan integrallanadi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu integrallarni hisoblang.

1. $\int \sin 3x \sin 7x dx$.
2. $\int \sin 5x \cos 3x dx$.
3. $\int \sin x \sin 3x dx$.
4. $\int \sin 3x \cos 2x dx$.
5. $\int \cos 4x \cos 2x dx$.
6. $\int \sin 3x \cos x dx$.
7. $\int \sin x \cos^4 x dx$.
8. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.
9. $\int \sin^2 5x dx$.
10. $\int \cos 7x \cos 3x dx$.
11. $\int \sin 4x \sin 2x dx$.
12. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.
13. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$.
14. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$.
15. $\int \int \operatorname{tg}^3 x dx$.
16. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$.
17. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$.
18. $\int \sin^4 x dx$.
19. $\int \cos^4 x dx$.
20. $\int \sin^5 x dx$.
21. $\int \cos^5 x dx$.
22. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.
23. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$.

Aniq integral

10-ma'ruza. Aniq integral va uning asosiy xossalari

Reja

1. Aniq integralga keltiriladigan masalalar haqida.
2. Aniq integralning ta'rifi va uning geometrik ma'nosi.
3. Aniq integralning asosiy xossalari.
4. Aniq integralni hisoblash. N'yuton-Leybnis formulasi.

Tayanch ibora va tushunchalar

O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi, aniq integral, integral yig'indi, funksiyaning integrallanuvchanligi, aniq integralning asosiy xossalari, aniq integralning kattaligi, N'yuton-Leybnis formulasi, aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash.

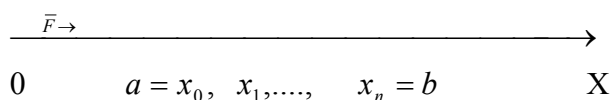
1. **Aniq integralga keltiriladigan masalalar haqida.** *Aniq integral* matematik tahlilning eng asosiy amallaridan biridir.

Yuzalarni, yoy uzunliklarini, hajmlarni, o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hamda iqtisodning bir qancha masalalari aniq integralga keltiriladi.

O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi masalasi

Masala. Material nuqta F o'zgaruvchan kuch ta'sirida OX o'qi bo'yicha harakatlanayotgan bo'lsin. F kuch ta'sirida material nuqta a nuqtadan b nuqtaga o'tganda bajarilgan ishni hisoblang. F kuch x ning funksiyasi bo'ladi. $F(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin.

Yechish: $[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar orqali $[x_{i-1}, x_i]$ šisimiy kesmalarga ajratamiz.



1-chizma.

Mexanikadan ma'lumki kuch o'zgarmas bo'lsa, bajarilgan ish $A = F \cdot l$, bunda F kuch miqdori, l - siljish uzunligi. Har bir qisman kesmada bittadan nuqta tanlaymiz. Bu nuqtalardagi kuchning qiymatini $F(c_i)$ larni hisoblaymiz ($i = 1, n$). Bunda har bir qisman kesmada bajarilgan ish

$$A_i = F(c_i) \Delta x_i$$

bo'ladi. $[a, b]$ kesmada bajarilgan ish taqriban

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i$$

bo'ladi.

$\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda$ deb belgilasak, bajarilgan ishning aniq qiymati

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i \quad (1)$$

bo'ladi.

Shunday qilib, F o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash uchun (1) ko'rinishdagi cheksiz ko'p sondagi cheksiz kichiklar yig'indisining limitini hisoblash kerak ekan. Bunday limitni hisoblashga juda ko'p sondagi geometrik, texnik, texnologik va iqtisodiy jarayonlardagi masalalar keltiriladi.

2. Aniq integralning ta'rifi va uning geometrik ma'nosi. Yuqoridagi masalani umumiy holda qaraymiz. kesmada uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. $[a, b]$ kesmani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, n$ qismaniy kesmalarga ajratamiz, har bir qismaniy kesmada bittadan $c_1, c_2, \dots, c_n$ nuqtalar tanlaymiz. Bu nuqtalarda $f(c_i)$ funksiya qiymatlarini hisoblab $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$ yig'indini tuzamiz? bu yig'indiga $y = f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmadagi integral yig'indi deyiladi. $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda$ belgilash kiritamiz.

Ta'rif. $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ integral yig'indining $[a, b]$ kesmaning $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) qismaniy kesmalarga bo'linish usuliga va ularda $c_1, c_2, \dots, c_n$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan $\lambda \rightarrow 0$ dagi chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi **aniq integrali** deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

simvol bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

bo'lib, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u **integrallanuvchi** ya'ni bunday funksiyaning **aniq integrali** mavjuddir.

3. Aniq integralning asosiy xossalari

Aniq integral quyidagi asosiy xossalarga ega:

1) chekli sondagi integrallanuvchi funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx;$$

2) o'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx;$$

3) $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

bo'ladi;

4) $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik bajarilsa,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi;

5) $c \in [a, b]$ kesmadagi biror nuqta bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

6) m va M sonlar $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

$$7) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$8) \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$9) \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(n)dn$$

bo'ladi;

10) $y = f(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki

$$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunga o'rta qiymat haqidagi teorema deb ham aytiladi.

4. Aniq integralni hisoblash. N'yuton-Leybnis formulasi.

Aniq integralning ta'rifiga asosan, ya'ni cheksiz ko'p sondagi cheksiz kichiklar yig'indisining limitini hisoblash ancha qiyinchilikka olib keladi. Shuning uchun aniq integralni hisoblash uchun, boshqa aniqmas integral bilan aniq integral orasidagi bog'lanishga asoslangan usuldan foydalaniladi.

$F(x)$, $[a, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

formula o'rinli bo'lib, bunga **N'yuton-Leybnis formulasi** deyiladi. Bundan foydalanib **aniq integralning kattaligi** hisoblanadi.

Shunday qo'yilib, aniq integralni hisoblash uchun ham, aniqmas integraldagidek, boshlang'ich funksiyani topish kerak ekan. Bunday masala bilan aniqmas integralni hisoblashda to'laroq shug'ullandik. Demak, aniqmas integralni hisoblashdagi hamma formula va usullar o'z kuchida qolib, undan aniq integralni hisoblashda ham foydalanamiz.

1-misol. $\int_1^4 x^2 dx$ integralni hisoblang.

$$\text{Yechish. } \int_1^4 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

Eslatma: $y = x^2$ funksiyaning $\frac{x^3}{3}$ boshlang'ich funksiyasini oldik,

buning o'rniga ixtiyoriy $\frac{x^3}{3} + C$ boshlang'ich funksiyasini olganda ham natija bir xil bo'ladi. Haqiqatan, ham

$$\left(\frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C \right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = \frac{63}{3} = 21$$

bo'ladi. Shuning uchun bundan keyin $C = 0$ bo'lgan boshlang'ich funksiyani olamiz.

2-misol. $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$ integralni hisoblang:

Yechish; $\sqrt{x+4} = t$ almashtirish olamiz, $x = t^2 - 4$, $dx = 2t dt$ bo'lib,

$x = 0$ bo'lganda, $\sqrt{0+4} = t$, $t = 2$, $\sqrt{5+4} = t$, $t = 3$ bo'ladi.

Shunday

$$\begin{aligned} \int_0^5 x\sqrt{x+4} dx &= \int_2^3 (t^2 - 4)t \cdot 2t dt = \int_2^3 (2t^4 - 8t^2) dt = 2 \int_2^3 t^4 dt - 8 \int_2^3 t^2 dt = 2 \left. \frac{t^5}{5} \right|_2^3 - 8 \left. \frac{t^3}{3} \right|_2^3 = \\ &= \frac{2}{5} (3^5 - 2^5) - \frac{8}{3} (3^3 - 2^3) = \frac{2}{5} \cdot 211 - \frac{8}{3} \cdot 19 = \frac{506}{15} = 33 \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

Demak, **aniq integralda o'zgaruvchini almashtirilganda** o'zgaruvchilar bo'yicha uning integrallash chegaralarini ham almashtirib olinsa, aniqmas integraldagidek oldingi o'zgaruvchiga qaytish kerak emas.

3-misol. $\int_0^\pi x \sin x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: **Bo'laklab integrallash**

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b u dv$$

formulasidan foydalanamiz:

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi(\cos \pi + \sin x \pi) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi(-1) + \sin \pi - \sin 0 = \pi.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday masalalar aniq integralga keltiriladi?
2. Integral yig'indi qanday tuziladi?
3. Aniq integral deb nimaga aytiladi?
4. Aniq integral qanday belgilanadi?
5. Funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun qanday xossaga ega bo'lishi kerak?
6. Aniq integralning asosiy xossalari nimalardan iborat?
7. Nyuton-Leybnis formulasini yozing?
8. Aniq integralni bo'laklab integrallash nimadan iborat?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int_2^4 (x^3 + x) dx$.
2. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 a}$.
4. $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$.
5. $\int_{-5}^2 \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}$.
6. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$.
7. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$.
8. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$.
9. $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.
10. $\int_{\pi}^0 x \cos x dx$.

11-ma'ruza. Aniq integralning tatbiqlari

Reja

1. Aniq integral yordamida yassi figuralar yuzlarini hisoblash.
2. Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash.

3. Aylanma jism hajmini hisoblash.

4. Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Yuzalarni hisoblash, egri chiziqli trapesiya, egri chiziq yoyining uzunligi, aylanma jism hajmi, o'zgaruvchan kuchning bajargan ishi, ishlab chiqarishning mehnat unumdorligi, mahsulotlar (tovarlar) zahirasi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi, daromad funksiyasi,

1. Aniq integral yordamida yassi figuralar yuzlarini hisoblash $y = f(x)$

funksiya grafigi, $x = a$, $x = b$ ikkita to'g'ri chiziqlar va OX o'qi bilan chegaralangan figuraga **egri chiziqli trapesiya** deyiladi. Bunday egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

formula bilan hisoblanadi (1-chizma)

Umumiy hol, ya'ni $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (2)$$

aniq integralga teng bo'ladi.

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_2 = \int_c^d x dy = \int_c^d \varphi(y) dy \quad (3)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, yuza

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt \quad (4)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

4-misol. $xy = 8$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang

Yechish. $y = \frac{8}{x}$ bo'lib, (3) formulaga asosan,

$$S_1 = \int y dx = \int \frac{8}{x} dx = 8 \ln x \Big|_1^e = 8(\ln e - \ln 1) = 8.$$

5-misol. $y = x^2$, $y^2 = x$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani toping.

Yechish:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan $x^4 = x, x^4 - x = 0, x_1 = 0; x_2 = 1$ kesishish nuqtalarining absissalari bo'lib, bu yuza

$$S = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3} \bigg|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{3}$$

bo'ladi.

6-misol. Ellipsning

$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan foydalanib uning yuzini toping.

Yechish. Ellips koordinat o'qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib, hamda

$x = 3 \cos t$ tenglamada $x = 0, x = 3$ bo'lganda $t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = 0$ bo'lganligini

hisobgaolib,

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t (-3 \sin t) dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \\ &= 12 t \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{12}{2} \sin 2t \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - 6(\sin \pi - \sin 0) = 6\pi. \end{aligned}$$

2. Egri chiziqli yoy uzunligini hisoblash. To'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida $y = f(x)$ $[a, b]$ kesmada silliq (ya'ni $y = f(x)$ hosila uzluksiz) bo'lsa, bu egri chiziqli yoyining uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

(5)

formula yordamida hisoblanadi.

Egri chiziqli parametrik tenglama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

bilan berilgan bo'lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Silliq egri chiziqli qutb koordinatalarida $r = r(\varphi)$, $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi \quad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

7-misol. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

astroida yoyining uzunligini toping.

Yechish: Astroida koordinat o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lganligi uchun 1/4 yoy uzunligini topamiz.

Oshkormas funksiya hosilasiga asosan

$$\frac{2}{3x^{-1/3}} + \frac{2}{3y^{-1/3}} y' = 0 \quad \text{bundan,} \quad y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}. \quad \text{Yoy uzunligi formulasiga}$$

asosan,

$$\begin{aligned} l &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + (\sqrt[3]{y}/\sqrt[3]{x})^2} dx = \\ &= 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}} dx = 4 \int_0^a \frac{a}{x} dx = 4 \int_0^a \frac{a}{x} dx = 4 \sqrt[3]{a} \int_0^a x^{-1/3} dx = 4 \sqrt[3]{a} \left. \frac{x^{2/3}}{2/3} \right|_0^a = 4 \frac{3}{2} \sqrt[3]{a} \cdot \left(a^{2/3} - 0 \right) = 6a. \end{aligned}$$

3. Aylanma jism hajmini hisoblash

$y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (7)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy \quad (8)$$

formula bilan hisoblanadi.

8-misol. $y^2 = 2x$ parabola, $x = 3$ to'g'ri chiziq va OX o'qi bilan chegaralangan figuraning OX o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Masala shartiga ko'ra x o dan 3 gacha o'zgaradi. Demak,

$$V_x = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^3 = \pi(3^2 - 0^2) = 9\pi.$$

9-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil

bo'lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish. Bunday jismga aylanma ellipsoid deyiladi. Ellips tenglamasidan

$$x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \text{ bo'lib, integralning chegaralari } c = -b, d = b \text{ bo'ladi.}$$

(8) formulaga asosan,

$$V_y = \pi \int_{-b}^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = \pi a^2 \int_{-b}^b dy - \frac{\pi a^2}{b^2} \int_{-b}^b y^2 dy = \pi a^2 y \Big|_{-b}^b - \pi \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-b}^b =$$

$$= \pi a^2 [b - (-b)] - \pi \frac{a^2}{3b^2} [b^3 - (-b)^3] = 2\pi a^2 b - \frac{2}{3} \pi a^2 b = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

$$\text{Demak, } V_y = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

$$a = b = R \text{ bo'lsa, shar hosil bo'lib } V_{uu} = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ bo'ladi.}$$

4. Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari

Endi aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlarini qaraymiz. 1). Ma'lumki, **mehnat unumdorligi** ish kuni mobaynida o'zgaruvchi miqdordir. Mehnat unumdorligi $y = f(x)$ funksiya bilan ifodalansin, bunda x ish kunining boshlanishidan hisoblangan vaqt oralig'i, $f(x)$ esa vaqtning shu onidagi (momentidagi) **mehnat unumdorligini** bildiradi. Mehnat unumdorligining ish kunining 4-soatidagi hajmini hisoblash masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Vaqtning (3,4) oralig'ini eng kattasining uzunligi Δx bo'lgan oraliqlarga bo'lamiz va $f(x)$ funksiya bu kichik oraliqlarda o'zgarmas desak ishlab chiqarish mehnat unumdorligini $f(x) \Delta x$ ko'paytmaga teng bo'ladi. Shunday qilib, ish kunining 4-soatidagi ishlab chiqarish mehnat unumdorligi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_3^4 f(x) \Delta x = \int_3^4 f(x) dx$$

tenglik bilan ifodalanadi.

2). Mahsulotlar omboriga vaqt birligida keltiriladigan **mahsulot miqdorini** $f(x)$ va mahsulot omborga kelib tushushidan boshlangan vaqt birligi x bo'lsa, x dan $x + \Delta x$ vaqt oralig'idagi omborga $f(x) \Delta x$ birlik mahsulot keladi. Demak, omborga mahsulot uzluksiz kelib tursa, undagi **tovarning zahirasi**

$$\int_0^x f(x) dx$$

bilan ifodalanadi.

3). Mashinasozlik sanoati biror xildagi stanoklarni ishlab chiqaradi va yillik ishlab chiqarishi o'zgarmas a ga teng bo'lib, x shu stanoklar ishlab chiqarilgan yillar bo'lsin.

Vaqtning t onidagi (momentidagi) stanoklar soni (ular ishdan chiqmagan deb olinadi).

$$\int_0^t adx = [ax]_0^t = at$$

bo'ladi. Agar **mahsulot ishlab chiqarish hajmi** arifmetik progressiya bo'yicha o'suvchi ya'ni

$$f(x) = a_0 + a_1x$$

bo'lsa, stanoklar soni

$$\int_0^t (a_0 + a_1x)dx = \left[a_0x + \frac{a_1x^2}{2} \right]_0^t = a_0t + \frac{a_1t^2}{2}$$

tashkil etadi.

4). Yillik daromad t vaqtning funksiyasi $D = f(x)$ bo'lsin. Prosent (foiz) me'yori ulushi i bo'lib, foizlar ustiga qo'shib uzluksiz hisoblanadi. Daromadning t yilga hisoblangan diskontli hajmini toping. Diskont deb oxiri jami mablag' bilan boshlang'ich mablag' orasidagi farqqa aytiladi.

Bu miqdorni hisoblash uchun, vaqt oralig'i t ni n ta teng bo'laklarga ajratamiz. Vaqtning juda ham kichik Δt oralig'ida daromadni o'zgarmas deb $f(t) \Delta t$ ga teng qilib olish mumkin. Uzluksiz ustiga qo'shib hisoblangan foizlarda diskontli daromad quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{f(t)\Delta t}{e^{it}} = f(t)\Delta te^{-it}.$$

$(0, t)$ vaqt oralig'idagi diskontli daromad miqdori

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_0^t f(t)e^{-it} \Delta t = \int_0^t f(t)e^{-it} dt$$

bo'ladi.

Xususiyl holda, yillik daromad o'zgarmas bo'lsa, ya'ni $f(x) = a$ bo'lsa, diskontli daromad

$$d = \int_0^t ae^{-it} dt = a \int_0^t fe^{-it} dt = a \left[-\frac{1}{i} e^{-it} \right]_0^t = \frac{a}{i} (1 - e^{-it})$$

bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Qo'yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini hisoblang.

1) $y = x^2 - 6x + 8$, $y = 0$; 2) $x = 4 - y^2$, $x = 0$; 3) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;

4) $y = \frac{x^2}{2}$ parabola, $x = 1$, $x = 3$ to'g'ri chiziqlar va OX o'qi bilan

chegaralangan;

5) $x = 2 - y^2 - y^2$, $x = 0$; 6) $y = 2 - x^2$, $y = x^2$;

7) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$; 8) $x = 3t^2$, $y = t^3 - t^3$.

2. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

3. 1) $y^2 = (x + 4)^3$ va $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Aniq integral yordamida qanday yuzalarni hisoblash mumkin?
2. Egri chiziq yoyining uzunligi qanday formula yordamida hisoblanadi?
3. Aylanma jism hajmini hisoblash formulasi nimadan iborat?
4. O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
5. Mehnat unumdorligi funksiyasi nima?
6. Ishlab chiqarish mehnat unumdorligini aniq integral yordamida hisoblash mumkinmi va qanday?
7. Omborga keltirilgan mahsulotlar miqdorini aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
8. Mahsulot ishlab chiqarish arifmetik progressiya bo'yicha o'suvchi bo'lsa, uning hajmi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
9. Yillik daromad funksiyasi nima?
10. Diskontli daromad nima va u aniq integral yordamida qanday hisoblanadi.

12-ma'ruza. Aniq integralni taqribiy hisoblash. Xosmas integrallar

Reja

1. Trapesiyalar formulasi.
2. Simpson formulasi.
3. Xosmas integrallar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Taqribiy hisoblash, trapesiyalar formulasi, Simpson formulasi, hisoblash xatosi, **parabolik trapesiya**, xosmas integral, cheksiz oraliq bo'yicha integral, xosmas integral yaqinlashuvchi, xosmas integrall uzoqlashuvchi, chegaralanmagan funksiyaning chekli oraliq bo'yicha xosmas integrali.

Hisoblash amaliyotida ko'pincha boshlang'ich funksiyalari elementar bo'lmagan, ya'ni chekli ko'rinishda ifodalab bo'lmaydigan funksiyalardan olingan integrallar bilan, shuningdek, jadval yoki grafik usulda berilgan funksiyalardan olingan integrallar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bunday hollarda Nyuton - Leybnis formulasini qo'llab bo'lmaydi va integral taqribiy usullar yordamida hisoblanadi.

Hisoblash mashinalarining jadal taraqqiy etib borishi natijasida aniq integrallarni hisoblashning taqribiy usullari keng tatbiq qilinmoqda.

Integral ostidagi funksiya elementar boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsada, biroq, uni Nyuton - Leybnis formulasi bo'yicha hisoblash murakkab va katta hajmdagi hisoblash ishlarini talab etadigan hollarda ham taqribiy hisoblash usullari afzal bo'ladi.

Aniq integralni taqribiy hisoblashning bir necha usullari mavjud bo'lib ulardan ko'proq ishlatiladiganlari trapesiyalar va Simpson usullaridir.

1. Trapesiyalar formulasi

Trapesiyalar formulasi

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni hisoblash talab etilsin $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz $[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar orqali n ta teng qismaniy kesmalarga ajratamiz. Funksiyaning x_i nuqtalaridagi $y_i = f(x_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz ($i = 1, n$). $[x_{i-1}, x_i]$ qismaniy kesmalarning uzunligi $\frac{(b-a)}{n}$ kattalik integrallash qadami deyiladi. Bo'linish nuqtalaridan $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ ordinatlarni o'tkazamiz. Ordinatlarni oxirlarini to'g'ri chiziqlar bilan tutashtirib trapesiyalar hosil qilamiz.

Aniq integralning taqribiy qiymati uchun, hosil bo'lgan trapesiyalar yuzlarining yig'indisini olamiz. Bu holda

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$$

Shunday qilib, natijada

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right] \quad (1)$$

formulani olamiz. (1) formulaga **trapesiyalar formulasi** deb ataladi. Bu formulada egri chiziqli trapesiyalarning yuzlarini to'g'ri chiziqli trapesiyalar yuzlari bilan taqriban almashtirdik. n o'sib borishi bilan to'g'ri chiziqli trapesiyalarning yuzi egri chiziqli trapesiyalar yuzlariga cheksiz yaqinlashib boradi.

Bu taqribiy hisoblashda yo'l qo'yilgan **absolyut xato**.

$$M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

ifodadan katta emasligini ko'rsatish mumkin, bunda M_2 , $|f''(x)|$ ning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

2. Simpson formulasi. $[a, b]$ kesmani $n = 2m$ ta juft miqdordagi teng qismlarga bo'lamiz. Uchta $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ nuqtalar olib ulardan parabola o'tkazamiz. Bu parabola bilan $y = f(x)$ funksiyaning $[x_0, x_2]$ kesmadagi grafigini almashtiramiz. Xuddi shunga o'xshash $y = f(x)$ funksiyaning grafigini $[x_2, x_4], [x_4, x_6]$ va boshqa kesmalarda ham almashtiramiz.

Shunday qilib, bu usulda berilgan $y = f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan trapesiyaning yuzini $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$,..... kesmalarda parabolalar bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyalar yuzlarining yig'indisi bilan almashtiriladi. Bunday egri chiziqli trapesiya **parabolik trapesiya** deyiladi.

Parabolik trapesiyalar yuzlarini qo'shib,

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m} [y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})] \quad (2)$$

Bu formula **Simpson (parabolalar) formulasi** deyiladi. Simpson formulasining

absolyut xatosi $M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$ dan katta bo'lmaydi, bunda $M_4, |f^{(5)}(x)|$

funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymati. Xatolarni baholash ifodalaridan ma'lumki n^4 kattalik n^2 kattalikka nisbatan tezroq o'sgani uchun Simpson formulasining xatoligi trapesiyalar formulasi xatosiga nisbatan ancha tez kamayadi.

1-misol. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ aniq integral trapesiyalar va Simpson

formularidan foydalanib taqribiy hisoblansin.

Yechish. [0,1] kesmani

$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$ nuqtalar yordamida 5 ta teng bo'lakka bo'lamiz. Keyin $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1, \quad f(x_1) = f(0.2) \approx 0.96079,$$

$$f(x_2) = f(0.4) \approx 0.85214, \quad f(x_3) = f(0.6) \approx 0.69768,$$

$$f(x_4) = f(0.8) \approx 0.52729, \quad f(x_5) = f(1) \approx 0.36788.$$

Trapeziyalar formulasi bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{5} \left[\frac{1 + 0.36788}{2} + 0.96079 + 0.85214 + 0.69769 + 0.52729 \right] = 0.74805.$$

Simpson formulasi bo'yicha, hisoblash uchun [0,1] kesmani

$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$ nuqtalar orqali 4 ta teng bo'laklarga ajratamiz va bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari

$$y_0 = 1, \quad y_1 = (0.25) \approx 0.9394, \quad y_2 = (0.5) \approx 0.7788,$$

$$y_3 = (0.75) \approx 0.5698, \quad y_4 = (1) \approx 0.3679$$

bo'ladi.

Simpson formulasiga asosan:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{12} [1 + 0.3679 + 4(0.9394 + 0.5698) + 2 \cdot 0.7788] \approx 0.7469$$

bo'ladi.

3. Xosmas integrallar. Aniq integralning ta'rifida integrallash chegaralari chekli va integral ostidagi funksiya $[a, b]$ oraliqda chegaralangan deb olingan edi. Bu shartlardan hech bo'lmaganda birortasi bajarilmasa, integralning yuqoridagi ta'rif ma'nosini yo'qotadi.

Biroq nazariy va amaliy mulohazalarga muvofiq aniq integralning ta'rif bu cheklanishlar bajarilmaydigan hollar uchun ham umumlashtirilishi mumkin.

Bunday integrallar bizga tanish bo'lgan aniq integrallarga xos bo'lmagan qisqacha **xosmas integrallar** deb aytiladi.

Xosmas integrallarning ikki asosiy turini qaraymiz:

1). Uzlaksiz funksiyalarning cheksiz oraliq bo'yicha integrallari. $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda berilgan va uning istalgan qismi $[a, A]$ da integrallanuvchi, ya'ni istalgan $A > a$ da aniq integral mavjud bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = J$$

limitga $f(x)$ funksiyaning $[a, \infty)$ oraliqdagi **xosmas integrali** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$J = \int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (1)$$

J limit chekli bo'lsa, **xosmas integral yaqinlashuvchi** deyiladi. Limit mavjud bo'lmasa, **xosmas integral uzoqlashuvchi** deyiladi.

$f(x)$ funksiya $(-\infty, a]$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integral ham xuddi yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx. \quad (2)$$

$f(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integral qo'yidagicha aniqlanadi.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (3)$$

bu yerda a istalgan son. (3) integrallarda o'ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashsa chap tomondagi integral ham yaqinlashuvchi deyiladi. O'ng

tomondagi integrallardan aqalli bittasi uzoqlashsa, chap tomondagi integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Xosmas integrallarni hisoblash uchun Nyuton-Leybnis formulasidan foydalaniladi. $F(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [F(A) - F(a)] = F(+\infty) - F(a) = F(x)$$

bo'lib, bu yerda: $F(+\infty) = \lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$ integralning yaqinlashishini yoki uzoqlashishini aniqlaydi.

1-misol. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)}$ integralning yaqinlashishini tekshiring.

$$\text{Yechish: } \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Demak, integral yaqinlashuvchi va $\frac{\pi}{4}$ ga teng.

$$\text{2-misol. } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln A - \ln 1) = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty$$

bo'lib, bu integral uzoqlashuvchi.

2). Chegaralanmagan funksiyalarning chekli oraliq bo'yicha xosmas integrallari. $(a, b]$ intervalda uzluksiz va $x = a$ da aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali quyidagicha belgilanib aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (4)$$

Oxiri limit mavjud bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi aks holda uzoqlashuvchi deyiladi. Bunday integrallarga 2-tur xosmas integral deyiladi.

Integral ostidagi $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ boshlang'ich funksiya ma'lum bo'lsa, Nyuton - Leybnis formulasini qo'llash mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b) - F(a + \varepsilon)] = F(b) - F(a).$$

Shunday qilib, $x \rightarrow a$ da $F(x)$ boshlang'ich funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, mavjud bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

$[a, b)$ intervalda $x = b$ nuqtada uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya xosmas integrali ham shunga o'xshash bo'ladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b-\varepsilon) - F(a)] = F(b) - F(a).$$

bunda $F(b)$, $F(x)$ boshlang'ich funksiyaning $x \rightarrow b$ dagi limiti.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmaning biror $x = c$ nuqtasida uzilishga ega bo'lsa xosmas integral quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (5)$$

O'ng tomondagi integrallardan aqalli bittasi uzoqlashuvchi bo'lsa, xosmas integral uzoqlashuvchidir. O'ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashuvchi bo'lsa, chap tomondagi xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

3-misol. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish: $x \rightarrow 0$ da $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$ demak,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{4} - 2\sqrt{\varepsilon}] = 2 \cdot 2 = 4.$$

Demak, $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integral yaqinlashuvchi.

4-misol. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish: $x \rightarrow 0$ da $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \rightarrow +\infty$, $x = 0$ nuqta $[-1, 8]$

kesmaning ichki nuqtasi. (5) formuladan foydalansak,

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = 3\sqrt[3]{x} \Big|_{-1}^8 + 3\sqrt[3]{x} \Big|_0^8 = 0 + 3 + 6 = 9$$

bo'ladi. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int_0^1 x^2 dx$ integralni $n = 5$ bo'lakka bo'lib, trapesiyalar

formulasi bilan hisoblang. Uning aniq qiymati va taqribiy qiymati farqini baholang.

2. $\int_1^2 \frac{dx}{1+x}$ integralni $n = 10$ teng bo'laklarga bo'lib, trapesiyalar va

Simpson formulalari yordamida hisoblang ikkala holda ham xatolarni baholang.

3. Quyidagi integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$; 3) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$; 4) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$;

5) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$; 6) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$.

4. Quyidagi integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

1) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^2}}$; 2) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$; 3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; 5) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$; 6) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday hollarda taqribiy hisoblash usullaridan foydalanish mumkin?
2. Trapesiyalar formulasi qanday yoziladi ?
3. Simpson fomulasini yozing.
4. Chegaralari cheksiz bo'lgan integral qanday aniqlanadi ?
5. Xosmas integrallarning yaqinlashuvligi va uzoqlashuvchiligi nimalardan iborat ?
6. Kesmada uzulishga ega bo'lgan funksiyaning integrali qanday aniqlanadi?

Oddiy differensial tenglamalar

13-ma'ruza. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Reja

1. *Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.*
2. *Birinchi tartibli tenglamalar.*
3. *O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar.*
4. *Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar.*
5. *Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.*

Mavzuning tayanch tushunchalari

Differensial tenglama, oddiy differensial tenglama, xususiyl hosilali differensial tenglama, differensial tenglamaning tartibi, differensial tenglama yechimi, integral chiziq, birinchi tartibli differensial tenglama, Koshi masalasi, boshlang'ich shartlar, o'zgaruvchilari ajralgan, o'zgaruvchilari ajraladigan, birinchi tartibli bir jinsli, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, Bernulli tenglamasi, Rikkati tenglamasi, to'la differensial tenglama, integrallovchi ko'paytuvchi.

1. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar. 1-ta'rif. Erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differensiallari orasidagi munosabatga *differensial tenglama* deyiladi.

Noma'lum funksiya faqat bitta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglamaga *oddiy differensial tenglama* deyiladi.

Noma'lum funksiya ikki yoki undan ko'p o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglamalarga, *xususiyl hosilali differensial tenglamalar* deyiladi.

2-ta'rif. Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibiga *differensial tenglamaning tartibi* deyiladi.

$y'' = 3x^2$, $y''' = \cos x$ tenglamalar mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli tenglamalarga misol bo'ladi.

Umumiy holda n -tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ko'rinishda belgilanadi.

3-ta'rif. *Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali* deb tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Differensial tenglama yechimining grafigiga *integral chiziq* deyiladi.

Masalan, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $y = x^2$ bu berilgan differensial tenglamaning yechimi bo'lib, bu holda integral chiziq paraboladan iborat bo'ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va bu yechimlarning hossalari o'rganishdan iborat.

Algebraik tenglamalardagidek hamma differensial tenglamalarni yechish mumkin bo'ladigan umumiy usullar yo'q. Differensial tenglamalarning har bir turiga xos yechish usulidan foydalaniladi.

2. Birinchi tartibli tenglamalar. Birinchi tartibli tenglama umumiy holda

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

ko'rinishda yoziladi. (1) tenglamani y ga nisbatan yechsak

$$y' = f(x, y) \text{ yoki } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

bo'ladi. (2) tenglamaning o'ng tomoni faqat x ning funksiyasi bo'lsa, tenglama

$$y' = f(x) \quad (3)$$

ko'rinishda bo'lib, oxirgi tenglikdan bevosita ko'rish mumkinki, bunday tenglamaning yechimini topish $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topishdan iborat bo'ladi, ya'ni $y = F(x) + C$, $[F(x)]' = f(x)$. Shunday qilib, (3) ko'rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko'p yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi.

1-ta'rif. $y = \varphi(x, C)$ x ning funksiyasi har bir C ixtiyoriy o'zgarmas bo'lganda (2) tenglamani qanoatlantirsa, uning **umumiy yechimi** deyiladi.

2-ta'rif. C ixtiyoriy o'zgarmasning muayyan qiymatida umumiy yechimdan olinadigan yechimga **xususiy yechim** deyiladi.

Umumiy yechimdan yagona yechimni olish uchun ko'pincha qo'shimcha

$$y(x_0) = y_0 \quad (4)$$

shartdan foydalaniladi, bu yerda x_0 , y_0 lar berilgan sonlar bo'lib, bu shartga boshlang'ich shart deb ataladi.

3-ta'rif. $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning (4) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga **Koshi masalasi** deyiladi.

1-misol. $y' = \frac{5}{\cos^2 x}$, differensial tenglama uchun $y(0) = 3$ bo'ladigan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasini yeching.

Yechish. Oldin berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5 \operatorname{tg} x + C$$

Endi boshlang'ich shartdan foydalanib, $5 \operatorname{tg} 0 + C = 3$, bundan $C = 3$ kelib chiqadi. Demak, Koshi masalasining yechimi $y = 5 \operatorname{tg} x + 3$ bo'ladi.

3. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar

4-ta'rif. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga *o'zgaruvchilari ajralgan* differensial tenglama deyiladi.

Bunday differensial tenglamani bevosita, tenglikni integrallab uning umumiy yechimi topiladi, ya'ni

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

bo'ladi.

2-misol. $x dx + y dy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani bevosita integrallab

$$\int x dx + \int y dy = C, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \quad \text{yoki} \quad x^2 + y^2 = C_1,$$

umumiy yechim bo'ladi.

5-ta'rif. $y' = f_1(x)f_2(y)$ yoki $\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$ ko'rinishdagi

tenglamaga *o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deyiladi.

Bunday differensial tenglamani $f_2(y)$ ga bo'lib, dx ga ko'paytirib

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirish bilan yechimi topiladi.

3-misol. $\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. O'zgaruvchilarini ajratib $\frac{dy}{1 + y^2} = x dx$ tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi

tenglamani bevosita integrallab,

$$\arctg y = \frac{x^2}{2} + C$$

likka ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikdan

$$y = \tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

4. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar. $f(x, y)$ funksiya uchun $f(kx, ky) = k^\alpha f(x, y)$ tenglik bajarilsa, $f(x, y)$ funksiya α tartibli bir jinsli funksiya deyiladi, bunda α biror son. Masalan, $f(x, y) = xy - y^2$ funksiya uchun $f(kx, ky) = kx \cdot ky - (ky)^2 = k^2(xy - y^2)$ bo'lib, $f(x, y) = xy - y^2$ funksiya $\alpha = 2$ tartibli bir jinsli funksiya bo'ladi. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$, $\alpha = 0$ tartibli bir jinsli funksiya (buni tekshirib ko'ring).

6-ta'rif. $y' = f(x, y)$ differensial tenglamada $f(x, y)$ funksiya no'linchi tartibli bir jinsli funksiya bo'lsa, bunday differensial tenglamaga ***birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi.

Bir jinsli, tenglama $y = xv(x)$ almashtirish bilan o'zgaruvchilari ajraladigan

$$xv' = f(1, v) - v$$

differensial tenglamaga keltiriladi.

4-misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y = x \cdot v$ almashtirish olib, $y' = x'v + xv'$ ekanligini hisobga olsak, berilgan tenglamadan

$$v + xv' = \frac{x \cdot xv + x^2 v^2}{x^2}$$

bo'lib, $v + xv' = v + v^2$ yoki $xv' = v^2$, $\frac{xdv}{dx} = v^2$

bo'ladi. Oxirgi tenglamada o'zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x};$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + \ln c,$$

bo'lib,

$$\ln|cx| = -\frac{1}{v}, \quad v = \frac{y}{x}$$

bo'lganligi uchun

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \quad \text{yoki} \quad y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

5. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Bunday tenglama

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

ko'rinishda bo'lib, $p(x)$ va $g(x)$ lar berilgan funksiyalar. Bunday tenglamani yechish uchun $z = u(x)y$ almashtirish olib

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \right] z = g(x)u(x) \quad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz. $u(x)$ funksiyani shunday tanlaymizki,

$$p(x) - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = 0$$

bo'lsin. Bundan $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ bo'lib, bu holda (1) tenglama

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

ko'rinishda bo'ladi. Bevosita integrallasak

$$z = \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

hosil bo'ladi.

Endi izlanayotgan y funksiyaga qaytib

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx \right] \quad (2)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

1-misol. $y' + xy = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo'lib $p(x) = x$, $g(x) = x$ ligini hisobga olib (2) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int x dx} \left[C + \int x \cdot e^{\int x dx} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[C + \int \cdot e^{\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \right] = \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} + C \right). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}} (e^{\frac{x^2}{2}} + C). \end{aligned}$$

umumiy yechim bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun misollar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

- 1) $(1 + y)dy - (1 - x)dx = 0$; 2) $(xy^2 + x)dx = (y - x^2y)dy$;
3) $x^2dy + (y - 1)dx = 0$; 4) $2(xy + y)dx = xdy$.

2. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

- 1) $x^2dx + ydy = 0$, $x = 0$ da $y = 1$;
2) $(1 + x^2)dy - 2x(y + 3)dx = 0$, $x = 0$ bo'lganda $y = -1$;
3) $(1 + x)ydx = (y - 1)xdy$, $x = 1$ da $y = 1$.

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)y}{x^2} ; \quad 2) x^2 y' = y^2 - xy + x^2 ;$$

$$3) (x^2 - 2xy)dy = (xy - y^2)dx.$$

4. Boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarni toping:

$$1) xy^2 - y' = x^3 + y^3, \quad x = 1 \quad \text{bo'lganda} \quad y = 3;$$

$$2) (x - y)dx + xdy = 0, \quad x = 1 \quad \text{bo'lganda} \quad y = 0;$$

$$3) y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0, \quad x = 1 \quad \text{da} \quad y = 1.$$

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

$$1) y' - \frac{y}{x} = -1; \quad 2) y' + y = e^{-x}; \quad 3) x^2 y' - 2xy = 3; \quad 4) y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2 ;$$

$$5) (a^2 + x^2)y' + xy = 1; \quad 6) (2x+1)y' + y = x; \quad 7) y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x;$$

$$8) y' + y \cos x = \sin 2x.$$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini toping:

$$1) xy' + y = 3, \quad x = 1 \quad \text{da} \quad y = 1; \quad 2) (1+x^2)y' - xy = 2x, \quad x = 0 \quad \text{bo'lganda} \quad y = 0;$$

$$3) xy' + y = x + 1, \quad x = 2 \quad \text{bo'lganda} \quad y = 3.$$

3. 1) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning $x = -1$ bo'lganda $y = 1$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

$$2) y' + \frac{y}{3} = \frac{x+1}{3y^3} \text{ tenglama uchun } x = 1 \text{ bo'lganda } y = -1 \text{ boshlang'ich shart}$$

bajariladigan Koshi masalasini yeching.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Oddiy differensial tenglama qanday tenglama?
3. Xususiy xosilali differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
4. Differensial tenglamaning tartibi nima?
5. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb nimaga aytiladi?
6. Umumiy va xususiy yechimlar qanday yechimlar?
7. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi nimadan iborat?
8. Boshlang'ich shart deb nimaga aytiladi?
9. Qanday masalaga Koshi masalasi deyiladi?
10. Qanday tenglamaga o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi?
11. Birinchi tartibli bir jinsli tenglama deb nimaga aytiladi?

14-ma'ruza. O'zgarmas koeffisientli yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

Reja

1. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.
2. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, ikkinchi tartibli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan tenglamalar, chiziqli bog'langan va chiziqli bog'lanmagan funksiyalar, Vronskiy determinanti, ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar, xarakteristik tenglama, Eyler formulasi.

1. **Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.** Fizika, mexanika, texnika va iqtisodning juda ko'p masalalarini yechish *ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga* keltiriladi.

Differensial tenglamada noma'lum funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashsa bunday tenglamaga chiziqli deyiladi. ***Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama*** quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \quad (1)$$

bu yerda y noma'lum funksiya, $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ lar biror (a,b) oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar, $f(x) = 0$ bo'lsa, (1) tenglamaga **bir jinsli chiziqli differensial tenglama** deyiladi. $f(x) \neq 0$ bo'lsa **bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglama** deyiladi.

Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan tenglamalar yechimini topishda chiziqli bog'langan va chiziqli bog'lanmagan funksiyalar tushunchasidan foydalaniladi.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar biror $[a,b]$ kesmada berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Shunday α_1, α_2 o'zgarmas sonlar topilsaki, ulardan hyech bo'lmaganda bittasi no'ldan farqli bo'lganda

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \quad (2)$$

ayniyat o'rinli bo'lsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog'langan funksiyalar** deyiladi.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog'langan bo'lsa, ular proporsional bo'ladi, ya'ni, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ bo'lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsa,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \text{ yoki } \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1}, \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \text{const}$$

bo'ladi.

Masalan, $y_1(x) = 4x^2$ va $y_2(x) = x^2$ funksiyalar chiziqli bog'langan, chunki $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{4x^2}{x^2} = 4$.

2-ta'rif. (2) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo'lgandagina bajarilsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog'lanmagan funksiyalar** deyiladi.

Funksiyalarning chiziqli bog'langan yoki chiziqli bog'lanmaganligini

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Vronskiy determinanti yordamida tekshirish mumkin. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda chiziqli bog'langan bo'lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no'lga teng bo'ladi. Bu funksiyalar uchun (a,b) oraliqda tuzilgan Vronskiy determinanti no'ldan farqli bo'lsa ular chiziqli bog'lanmagan bo'ladi.

2. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koefitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Fan va texnika hamda iqtisodning ko'p masalalari (1) tenglamada $p(x)$ va $g(x)$ funksiyalar o'zgarmas sonlar bo'lgan holdagi tenglamalarga keltiriladi. Shuning uchun bu funksiyalar o'zgarmas koefitsiyentlar bo'lgan holni alohida qaraymiz. Bu holda bir jinsli tenglama

$$y'' + py' + gy = 0 \quad (3)$$

ko'rinishda bo'lib p, g lar o'zgarmas koefitsiyentlar. Bunday ko'rinishdagi tenglamaga **ikkinchi tartibli, o'zgarmas koefitsiyentli, chiziqli, bir jinsli**

differensial tenglama deyiladi. (3) ko'rinishdagi tenglamaning yechimini topish bilan qiziqamiz.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (3) tenglamaning (a,b) oraliqda chiziqli bog'lanmagan yechimlari bo'lsa,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (4)$$

funksiya uning umumiy yechimi bo'ladi, bu yerda c_1 va c_2 ixtiyoriy o'zgarmaslar. Bu funksiyani (3) tenglamaga bevosita qo'yib ko'rsatish mumkin (buni bajarib ko'ring).

1-misol. $y'' - y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bevosita qo'yish bilan tekshirib ko'rish mumkinki,

$y_1(x) = e^x$ va $y_2(x) = e^{-x}$ berilgan tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu yechimlar chiziqli bog'lanmagan yechimlar bo'ladi, chunki Vronskiy determinanti

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Demak, (4) formulaga asosan, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Shunday qilib, (3) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uning ikkita chiziqli bog'lanmagan xususiy yechimini topish kifoya.

(3) tenglamaning yechimini $y = e^{rx}$, ko'rinishda izlaymiz, bu yerda r — noma'lum son. $y' = r e^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, bo'lib, (3) tenglamadan

$$r^2 e^{rx} + p r e^{rx} + g e^{rx} = 0 \text{ yoki } r^2 + p r + g = 0, (e^{rx} \neq 0) \quad (5)$$

bo'ladi. (5) tenglik bajarilsa $y = e^{rx}$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo'ladi.

(5) tenglamaga (3) differensial tenglamaning **xarakteristik tenglamasi** deyiladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad \text{va} \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

bo'lib, bunda quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin:

- 1) r_1 va r_2 lar haqiqiy va har xil, ya'ni $r_1 \neq r_2$;
- 2) r_1 va r_2 haqiqiy va teng (karrali), ya'ni $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$;
- 3) r_1 va r_2 kompleks sonlar, ya'ni $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, bunda;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Har bir holni alohida qaraymiz:

1) bu holda $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ funksiyalar chiziqli bog'lanmagan xususiy yechimlar bo'lib, umumiy yechim

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (6)$$

bo'ladi.

2-misol. $y'' - 5y' + 6y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \quad r_2 = 3$$

bo'lib, umumiy yechim (6) formulaga asosan

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

bo'ladi.

2) Ikkinchi holda, xarakteristik tenglamaning ildizlari teng

$r_1 = r_2$ va $y_1(x) = e^{r_1 x}$ bitta xususiy yechim bo'ladi. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2(x) = x e^{r_1 x}$ ko'rinishda tanlaymiz. Bu funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo'ladi, haqiqatan ham

$$y_2(x) = x e^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x} (1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x} (r_1^2 + 2r_1)$$

ifodalarni (3) tenglamaga qo'yib

$$x(r_1^2 + pr_1 + g) + (2r_1 + p) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. r_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lganligi uchun oxirgi tenglikdagi birinchi qavs aynan no'lga teng, $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ bo'lganligi uchun ikkinchi qavs ham aynan no'lga teng.

Demak, $y_2(x) = xe^{r_1x}$ funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo'ladi, hamda $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bog'lanmagan (tekshirib ko'ring). Shunday qilib,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \quad (7)$$

umumiy yechim bo'ladi.

3-misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

bo'lib, ildizlari $r_1 = r_2 = -3$ bo'ladi (tenglamani yechib ko'rsating). Xarakteristik tenglamaning ildizlari o'zaro teng, (7) formulaga asosan $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo'shma:

$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ bo'lganda xususiy yechimlarni

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$

$$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

ko'rinishda olish mumkin. Bu ifodalarga

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

Eyler formulasini tatbiq etsak,

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

tengliklar hosil bo'ladi. Ma'lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'ladi. Shuning uchun

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{va} \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

funksiyalar ham (3) tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu yechimlar chiziqli bog'lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no'ldan farqli (tekshirib ko'ring).

Demak,

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (8)$$

(3) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

4-misol. $y'' + 6y' + 13y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$r_1 = -3 + 2i$, $r_2 = -3 - 2i$ bo'ladi. Bu ildizlar kompleks qo'shma bo'lib uchinchi holga mos keladi. $\alpha = -3$, $\beta = 2$ ekanligini hisobga olib (8) formulaga asosan umumiy yechim,

$$y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

bo'ladi.

Endi ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsiyentli bir jinsli tenglama uchun berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishni, ya'ni Koshi masalasini qaraymiz.

5-misol. $y'' - y' - 2y = 0$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo'lganda $y = 8$, $y' = 7$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsiyentli, bir jinsli, chiziqli tenglamadir. Unga mos xarakteristik tenglama

$$r^2 - r - 2 = 0$$

bo'lib, $r_1 = -1$, $r_2 = 2$ uning ildizlari bo'ladi. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikdan hosila olsak,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

bo'lib, $x = 0$ bo'lganda $y = 8$, $y' = 7$ boshlang'ich shartlarga asosan,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Oxirgi tenglamalar sistemasidan $C_1 = 3$, $C_2 = 5$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $y''' = \frac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ bo'lganda $y = 2$, $y' = 1$, $y'' = 1$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

2. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

$$\begin{aligned} &1) x^3 y'' + x^2 y' = 1; \quad 2) yy'' + y'^2 = 0; \quad 3) y'' + 2y(y')^3 = 0; \quad 4) y'' y^3 = 1; \\ &5) (1 + x^2) y'' + 2xy' = x^3; \quad 6) y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x; \quad 7) y'' + 2y'^2 = 0; \\ &8) xy'' - y' \operatorname{tg} x = e^x x^2; \quad 9) 2yy'' = (y^1)^2; \quad 10) t \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + t = 0. \end{aligned}$$

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

$$\begin{aligned} &1) y'' + 3y' - 4y = 0; \quad 2) y'' - 2y' - 5y = 0; \quad 3) y'' - y = 0; \\ &4) 4y'' - 12y' + 9y = 0; \quad 5) y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0; \quad 6) y'' - 2y' + 50y = 0; \\ &7) y'' - 4y' + 7y = 0; \quad 8) y'' + 6y' = 0. \end{aligned}$$

4. $y'' + 10y' + 25y = 0$ tenglamaning $x = 1$ bo'lganda, $y = e^{-5}$, $y' = 3e^{-5}$ bo'ladigan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalarning qanday xillari bor?
2. Qanday differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish bilan yechish mumkin?
3. Qanday differensial tenglamalarga chiziqli deyiladi?
4. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar qanday ko'rinishda bo'ladi?
5. Xarakteristik tenglama nimadan iborat?
6. Xarakteristik tenglama ildizlariga qarab umumiy yechimni yozish mumkinmi?
7. Xarakteristik tenglama ildizlari kompleks qo'shma bo'lganda yechim qanday yoziladi?
8. Xarakteristik tenglama ildizlari karrali, haqiqiy va har xil bo'lganda umumiy yechim qanday yoziladi?
9. Eyler formulasi qanday bo'ladi?

15-ma'ruza. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar

Reja:

1. **Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar .**
2. **Bir jinsli bo'lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topish usullari.**

Tayanch ibora va tushunchalar

Chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi, birorta xususiy yechim, birorta xususiy yechimni tenglamaning o'ng tomoni ko'phad bo'lganda topish, sinus va kosinus funksiyalar yig'indisi bo'lganda topish, aniqmas koeffitsiyentlar usuli.

1. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar . Bunday tenglama

$$y'' + py' + gy = f(x) \quad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lib, bu yerda p, g o‘zgaras koeffitsiyentlar, $f(x)$ berilgan uzluksiz funksiya.

Chiziqli **bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi**, bunday tenglamaning birorta xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni $\bar{y}$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi y_1 bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsa, umumiy yechim

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) \quad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu fikrga (2)echimni (1) tenglamaga qo‘yib ko‘rish bilan ishonish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

2.Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topish usullari.

(1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y}(x)$ ni topishni yuqorida o‘rgandik. Endigi vazifa bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topishdan iborat bo‘ladi. (1) tenglamada $f(x)$ funksiya:

$$1) f(x) = e^{\alpha x} P(x), \quad \text{bu yerda } P_n(x) \text{ } n - \text{darajali ko‘p had};$$

$$2) f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$$

ko‘rinishda bo‘lganda xususiy yechimni topish masalasini qaraymiz.

Birinchi holda xususiy yechimni

$$y_1(x) = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda k harakteristik tenglama ildizlarining α ga teng bo‘lganlari soni (0,1,2 bo‘lishi mumkin), $Q_n(x)$, $P_n(x)$ bilan bir xil darajali, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad. Bu holga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(25x^2 - 47)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: bir jinsli tenglama $y'' + 2y' - 3y = 0$ bo'lib, uning karakteristik tenglamasi $r^2 + 2r - 3 = 0$ bo'ladi. Uning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}, \quad r_1 = -3, \quad r_2 = 1$$

bo'lib, birjinsli tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ bo'ladi.

Endi berilgan birjinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini topamiz: Uni e^{2x} funksiya va berilgan ko'phad darajasi bilan bir xil ko'phad, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko'phad ko'paytmasi ko'rinishida izlaymiz. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi **aniqmas** A, B va C **koeffitsiyentlarni** topish lozim.

Shartga ko'ra $y_1(x)$ berilgan tenglamani qanoatlantirishi kerak.

Buning uchun

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C), \quad y_1'(x) = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B), \\ y_1''(x) = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x} \cdot 2A$$

larni berilgan tenglamaga qo'yib,

$$e^{2x}[2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C)] = e^{2x}(25x^2 - 47)$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni e^{2x} ga bo'lsak,

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + 2A + 6B + 5C = 25x^2 - 47$$

bo'ladi.

$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$ berilgan tenglamaning yechimi bo'lishi uchun oxirgi tenglamadagi bir xil darajali x lar koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\begin{cases} 5A = 25, \\ 12A + 5B = 0, \\ 2A + 6B + 5C = 47. \end{cases}$$

Uchta noma'lum koeffitsiyentlarga nisbatan, uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistemani yechsak, $A = 5$, $B = -12$, $C = 3$ bo'ladi (buni bajarib ko'ring). Demak, $y_1(x) = e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$ funksiya berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo'ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi (2) formulaga asosan,

$$y = \bar{y} + y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$$

bo'ladi.

Yuqoridagidek xususiy yechimni topishga ***aniqmas koeffitsiyentlar usuli*** deyiladi.

2-misol. $y'' - 4y' = 3x^2$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

$r^2 - 4r = 0$ bo'lib, $r_1 = 0$; $r_2 = 4$ uning ildizlari bo'ladi va bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}$$

bo'ladi. Berilgan tenglamaning o'ng tomoni $3e^{0x}x^2$ bo'lib, $\alpha = 0$ va no'l karakteristik tenglamaning ildizi bo'lganligi uchun xususiy yechim

$$y_1(x) = e^{0x}x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

ko'rinishda bo'ladi.

$$y_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_1''(x) = 6Ax + 2B$$

bularni berilgan tenglamaga qo'ysak,

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C = 3x^2$$

tenglama hosil bo'ladi. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} -12A = 3, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{32}$$

boʻladi. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$$

boʻlib, umumiy yechim

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x)$$

boʻladi.

2) $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ boʻlganda xususiy yechim

$y_1(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)x^k$ koʻrinishda boʻlib, k harakteristik tenglama ildizlarining $i\beta$ ga teng boʻlganlarining soni.

3-misol. $y'' + y = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Harakteristik tenglama $r^2 + 1 = 0$ boʻlib, ildizlari $r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ boʻladi. $\beta = 1$; $i\beta = i$ boʻlganligi uchun $k = 1$, ya'ni xususiy yechimni

$$y_1(x) = (A \cos x + B \sin x)x^1$$

koʻrinishda izlaymiz. A va B aniqmas koeffitsiyentlar. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topsak,

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= (A \cos x + B \sin x)x + A \cos x + B \sin x = (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x \\ y_1''(x) &= B \cos x - A \sin x - Bx \sin x - A \sin x + B \cos x - Ax \cos x = (2B - Ax) \cos x + \\ &+ (-2A - Bx) \sin x \end{aligned}$$

boʻladi, bularni berilgan tenglamaga qoʻysak

$$(2B - Ax) \cos x + (2A - Bx) \sin + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x \quad yoki$$

$$2B \cos x + (-2A) \sin x = \sin x$$

hosil boʻladi. Oxirgi tenglikdan

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

va $B = 0$, $A = -\frac{1}{2}$ boʻlib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{x}{2} \cos x$$

bo'ladi.

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

bo'lganligi uchun, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$$

bo'ladi.

4-misol. $y'' + 4y' + 5y = 2 \cos x - \sin x$ differensial tenglamaning $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y'' + 4y' + 5y = 0$ tenglamaning harakteristik tenglamasi $r^2 + 4r + 5 = 0$ bo'lib, uning ildizlari $r_1 = -2 - i$; $r_2 = -2 + i$ bo'ladi. Bir jinsli tenglama umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

bo'ladi.

Endi berilgan tenglamaning biror xususiy yechimini topamiz: uni

$$y_1(x) = A \cos x + B \sin x$$

ko'rinishda izlaymiz. $y'(x)$, $y''(x)$ hosilalarni topib, berilgan tenglamaga qo'ysak,

$$(4A + 4B) \cos x + (4B - 4A) \sin x = 2 \cos x - \sin x$$

bo'lib, $\cos x$ va $\sin x$ lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib.

$$\begin{cases} 4A + 4B = 2, \\ 4B - 4A = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $A = \frac{3}{8}$, $B = \frac{1}{8}$ ekanligini aniqlab, xususiy yechimni topamiz.

$$y_1(x) = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

bo'ladi.

Endi berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni aniqlaymiz, ya'ni boshlang'ich shartlar berilganda Koshi masalasining yechimini topamiz: umumiy yechimdan hosila

$$y'(x) = -2e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x} (-C_1 \sin x + C_2 \cos x) - \frac{3}{8} \sin x + \frac{1}{8} \cos x$$

bo'ladi, boshlang'ich shartlardan foydalanib,

$$1 = \frac{3}{8} + C_1, \quad 2 = \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2$$

C_1 va C_2 noma'lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz,

bundan $C_1 = \frac{5}{8}$, $C_2 = \frac{25}{8}$ bo'ladi.

Shunday qilib, berilgan tenglamaga qo'yilgan Koshi masalasining yechimi

$$y(x) = e^{-2x} \left(\frac{5}{8} \cos x + \frac{25}{8} \sin x \right) + \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; 2) $y'' + y' + 7y = 8 \sin 2x$; 3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x +$

4) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$; 5) $y'' + 9y = (43 + 10x - 26x^2)e^{2x}$;

6) $y'' + 6y' + 10y = 9 \cos x + 27 \sin x$; 7) $y'' - 6y' + 9y = 2 \sin 2x$

2. $y'' + 16y = \sin 4x$ tenglamaning $x = 0$ bo'lganda, $y = 1$, $y' = \frac{7}{8}$ bo'ladigan

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning umumiy yechimi qanday topiladi?
2. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning birorta xususiy yechimi qanday topiladi?
3. Aniqmas koeffitsiyentlar usuli nimadan iborat?

17-ma'ruza. Differensial tenglamalarning iqtisodiyotga tatbiqlari

Reja:

1. *Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda (tabiiy) o'sish modeli.*
2. *Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o'sishi modeli.*
3. *Talab va taklifni tahlil qilish.*

Differensial tenglamalarning iqtisodiyotdagi tatbiqlariga bir necha misollar keltiramiz.

1. *Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda (tabiiy) o'sish modeli.*

Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib u tayin (belgilangan) P narxda sotilayotgan bo'lsin. $Q(t)$ vaqtning t onida (momentida) realizatsiya qilingan mahsulot miqdori bo'lsin. Bu holda mahsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromad

$$PQ(t)$$

model bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi albatta ishlab chiqarish $J(t)$ investitsiyasiga sarflanadi, ya'ni

$$J(t) = mPQ(t) \quad (1)$$

bo'lsin, bunda m investitsiya me'yori bo'lib o'zgarmas son, hamda $0 < m < 1$.

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to'liq realizatsiya qilinayotgan bo'lsa, ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida daromadning o'sishi ta'minlanib, bu daromadning bir qismi yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o'sishi (akseleratsiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi investitsiyaga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$Q'(t) = eJ(t), \quad (2)$$

bunda $\frac{1}{e}$ akseleratsiya me'yori. (1) va (2) tengliklardan

$$Q'(t) = emPQ \quad \text{yoki} \quad Q'(t) = kQ(t) \quad (3)$$

kelib chiqadi, bunda $k = emP$.

(3) differensial tenglama birinchi tartibli, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'lib, uning umumiy yechimi

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{dQ}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln C \quad \text{yoki} \quad Q = Ce^{kt}$$

bo'ladi, bunda C ixtiyoriy o'zgarmas.

Vaqtning $t = t_0$ momentida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_0 bo'lsin.

Bu shartda

$$Q_0 = Ce^{kt_0} \quad \text{yoki} \quad C = Q_0 e^{-kt_0}$$

bo'ladi. (3) tenglama uchun, Koshi masalasining yechimi

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \quad (4)$$

bo'ladi.

Shunday qilib, ishlab chiqarishning tabiiy o'sishi modeli eksponensial bo'lar ekan (tabiiy o'sish deganimizda raqobat yo'qligi tushuniladi).

Matematik modellar **umumiylik xossasiga ega**. Buning misoli sifatida quyidagi holni keltirish mumkin. Biologik kuzatishlardan ma'lumki bakteriyalarning ko'payish jarayoni ham (3) differensial tenglama bilan ifodalanadi. Bundan tashqari radioaktiv parchalanish: radioaktiv modda massasining kamayishi jarayoni qonuni ham (4) formulaga mos keladi.

2. Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o'sishi modeli. Oldingi misolda ishlab chiqarilayotgan mahsulot to'liq realizatsiya bo'ladigan sharoitni qaradik. Endi raqobatli, ya'ni bozorga bu mahsulotni boshqalar ham realizatsiya qiladigan sharoitni qaraymiz. Bunday sharoitda mahsulot ishlab chiqarish

miqdorini ko'paytirish bilan bozorda uning narxi kamayadi. $P = P(Q)$ funksiya (P mahsulot narxi, Q mahsulot miqdori) kamayuvchi bo'lib,

$$\frac{dP}{dQ} < 0$$

bo'ladi. Endi (1)-(3) formulalardagidek,

$$Q' = \alpha P(Q)Q \quad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $\alpha = em$. (5) tenglamaning o'ng tomonidagi ko'paytuvchilar hammasi musbat ishorali, demak $Q' > 0$ bo'ladi, ya'ni $Q(t)$ o'suvchi funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Oddiylik uchun $P(Q)$ funksional bog'lanish chiziqli, ya'ni

$$P(Q) = a - bQ, \quad a > 0, \quad b > 0$$

bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda (5) tenglama

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \quad (6)$$

ko'rinishda bo'ladi. (6) tenglikni differensiallasak,

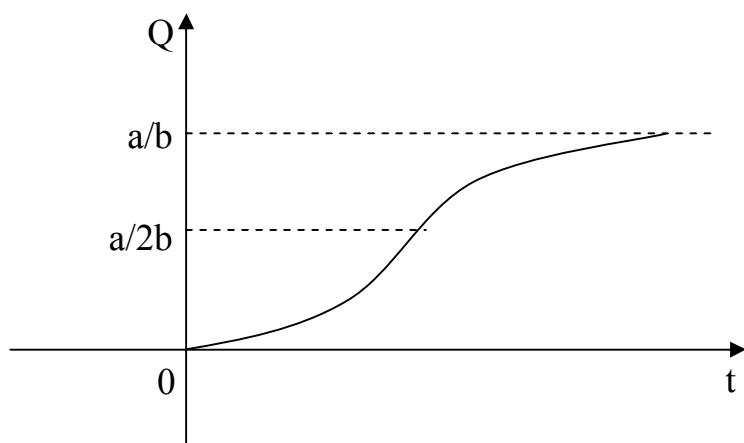
$$Q'' = (\alpha a Q - \alpha b Q^2)' = \alpha a Q' - 2\alpha b Q Q' \quad \text{yoki} \quad Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \quad (7)$$

tenglama hosil bo'ladi. (6)-(7) tenglamalardan $Q = 0$ va $Q = \frac{a}{b}$ bo'lganda,

$Q' = 0$, $Q < \frac{a}{2b}$ bo'lganda, $Q'' > 0$ hamda $Q > \frac{a}{2b}$ bo'lsa $Q'' < 0$ kelib chiqadi.

Bulardan $\frac{a}{2b}$ nuqtadan o'tishda Q ishorasini o'zgartirganligi uchun, bu nuqta

$Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi. Bu funksiya grafigi, ya'ni (6) differensial tenglama integral chiziqlaridan biri, 1-chizmada tasvirlangan bo'lib, bu egri chiziqqa iqtisodda **logistik chiziq** deb ataladi.



1-chizma.

3. Talab va taklifni tahlil qilish. Ma'lumki, bozor modelida mahsulotga talab va taklif mavjud holatlarda narxning o'zgarish sur'ati bilan bog'liq bo'ladi. Bunday sur'at t vaqtning $P(t)$ narx funksiyasi birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi bilan harakterlanadi.

Quyidagi misolni qaraymiz. Talab D va taklif S P narxning funksiyasi bo'lib, ushbu tengliklar bilan ifodalansin:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6. \quad (1)$$

Bunday bog'liqlik haqiqatda mavjud holatlarga mos keladi. Haqiqatan ham, narx sur'ati oshsa, bozorning mahsulotga qiziqishi ortadi, ya'ni $p'' > 0$ bo'ladi. Narxning tez o'sishi haridorni cho'chitib talabning pasayishiga olib keladi. Shuning uchun, p' birinchi tenglikda manfiy ishora bilan ifodalanadi. Ikkinchidan, narx sur'atining ortishi bilan taklif yana kuchayadi, shuning uchun p'' ning koeffitsiyenti talab funksiyasidagiga nisbatan katta, narxning o'sishi tezligi taklifning ham o'sishiga olib keladi, ya'ni p' taklif funksiyasida musbat ishorali bo'ladi.

Narx funksiyasi va vaqt o'zgarishi orasidagi bog'lanishni tahlil qilaylik. Ma'lumki, bozor holati $D = S$ muvozanat bilan ifodalanadi. Bu holda (1) tenglikdan

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \quad (2)$$

ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama kelib chiqadi.

Bizga ma'lumki, bunday tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (2) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimi yig'indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{p}(t) = e^{-3t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

bo'ladi, bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o'zgaraslar.

Bir jinsli bo'lmagan (2) tenglama xususiy yechimi $p_1(t) = A$ o'zgaras, hamda buni (3) tenglamaga qo'yib, $A = 3$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, $p_1(t) = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib (2) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$p(t) = \bar{p}(t) + p_1(t) = e^{-3t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \quad (3)$$

bo'ladi.

Bu yechimdan $t \rightarrow \infty$ da $p(t) \rightarrow 3$ bo'ladi, ya'ni hamma narxlar qaror topgan narxga yaqinlashadi.

Ushbu Koshi masalasini qaraymiz: $t = 0$ bo'lganda, narx $p(0) = 4$ va o'sish mayli (tendensiyasi) $p'(0) = 1$ bo'lsin. $t = 0$ bo'lganda $p(0) = 4$ bo'lganligi uchun, (3) dan $C_1 = 1$ kelib chiqadi. (3) tenglikdan hosila olib va $t = 0$ bo'lganda $p(0) = 1$ shartdan foydalansak, $C_2 = 4$ kelib chiqadi, demak Koshi masalasining yechimi

$$p(t) = 3 + e^{-3t} (\cos t + 4 \sin t)$$

bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o'sish modeli qanday bo'ladi?
2. Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o'sishi modeli nima?
3. Logistik chiziq deb nimaga aytiladi?
4. Talab va taklifni differensial tenglama yordamida qanday tahlil qilinadi?

Qatorlar

17,18-ma'ruzalar. Sonli qatorlar va ularning ayrim yaqinlashish belgilari
Reja.

1. Sonli qatorlar haqida.
2. Qator yig'indisi va uning yaqinlashuvi.
3. Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi(sharti)
4. Musbat hadli qatorlar yaqinlashishining yetarli belgilari.
5. Ishoralari almashinuvchi qatorlar(Leybnis qatori).
6. Absolyut va shartli yaqinlashish.

Mavzuning tayanch tushunchalari

Cheksiz yig'indi, sonli qator, umumiy had, garmonik qator, qator yig'indisi, qisman yig'indi, yaqinlashuvchi qator, uzoqlashuvchi qator, zaruriy belgi, yetarli belgi, taqqoslash belgisi, Dalamber belgisi, Koshi belgisi, integral belgi, ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar, o'zgaruvchan ishorali qatorlar, Leybnis belgisi, absolyut va shartli yaqinlashish.

1. 1-ta'rif. $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ sonlar ketma-ketligidan tuzilgan

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

cheksiz yig'indiga sonli qator deyiladi.

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ larga qatorning hadlari, u_n ga esa, n - **hadi** yoki **umumiy hadi** deyiladi.

Qatorlarga bir necha misollar keltiramiz:

$$1) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

qatorga **garmonik qator** deyiladi;

$$2) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

qator birinchi hadi $a_1 = \frac{1}{2}$, maxraji $q = \frac{1}{2}$ bo'lgan geometrik progressiyani ifodalaydi;

$$3) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

2. Qator yig'indisi va uning yaqinlashuvi. Sonli qator ta'rifidan ma'lumki, uning hadlari cheksiz ko'p bo'lib, qator yig'indisini oddiy yo'l bilan qo'shib, topib bo'lmaydi. Shuning uchun qatorning yig'indisi tushunchasini kiritamiz. (1) qator hadlaridan

$$u_1 = S_1, \quad u_1 + u_2 = S_2, \quad u_1 + u_2 + u_3 = S_3, \dots,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = S_n$$

qismaniy yig'indilarni tuzamiz.

2-ta'rif.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

chekli limit mavjud bo'lsa, S ga **qator yig'indisi** deyiladi va **qator yaqinlashuvchi** deb ataladi.

Chekli limit mavjud bo'lmasa, qatorning yig'indisi bo'lmaydi va u **uzoqlashuvchi** deyiladi.

1-misol.
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorning n qismaniy yig'indisi

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

bo'lib,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Shunday qilib, berilgan sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S = 1$ bo'ladi.

Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari

a) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S bo'lsa, istalgan $c \neq 0$ son uchun,

$$ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi cS bo'ladi;

b) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ va $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$

qatorlar yaqinlashuvchi va mos ravishda S', S'' yig'indilarga ega bo'lsa,

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots$$

qator ham yaqinlashuvchi va yig'indisi $(S' \pm S'')$ dan iborat bo'ladi;

s) $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$ (2)

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$$
 (3)

qator ham yaqinlashuvchi va aksincha (3) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (2) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

3. Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi(sharti)

Teorema. $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ (4)

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

shart bajariladi.

Isbot. (4) qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun

$$u_n = S_n - S_{n-1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Shunday qilib, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ kelib chiqdi.

Natija. Qator umumiy hadining $n \rightarrow \infty$ dagi limiti 0 ga teng bo'lmasa, u uzoqlashuvchi bo'ladi. Lekin $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ shartdan qatorning yaqinlashuvchiligi

kelib chiqmaydi. Bu shart faqat **zaruriy shart bo'lib, yetarli** emas.

4. Musbat hadli qatorlar yaqinlashishining yetarli belgilari

1) Qator yaqinlashishining taqqoslash belgisi

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (5)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (6)$$

qatorlar uchun

$$u_1 \leq v_1, \quad u_2 \leq v_2, \dots, u_n \leq v_n, \dots$$

tengsizliklar hamma n lar uchun bajarilib: (6) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (5) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi (6) qator yig'indisidan katta bo'lmaydi; (5) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (6) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

$$\text{2-misol. } 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorni

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

qator bilan taqqoslayimz. Ma'lumki, keyingi qator maxraji $q = \frac{1}{2}$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya bo'lib, yaqinlashuvchidir. Hamma n lar uchun,

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

tengsizliklar bajariladi, demak taqqoslash belgisiga asosan, berilgan qatorning ham yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2). Dalamber belgisi. Musbat hadli

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

qator berilgan bo'lsin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

limit mavjud bo'lib:

$d < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi;

$d > 1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi;

$d = 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin, bunday hollarda qatorni boshqa belgilardan foydalanib tekshirish kerak bo'ladi.

3-misol. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$

Demak, berilgan qator Dalamber belgisiga asosan yaqinlashuvchi.

4-misol. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish.

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} / \frac{n}{2n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 1}{2n^2 + n} = \frac{2}{2} = 1.$$

Bu holda Dalamber belgisi savolga javob bermaydi. Berilgan qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy belgisini tekshiraylik.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi, demak berilgan qator uzoqlashuvchi.

3) Koshi belgisi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

musbat hadli qator berilgan bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud va

$k < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi;

$k > 1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi;

$k = 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin, bu holda Koshi belgisi savolga javob bermaydi.

$$5\text{-misol. } \sum_1^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Koshi belgisiga asosan,

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Shunday qilib, berilgan qator Koshi belgisiga asosan yaqinlashuvchi bo'ladi.

4) Qator yaqinlashishining integral belgisi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

musbat hadli qator berilgan bo'lsin.

$f(n) = a_n$ natural argumentli funksiya tuzamiz. $f(n)$ uzluksiz, musbat va kamayuvchi funksiya bo'lsin.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(n) dn$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, berilgan qator ham yaqinlashuvchi, xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

$$6\text{-misol. } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n) = \frac{1}{n^2}$ ëku $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiyanı tuzib, ushbu xosmas

integralni hisoblaymiz:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1} \right) = 1.$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi, integral belgiga asosan, tekshirilayotgan qator ham yaqinlashuvchidir.

$$7\text{-misol. } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

garmonik qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n) = \frac{1}{n}$ ëku $f(x) = \frac{1}{x}$ bo'lganligi uchun

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

Demak, xosmas integral uzoqlashuvchi, integral belgiga asosan, garmonik qator ham uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

5. Ishoralari almashinuvchi qatorlar(Leybnis qatori). Ishoralari har xil bo'lgan qatorlarga *o'zgaruvchan ishorali* qatorlar deyiladi.

O'zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holi, *ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlardir.*

$$\text{Masalan, } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

qator birinchi hadi musbat bo'lgan, ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatordir.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar yaqinlashishini **Leybnis belgisi** bilan tekshiriladi.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi

$$a_1 - a_2 + a_3 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots \quad (7)$$

qator berilgan bo'lsin. Bu yerda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ musbat sonlar.

Leybnis belgisi. Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qator hadlari absolyut qiymati bo'yicha kamayuvchi, ya'ni

$$1) a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

va

$$2) \text{ umumiy hadining } n \rightarrow \infty \text{ dagi limiti no'lga teng, ya'ni } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \text{ bo'lsa,}$$

ishoralari navbat bilan almashinuvchi (7) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi birinchi haddan katta bo'lmaydi. Bu shartlardan birortasi bajarilmasa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

$$8\text{-misol. } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Leybnis belgisi shartlarini tekshiramiz:

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Demak, Leybnis belgisining ikkala sharti ham bajariladi. Shunday qilib, berilgan qator Leybnis belgisiga asosan, yaqinlashuvchi.

$$9\text{-misol. } 1,1 - 1,01 + 1,001 + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$\text{Yechish: } 1,1 > 1,01 > 1,001 > \dots$$

birinchi shart bajariladi. Lekin $a_n = 1 + 0,1^n$ bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{10^n}) = 1 \neq 0,$$

Leybnis belgisining ikkinchi sharti bajarilmaydi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

Qatorlar nazariyasidan taqribiy hisoblashlarda keng qo'llaniladi.

Taqribiy hisoblashlarda yo'l qo'yilgan xatolikni baholash katta amaliy ahamiyatga ega. Ishoralari navbatlashuvchi qatorlarda xatolik, hisobga olinmayotgan birinchi had absolyut qiymatidan katta bo'lmaydi, ya'ni

$$|r_n| < a_{n+1}$$

bo'ladi.

$$10\text{-misol. } S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

ni 0,1 aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: Shartga asosan $|r_n| < 0,1$ bo'lishi kerak.

$$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1=10, \quad n=9. \quad \text{Demak,}$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0,74.$$

Bunda $S \approx 0,74$; 0,1 gacha aniqlikda hisoblandi.

Endi o'zgaruvchan ishorali qatorlarning ayrim xossalari qaraymiz.

6. Absolyut va shartli yaqinlashish

1-ta'rif. O'zgaruvchan ishorali qator hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lsa, o'zgaruvchan ishorali qator **absolyut yaqinlashuvchi** deyiladi.

2-ta'rif. O'zgaruvchan ishorali qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo'lsa, o'zgaruvchan ishorali qator **shartli yaqinlashuvchi** deyiladi.

$$11\text{-misol. } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots \quad \text{qator yaqinlashishini tekshiring.}$$

Yechish. Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatidan qator tuzamiz:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

bu qator maxraji $q = \frac{1}{3}$ bo'lgan geometrik progressiya bo'lib, yaqinlashuvchidir.

Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$12\text{-misol. } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

qator shartli yaqinlashuvchidir. Chunki, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

garmonik qator uzoqlashuvchi edi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Sonli qator deb nimaga aytiladi?
2. Qatorning umumiy hadi nima?
3. Garmonik qator deb qanday qatorga aytiladi?
4. Qatorning qisman yig'indisi nima?
5. Qatorning yig'indisi qanday aniqlanadi?
6. Qanday qatorga yaqinlashuvchi deyiladi?
7. Qanday qator uzoqlashuvchi bo'ladi?
8. Yaqinlashuvchi qatorlar qanday xossalarga ega?
9. Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi nima?
10. Qator yaqinlashishining yetarli va zaruriy belgilarining farqi nimadan iborat?
11. Qator yaqinlashishining taqqoslash belgisi nima?
12. Qator yaqinlashishining Dalamber belgisi qanday?
13. Qator yaqinlashishining Koshi belgisi qanday yoziladi?
14. Qator yaqinlashishining integral belgisi nimadan iborat?
15. O'zgaruvchan ishorali qator deb nimaga aytiladi?
16. Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar qanday belgi bilan tekshiriladi?
17. Leybnis belgisi nimadan iborat?
18. Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar yordamida, taqribiy hisoblashda, hisoblash xatosi qanday baholanadi?
19. Absolyut yaqinlashuvchi qator deb nimaga aytiladi?
20. Shartli yaqinlashuvchi qator deb qanday qatorga aytiladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1.
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiring.

$$2. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiring.

$$3. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$4. 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$5. 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$6. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

qator yaqinlashishini Dalmber belgisidan foydalanib tekshiring.

$$7. 1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$8. 1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$9. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

qator yaqinlashishini integral belgi bilan tekshiring.

$$10. 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$11. \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$12. \frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

13. Quyidagi qatorlarning yaqinlashishini Koshi belgisidan foydalanib tekshiring:

$$1) \sum_1^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n; \quad 2) \sum_1^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

14-22. Quyidagi qatorlar yaqinlashishini tekshiring hamda yaqinlashuvchi bo'lsa, absolyutmi yoki shartli ekanligini aniqlang.

$$14. \frac{1}{10} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{40} + \dots$$

$$15. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

$$16. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{3n+5}.$$

$$17. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}.$$

$$18. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}.$$

$$19. \frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$$

$$20. 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$21. 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$22. \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \dots$$

$$23. 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring va uning yig'indisini 0,01 aniqlikkacha hisoblang.

$$24. e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

bo'lsa, e^{-1} ni 0.001 aniqlikkacha taqriban hisoblang.

19-ma'ruza. Funksional qatorlar

Reja.

1. Funksional qatorlar haqida tushunchalar.
2. Darajali qatorlar va ularning xossalari.
3. Teylor va Makloren qatorlari.
4. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish.
5. Qatorlarning taqribiy hisoblashga tatbiqlari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Funksional qator, yaqinlashish intervali, yaqinlashish radiusi, darajali qator yig'indisi, darajali qatorni hadlab integrallash va differensiallash, Teylor qatori, Makloren qatori, binomial qator, taqribiy hisoblash, yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari, funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish.

1. Funksional qatorlar haqida tushunchalar

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$$

funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin.

1-ta'rif.

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

ifodaga **funksional qator** deyiladi.

(1) da $x = x_0$ biror son bo'lsa, qo'yidagi sonli qatorni hosil qilamiz

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (2)$$

(2) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) funksional qator $x = x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi va $x = x_0$ nuqtaga **yaqinlashish nuqtasi** deb ataladi.

$$1\text{-misol. } 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (3)$$

funksional qator $x = \frac{1}{2}$ nuqtada yaqinlashuvchidir, chunki

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

sonli qator yaqinlashuvchi.

Berilgan (3) funksional qator $x = 2$ nuqtada uzoqlashuvchi, chunki

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$$

sonli qator uzoqlashuvchi.

Funksional qator yaqinlashuvchi bo'lgan nuqtalar to'plamiga, uning **yaqinlashish sohasi** deyiladi.

2. Darajali qatorlar va ularning xossalari

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (4)$$

funksional qatorga darajali qator deyiladi. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ o'zgarmas sonlar, darajali qatorning koeffitsiyentlari deb ataladi.

Darajali qator shunday xossaga egaki, u $x = b_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, $|x - x_0| < |b_0 - x_0|$ tengsizlikni qonoatlantiruvchi hamma x lar uchun ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Darajali qator uchun shunday R son mavjudki, $|x - x_0| < R$ uchun, qator absolyut yaqinlashuvchi $|x - x_0| > R$ uchun qator uzoqlashuvchi, ya'ni $-x_0 - R < x < -x_0 + R$ oraliqda darajali qator absolyut yaqinlashuvchi, $x = -x_0 \pm R$ nuqtalarda hosil bo'lgan qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin. Har ikki nuqtada qator yaqinlashishini alohida tekshirish kerak bo'ladi. $(x_0 - R, x_0 + R)$ intervalga **yaqinlashish intervali**, R ga darajali qatorning **yaqinlashish radiusi** deyiladi. Yaqinlashish radiusi $R = 0$ *ëku* $R = \infty$ bo'lishi mumkin $R = 0$ bo'lsa, darajali qator faqat $x = x_0$ nuqtada, $R = +\infty$ bo'lsa, butun sonlar o'qida yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yaqinlashish intervalini, berilgan qatorning absolyut qiymatidan tuzilgan qator uchun Dalamber va Koshi belgilaridan foydalanib topish mumkin. Darajali qatorning hamma koeffitsiyentlari 0 dan farqli bo'lsa, yaqinlashish radiusini topishda

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

formuladan foydalaniladi. Boshqa hollarda bevosita Dalamber belgisidan foydalanib yaqinlashish intervalini topish mumkin.

$$\text{2-misol. } x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $a_n = \frac{1}{n}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}$. Qatorning yaqinlashish radiusini topamiz.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Demak, $-1 < x < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma x lar uchun qator yaqinlashuvchi.

Qator yaqinlashishini intervalning chetki nuqtalarida tekshiramiz: $x = 1$ bo'lsin. Bu holda

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

garmonik qator hosil bo'lib, u uzoqlashuvchidir. $x = -1$ bo'lsin, bu holda

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

sonli qator hosil bo'lib, u Leybnis belgisi shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni yaqinlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $-1 \leq x < 1$ dan iboratdir.

$$\text{3-misol. } (x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + \dots$$

darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

$$\text{Yechish. } a_n = \frac{1}{n^2}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \text{ bo'lganligi uchun,}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Demak, $-1 < x - 2 < 1$ yoki $1 < x < 3$ intervalda qator yaqinlashuvchi. Intervalning chetki nuqtalarida qator yaqinlashishini tekshiramiz. $x = 3$ bo'lsin, bu holda

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

sonli qator hosil bo'lib, integral belgidan foydalansak, uning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi(bajarib ko'ring). $x = 1$ bo'lsa,

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots$$

sonli qator hosil bo'lib, u absolyut yaqinlashuvchidir (tekshirib ko'ring).

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $1 \leq x \leq 3$ bo'ladi.

3. Teylor va Makloren qatorlari $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada $(n+1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo'lsa, u holda qo'yidagi Teylor formulasi o'rinlidir:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

bu yerda, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + Q(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ($0 < Q < 1$) bo'lib, Lagranj

shaklidagi qoldiq had deyiladi.

$a = 0$ da Teylor formulasining xususiy holi, Makloren formulasi hosil bo'ladi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \text{ bu erda}$$

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}[Qx]}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < Q < 1).$$

$y = f(x)$ funksiya a nuqta atrofida istalgan marta differensiallanuvchi bo'lsa va bu nuqtaning biror atrofida

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

bo'lsa, Teylor va Makloren formulalaridan

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \text{ va}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

qatorlar hosil bo'ladi. Bularning birinchisi **Teylor qatori**, ikkinchisiga **Makloren qatori** deyiladi.

Bu qatorlar x ning $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ bo'ladigan qiymatlarida $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi.

A nuqtani o'z ichiga oluvchi biror intervalda istalgan n uchun $|f^{(n)}(x)| < M$, (M biror musbat son) tengsizlik bajarilsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} R(x) = 0$ bo'ladi va $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi.

4. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Ayrim funksiyalarni darajali qatorga yoyyamiz.

1) $f(x) = e^x$, istalgan x uchun

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x, \dots \quad x=0 \quad \text{desak,}$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1, \dots$$

bo'ladi. Bularni Makloren qatoriga qo'yib,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

ni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan $x = 1$ desak,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

bo'lib, e soni qator yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi. Bundan foydalanib e sonining taqribiy qiymatini istalgan darajadagi aniqlikkacha hisoblash mumkin.

2) $f(x) = \sin x$. Istalgan x uchun,

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x, \dots$$

bo'ladi. Bundan

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, \dots$$

bo'lib, bularni Makloren qatoriga qo'ysak,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

hosil bo'ladi. Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchi $-\infty < x < +\infty$. Oxirgi qatorni hadlab differensiallasak,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1-1}}{(2n-2)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

qator hosil bo'ladi, bu $f(x) = \cos x$ funksiya uchun Makloren qatori bo'ladi.

3) Xuddi yuqoridagidek usul bilan $f(x) = (1+x)^m$ funksiya uchun

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \dots$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qatorga **binomial qator** deyiladi. U $(-1, 1)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

4) $f(x) = \ln(1+x)$ funksiya uchun yuqoridagi usul bilan

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

yoyilmani hosil qilish mumkin.

5-misol. $f(x) = \cos \sqrt{x}$ funksiyani x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish. Yuqoridagi $\cos x$ uchun keltirilgan qatorda x ni $\sqrt{x}$ bilan almashtirsak,

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \dots$$

bo'ladi. Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchidir, biroq $\cos \sqrt{x}$ funksiya $x < 0$ da aniqlanmaganligini hisobga olib, hosil qilingan qator $\cos \sqrt{x}$ funksiyaga $0 \leq x < +\infty$ da yaqinlashadi.

5. Qatorlarning taqribiy hisoblashga tatbiqlari. Bir necha misollar qaraymiz.

6-misol. $\cos x$ ning yoyilmasidan foydalanib $\cos 18^0$ ni 0,001 aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. $\cos x$ funksiyaning qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\cos 18^0 = \cos \frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 - \dots$$

qatorni hosil qilamiz.

$$\frac{\pi}{10} = 0,31416; \left(\frac{\pi}{10} \right)^2 = 0,09870; \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 = 0,00974.$$

va $\frac{1}{6!} \cdot \left(\frac{\pi}{10} \right)^6 < 0,0001$ bo'lganligi uchun, taqribiy hisoblashda qatorning birinchi uchta hadi bilan chegaralanamiz, demak

$$\cos 18^0 \approx 1 - \frac{0,09870}{2} + \frac{0,00974}{24}; \text{ ёки } \cos 18^0 \approx 0,9511.$$

7-misol. $\sqrt[5]{1,1}$ ni 0,0001 aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish: $\sqrt[5]{1,1} = (1 + 0,1)^{\frac{1}{5}}$ deb, binomial qatordan foydalansak:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1,1} &= (1 + 0,1)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5} \cdot 0,1 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} - 1)}{2!} 0,01 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} - 1) \cdot (\frac{1}{5} - 2)}{3!} 0,001 + \\ &+ \dots = 1 + 0,02 - 0,0008 + 0,000048 - \dots \end{aligned}$$

bo'ladi. To'rtinchi had $0.000048 < 0.0001$ bo'lganligi uchun, hisoblashda birinchi uchta hadini olib, hisoblaymiz:

$$\sqrt[5]{1,1} \approx 1 + 0,02 - 0,0008 = 1,0192.$$

8-misol. $\sqrt[3]{130}$ ni 0,001 aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. 5^3 130 ga eng yaqin butun sonning kubi bo'lganligi uchun $130 = 5^3 + 5$ ko'rinishda ifodalab, binomial qatordan foydalansak,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{130} &= \sqrt[3]{5^3 + 5} = \sqrt[3]{5^3 \left(1 + \frac{1}{25}\right)} = 5 \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 5 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0,04 + \frac{\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1)}{2!} \cdot 0,0016 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1) \cdot (\frac{1}{3} - 2))}{3!} \cdot 0,000064 + \dots\right) = 5 + 0,0667 - 0,00018 + 0,000064 - \dots \end{aligned}$$

Bo'ladi. Oxirgi qatorda 3-had 0,001 dan kichik bo'lganligi uchun, taqribiy hisoblashda birinchi ikkita had bilan chegaralanamiz:

$$\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0,0667 \approx 5,0667.$$

9-misol. $\ln 1,04$ ni 0,0001 gacha aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: $\ln(1+x)$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\ln(1 + 0,04) = 0,04 - \frac{0,04^2}{2} + \frac{0,04^3}{3} - \frac{0,04^4}{4} + \dots,$$

yoki

$$\ln 1,04 = 0,04 - 0,0008 + 0,000021 - 0,00000064 + \dots$$

qatorni hosil qilamiz, hamda uchinchi had 0,0001 dan kichik bo'lganligi uchun birinchi ikki hadni hisobga olib hisoblaymiz:

$$\ln 1,04 \approx 0,0392.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksional qator deb nimaga aytiladi?
2. Funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi nima?
3. Funksional qatorning yaqinlashish sohasi deb qanday to'plamga aytiladi?
4. Darajali qator deb nimaga aytiladi?
5. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi nima?
6. Qanday intervalga yaqinlashish intervali deyiladi?

7. Yaqinlashish radiusi qanday topiladi?
8. Yaqinlashish intervalining chetki nuqtalarida, darajali qator yaqinlashishi qanday bo'ladi?
9. Darajali qator qanday xossalarga ega?
10. Makloren va Teylor formulalari qanday bo'ladi?
11. Teylor qatori deb qanday qatorga aytiladi?
12. Makloren qatori Teylor qatoridan kelib chiqadimi?
13. Qanday funksiyalarni Teylor qatoriga yoyish mumkin?
14. $f(x) = e^x$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasi qanday bo'ladi?
15. $f(x) = \sin x$ funksiya Makloren qatoriga qanday yoyiladi?
16. $f(x) = \cos x$ funksiyaning Makloren qatoriga yoyilmasini yozing?
17. Binomial qator qanday bo'ladi?
18. $f(x) = \ln(1+x)$ funksiyaning Makloren qatoriga yoying?
19. $\cos 18^\circ$ ni taqribiy hisoblang? (18° radian o'lchovda 0,314).
20. Qatorlardan foydalanib $\sqrt[5]{1,1}$ ni taqribiy hisoblang?
21. $\sqrt[3]{130}$ ni taqribiy hisoblang?
22. $\ln(1,04)$ ni taqribiy hisoblang?

Mustaqil yechish uchun misollar

$$1. \quad \frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3} \left(\frac{4-x}{7x+2} \right)^3 + \dots$$

funksional qatorning $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda yaqinlashuvchiligini tekshiring.

$$2. \quad 1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$3. \quad \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

4-8 misollarda qatorlarning yaqinlashish intervalini aniqlang.

$$4. (x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \dots$$

$$5. x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \dots$$

$$6. 5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^4 x^4}{4!} + \dots$$

$$7. x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \dots$$

$$8. \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^4 + \dots$$

9. Ushbu funksiyalarni x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

$$1) f(x) = 3^x ; \quad 2) f(x) = e^{-2x} ; \quad 3) f(x) = \cos^2 x.$$

10. Funksiyalarning darajali qatorlarga yoyilmasidan foydalanib quyidagilarni:

1) e sonini 0,00001 gacha aniqlikda;

2) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ni 0,00001 gacha aniqlikda;

3) $\sin 9^0$ ni 0,0001 gacha aniqlikda;

4) $\sqrt[3]{1,06}$ ni 0,0001 gacha aniqlikda;

5) $\ln 0,98$ ni 0,0001 gacha aniqlikda;

6) $\ln 1,1$ ni 0,0001 gacha aniqlikda

taqribiy hisoblang.

