QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

TOSHEVA NARGIZA AHMEDOVNA

UCHINCHI TARTIBLI OPERATORLI MATRITSALAR OILASINING MUHIM VA DISKRET SPEKTRLARI

01.01.01 – Matematik analiz

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Qarshi – 2023

UDK: 517.984

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

TOSHEVA NARGIZA AHMEDOVNA

UCHINCHI TARTIBLI OPERATORLI MATRITSALAR OILASINING MUHIM VA DISKRET SPEKTRLARI

01.01.01 – Matematik analiz

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Qarshi – 2023

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2022.2.PhD/FM705 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Buxoro davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (www.qarshidu.uz) va “Ziyonet” Axborot ta’lim tarmog‘ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Rasulov To‘lqin Husenovich** fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor
Rasmiy opponentlar:	**Mo‘minov Zaxriddin Eshqobilovich** fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent
	Xamrayev Axror Yusupovich fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Qarshi davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 raqamli Ilmiy kengashning 2023-yil “_____” __________ soat ____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 180103, Qarshi shahri, Ko‘chabog‘ ko‘chasi, 17. Tel.: (0 375) 225-34-13; faks: (0375) 221-00-56; e-mail: qarshidu@umail.uz). Qarshi davlat universiteti, Matematika va kompyuter ilmlari fakulteti 202-xona.

Dissertatsiya bilan Qarshi davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 180103, Qarshi shahri, Ko‘chabog‘ ko‘chasi, 17. Tel.: (0 375) 225-34-13; faks: (0375) 221-00-56; e-mail: qarshidu@umail.uz).

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil “______” ____________ kuni tarqatildi
(2023-yil “_____” ____________ dagi _____ raqamli reestr bayonnomasi).

B.A.Shoimqulov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

Sh.D.Nodirov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.f.d. (PhD)

A.A.Imomov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash qoshidagi
ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d. (DSc), dotsent

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda Fok fazosining qirqilgan qism fazolarida ta’sir qiluvchi operatorli matritsalar oilasining spektral xossalarini aniqlashga olib kelinadi. Operatorli matritsalar oilasining muhim va diskret spektrlari bilan bog‘liq masalalar qattiq jismlar fizikasi, kvant maydon nazariyasi, statistik fizika, kvant mexanikasi va boshqa ko‘plab sohalardagi dolzarb masalalardan hisoblanadi. Shuning uchun panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos operatorli matritsalar oilasiga oid tadqiqotlarni rivojlantirish muhim hisoblanadi.

Dunyoda operatorli matritsalar oilasining muhim spektrini tavsiflash va diskret spektrining chekli yoki cheksiz bo‘lish shartlarini aniqlashga doir ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. Bu borada, umumlashgan Fridrixs modellari oilasi uchun bo‘sag‘aviy hodisalarni tahlil qilish, uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi muhim spektrining tuzilishini aniqlash, xos qiymatlar sonining chekli yoki cheksiz bo‘lish shartlarini topishga alohida e’tibor berilmoqda.

Mamlakatimizda panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemalariga mos operatorli matritsalar oilasining xossalarini tadqiq qilishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Operatorli matritsalar oilasining muhim spektrini aniqlash va xos qiymatlari soni uchun asimptotik formula topishga oid salmoqli natijalarga erishildi. “Matematika, fizika, amaliy matematika fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish asosiy vazifalar va faoliyat yo‘nalishlari” etib belgilandi[1]. Bu borada blok operatorli matritsalarning spektral nazariyasini rivojlantirish, uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasining muhim spektri tuzilishini ko‘rsatish hamda uning xos qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo‘ladigan shartlarni topish, shu bilan birga xos qiymatlari soni uchun asimptotik formula olish muhim ilmiy ahamiyatga ega hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida” Farmoni, 2017-yil 17-fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”

[1]O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish to‘g‘risida”gi 292-son qarori.

qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Fok fazosining qirqilgan qism fazosidagi operatorli matritsalar oilasi spektral nazariyasiga oid tadqiqotlar G.Shpon, I.M.Sigal, A.Soffer, V.Bax, R.A.Minlos, Yu.V.Jukov, H.Neydhardt, S.N.Laqaev, T.H.Rasulov, M.E.Mo‘minov va boshqa ko‘plab olimlar tomonidan olib borilgan.

Hozirgi vaqtda operatorli matritsalar oilasi xos qiymatlari sonini tadqiq qilish masalasi blok operatorli matritsalar nazariyasining chuqur o‘rganilayotgan obyektlaridan biri hisoblanadi. Bunday turdagi operatorlar spektral tahlilidagi asosiy masalalardan biri uning muhim spektridan chapda joylashgan cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjudligini o‘rganish masalasidir. Bu hodisaning mavjudligi dastlab uchta zarrachalar sistemasi uchun V.N.Yefimov tomonidan o‘rganilgan hamda keyinchalik Yefimov hodisasi deb atalgan. Ushbu hodisa mavjudligining qat’iy matematik isboti dastlab D.R.Yafayev tomonidan keltirilgan. Keyinchalik Yu.N.Ovchinnikov, I.M.Sigal, H.Tamura, A.V.Sobolev va boshqa olimlar tomonidan uch zarrachali uzluksiz Shryodinger operatori uchun Yefimov hodisasining mavjudligi o‘rganilgan.

Qattiq jismlar fizikasi, shuningdek, panjaraviy maydon nazariyasida $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ Yevklid fazosidagi uch zarrachali Shryodinger operatorining panjaraviy analogi bo‘lgan diskret Shryodinger operatori deb ataluvchi operatorlar paydo bo‘ladi. Dastlab S.N.Laqayev tomonidan uch o‘lchamli panjaradagi o‘zaro juft-jufti bilan kontakt ta’sirlashuvchi uchta ixtiyoriy va uchta bir xil zarrachali sistemalar uchun Yefimov hodisasining mavjudligi matematik nuqtayi nazardan qat’iy isbotlangan. S.N.Laqayev, S.Albeverio, J.I.Abdullayev va Z.E.Mo‘minovlarning ishlarida $\widehat{H}(K)$ uch zarrachali diskret Shryodinger operatorining z dan chapda yotuvchi xos qiymatlari soni $N(K,z)$ uchun K va z spektral parametrlar bo‘yicha asimptotikalar olingan.

M.E.Mo‘minovning ishida panjaradagi uchta ixtiyoriy zarrachalar sistemasiga mos gamiltonian muhim spektrining bo‘shlig‘ida cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjudligi isbotlangan.

Yu.X.Eshqobilovning ishida Xabbard modelida vujudga keluvchi, uch zarrachali model diskret Shryodinger operatori uchun Yefimov hodisasining mavjudligi isbotlangan. Bunda o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan operatorlar uchun minimaks prinsipi usullari va musbat integral operatorlar xossalaridan foydalanilgan. Yuqorida keltirib o‘tilgan ishlarda soni saqlanadigan chekli sondagi zarrachalar sistemalari uchun Yefimov hodisasining mavjudligi o‘rganilgan.

S.N.Laqayev, S.Albeverio va T.H.Rasulovlarning ishlarida esa uchinchi tartibli model operatorli matritsa uchun Yefimov hodisasining mavjud bo‘lishi isbotlangan, hamda xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula o‘rganilgan. H.Neydhardt, M.E.Mo‘minov va T.H.Rasulovlarning ishida uchinchi tartibli operatorli matritsalar uchun olingan natijalar yordamida panjaradagi ko‘pi bilan ikkita fotonli spin-bozon modelining spektri batafsil o‘rganilgan. M.E.Mo‘minov va T.H.Rasulovlarning ishlarida esa bu turdagi operatorli matritsalar uchun muhim spektrning ichida (muhim spektrning bo‘shlig‘ida, muhim spektrdan chapda) cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjud bo‘lish shartlari topilgan.

T.H.Rasulov va E.B.Dilmurodovlarning ishlarida esa soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasi bilan bog‘liq ikkinchi tartibli operatorli matritsa uchun ikki yoqlama Yefimov hodisasining mavjudligi isbotlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Buxoro davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasining 2017-2021-yillarga mo‘ljallangan M.01.2017-raqamli “Chiziqli operatorlarning spektral nazariyasi” ilmiy-tadqiqot yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi muhim spektrining tuzilishini aniqlash va uning xos qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo‘lish shartlarini topishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

$h(k)$ umumlashgan Fridrixs modellari oilasining spektrini o‘rganish, $h(k)$ operator xos qiymatlari soni va joylashuv o‘rnini aniqlash;

uch o‘lchamli panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos $H(K)$ uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi bilan bog‘liq $H_{ch}(K)$ kanal operatorini qurish va uning spektrini o‘rganish;

$H(K)$ operatorli matritsalar oilasi muhim spektrining tarmoqlarini aniqlash va ularning joylashuv o‘rnini tadqiq qilish hamda $H(K)$ operator muhim spektri bitta, ikkita, uchta kesmalarning birlashmasidan iborat bo‘lish shartlarini topish;

$H(K)$ operatorli matritsalar oilasi uchun Λ diskret to‘plamdan olingan K parametrlarda chekli sondagi xos qiymatlarga ega bo‘lish shartlarini aniqlash;

ma’lum shartlarda $H(K)$ operatorli matritsalar oilasi cheksiz sondagi manfiy xos qiymatlarga ega bo‘ladigan K parametrning qiymatlari to‘plamini aniqlash hamda xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula topish.

Tadqiqotning obyekti sifatida panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi olingan.

Tadqiqotning predmetini Fok fazosining qirqilgan qism fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasining spektral xossalari tashkil etgan.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida matematik analiz, funksional analiz, oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlarning spektral nazariyasi va zamonaviy matematik fizika usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

uch oʻlchamli panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi muhim spektrining ikki zarrachali va uch zarrachali tarmoqlari aniqlangan;

ikkinchi tartibli operatorli matritsa koʻrinishidagi umumlashgan Fridrixs modellari oilasi spektral parametrining diskret toʻplamdan olingan qiymatlarida boʻsagʻaviy xos qiymat va virtual sathning mavjudlik, hamda musbatlik shartlari topilgan;

nol soni umumlashgan Fridrixs modeli uchun xos qiymat boʻlsa yoki umumlashgan Fridrixs modeli nomanfiy boʻlib, nol soni regulyar tipdagi nuqta boʻlsa, u holda operatorli matritsalar oilasi spektral parametrining diskret toʻplamdan olingan qiymatlarida manfiy xos qiymatlari sonining chekli boʻlishi isbotlangan;

umumlashgan Fridrixs modeli nol energiyali rezonansga ega boʻlsa, u holda uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi spektral parametrining diskret toʻplamdan olingan qiymatlarida xos qiymatlari sonining cheksiz boʻlishi isbotlangan hamda xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula topilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

uch oʻlchamli panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos uchinchi tartibli operatorli matritsaning spektral xossalari haqidagi xulosalar atom fizikasida, kvant mexanikasida eksperimental tadqiqotlarning sifat koʻrsatkichini aniqlash hamda sonli hisoblashlarda foydalanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik analiz, funksional analiz, matematik fizika va oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlarning spektral nazariyasi metodlaridan foydalangan holda aniq matematik tahlillar va isbotlashlar bilan izohlangan.

Tadqiqotning ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqotda olingan natijalarning ilmiy ahamiyati ulardan oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlar nazariyasining kvant maydonlar nazariyasi, qattiq jismlar fizikasi, statistik fizikada paydo boʻladigan, xususan, uchinchi tartibli operatorli matritsalar bilan bogʻliq masalalarida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Dissertatsiya natijalarining amaliy ahamiyati shundan iboratki, operatorli matritsalarning xos qiymatlari soni yordamida qattiq jismlar fizikasi va kvant mexanikasining panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemalariga mos modellarning xos qiymatlari sonini aniqlash mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Uchinchi tartibli operatorli matritsalarga doir olingan ilmiy natijalar asosida:

uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi muhim spektrining joylashuv oʻrni va tuzilishidan hamda muhim spektrdan chapdagi cheksiz sondagi xos qiymatlarning mavjudlik shartlarini topishda qoʻllanilgan metodlardan Samarqand davlat universitetining 2017-2020-yillarda bajarilgan OT-F4-66 "Panjaradagi chekli sondagi zarrachalar sistemasi modellari. Energiya operatorlarining muhim va diskret spektrlari" mavzusidagi fundamental loyihada foydalanilgan (Samarqand davlat universitetining 2022-yil 29-sentabrdagi 10-4143-son maʼlumotnomasi). Natijada panjaradagi ikki va uch zarrachali sistema gamiltonianlari muhim spektrining joylashuv oʻrnini hamda xos qiymatlar sonini aniqlash imkonini bergan.

Umumlashgan Fridrixs modeli uchun boʻsagʻaviy hodisalar hamda uchinchi tartibli operatorli matritsa xos qiymatlarining chekliligini tekshirishda qoʻllanilgan metodlardan Malayziyaning Xalqaro islom universitetining FRGS19-039-0647 raqamli fundamental loyihada foydalanilgan (Malayziyaning Xalqaro islom universitetining 2022-yil 25-oktabrdagi maʼlumotnomasi). Natijada oddiy differensial tenglamaga asoslangan usullar yordamida myu qiymatlar quyi chegarasiga sonli yaqinlashishni aniqlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 6 ta xalqaro va 3 ta Respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida, jami 9 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan oʻtgan.

Tadqiqot natijalarining eʼlon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi boʻyicha jami 13 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan Oʻzbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 4 ta, jumladan, 2 tasi xorijiy va 2 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar roʻyxatidan iborat boʻlib, 90 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiyada tanlangan mavzuning dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yoʻnalishlariga mosligi yoritilgan, mavzu boʻyicha xorijiy va mahalliy ilmiy-tadqiqot ishlari sharhi, muammoning oʻrganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan maqolalar va dissertatsiya tuzilishi boʻyicha maʼlumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi "**Dastlabki tushunchalar va maʼlum faktlar**" deb ataladi. Ushbu bobda operatorlar spektral nazariyasidan yaxshi maʼlum boʻlgan dastlabki maʼlumotlar va muhim faktlar hamda baʼzi operatorli matritsalarning spektral xossalari bilan bogʻliq ilmiy natijalar tahlil qilingan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida Fok fazosi, uning ikkita muhim qism fazolari boʻlgan bozonli va fermionli Fok fazolar hamda ularning qirqilgan qism fazolari haqida qisqacha maʼlumotlar bayon qilingan. Bundan tashqari, oʻquvchilarga qulaylik uchun bu fazo va qism fazolardagi elementlarning ko‘rinishi, elementlar skalyar ko‘paytmasi, elementning normasi kabi tushunchalar keltirilgan. Ikkinchi paragrafda keyingi boblarning asosiy natijalarini bayon qilishda va isbotlashda zarur bo‘ladigan asosiy ta’riflar, tushunchalar, tasdiqlar va teoremalar keltirilgan. Xususan, Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorning spektri hamda uning ikki turdagi klassifikatsiyasi yoritilgan. Kompakt qo‘zg‘alishlarda muhim spektrning o‘zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasi, Veyl mezoni, Fredgolmning analitik teoremasi kabi klassik natijalar o‘z aksini topgan.

Birinchi bobning uchinchi paragrafida $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ Yevklid fazodagi va z^d panjaradagi soni saqlanmaydigan chekli sondagi zarrachalar sistemasiga mos operatorli matritsalarning spektral xossalari bilan bog‘liq ilmiy natijalar tahlili keltirilgan.

Dissertatsiya ishining ikkinchi bobi **“Uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasining muhim spektri”** deb nomlanadi. $\mathcal{H}$ orqali $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ va $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^3)^2)$ fazolarning to‘g‘ri yig‘indisini belgilaymiz, ya’ni $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Bunda $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ va $\mathcal{H}_2$ fazolarga $L_2(\mathbb{T}^3)$ fazo yordamida qurilgan $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(L_2(\mathbb{T}^3))$ bozonli Fok fazoning mos ravishda nol zarrachali, bir zarrachali va ikki zarrachali qism fazolari deyiladi.

$\mathcal{H}$ Hilbert fazosida ta’sir qiluvchi quyidagi

$$H(K) := \begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix} \tag{1}$$

uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasini qaraymiz. Bu yerda matritsaviy elementlar

$$H_{00}(K)f_0 = w_0(K)f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v_0(t)f_1(t)dt;$$

$$(H_{11}(K)f_1)(p) = w_1(K;p)f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} v_1(t)f_2(p,t)dt;$$

$$(H_{22}(K)f_2)(p,q) = w_2(K;p,q)f_2(p,q), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0,1,2$$

kabi aniqlangan bo‘lib, H_{ij}^* $(i < j)$ orqali H_{ij} operatorga qo‘shma operator belgilangan. Bundan tashqari, $w_0(\cdot)$ va $v_i(\cdot)$, $i = 0,1$ funksiyalar $\mathbb{T}^3$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli chegaralangan funksiyalar, $w_1(\cdot;\cdot)$ va $w_2(\cdot;\cdot,\cdot)$ funksiyalar esa mos ravishda

$$w_1(K;p) := l_1\varepsilon(p) + l_2\varepsilon(K-p) + 1,$$
$$w_2(K;p,q) := l_1\varepsilon(p) + l_1\varepsilon(q) + l_2\varepsilon(K-p-q)$$

tengliklar yordamida aniqlanib, $l_1, l_2 > 0$ va

$$\varepsilon(q) := \sum_{i=1}^{3} (1 - \cos(nq^{(i)})), \quad q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}) \in \mathbb{T}^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ta’kidlash joizki, H_{01} va H_{12} operatorlarga yo‘qotish operatorlari, H_{01}^* va H_{12}^* operatorlarga esa paydo qilish operatorlari deyiladi. Mazkur tadqiqot ishida qaralayotgan zarrachalar sistemasida paydo bo‘ladigan va yo‘qoladigan zarrachalar soni 1 ga teng hol tahlil qilinadi. Bu esa o‘z navbatida $H_{02} \equiv 0$ va $H_{02}^* \equiv 0$ ekanligini anglatadi.

1-lemma. *$\mathcal{H}$ Hilbert fazosida (1) tenglik yordamida aniqlangan $H(K)$ operatorli matritsa chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.*

$H(K)$ operatorli matritsalar oilasining spektral xossalarini o‘rganishda muhim sanalgan $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ Hilbert fazosida

$$h(k) := \begin{pmatrix} h_{00}(k) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(k) \end{pmatrix}$$

kabi aniqlangan va umumlashgan Fridrixs modellari oilasi deb ataluvchi $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ ikkinchi tartibli operatorli matritsalar oilasini qaraymiz. Bu yerda

$$h_{00}(k)f_0 = (l_2\varepsilon(k) + 1)f_0, \quad h_{01}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{T}^3} v_1(t)f_1(t)dt,$$

$$(h_{11}(k)f_1)(q) = E_k(q)f_1(q), \quad E_k(q) := l_1\varepsilon(q) + l_2\varepsilon(k-q).$$

$h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ operatorli matritsaning muhim spektrini aniqlash maqsadida $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ Hilbert fazosida

$$h_0(k) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11}(k) \end{pmatrix}$$

tenglik orqali aniqlangan $h_0(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ operatorli matritsani qaraymiz. Ko‘rinib turibdiki, $h_0(k)$ operatorli matritsaning $h(k) - h_0(k)$ qo‘zg‘alish operatori 2 o‘lchamli o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorli matritsa bo‘ladi. Chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlarda muhim spektrning o‘zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko‘ra $h(k)$ operatorli matritsaning muhim spektri $h_0(k)$ operatorli matritsaning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi. Aniqlanishiga ko‘ra

$$\sigma_{\text{ess}}(h_0(k)) = [E_{\min}(k); E_{\max}(k)],$$

bu yerda $E_{\min}(k)$ va $E_{\max}(k)$ sonlari

$$E_{\min}(k) := \min_{q \in \mathbb{T}^3} E_k(q) \quad va \quad E_{\max}(k) := \max_{q \in \mathbb{T}^3} E_k(q)$$

tengliklar yordamida aniqlangan. Shunday qilib, $h(k)$ operatorli matritsaning muhim spektri uchun $\sigma_{\text{ess}}(h(k)) = [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$ tenglik o‘rinlidir.

Har qanday $k \in \mathbb{T}^3$ uchun $\mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$ sohada analitik bo‘lib,

$$\Delta(k\,; z) := l_2\varepsilon(k) + 1 - z - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_1^2(t)dt}{E_k(t) - z}$$

tenglik yordamida aniqlangan funksiyani qaraymiz. Odatda $\Delta(k\,;\cdot)$ funksiyaga $h(k)$ operatorli matritsaga mos Fredgolm determinanti deyiladi.

Quyidagi lemma $h(k)$ operatorli matritsa xos qiymatlari va $\Delta(k\,;\cdot)$ funksiyaning nollari orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

2-lemma. *Har bir $k \in \mathbb{T}^3$ uchun $z \in \mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$ soni $h(k)$ operatorli matritsaning xos qiymati bo‘lishi uchun $\Delta(k\,; z) = 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

3-lemma. *Har bir $k \in \mathbb{T}^3$ uchun $h(k)$ operatorli matritsa $(-\infty; z_0)$, $z_0 \leq E_{\min}(k)$ oraliqda yotuvchi xos qiymatga ega bo‘lishi uchun $\Delta(k\,; z_0) < 0$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.*

4-lemma. *Har bir $k \in \mathbb{T}^3$ uchun $h(k)$ operatorli matritsa $(z_0; +\infty)$, $z_0 \geq E_{\max}(k)$ oraliqda yotuvchi xos qiymatga ega bo‘lishi uchun $\Delta(k\,; z_0) > 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

$H(K)$ operatorli matritsaga mos kanal operator deb ataluvchi va $L_2(\mathbb{T}^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ Hilbert fazosida

$$H_{\text{ch}}(K) := \begin{pmatrix} H_{11}(K) & \frac{1}{\sqrt{2}} H_{12} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{T}^3 \tag{2}$$

ko'rinishidagi ikkinchi tartibli operatorli matritsani qaraymiz. Ta'kidlash joizki, H_{12}^* qo'shma operator $L_2(\mathbb{T}^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ Hilbert fazoning xususiyatidan kelib chiqqan holda

$$H_{12}^*: L_2(\mathbb{T}^3) \to L_2((\mathbb{T}^3)^2), \quad (H_{12}^* f_1)(p,q) = v_1(q) f_1(p), \quad f_1 \in L_2(\mathbb{T}^3)$$

kabi aniqlanadi. Yuqoridagi kabi aniqlangan $H_{\text{ch}}(K)$ kanal operator $L_2(\mathbb{T}^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$m_K := \min_{p,q \in \mathbb{T}^3} w_2(K;p,q), \quad M_K := \max_{p,q \in \mathbb{T}^3} w_2(K;p,q),$$

$$\sigma_K := \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_{\text{disc}}(h(K-p)) + l_1 \varepsilon(p) \boldsymbol{I}\}, \quad \Sigma_K := [m_K; M_K] \cup \sigma_K$$

bu yerda $\boldsymbol{I}$ orqali $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ fazodagi birlik operator belgilangan.

2-lemmaga ko'ra σ_K to'plamni biror $p \in \mathbb{T}^3$ element uchun $\Delta(K-p\,; z - l_1\varepsilon(p)) = 0$ tenglik bajariladigan barcha

$$z \in \mathbb{C} \setminus [E_{\min}(K-p) + l_1\varepsilon(p); E_{\max}(K-p) + l_1\varepsilon(p)]$$

sonlar to'plami sifatida aniqlash mumkin.

$H_{\text{ch}}(K)$ kanal operatorning spektrini $h(k)$ umumlashgan Fridrixs modellari oilasining spektri orqali ifodalashga oid tasdiqni keltiramiz.

1-teorema. $H_{\text{ch}}(K)$ *kanal operator sof muhim spektrga ega bo'lib, quyidagi* $\sigma(H_{\text{ch}}(K)) = \Sigma_K$ *tenglik o'rinlidir.*

Endi $H(K)$ operatorli matritsaning diskret (yakkalangan va chekli karrali) xos qiymatlariga mos xos vektor-funksiyalari uchun Faddeyev tipdagi integral tenglamalar sistemasi va uning turli ko'rinishlarini keltirib o'tamiz. Bu natijalar $H(K)$ operatorli matritsaning spektrini tadqiq qilishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Har bir tayinlangan $K \in \mathbb{T}^3$ element va $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_K$ soni uchun $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ Hilbert fazosida

$$T(K,z) := \begin{pmatrix} T_{00}(K,z) & T_{01}(K,z) \\ T_{10}(K,z) & T_{11}(K,z) \end{pmatrix}$$

kabi aniqlangan ikkinchi tartibli operatorli matritsani qaraymiz. Bu yerda $T_{ij}(K,z): \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i,j = 0,1$ matritsaviy elementlar

$$T_{00}(K,z) g_0 = (1 + w_0(K) - z) g_0, \quad T_{01}(K,z) g_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v_0(t) g_1(t) dt;$$

$$(T_{10}(K,z) g_0)(p) = -\frac{v_0(p) g_0}{\Delta(K-p\,; z - l_1\varepsilon(p))};$$

$$(T_{11}(K,z) g_1)(p) = \frac{v_1(p)}{2\Delta(K-p\,; z - l_1\varepsilon(p))} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_1(t) g_1(t) dt}{w_2(K;p,t) - z}$$

tengliklar yordamida aniqlangan va $g_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0,1$. Ta'kidlash joizki, har bir

$K \in \mathbb{T}^3$ element va $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_K$ soni uchun $T_{00}(K,z)$, $T_{01}(K,z)$ va $T_{10}(K,z)$ matritsaviy elementlar 1 o'lchamli operatorlar bo'lib, $T_{11}(K,z)$ operator esa Hilbert-Shmidt sinfiga tegishlidir. Shu sababli $T(K,z)$ kompakt operator bo'ladi.

Quyidagi lemma $H(K)$ operatorli matritsa uchun mashhur Faddeyev natijasining analogi bo'lib, $H(K)$ va $T(K,z)$ operatorli matritsalarning xos qiymatlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

5-lemma. *Har bir tayinlangan $K \in \mathbb{T}^3$ element uchun $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_K$ soni $H(K)$ operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi uchun $\lambda = 1$ soni $T(K,z)$ operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarlidir. Bundan tashqari, z va 1 xos qiymatlar bir xil karralikga egadir.*

Ta'kidlab o'tamizki,

$$g = T(K,z)g, \quad g = (g_0, g_1) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$$

operatorli tenglamaga $H(K)$ operatorli matritsaning xos vektor-funksiyalari uchun Faddeyev tipdagi tenglama deyiladi va $H(K)$ operatorli matritsaning muhim spektrini tahlil qilishda asosiy vazifalardan birini bajaradi.

$\tau_{\mathrm{ess}}(K)$ orqali $H_{\mathrm{ch}}(K)$ kanal operator spektrining quyi chegarasini belgilaymiz, ya'ni

$$\tau_{\mathrm{ess}}(K) = \min \sigma\big(H_{\mathrm{ch}}(K)\big).$$

Barcha $K \in \mathbb{T}^3$ elementlar uchun $\Delta(K - p\,; z - l_1\varepsilon(p))$ funksiya (p,z) o'zgaruvchining funksiyasi sifatida $\mathbb{T}^3 \times (-\infty; \tau_{\mathrm{ess}}(K))$ to'plamda musbat bo'lganligi bois barcha $K, p \in \mathbb{T}^3$ elementlar va $z < \tau_{\mathrm{ess}}(K)$ soni uchun $\Delta(K - p\,; z - l_1\varepsilon(p))$ ifodaning musbat kvadratik ildizi mavjud bo'ladi. $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ operatorli matritsaning diskret spektrini tahlil qilishda $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ fazoda ta'sir qiluvchi hamda o'z-o'ziga qo'shma $\hat{T}(K,z)$, $z < \tau_{\mathrm{ess}}(K)$ kompakt 2×2 blok operatorli matritsani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\hat{T}(K,z) := \begin{pmatrix} \hat{T}_{00}(K,z) & \hat{T}_{01}(K,z) \\ \hat{T}_{01}^*(K,z) & \hat{T}_{11}(K,z) \end{pmatrix}.$$

Uning matritsaviy elementlari

$$\hat{T}_{00}(K,z)g_0 = \big(1 + z - w_0(K)\big)g_0, \hat{T}_{01}(K,z)g_1 = -\int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_0(t)g_1(t)dt}{\sqrt{\Delta(K - t\,; z - l_1\varepsilon(t))}};$$

$$(\hat{T}_{11}(K,z)g_1)(p) = \frac{v_1(p)}{2\sqrt{\Delta(K - p\,; z - l_1\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(w_2(K;p,t) - z)^{-1} v_1(t) g_1(t) dt}{\sqrt{\Delta(K - t\,; z - l_1\varepsilon(t))}}.$$

tenglik yordamida aniqlangan. Bunda $g_i \in \mathcal{H}_i, i = 0{,}1$ va

$$(\hat{T}_{01}^*(K,z)g_0)(p) = -\frac{v_0(p)g_0}{\sqrt{\Delta(K - p; z - l_1\varepsilon(p))}}, \quad g_0 \in \mathcal{H}_0.$$

6-lemma. *Faraz qilaylik, $K \in \mathbb{T}^3$ tayinlangan element bo'lsin. $z < \tau_{\mathrm{ess}}(K)$ soni $H(K)$ operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi uchun 1 soni $\hat{T}(K,z)$ operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarlidir. Bundan tashqari, z va 1 xos qiymatlarning karraliklari ustma-ust tushadi.*

$\mathrm{z} \neq \mathrm{w}_0(\mathrm{K})$ bo'lsin. $\widetilde{\mathrm{T}}_{11}(K;z)$ orqali $L_2(\mathbb{T}^3)$ Hilbert fazosida yadrosi quyidagicha aniqlangan:

$$\tilde{t}_{11}(K;p,q;z):=t_{11}(K;p,q;z)+\varphi_K(p;z)v_0(q)$$

integral operatorni belgilaymiz. Bunda $t_{11}(K;\cdot,\cdot;\cdot)$ va $\varphi_K(\cdot,\cdot)$ yordamchi funksiyalar

$$t_{11}(K;p,q;z):=\frac{v_1(p)v_1(q)}{2\Delta(K-p;z-l_1\varepsilon(p))(w_2(K;p,q)-z)};$$

$$\varphi_K(p;z):=\frac{v_0(p)}{(w_0(K-z))\Delta(K-p;z-l_1\varepsilon(p))}$$

tengliklar bilan aniqlangan.

Quyidagi lemma $H(K)$ va $\tilde{T}_{11}(K;z)$, $z\neq w_0(K)$ operatorlar xos qiymatlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

7-lemma. *Har bir tayinlangan $K\in\mathbb{T}^3$ element uchun $z\in\mathbb{C}\backslash(\Sigma_K\cup\{w_0(K)\})$ soni $H(K)$ operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi uchun 1 soni $\tilde{T}_{11}(K;z)$ operatorning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarlidir. Bundan tashqari, bu xos qiymatlarning karraliklari ustma-ust tushadi.*

I orqali $L_2(\mathbb{T}^3)$ Hilbert fazosidagi birlik operatorni, $\Delta_{11}(K;z)$ va $D_{11}(K;p,q;z)$lar orqali $I-\tilde{T}_{11}(K;z)$ operatorning mos ravishda Fredgolm determinanti va minorini belgilaymiz.

Har bir tayinlangan $K\in\mathbb{T}^3$ element uchun $\mathbb{C}\backslash\Sigma_K$ sohada regulyar bo'lgan

$$\Omega_K(z):=\left(w_0(K)-z-\int_{\mathbb{T}^3}\frac{v_0^2(t)dt}{\Delta(K-t,z-l_1\varepsilon(t))}\right)\Delta_{11}(K;z)+$$
$$\int_{(\mathbb{T}^3)^2}\frac{v_1(p)v_1(t)D_{11}(K;p,t;z)}{\Delta(K-t,z-l_1\varepsilon(t))}dtdp$$

funksiyani aniqlaymiz.

U holda quyidagi natijalar o'rinli bo'ladi.

1-tasdiq. *$I-\tilde{T}_{11}(K;z)$, $z\neq w_0(K)$ operatorning $\tilde{\Omega}_K(z)$ Fredgolm determinanti uchun*

$$\tilde{\Omega}_K(z)=(w_0(K)-z)^{-1}\Omega_K(z)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2-tasdiq. *Har bir tayinlangan $K\in\mathbb{T}^3$ element uchun $z\in\mathbb{C}\backslash\Sigma_K$ soni $H(K)$ operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi uchun $\Omega_K(z)=0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

2-teorema. *$H(K)$ operatorli matritsaning muhim spektri $H_{\mathrm{ch}}(K)$ kanal operatorning spektri bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))=\sigma(H_{\mathrm{ch}}(K))$ tenglik o'rinlidir. Bundan tashqari, $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))$ to'plam ko'pi bilan uchta kesmalar birlashmasidan iborat bo'ladi.*

Quyida $H(K)$ operatorli matritsa muhim spektrining asosiy qism to'plamlarini kiritamiz.

1-ta'rif. *σ_K va $[m_K;M_K]$ to'plamlar $H(K)$ operatorli matritsa muhim spektrining mos ravishda ikki zarrachali va uch zarrachali tarmoqlari deyiladi.*

Endi biz $H(K)$ operatorli matritsalar oilasining muhim spektrini tashkil qiluvchi kesmalarning joylashuv o'rnini tahlil qilamiz. Bunday kesmalar soni birga, ikkiga va uchga teng bo'ladigan hollar aniqlangan.

Asosiy natijalarni bayon qilish maqsadida quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$E_{\min}^{(l)}(K):=\min\{\sigma_K\cap(-\infty;m_K]\},\quad E_{\max}^{(l)}(K):=\max\{\sigma_K\cap(-\infty;m_K]\},$$

$$E_{\min}^{(r)}(K):=\min\{\sigma_K\cap[M_K;+\infty)\},\quad E_{\max}^{(r)}(K):=\max\{\sigma_K\cap[M_K;+\infty)\},$$

$$\sigma_{\text{two}}^{(l)}(K):=[E_{\min}^{(l)}(K);E_{\max}^{(l)}(K)],\qquad \sigma_{\text{two}}^{(r)}(K):=[E_{\min}^{(r)}(K);E_{\max}^{(r)}(K)].$$

$\mathbb{C}\backslash[E_{\min}(K,k);E_{\max}(K,k)]$ sohada

$$I_K(k\,;z):=\int_{\mathbb{T}^3}\frac{v_1^2(t)dt}{w_2(K;k,t)-z}$$

yordamchi funksiyani qaraymiz.

3-teorema. *Faraz qilaylik, har bir tayinlangan* $K\in\mathbb{T}^3$ *uchun* $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;m_K-l_1\varepsilon(k))\geq 0$ *bo'lsin.*

(a) *Agar* $\max\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))\leq 0$ *bo'lsa, u holda* $\sigma_{\text{ess}}(H(K))=[m_K;M_K]$ *bo'ladi;*

(b) *agar* $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta\big(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k)\big)\leq 0$ *va* $\max\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))>0$ *bo'lsa, u holda* $\sigma_{\text{ess}}(H(K))=[m_K;E_{\max}^{(r)}(K)]$ *bo'ladi;*

(c) *agar* $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))>0$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K))=[m_K;M_K]\cup\sigma_{two}^{(r)}(K)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, $E_{\min}^{(l)}(K)=m_K$ *tenglik o'rinli bo'ladi.*

4-teorema. *Faraz qilaylik, har bir tayinlangan* $K\in\mathbb{T}^3$ *uchun* $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta\big(K-k;m_K-l_1\varepsilon(k)\big)<0,\quad \max\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;m_K-l_1\varepsilon(k))\geq 0$ *bo'lsin.*

(a) *Agar* $\max\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))\leq 0$ *bo'lsa, u holda* $\sigma_{\text{ess}}(H(K))=\left[E_{\min}^{(l)}(K);M_K\right]$ *bo'ladi;*

(b) *agar* $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))\leq 0$ *va* $\max\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))>0$ *bo'lsa, u holda* $\sigma_{\text{ess}}(H(K))=\left[E_{\min}^{(l)}(K);E_{\max}^{(r)}(K)\right]$ *bo'ladi;*

(c) *agar* $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))>0$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K))=\left[E_{\min}^{(l)}(K);M_K\right]\cup\sigma_{\text{two}}^{(r)}(K)$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bundan tashqari, $E_{\min}^{(l)}(K)<m_K$ *tengsizlik o'rinli bo'ladi.*

5-teorema. *Faraz qilaylik, har bir tayinlangan* $K\in\mathbb{T}^3$ *uchun* $\max\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;m_K-l_1\varepsilon(k))<0$ *bo'lsin.*

(a) *Agar* $\max\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))\leq 0$ *bo'lsa, u holda* $\sigma_{\text{ess}}(H(K))=\sigma_{\text{two}}^{(l)}(K)\cup[m_K;M_K]$ *bo'ladi;*

(b) *agar* $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta\big(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k)\big)\leq 0,$ $\max\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))>0$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K))=\sigma_{\text{two}}^{(l)}(K)\cup\left[m_K;E_{\max}^{(r)}(K)\right]\ \textit{bo'ladi;}$$

(c) *agar* $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3} \Delta(K-k; M_K - l_1\varepsilon(k)) > 0$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma_{\text{two}}^{(l)}(K) \cup [m_K; M_K] \cup \sigma_{\text{two}}^{(r)}(K)$$

bo'ladi. Bundan tashqari, $E_{\max}^{(l)}(K) < m_K$ *munosabat o'rinli bo'ladi.*

Ta'kidlash joizki, 3–5-teoremalarning birinchi tasdiqlarida $E_{\max}^{(r)}(K) = M_K$, ikkinchi tasdiqlarida $E_{\max}^{(r)}(K) > M_K$ uchinchi tasdiqlarida esa $E_{\min}^{(r)}(K) > M_K$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Dissertatsiya ishining uchinchi bobi **"Uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasining diskret spektri"** deb nomlanib, bu bobda $H(K)$ operatorli matritsa xos qiymatlari sonining chekli yoki cheksiz bo'lish shartlari tadqiq qilingan. Dastlab $h(k)$ umumlashgan Fridrixs modellari oilasi uchun bo'sag'aviy xos qiymat va virtual sath mavjudligining zaruriy va yetarlilik shartlari aniqlangan. $H(K)$ operatorli matritsa uchun Birman-Shvinger prinsipi keltirilgan. $z = 0$ soni yo $h(\mathbf{0})$, ($\mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{T}^3$) operatorli matritsa uchun xos qiymat yoki $h(\mathbf{0}) \geq 0$ operatorli matritsa uchun regulyar tipdagi nuqta bo'lsa, u holda $\Lambda \subset \mathbb{T}^3$ chekli to'plamdan olingan barcha K elementlar uchun $H(K)$ operatorli matritsa chekli sondagi manfiy xos qiymatlarga ega bo'lishi ko'rsatilgan. Shuningdek, agar $h(\mathbf{0})$ operatorli matritsa $z = 0$ nuqtada virtual sathga ega bo'lsa, u holda $H(K)$, $K \in \Lambda$ operatorli matritsa $z = 0$ nuqtaga yaqinlashuvchi, cheksiz sondagi manfiy xos qiymatlarga ega bo'lishi isbotlangan. Bu xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula topilgan.

Uchinchi bob davomida $v_1(\cdot)$ funksiya har bir o'zgaruvchisi bo'yicha yo juft yoki toq; barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud va $\mathbb{T}^3$ to'plamda uzluksiz bo'lishi talab qilinadi.

Λ orqali $\mathbb{T}^3$ to'plamning quyidagicha aniqlangan qism to'plamini belgilaymiz:

$$\Lambda := \left\{ (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) : p^{(i)} \in \left\{ 0, \pm\frac{2}{n}\pi; \pm\frac{4}{n}\pi; \dots; \pm\frac{n'}{n}\pi \right\} \cup \Pi_n, \qquad i = 1,2,3 \right\},$$

bu yerda

$$n' := \begin{cases} n-2, & \text{agar } n \text{ juft bo'lsa}; \\ n-1, & \text{agar } n \text{ toq bo'lsa}; \end{cases}$$

va

$$\Pi_n := \begin{cases} \{\pi\}, & \text{agar } n \text{ juft bo'lsa}; \\ \emptyset, & \text{agar } n \text{ toq bo'lsa}. \end{cases}$$

$C(\mathbb{T}^3)$ va $L_1(\mathbb{T}^3)$ fazolar orqali mos ravishda $\mathbb{T}^3$ da aniqlangan uzluksiz va integrallanuvchi funksiyalarning Banax fazosini belgilaymiz.

2-ta'rif. *Agar 1 soni*

$$(G\psi)(q) = \frac{v_1(q)}{2(l_1+l_2)} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_1(t)\psi(t)}{\varepsilon(t)} dt, \quad \psi \in C(\mathbb{T}^3)$$

integral operatorning xos qiymati va unga mos ψ *xos funksiya biror* $p' \in \Lambda$ *nuqtada* $\psi(p') \neq 0$ *shartni qanoatlantirsa, u holda* $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa nol energiyali rezonansga yoki* $z = 0$ *nuqtada virtual sathga ega deyiladi. Agar* 1 *soni* G

operatorning xos qiymati bo'lmasa, u holda $z = 0$ *soni* $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa uchun regulyar tipdagi nuqta deyiladi.*

8-lemma. (a) $z = 0$ *soni* $h(\mathbf{0})$ *operatorning xos qiymati bo'lishi uchun* $\Delta(\mathbf{0}; 0) = 0$ *va barcha* $q' \in \Lambda$ *larda* $v_1(q') = 0$ *bo'lishi zarur va yetarlidir.*

(b) $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa nol energiyali rezonansga ega bo'lishi uchun* $\Delta(\mathbf{0}; 0) = 0$ *va biror* $q' \in \Lambda$ *uchun* $v_1(q') \neq 0$ *bo'lishi zarur va yetarlidir.*

9-lemma. *Agar yo* $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa nol energiyali rezonansga ega bo'lsa, yoki* $z = 0$ *soni* $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa uchun xos qiymat bo'lsa, u holda barcha* $K \in \Lambda$ *va* $p \in \mathbb{T}^3$ *lar uchun* $h(K - p) + l_1\varepsilon(p)\boldsymbol{I}$ *operatorli matritsa nomanfiy bo'ladi.*

Keyingi tadqiqotlarimizda qulaylik uchun quyidagi to'plamlarni kiritamiz:

$$\Lambda_0 := \{q' \in \Lambda : v_1(q') \neq 0\};$$

biror $\delta > 0$ soni va $p_0 \in \mathbb{T}^3$ nuqta uchun $U_\delta(p_0) := \{p \in \mathbb{T}^3 : |p - p_0| < \delta\}$;

$$\mathbb{T}_\delta := \mathbb{T}^3 \setminus \bigcup_{q' \in \Lambda} U_\delta(q').$$

Quyida biz $H(K)$ operatorli matritsalar oilasining xos qiymatlar soni uchun olinadigan asimptotika uchun muhim bo'lgan lemmani keltiramiz. Bu lemma Fredgolm determinantining yoyilmasiga bag'ishlangan.

10-lemma. *Faraz qilaylik,* $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa nol energiyali rezonansga ega va* $K, p' \in \Lambda$ *bo'lsin. U holda* $|p - p'| \to 0$ *va* $z \to -0$ *munosabat bajarilganda*

$$\Delta(K - p\,; z - l_1\varepsilon(p)) = \frac{2\pi^2}{n^2(l_1 + l_2)^{3/2}} \left(\sum_{q' \in \Lambda_0} v_1^2(q') \right) \times$$

$$\sqrt{\frac{l_1^2 + 2l_1l_2}{l_1 + l_2}|p - p'|^2 - \frac{2z}{n^2}} + O(|p - p'|^2) + O(|z|)$$

yoyilma o'rinli bo'ladi.

11-lemma. *Faraz qilaylik,* $z = 0$ *soni* $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa uchun xos qiymat va* $K \in \Lambda$ *bo'lsin. U holda shunday* $C_1, C_2, C_3 > 0$ *va* $\delta > 0$ *sonlar topilib, quyidagi tengsizliklar o'rinlidir:*

(a) $C_1|p - p'|^2 \leq \Delta(K - p\,; -l_1\varepsilon(p)) \leq C_2|p - p'|^2, p \in U_\delta(p'), p' \in \Lambda;$

(b) $\Delta(K - p\,; -l_1\varepsilon(p)) \geq C_3, p \in \mathbb{T}_\delta.$

$\mathcal{H}$ Gilbert fazosida ta'sir qiluvchi $\mathcal{A}$ chiziqli, chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operator uchun $n(\gamma, \mathcal{A})$ sonini quyidagi qoida yordamida aniqlaymiz:

$$n(\gamma, \mathcal{A}) = \sup\{\dim F : (\mathcal{A}u, u) > \gamma, u \in F \subset \mathcal{H}, ||u|| = 1\}.$$

Agar $\gamma < \max \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$ bo'lsa, u holda $n(\gamma, \mathcal{A})$ soni cheksizga teng bo'ladi, agar $n(\gamma, \mathcal{A})$ soni chekli bo'lsa, u holda bu son $\mathcal{A}$ operatorning γ dan katta xos qiymatlar soniga (karraliklari bilan qo'shib hisoblaganda) teng bo'ladi.

$N(K, z)$ orqali $H(K)$ operatorli matritsaning $z \leq \tau_{\text{ess}}(K)$dan chapda joylashgan xos qiymatlari sonini belgilaymiz. U holda

$$N(K, z) = n(-z, -H(K)), -z > -\tau_{\text{ess}}(K)$$

tenglik o'rinlidir.

Quyidagi lemma $H(K)$ operatorli matritsa uchun mashhur Birman-Shvinger prinsipini ifodalaydi.

12-lemma. *Faraz qilaylik, $K \in \mathbb{T}^3$ bo'lsin. U holda $\hat{T}(K,z)$ operatorli matritsa $z < \tau_{ess}(K)$ bo'lganda kompakt va uzluksiz hamda*

$$\mathrm{N}(\mathrm{K},\mathrm{z}) = \mathrm{n}(1, \widehat{\mathrm{T}}(\mathrm{K},\mathrm{z}))$$

tenglik o'rinlidir.

13-lemma. *Faraz qilaylik, $K \in \Lambda$ bo'lib, quyidagi shartlardan biri bajarilsin:*

(a) $z = 0$ *soni* $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa uchun xos qiymat;*

(b) $h(\mathbf{0}) \geq 0$ *va* $z = 0$ *soni* $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa uchun regulyar tipdagi nuqta.*

U holda $\hat{T}(K,z)$ operatorli matritsa $z \leq 0$ bo'lganda kompakt va $z = 0$ nuqtada chapda uzluksiz bo'ladi.

6-teorema. *Faraz qilaylik, $K \in \Lambda$ bo'lib, quyidagi shartlardan biri bajarilsin:*

(a) $z = 0$ *soni* $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa uchun xos qiymat;*

(b) $h(\mathbf{0}) \geq 0$ *va* $z = 0$ *soni* $h(\mathbf{0})$ *operatorli matritsa uchun regulyar tipdagi nuqta bo'lsin. U holda $H(K)$ operatorli matritsa chekli sondagi manfiy xos qiymatlarga ega.*

Faraz qilaylik, $\mathbb{S}^2$ - $\mathbb{R}^3$ dagi birlik sfera va $\sigma := \mathrm{L}_2(\mathbb{S}^2)$ bo'lsin. $\widehat{\mathrm{T}}(\mathrm{K},\mathrm{z})$, $\mathrm{K} \in \Lambda$ operatorli matritsaning $\mathrm{z} \to -0$ dagi diskret spektr asimptotikasi $\mathrm{L}_2((0,\mathrm{r}),\sigma)$ fazosidagi S_r, $\mathrm{r} = 1/2|\ln|\mathrm{z}||$ integral operator orqali aniqlanib, uning yadrosi

$$\mathrm{S}(\mathrm{y},\mathrm{t}) := \frac{1}{4\pi^2} \frac{(\mathrm{l}_1 + \mathrm{l}_2)^2}{\sqrt{\mathrm{l}_1^2 + 2\mathrm{l}_1\mathrm{l}_2}} \frac{1}{(\mathrm{l}_1 + \mathrm{l}_2)\mathrm{ch}\mathrm{y} + \mathrm{l}_2\mathrm{t}}$$

kabi aniqlanadi, bu yerda $\mathrm{y} = \mathrm{x} - \mathrm{x}'$, $\mathrm{x},\mathrm{x}' \in (0,\mathrm{r})$ va $\mathrm{t} = \langle \xi, \eta \rangle$ bu $\xi, \eta \in \mathbb{S}^2$ argumentlarning skalyar ko'paytmasidir.

S_r operator uchun xos qiymatlar sonining asimptotikasi Sobolev tomonidan batafsil o'rganilgan[2].

15-lemma. *Faraz qilaylik, $K \in \Lambda$ bo'lsin. U holda barcha $z \leq 0$ sonlari va yetarlicha kichik $\delta > 0$ soni uchun $\hat{T}(K,z) - T(\delta; |z|)$ ayirma $z \leq 0$ uchun kompakt va uzluksiz bo'ladi.*

7-teorema. *Faraz qilaylik, $K \in \Lambda$ bo'lsin. Agar $h(\mathbf{0})$ operatorli matritsa nol energiyali rezonansga ega bo'lsa, u holda $H(K)$ operatorli matritsa nolga yaqinlashuvchi cheksiz sondagi manfiy xos qiymatlarga ega va $N(K,\cdot)$ funksiya*

$$\lim_{z \to -0} \frac{N(K,z)}{|ln|z||} = \mathcal{U}_0, \quad 0 < \mathcal{U}_0 < \infty \tag{2}$$

munosabatni qanoatlantiradi.

$N(K,z)$ uchun (2) asimptotikadagi koeffitsiyent σ fazodagi o'z-o'ziga qo'shma $\hat{S}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ integral operator orqali ifodalanadi. Uning yadrosi

$$\hat{S}(\theta,t) := \frac{1}{4\pi^2} \frac{(l_1 + l_2)^2}{l_1^2 + 2l_1 l_2} \times \frac{\mathrm{sh}\left[\theta \mathrm{arccos} \frac{l_2}{l_1 + l_2} t\right]}{\mathrm{sh}(\pi\theta)}$$

[2] Sobolev A.V. The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics // Comm. Math. Phys., 156 (1993), 101-126.

bo‘lib, $t = \langle \xi, \eta \rangle$ skalyar ko‘paytmadan bog‘liqdir. $\gamma > 0$ soni uchun

$$U(\gamma) := \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} n(\gamma, \hat{S}(\theta)) d\theta$$

miqdorni kiritamiz.

$U(\cdot)$ funksiya $\gamma > 0$ da uzluksiz va

$$\lim_{\mathbf{r} \to 0} \frac{1}{2} \mathrm{r}^{-1} n(\gamma, S_{\mathbf{r}}) = U(\gamma)$$

limit mavjud hamda $U(1)$ musbat son[2].

1-eslatma. $\mathcal{U}_0$ *soni* $v_1(\cdot)$ *funksiyadan bog‘liq emas. U musbat son bo‘lib, faqat* l_2/l_1 *bo‘linmadan bog‘liqdir.*

2-eslatma. *Ko‘rinib turibdiki, (2) tenglikka ko‘ra* $H(K)$, $K \in \Lambda$ *operatorli matritsa spektrining manfiy o‘qda joylashgan qismining cheksiz to‘plam ekanligi* $\mathcal{U}_0$ *sonining musbatligidan to‘g‘ridan-to‘g‘ri kelib chiqadi.*

3-eslatma. *Aytib o‘tish lozimki, (2) asimptotik formula* Λ *to‘plamning nuqtalar sonidan bog‘liq emas, ya’ni barcha* $n \in \mathbb{N}$ *natural sonlar uchun bir xil asimptotika o‘rinlidir.*

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishi Fok fazosining nol zarrachali, bir zarrachali va ikki zarrachali qism fazolari to‘g‘ri yig‘indisida aniqlangan $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasining muhim va diskret spektrlari tadqiq qilingan. Bunda $H(K)$ operatorli matritsa panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasi gamiltonianiga mos keladi. Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

- $H(K)$ operatorli matritsa xos vektor-funksiyalariga mos uch turdagi Faddeyev tenglamalari keltirib chiqarilgan.
- Nollari to‘plami $H(K)$ operatorli matritsa diskret spektri bilan ustma-ust tushuvchi regulyarlashtirilgan Fredgolm determinanti qurilgan.
- $H(K)$ operatorli matritsalarga mos kanal operator va uning spektri topilgan.
- $H(K)$ operatorli matritsa muhim spektrining ikki zarrachali va uch zarrachali tarmoqlari ajratilgan hamda ularning joylashuv o‘rni tavsiflangan.
- $h(\mathbf{0})$ operatorli matritsa nol energiyali rezonansga ega bo‘lish va $z = 0$ soni $h(\mathbf{0})$ operatorli matritsa uchun xos qiymat bo‘lishining zaruriy va yetarlilik shartlari topilgan.
- Agar yo $z = 0$ soni $h(\mathbf{0})$ operatorli matritsa uchun xos qiymat yoki $h(\mathbf{0}) \geq 0$ bo‘lib, $z = 0$ soni $h(\mathbf{0})$ operatorli matritsa uchun regulyar tipdagi nuqta bo‘lsa, u holda $\Lambda \subset \mathbb{T}^3$ chekli to‘plam topilib, barcha $K \in \Lambda$ lar uchun $H(K)$ operatorli matritsa chekli sondagi manfiy xos qiymatlarga ega bo‘lishi ko‘rsatilgan.

- $h(\mathbf{0})$ operatorli matritsa nol energiyali rezonansga ega bo‘lgan holda $H(K), K \in \Lambda$ operatorli matritsa nolga yaqinlashuvchi cheksiz sondagi manfiy xos qiymatlarga ega ekanligi isbotlangan. Bundan tashqari, $z \leq 0$ dan chapda joylashgan xos qiymatlar soni $N(K, z)$ uchun $z \to -0$ bo‘lganda asimptotik formula topilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
КАРШИНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТОШЕВА НАРГИЗА АХМЕДОВНА

СУЩЕСТВЕННЫЙ И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТРЫ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
физико-математическим наукам

Карши – 2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2022.2.PhD/FM705.

Диссертация выполнена в Бухарском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.qarshidu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Расулов Тулкин Хусенович** доктор физико-математических наук (DSc), профессор
Официальные оппоненты:	**Муминов Захриддин Эшкобилович** доктор физико-математических наук (DSc), доцент
	Ҳамраев Ахрор Юсупович кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2023 года в ____ на заседании Научного совета PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 при Каршинском государственном университете (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17.Тел.: (+998 75) 225 34 13, факс: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Каршинский государственный университет, Факультет математики и компьютерних наук, аудитория 202.

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Каршинского государственного университета (зарегистрирована за №____). (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17.Тел.: (+998 75) 225 34 13, факс: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz).

Автореферат диссертации разослан «_____» __________ 2023 года
(протокол рассылки №_____ от «______» ___________ 2023 года).

Б.А.Шоимкулов
Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

Ш.Д.Нодиров
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.ф.-м.н. (PhD)

А.А. Имомов
Председатель научного семинара при
Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н. (DSc), доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторский диссертации (PhD))

Актуальность и необходимость темы диссертации. Большая часть исследований, проводимых в мире, направлена на определение спектральных свойств семейства операторных матриц, действующих на обрезанных подпространствах фоковского пространства. Задачи, связанные с существенными и дискретными спектрами семейства операторных матриц, считаются актуальными в физике твердого тела, квантовой теории поля, статистической физике, квантовой механике и многих других областях. Поэтому важно развивать исследования семейства операторных матриц, соответствующих для системы частиц в решетке, число которых не сохраняется и не превышает трех.

В мире проводятся научные исследования по описанию существенного спектра и по определению условия конечности или бесконечности дискретного спектра семейства операторных матриц. В связи с этим особое внимание уделяется анализу пороговых явлений для семейства обобщенных моделей Фридрихса, определению структуры существенного спектра семейства операторных матриц третьего порядка, нахождению условия конечности или бесконечности для числа собственных значений.

В нашей стране особое внимание уделяется исследованию свойств семейства операторных матриц, соответствующих для систем частиц в решетке, число которых не сохраняется и не превышает трех. Значительные результаты достигнуты по определению существенного спектра семейства операторных матриц и нахождению асимптотической формулы для числа собственных значений. Постановлением Кабинета Министров обозначены «Основными задачи и направления деятельности научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математики, физики, прикладной математики»[1].

В связи с этим большое научное значение имеет развитие спектральной теории блочных операторных матриц, показать структуру существенного спектра семейства операторных матриц третьего порядка и найти условия, при которых число ее собственных значений становится конечным или бесконечным, и в то же время получить асимптотическую формулу для числа собственных значений.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № УП-4947 «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, № УП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года, № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени

---

[1]Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан» от 9 июля 2019 года и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствие с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республики Узбекистан IV «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Исследования по спектральной теории семейства операторных матриц в обрезанных подпространствах Фоковского пространства были проведены учеными Г.Шпон, И.М.Сигал, А.Соффер, В.Бах, Р.А.Минлос, Ю.В.Жуков, Х.Нейдхардт, С.Н.Лакаев, Т.Х.Расулов, М.Э.Муминов и многими другими.

В настоящее время задача исследования числа собственных значений семейства операторных матриц является одним из глубоко изучаемых объектов теории блочных операторных матриц. Одним из основных вопросов спектрального анализа операторов этого типа является вопрос изучения существования бесконечного числа собственных значений, расположенных левее его существенного спектра. Существование этого явления впервые было изучено В.Н.Ефимовым для системы трех частиц и впоследствии было названо эффектом Ефимова. Строгое математическое доказательство существования этого явления впервые было представлено Д.Р.Яфаевым. Позже Ю.Н.Овчинников, И.М.Сигал, Х.Тамура, А.В.Соболев и другие ученые исследовали существование эффект Ефимова для трехчастичного непрерывного оператора Шредингера.

В физике твердого тела, а также в решеточной теории поля появляются операторы, называемые дискретными операторами Шредингера, которые являются решеточным аналогом трехчастичного оператора Шредингера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$. Первые, существование эффекта Ефимова для систем трех произвольных и трех одинаковых частиц, взаимодействующих друг с другом в трехмерной решетке, было строго доказано С.Н.Лакаевым с математической точки зрения. В работах С.Н.Лакаева, С.Альбеверио, Ж.И.Абдуллаева и З.Э.Муминова были получены асимптотики для числа собственных значений $N(K,z)$ трехчастичного дискретного оператора Шредингера $\widehat{H}(K)$, лежащий левее z по спектральными параметрами K и z.

В работе М.Э.Муминова было доказано, что в лакуне существенного спектра гамильтониан соответствующих трем произвольным частицам в решетке, имеется бесконечное количество собственных значений.

В работе Ю.Х.Эшкабилова изучено существование эффекта Ефимова для одного модельного дискретного «трехчастичного» оператора Шрёдингера, возникающего в модели Хаббарда. При этом использованы инструменты принципа минимакса для ограниченных самосопряженных операторов и свойства положительных интегральных операторов.

В работах С.Н.Лакаева, С.Альберио, Т.Х.Расулова было доказано, что эффект Ефимова существует для модельной операторной матрицы третьего порядка, и была изучена асимптотическая формула для числа собственных значений. В работах Х.Нейдхардта, М.Э.Муминова и Т.Х.Расулова спектр решетчатой модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами было детально изучено с использованием результатов, полученных для операторных матриц третьего поядка. В работах М.Э.Муминова и Т.Х.Расулова для операторных матриц такого типа найдены условия, гарантирующие существование бесконечного числа собственных значений, лежащих внутри существенного спектра (на лакуне существенного спектра, ниже существенного спектра).

В работе Т.Х.Расулова и Э.Б.Дилмуродова, было доказано, что существует двусторонний эффект Ефимова для операторной матрицы второго порядка, связанный с системой частиц, число которых не сохраняется и не превышает трех.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствие с планом научного исследования научного направления М.01.2017 «Спектральная теория линейных операторов» Бухарского государственного университета на 2017-2021 гг.

Цель исследования является определение структуру существенного спектра семейства операторных матриц третьего порядка, соответствующих системе частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает трех, и найти условие, при которых число его собственных значений является конечным или бесконечным.

Задачи исследования:

изучение спектра семейства обобщенных моделей Фридрихса $h(k)$, определение числа и расположения собственных значений оператора $h(k)$;

построение и изучение оператора канала $H_{ch}(K)$, связанного с семейством операторных матриц третьего порядка $H(K)$, соответствующим системе частиц на трехмерной решетке, число которых не сохраняется и не превышает трех;

определить ветви существенного спектра семейства операторных матриц $H(K)$ и изучит их местоположение, а также находит условия, при которых существенный спектр оператора $H(K)$ состоит из объеденения одного, двух, трех отрезков;

определение условия конечности число собственных значений семейства операторных матриц $H(K)$ для всех K полученных из дискретного множества Λ;

определить набор значений параметра K, в котором семейство матриц $H(K)$ при определенных условиях имеет бесконечное количество отрицательных значений, и найти асимптотическую формулу для числа собственных значений.

Объектом исследования является семейство операторных матриц третьего порядка, соответствующих системе частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает трех.

Предметом исследования были спектральные свойства семейства самосопряженных ограниченных операторных матриц третьего порядка в обрезанной подпространства Фоковского пространства.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, функционального анализа, спектральной теории самосопряженных операторов и математической физики.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

определены двухчастичные и трехчастичные ветви существенного спектра семейства операторных матриц третьего порядка, соответствующих системе частиц на трехмерной решетке, в которой число не сохраняется и не превышает трех;

найдены условие существование пороговое собственное значение и виртуального уровня, а также условия положительности семейства обобщенных моделей Фридрихса в виде операторной матрицы второго порядка, при значениях спектрального параметра из дискретного множества;

доказано, что если число ноль является собственным значением обобщенной модели Фридрихса или обобщенная модель Фридрихса является положительной и число ноль является точкой регулярного типа, то семейства операторных матриц имеет конечное число отрицательных собственных значений при значениях спектрального параметра из дискретного множества;

доказано, что семейства операторных матриц имеет бесконечное число отрицательных собственных значений при значениях спектрального параметра из дискретного множества и найдена асимптотическая формула для числа собственных значений, если обобщенная модель Фридрихса имеет резонанс с нулевой энергией.

Практические результаты исследования:

полученные выводы о спектральных свойствах операторных матриц третьего порядка, соответствующей системе частиц на трехмерной решетке, число которых не сохраняется и не превышает трех, использовались в атомной физике, квантовой механике для определения качества экспериментальных исследований и численные расчеты.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием методов математического анализа, функционального анализа, математической физики и спектральной теории самосопряженных операторов.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов, полученных в исследовании, объясняется тем фактом, что они могут использоваться в теории квантовых полей теории самосопряженных операторов, физике твердых тел, в статистической физике, в частности в вопросах, связанных с операторными матрицами третьего порядка.

Практическая значимость результатов диссертации заключается в том, что, с помощью числа собственных значений операторных матриц можно определить количество собственных значений моделей физики твердого тела и квантовой механики, соответствующих системам частиц на решетке, где число не сохраняется и не превышает трех.

Внедрение результатов исследования. На основании научных результатов, полученных по операторным матрицам третьего порядка:

из местоположения и структур существенного спектра семейства операторных матриц третьего порядка и из методов нахождения условия существования бесконечного числа собственных значений, лежащих ниже существенного спектра, были использованы при исследовании существенного и дискретного спектров моделей системы с конечным числом частиц на решетке в гранте ОТ-Ф4-66 на тему «Модели систем с конечным числом частиц на решетке. Существенный и дискретный спектры операторов энергии» (Самаркандский государственный университет, справка № 10-4143 от 29 сентября 2022 года). Применение этих научных результатов дала возможность определить местоположение существенного спектра и числа собственных значений гамильтонианов систем двух и трех частиц на решетке;

из методов пороговых явлений обобщенной модели Фридрихса и методов нахождения условия конечности числа собственных значений, были использованы в фундаментальном гранте Международного исламского университета Малайзии № FRGS19-039-0647 (справка от 25 октября 2022 года, Международный исламский университет Малайзии). В результате удалось определить численный подход к нижнему пределу мю значений с помощью методов, основанных на обыкновенных дифференциальных уравнениях.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 6 международных и 3 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ из них 4-в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание степени доктора философии, в том числе 2 статей опубликованы в зарубежных журналах и 2 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации 90 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзоры зарубежных и отечественных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется «**Предварительные сведения и известные факты»**. В этой главе анализируются исходные данные и важные факты, которые хорошо известны из спектральной теории операторов, а также результаты, связанные со спектральными свойствами некоторых операторных матриц.

В первом параграфе этой главы представлен краткий обзор пространства Фока и двух его важных подпространств, бозонное и фермионное пространства Фока, а также их усеченные подпространства. Кроме того, для удобства читателей даются такие понятия, как виды элементов в этом пространстве и подпространствах, скалярное умножение элементов, норма элемента. Во втором параграфе представлены основные определения, понятие, утверждения и теоремы, необходимые для описания и доказательства основных результатов последующих глав. В частности, описывается спектр линейного, ограниченного и самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве, а также два его типа классификации. Отражены такие классические результаты, как теорема Вейля, критерий Вейля и аналитическая теорема Фредгольма об инвариантности существенного спектра в компактных возмущениях.

В третьем параграфе первой главы представлен анализ научных результатов, связанных со спектральными свойствами операторных матриц, связанной гамильтонианом системы с ограниченным несохраняющем число частиц на решетке z^d и евклидовом пространстве R^d.

Вторая глава диссертационной работы называется «**Существенный спектр семейства операторных матриц третьего порядка**». Через $\mathcal{H}$ обозначим прямое произведение пространств $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ и $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^3)^2)$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Здесь пространства $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ называются нольчастичные, одночастичные и двухчастичные подпространства бозонное пространства Фока $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(L_2(\mathbb{T}^3))$, соответственно.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим семейства операторных матриц

$$H(K) := \begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь матричные элементы определяются по формулам

$$H_{00}(K)f_0 = w_0(K)f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v_0(t)f_1(t)dt;$$

$$(H_{11}(K)f_1)(p) = w_1(K;p)f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} v_1(t)f_2(p,t)dt;$$

$$(H_{22}(K)f_2)(p,q) = w_2(K;p,q)f_2(p,q), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0,1,2$$

H_{ij}^* $(i < j)$ сопражённый оператор к оператору H_{ij}, а функции $w_0(\cdot)$ и $v_i(\cdot)$, $i = 0,1$

вещественнозначные ограниченные функции на $\mathbb{T}^3$, а функции $w_1(\cdot;\cdot)$ и $w_2(\cdot;\cdot,\cdot)$ определены равенствами

$$w_1(K;p):=l_1\varepsilon(p)+l_2\varepsilon(K-p)+1,$$

$$w_2(K;p,q):=l_1\varepsilon(p)+l_1\varepsilon(q)+l_2\varepsilon(K-p-q),$$

соответственно, $l_1, l_2 > 0$ и

$$\varepsilon(q):=\sum_{i=1}^{3}(1-\cos(nq^{(i)})),\quad q=(q^{(1)},q^{(2)},q^{(3)})\in T^3,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Следует отметить, что операторы H_{01} и H_{12} называются операторами уничтожения, а операторы H_{01}^* и H_{12}^* называются операторами рождения. В данном исследовании анализируется случай, когда количество частиц, которые появляются и исчезают равно 1. В свою очередь, это означает, что $H_{02}\equiv 0$ и $H_{02}^*\equiv 0$.

Лемма 1. *Операторная матрица $H(K)$, определенный по равенству* (1), *действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является линейным, ограниченным и самосопряженным.*

При изучении спектральных свойств семейства операторных матриц $H(K)$ рассмотрим еще обобщенную модель Фридрихса $h(k)$, $k\in T^3$, действующую в $\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$ по правилу

$$h(k):=\begin{pmatrix} h_{00}(k) & h_{01}\\ h_{01}^* & h_{11}(k)\end{pmatrix}$$

здесь

$$h_{00}(k)f_0=(l_2\varepsilon(k)+1)f_0,\quad h_{01}f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{T}^3}v_1(t)f_1(t)dt,$$

$$(h_{11}(k)f_1)(q)=E_k(q)f_1(q),\quad E_k(q):=l_1\varepsilon(q)+l_2\varepsilon(k-q).$$

Чтобы определить существенный спектр операторной матрицы $h(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$ рассмотрим операторную матрицу $h_0(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$:

$$h_0(k):=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & h_{11}(k)\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что оператор возмущения $h(k)-h_0(k)$ операторной матрицы $h_0(k)$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при конечномерных возмущениях вытекает, что существенный спектр операторной матрицы $h(k)$ совпадает с существенным спектром операторной матрицы $h_0(k)$.

По определению

$$\sigma_{\text{ess}}(h_0(k))=[E_{\min}(k);E_{\max}(k)],$$

где числа $E_{\min}(k)$ и $E_{\max}(k)$ определяются следующим образом:

$$E_{\min}(k):=\min_{q\in\mathbb{T}^3}E_k(q)\quad \text{и}\quad E_{\max}(k):=\max_{q\in\mathbb{T}^3}E_k(q)$$

Таким образом, для существенного спектра операторной матрицы $h(k)$ имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(h(k))=[E_{\min}(k);E_{\max}(k)]$.

При каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}^3$ определим аналитическую функцию

$$\Delta(k\,;z) := l_2\varepsilon(k) + 1 - z - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_1^2(t)dt}{E_k(t) - z}$$

в области $C\backslash[E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$.

Обычно функция $\Delta(k\,;\cdot)$ называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с операторной матрицей $h(k)$.

Установим связь между собственными значениями операторной матрицы $h(k)$ и нулями функции $\Delta(k\,;\cdot)$.

Лемма 2. *При каждом* $k \in \mathbb{T}^3$ *число* $z \in \mathbb{C}\backslash[E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$ *является собственным значением операторной матрицы* $h(k)$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta(k\,;z) = 0$.

Лемма 3. *При каждом* $k \in \mathbb{T}^3$ *операторная матрица* $h(k)$ *имеет собственное значение в промежутке* $(-\infty; z_0)$, $z_0 \leq E_{\min}(k)$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta(k\,;z_0) < 0$.

Лемма 4. *При каждом* $k \in \mathbb{T}^3$ *операторная матрица* $h(k)$ *имеет собственные значение в промежутке* $(z_0; +\infty)$, $z_0 \geq E_{\max}(k)$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta(k\,;z_0) > 0$.

Рассмотрим так называемый канальный оператор соответствующим операторной матрице $H(K)$ и действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ как операторная матрица второго порядка

$$H_{\text{ch}}(K) := \begin{pmatrix} H_{11}(K) & \frac{1}{\sqrt{2}}H_{12} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{T}^3. \tag{2}$$

Следует отметить, что сопряженный оператор H_{12}^* на основе свойств гильбертово пространства $L_2(\mathbb{T}^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ определяется как

$$H_{12}^*: L_2(\mathbb{T}^3) \to L_2((\mathbb{T}^3)^2), \quad (H_{12}^* f_1)(p,q) = v_1(q) f_1(p), \quad f_1 \in L_2(\mathbb{T}^3).$$

По определению канальный оператор $H_{\text{ch}}(K)$ является линейным, ограниченным и самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^2)$.

Внесем следующие обозначения:

$$m_K := \min_{p,q \in \mathbb{T}^3} w_2(K; p, q), \quad M_K := \max_{p,q \in \mathbb{T}^3} w_2(K; p, q),$$

$$\sigma_K := \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_{\text{disc}}(h(K-p)) + l_1\varepsilon(p)\boldsymbol{I}\}, \quad \Sigma_K := [m_K; M_K] \cup \sigma_K$$

где через $\boldsymbol{I}$ обозначен единичный оператор в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Здесь по лемме 2 множество σ_K определяется как множество чисел

$$z \in \mathbb{C}\backslash[E_{\min}(K-p) + l_1\varepsilon(p); E_{\max}(K-p) + l_1\varepsilon(p)]$$

в котором выполняется равенство $\Delta(K - p\,; z - l_1\varepsilon(p)) = 0$ для некоторых $p \in \mathbb{T}^3$.

В следующем утверждении спектр оператора канала $H_{\text{ch}}(K)$ описываются спектром семейства обобщенных моделей Фридрихса $h(k)$.

Теорема 1. *Канальный оператор* $H_{\mathrm{ch}}(K)$ *имеет чисто существенный спектр и имеет место равенство* $\sigma(H_{\mathrm{ch}}(K)) = \Sigma_K$.

Теперь мы выводим аналог системы интегральных уравнений типа Фаддеева и ее различные появления для собственных вектор-функций, соответствующих дискретным собственным значениям (изолированным собственным значением с конечной кратностью) операторной матрицы $H(K)$. Эти результаты играют основную роль при изучении спектра операторной матрицы $H(K)$.

Для каждого фиксированного элемента $K \in \mathbb{T}^3$ и числа $z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma_K$ рассмотрим операторную матрицу действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как операторная матрица второго порядка

$$T(K,z) := \begin{pmatrix} T_{00}(K,z) & T_{01}(K,z) \\ T_{10}(K,z) & T_{11}(K,z) \end{pmatrix}.$$

Здесь матричные элементы $T_{ij}(K,z)\colon \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i,\ i,j = 0,1$ определяются следующим образом:

$$T_{00}(K,z)g_0 = (1 + w_0(K) - z)g_0, \quad T_{01}(K,z)g_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v_0(t)g_1(t)dt;$$

$$(T_{10}(K,z)g_0)(p) = -\frac{v_0(p)g_0}{\Delta(K-p\,;z - l_1\varepsilon(p))};$$

$$(T_{11}(K,z)g_1)(p) = \frac{v_1(p)}{2\Delta\big(K-p\,;z-l_1\varepsilon(p)\big)}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{v_1(t)g_1(t)dt}{w_2(K;p,t)-z}$$

и $g_i \in \mathcal{H}_i, i = 0,1$.

Следует отметить, что для каждого элемента $K \in \mathbb{T}^3$ и числа $z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma_K$ матричные элементы $T_{00}(K,z)$, $T_{01}(K,z)$ и $T_{10}(K,z)$ являются одномерными операторами, а оператор $T_{11}(K,z)$ принадлежит к классу Гильберта-Шмидта. Следовательно, $T(K,z)$ является компактным оператором.

Следующая лемма является аналогом известного результата Фаддеева для операторной матрицы $H(K)$ и устанавливает связь между собственными значениями операторных матриц $H(K)$ и $T(K,z)$.

Лемма 5. *При каждом фиксированном* $K \in \mathbb{T}^3$ *число* $z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma_K$ *является собственным значением операторной матрицы* $H(K)$ *тогда и только тогда, когда число* $\lambda = 1$ *является собтвенным значением операторной матрицы* $T(K,z)$. *Кроме того, собственные значения* z *и 1 имеют одинаковую кратность.*

Отметим, что операторное уравнение

$$g = T(K,z)g, \quad g = (g_0,g_1) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$$

обычно называется аналогом уравнения типа Фаддеева для собственных вектор-функций операторной матрицы $H(K)$ и оно играет важную роль при исследовании спектра операторной матрицы $H(K)$.

Обозначим через $\tau_{\mathrm{ess}}(K)$ нижную грань спектра каналного оператора $H_{\mathrm{ch}}(K)$, т.е.

$$\tau_{\mathrm{ess}}(K) = \min\sigma\big(H_{\mathrm{ch}}(K)\big).$$

Для любых элементов $K, p \in \mathbb{T}^3$ и для чисел $z < \tau_{\text{ess}}(K)$ функция $\Delta(K-p\,; z-l_1\varepsilon(p))$ положительна и, следовательно, существует ее положительный квадратный корень.

В исследованиях дискретного спектра операторной матрица $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ основную роль играет компактный (симметризованный) самосопряженный 2×2 операторной матрица $\hat{T}(K,z), z < \tau_{\text{ess}}(K)$, действующий в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ определяется следующим образом

$$\hat{T}(K,z) := \begin{pmatrix} \hat{T}_{00}(K,z) & \hat{T}_{01}(K,z) \\ \hat{T}_{01}^*(K,z) & \hat{T}_{11}(K,z) \end{pmatrix}.$$

Его матричные элементы определяются следующим образом:

$$\hat{T}_{00}(K,z)g_0 = \big(1+z-w_0(K)\big)g_0, \hat{T}_{01}(K,z)g_1 = -\int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_0(t)g_1(t)dt}{\sqrt{\Delta(K-t\,; z-l_1\varepsilon(t))}};$$

$$(\hat{T}_{11}(K,z)g_1)(p) = \frac{v_1(p)}{2\sqrt{\Delta(K-p\,; z-l_1\varepsilon(p))}}\int_{\mathbb{T}^3} \frac{(w_2(K;p,t)-z)^{-1}v_1(t)g_1(t)dt}{\sqrt{\Delta(K-t\,; z-l_1\varepsilon(t))}}.$$

здесь $g_i \in \mathcal{H}_i, i = 0{,}1$ и

$$(\hat{T}_{01}^*(K,z)g_0)(p) = -\frac{v_0(p)g_0}{\sqrt{\Delta(K-p; z-l_1\varepsilon(p))}}, \quad g_0 \in \mathcal{H}_0.$$

Лемма 6. *Пусть* $K \in \mathbb{T}^3$ *фиксированный элемент. Число* $z < \tau_{\text{ess}}(K)$ *является собственным значением операторной матрицы* $H(K)$ *тогда и только тогда, когда число* $\lambda = 1$ *является собтвенным значением операторной матрицы* $\hat{T}(K,z)$. *Кроме того, собственные значения* z *и 1 имеют одинаковую кратность.*

Пусть $z \neq w_0(K)$. В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ определим интегральный оператор $\tilde{T}_{11}(K;z)$ ядро которого определена следующим образом:

$$\tilde{t}_{11}(K;p,q;z) := t_{11}(K;p,q;z) + \varphi_K(p;z)v_0(q).$$

Здесь вспомогательные функции $t_{11}(K;\cdot,\cdot;\cdot)$ и $\varphi_K(\cdot,\cdot)$ определены равенствами

$$t_{11}(K;p,q;z) := \frac{v_1(p)v_1(q)}{2\Delta\big(K-p; z-l_1\varepsilon(p)\big)(w_2(K;p,q)-z)};$$

$$\varphi_K(p;z) := \frac{v_0(p)}{\big(w_0(K-z)\big)\Delta\big(K-p; z-l_1\varepsilon(p)\big)}.$$

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов $H(K)$ и $\tilde{T}_{11}(K;z), z \neq w_0(K)$.

Лемма 7. *Для каждого* $K \in \mathbb{T}^3$ *число* $z \in \mathbb{C}\backslash(\Sigma_K \cup \{w_0(K)\})$ *является собственным значением операторной матрицы* $H(K)$ *тогда и только тогда, когда число* $\lambda = 1$ *является собтвенным значением интегрального оператора* $\tilde{T}_{11}(K;z)$. *Кроме того, собственные значения* z *и 1 имеют одинаковую кратность.*

Через I обозначим единичный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$, через $\Delta_{11}(K;z)$ и $D_{11}(K;p,q;z)$ детерминант Фредгольма и минор опепратора $I-\tilde{T}_{11}(K;z)$, соответсвенно.

Для каждого фиксированного элемента $K\in\mathbb{T}^3$ в области $\mathbb{C}\backslash\Sigma_K$ определяем регулярную функцию

$$\Omega_K(z):=\left(w_0(K)-z-\int_{\mathbb{T}^3}\frac{v_0^2(t)dt}{\Delta(K-t,z-l_1\varepsilon(t))}\right)\Delta_{11}(K;z)+$$
$$\int_{(\mathbb{T}^3)^2}\frac{v_1(p)v_1(t)D_{11}(K;p,t;z)}{\Delta(K-t,z-l_1\varepsilon(t))}dtdp.$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. *Для детерминанта Фредгольма* $\widetilde{\Omega}_K(z)$ *оператора* $I-\tilde{T}_{11}(K;z)$, $z\neq w_0(K)$ *имеет место равенство*

$$\widetilde{\Omega}_K(z)=(w_0(K)-z)^{-1}\Omega_K(z).$$

Утверждение 2. *Для каждого фиксированного элемента* $K\in\mathbb{T}^3$ *число* $z\in C\backslash\Sigma_K$ *является собственным значением операторной матрицы* $H(K)$ *тогда и только тогда, когда* $\Omega_{\mathrm{K}}(\mathrm{z})=0$.

Теорема 2. *Существенный спектр операторной матрицы* $H(K)$ *совпадает со спектром канального оператора* $H_{\mathrm{ch}}(K)$, *т.е. имеет место равенство* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))=\sigma(H_{\mathrm{ch}}(K))$. *Кроме того, множество* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))$ *состоит из объеденения не более трех отрезков.*

Ниже мы вводим основных подмножеств существенного спектра операторной матрицы $H(K)$.

Определение 1. *Множества* σ_K *и* $[m_K;M_K]$ *называются «двухчастичной» и «трехчастичной» ветвями существенного спектра операторной матрицы* $H(K)$, *соответственно.*

Чтобы описать следующие результаты, мы введем обозначения:

$$E_{\min}^{(l)}(K):=\min\{\sigma_K\cap(-\infty;m_K]\},\quad E_{\max}^{(l)}(K):=\max\{\sigma_K\cap(-\infty;m_K]\},$$
$$E_{\min}^{(r)}(K):=\min\{\sigma_K\cap[M_K;+\infty)\},\quad E_{\max}^{(r)}(K):=\max\{\sigma_K\cap[M_K;+\infty)\},$$
$$\sigma_{\mathrm{two}}^{(l)}(K):=[E_{\min}^{(l)}(K);E_{\max}^{(l)}(K)],\quad \sigma_{\mathrm{two}}^{(r)}(K):=[E_{\min}^{(r)}(K);E_{\max}^{(r)}(K)].$$

В области $\mathbb{C}\backslash[E_{\min}(K,k);E_{\max}(K,k)]$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$I_K(k\,;z):=\int_{\mathbb{T}^3}\frac{v_1^2(t)dt}{w_2(K;k,t)-z}.$$

Теорема 3. *Предположим, что для каждой фиксированной* $K\in\mathbb{T}^3$ *имеет место* $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;m_K-l_1\varepsilon(k))\geq 0$.

(a) *Если* $\max\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))\leq 0$, *то*

$$\sigma_{ess}(H(K))=[m_K;M_K];$$

(b) *если* $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta\big(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k)\big)\leq 0$ *и* $\max\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k;M_K-l_1\varepsilon(k))>0$, *то*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = [m_K; E_{\max}^{(r)}(K)]\ ;$$

(c) *если* $\min_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; M_K - l_1\varepsilon(k)) > 0$, *то*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = [m_K; M_K] \cup \sigma_{two}^{(r)}(K).$$

Кроме того, имеет место равенства $E_{\min}^{(l)}(K) = m_K$.

Теорема 4. *Пусть для каждой фиксированной* $K \in \mathbb{T}^3$ *имеют места*

$$\min_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; m_K - l_1\varepsilon(k)) < 0, \quad \max_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; m_K - l_1\varepsilon(k)) \geq 0.$$

(a) *Если* $\max_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; M_K - l_1\varepsilon(k)) \leq 0$, *то верно равенство*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \left[E_{\min}^{(l)}(K); M_K\right]\ ;$$

(b) *если* $\min_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; M_K - l_1\varepsilon(k)) \leq 0$, $\max_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; M_K - l_1\varepsilon(k)) > 0$, *то*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \left[E_{\min}^{(l)}(K); E_{\max}^{(r)}(K)\right]\ ;$$

(c) *если* $\min_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; M_K - l_1\varepsilon(k)) > 0$, *то*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \left[E_{\min}^{(l)}(K); M_K\right] \cup \sigma_{\text{two}}^{(r)}(K).$$

Кроме того, имеет место неравенства $E_{\min}^{(l)}(K) < m_K$.

Теорема 5. *Пусть, для каждой фиксированной* $K \in \mathbb{T}^3$ *выполняется неравенства* $\max_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; m_K - l_1\varepsilon(k)) < 0$.

(a) *Если* $\max_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; M_K - l_1\varepsilon(k)) \leq 0$, *то*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma_{\text{two}}^{(l)}(K) \cup [m_K; M_K]\ ;$$

(b) *если* $\min_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; M_K - l_1\varepsilon(k)) \leq 0$, $\max_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; M_K - l_1\varepsilon(k)) > 0$, *то*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma_{\text{two}}^{(l)}(K) \cup \left[m_K; E_{\max}^{(r)}(K)\right]\ ;$$

(c) *если* $\min_{k\in\mathbb{T}^3}\Delta(K-k; M_K - l_1\varepsilon(k)) > 0$, *то*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma_{\text{two}}^{(l)}(K) \cup [m_K; M_K] \cup \sigma_{\text{two}}^{(r)}(K)\ .$$

Кроме того, имеет место сотношение $E_{\max}^{(l)}(K) < m_K$.

Следует отметит, что первых утверждениях терем 3-5 верно $E_{\max}^{(r)}(K) = M_K$, вторых утверждениях верно $E_{\max}^{(r)}(K) > M_K$, а в третих утверждениях верно $E_{\min}^{(r)}(K) > M_K$.

Третья глава диссертационной работы озаглавлена **"Дискретный спектр семейства операторных матриц третьего порядка",** и в этой главе рассматриваются условия, при которых число собственных значений операторной матрицы $H(K)$ конечны или бесконечны. Найдены необходимые и достаточные условия существования порогового собственного значения и виртуального уровня для семейства обобщенной модели Фридрихса $h(k)$. Приведен принцип Бирмана-Швингера для операторной матрицы $H(K)$. Показано, что если число $z = 0$ либо собственное значение операторной матрицы $h(\mathbf{0})$ ($\mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{T}^3$) либо регулярная точка операторной матрицы

$h(\mathbf{0}) \geq 0$, тогда операторная матрица $H(K)$ для всех элементов K, полученных из конечного множества $\Lambda \subset \mathbb{T}^3$, имеет конечное число отрицательных собственных значений. Кроме того, доказано, что если операторная матрица $h(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 0$, то операторная матрица $H(K)$, $K \in \Lambda$ имеет бесконечное число отрицательных собственных значений. Для чисел этих собственных значений найдена асимптотическая формула.

В третьей главе требуется, что функция $v_1(\cdot)$ должна быть четной или нечетной по каждому переменному; все частные производные второго порядка существуют и непрерывны во множестве $\mathbb{T}^3$.

Через Λ определяем подмножества множества $\mathbb{T}^3$ следующим образом:

$$\Lambda := \left\{ (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) : p^{(i)} \in \left\{ 0, \pm\frac{2}{n}\pi; \pm\frac{4}{n}\pi; \dots; \pm\frac{n'}{n}\pi \right\} \cup \Pi_n, \qquad i = 1,2,3 \right\},$$

где

$$n' := \begin{cases} n-2, & \text{если } n \text{ четный}; \\ n-1, & \text{если } n \text{ нечетный}; \end{cases}$$

и

$$\Pi_n := \begin{cases} \{\pi\}, & \text{если } n \text{ четный}; \\ \emptyset, & \text{если } n \text{ нечетный}. \end{cases}$$

Через $C(\mathbb{T}^3)$ и $L_1(\mathbb{T}^3)$ обозначим Банаховы пространства непрерывных и интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$, соответственно.

Определение 2. *Если число* $\lambda = 1$ *является собственным значением интегрального оператора*

$$(G\psi)(q) = \frac{v_1(q)}{2(l_1 + l_2)} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_1(t)\psi(t)}{\varepsilon(t)} dt, \quad \psi \in C(\mathbb{T}^3)$$

и собственная функция ψ *удовлетворяют условию* $\psi(p') \neq 0$ *при некоторой точке* $p' \in \Lambda$, *то говорят, что оператор* $h(\mathbf{0})$ *имеет резонанс с нулевой энергией или виртуальный уровень в точке* $z = 0$. *Если число* 1 *не является собственным значением оператора* G, *тогда число* $z = 0$ *называется регулярной точкой операторной матрицы* $h(\mathbf{0})$.

Лемма 8. (a) *Число* $z = 0$ *является собственным значением оператора* $h(\mathbf{0})$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta(\mathbf{0}; 0) = 0$ *и* $v_1(q') = 0$ *при всех* $q' \in \Lambda$.

(b) *Операторная матрица* $h(\mathbf{0})$ *имеет резонанс с нулевой энергией тогда и только тогда, когда* $\Delta(\mathbf{0}; 0) = 0$ *и* $v_1(q') \neq 0$ *при некотором* $q' \in \Lambda$.

Лемма 9. *Если операторная матрица* $h(\mathbf{0})$ *имеет либо резонанс с нулевой энергией, либо число* $z = 0$ *является собственным значением операторной матрицы* $h(\mathbf{0})$, *то для любых* $K \in \Lambda$ *и* $p \in \mathbb{T}^3$ *оператор* $h(K-p) + l_1\varepsilon(p)\boldsymbol{I}$ *неотрицательна.*

Для удобства в дальнейших расследованиях введем следующие множества:

$$\Lambda_0 := \{q' \in \Lambda : v_1(q') \neq 0\};$$

для некоторого число $\delta > 0$ и точки $p_0 \in \mathbb{T}^3$

$$U_\delta(p_0) := \{p \in \mathbb{T}^3 : |p - p_0| < \delta\};$$
$$\mathbb{T}_\delta := \mathbb{T}^3 \setminus \bigcup_{q' \in \Lambda} U_\delta(q').$$

Ниже мы приводим лемму, которая важна для получения асимптотики для числа собственных значений семейства операторных матриц $H(K)$. Она посвящена разложению определителя Фредгольма.

Лемма 10. *Предположим, что операторная матрица* $h(\mathbf{0})$ *имеет резонанс с нулевой энергией и* $K, p' \in \Lambda$. *Тогда имеет место разложения:*

$$\Delta(K - p\,; z - l_1\varepsilon(p)) = \frac{2\pi^2}{n^2(l_1 + l_2)^{3/2}}\left(\sum_{q' \in \Lambda_0} v_1^2(q')\right) \times$$
$$\sqrt{\frac{l_1^2 + 2l_1l_2}{l_1 + l_2}|p - p'|^2 - \frac{2z}{n^2} + O(|p - p'|^2) + O(|z|)}$$

при $|p - p'| \to 0$ *и* $z \to -0$.

Лемма 11. *Предположим, что число* $z = 0$ *является собственным значением операторной матрицы* $h(\mathbf{0})$ *и* $K \in \Lambda$. *Существуют числа* $C_1, C_2, C_3 > 0$ *и* $\delta > 0$, *такие, что имеют место следующие неравенства:*

(a) $C_1|p - p'|^2 \le \Delta(K - p\,; -l_1\varepsilon(p)) \le C_2|p - p'|^2$, $p \in U_\delta(p')$, $p' \in \Lambda$;

(b) $\Delta(K - p\,; -l_1\varepsilon(p)) \ge C_3$, $p \in \mathbb{T}_\delta$.

Пусть $\mathcal{A}$ линейный, ограниченный, сомасопраженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для любого $\gamma \in \mathbb{R}$, определим число $n(\gamma, \mathcal{A})$ как

$$n(\gamma, \mathcal{A}) = \sup\{\dim F : (\mathcal{A}u, u) > \gamma, u \in F \subset \mathcal{H}, ||u|| = 1\}.$$

Величина $n(\gamma, \mathcal{A})$ бесконечна, если $\gamma < \max \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$, если $n(\gamma, \mathcal{A})$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора $\mathcal{A}$, больших чем γ, с учетом кратности.

Обозначим через $N(K, z)$ число собственных значений операторной матрицы $H(K)$ лежащих левее от $z \le \tau_{\text{ess}}(K)$. Тогда имеет место равенство

$$N(K, z) = n\big(-z, -H(K)\big), -z > -\tau_{\text{ess}}(K).$$

Следующая лемма является реализацией известного принципа Бирмана-Швингера для операторной матрицы $H(K)$.

Лемма 12. *Пусть* $K \in \mathbb{T}^3$. *При всех* $z < \tau_{\text{ess}}(K)$ *операторная матрица* $\hat{T}(K, z)$ *компактен и непрерывен и имеет место равенство*

$$N(K, z) = n(1, \hat{T}(K, z)).$$

Лемма 13. *Пусть* $K \in \Lambda$ *и выполнено одно из следующих предположений:*

(a) *число* $z = 0$ *является собственным значением операторной матрицы* $h(\mathbf{0})$;

(b) $h(\mathbf{0}) \ge 0$ *и число* $z = 0$ *является регулярная точка для операторной матрицы* $h(\mathbf{0})$.

Тогда для любого $z \le 0$ *операторная матрица* $\hat{T}(K, z)$ *компактна и непрерывна слева от точки* $z = 0$.

Теорема 6. *Пусть* $K \in \Lambda$ *и и выполнено одно из следующих предположений:*

(a) *число* $z = 0$ *является собственное значение операторной матрицы* $h(\mathbf{0})$*;*

(b) $h(0) \geq 0$ *и число* $z = 0$ *регулярная точка для операторной матрицы* $h(\mathbf{0})$.

Тогда операторная матрица $H(K)$ *имеет конечное число отрицательных собственных значений.*

Пусть $\mathbb{S}^2$ – единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$ и $\sigma := L_2(\mathbb{S}^2)$. Асимптотика дискретного спектра операторной матрицы $\hat{T}(K,z)$, $K \in \Lambda$ при

$z \to -0$ определяется через интегрального оператора S_r, $r = 1/2|ln|z||$ в $L_2((0,r),\sigma)$ с ядром

$$S(y,t) := \frac{1}{4\pi^2}\frac{(l_1+l_2)^2}{\sqrt{l_1^2+2l_1l_2}}\frac{1}{(l_1+l_2)chy+l_2t},$$

где $y = x - x'$, $x, x' \in (0,r)$ и $t = \langle \xi, \eta \rangle$ есть скалярное произведение аргументов $\xi, \eta \in \mathbb{S}^2$.

Асимптотика собственных значений оператора S_r подробно изучена Соболевым[2].

Лемма 14. *Пусть* $K \in \Lambda$. *Тогда для любого* $z \leq 0$ *и малого* $\delta > 0$ *разность* $\hat{T}(K,z) - T(\delta; |z|)$ *компактна и непрерывна по* $z \leq 0$.

Теорема 7. *Пусть* $K \in \Lambda$. *Если операторная матрица* $h(\mathbf{0})$ *имеет резонанс с нулевой энергией, то операторная матрица* $H(K)$ *имеет бесконечное число отрицательных собственных значений, накапливающихся к нулю. Кроме того, для функции* $N(K,\cdot)$ *имеет место соотношения*

$$\lim_{z\to-0}\frac{N(K,z)}{|ln|z||} = \mathcal{U}_0, \quad 0 < \mathcal{U}_0 < \infty. \tag{2}$$

Коэффициент в асимптотике (2) для $N(K,z)$ будет выражаться через самосопряженный интегральный оператор $\hat{S}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ в пространстве σ, которого ядро имеет вид

$$\hat{S}(\theta,t) := \frac{1}{4\pi^2}\frac{(l_1+l_2)^2}{l_1^2+2l_1l_2}\frac{\mathrm{sh}[\theta \arccos \frac{l_2}{l_1+l_2}t]}{\mathrm{sh}(\pi\theta)}$$

и зависит от скалярного произведения $t = \langle \xi, \eta \rangle$. Для число $\gamma > 0$ определим значение

$$U(\gamma) := \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} n\left(\gamma, \hat{S}(\theta)\right) d\theta.$$

Функция $U(\cdot)$ непрерывна при $\gamma > 0$ и существует предел

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2}r^{-1}n(\gamma, S_r) = U(\gamma).$$

А также $U(1)$ положительное число.

---

[2] Sobolev A.V. The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics // Comm. Math. Phys., 156 (1993), 101-126.

Замечание 1. *Число* $\mathcal{U}_0$ *не зависит от функции* $v_1(\cdot)$. *Это положительное число и зависит только от частного* l_2/l_1.

Замечание 2. *В силу равенства* (2) *и из положительности числа* $\mathcal{U}_0$ *следует, что часть дискретного спектра операторной матрицы* $H(K),\ K \in \Lambda$ *на отрицательной оси представляет собой бесконечное множество.*

Замечание 3. *Следует отметить, что асимптотическая формула* (2) *не зависит от количества точек во множестве* Λ, *то есть при всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место одинаковая асимптотика.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой диссертации исследуются существенные и дискретные спектры семейства операторных матриц третьего порядка $H(K), K \in \mathbb{T}^3$, определенные в прямой сумме ноль-частичной, одно-частичной и двух-частичной подпространств Фоковского пространсва. При этом операторная матрица $H(K)$ соответствует гамильтониану системы частиц на решетке, число которых в сетке не сохраняется и не превышает трех. Основными результатами исследования являются следующие:

- Выведены три типа уравнений Фаддеева, соответствующие собственными вектор-функциями операторных матриц $H(K)$.
- Построен регуляризованный определитель Фредгольма, в котором множество нулей совпадает с дискретным спектром операторной матрицы $H(K)$.
- Найден канальный оператор, соответствующий операторным матрицам $H(K)$, и его спектр.
- Выделены двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра операторной матрицы $H(K)$ и описано их расположение.
- Найдены необходимые и достаточные условия того, что операторная матрица $h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией и число $z = 0$ является собственным значением операторной матрицы $h(\mathbf{0})$.
- Показано, что если либо число $z = 0$ является собственным значением операторной матрицы $h(\mathbf{0})$, либо $h(\mathbf{0}) \geq 0$ и число $z = 0$ является точкой регулярного типа операторной матрицы $h(\mathbf{0})$, то найдено конечное множество $\Lambda \subset \mathbb{T}^3$, что операторная матрица $H(K)$ для всех $K \in \Lambda$ имеет конечное число отрицательных собственных значений.
- Доказано, что если операторная матрица $h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, то операторная матрица $H(K), K \in \Lambda$ имеет бесконечное число отрицательных собственных значений, стремящихся к нулю. Кроме того, найдена асимптотическая формула для числа собственных значений $N(K, z)$, лежащих левее от $z \leq 0$ при $z \to -0$.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES PhD.03/30.06.2020.FM.70.04
KARSHI STATE UNIVERSITY**

BUKHARA STATE UNIVERSITY

TOSHEVA NARGIZA AHMEDOVNA

ESSENTIAL AND DISCRETE SPECTRUM OF THE FAMILY OF OPERATOR MATRIX OF ORDER THREE

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION
of the Doctor of Philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

Karshi – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.2.PhD/FM705.

The dissertation was performed at the Bukhara State University.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the web-site (www.qarshidu.uz) and in the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Rasulov Tulkin Husenovich** Doctor of physical and mathematical sciences (DSc), professor
Official opponents:	**Muminov Zahriddin Eshkobilovich** Doctor of physical and mathematical sciences (DSc), associate professor
	Khamrayev Akhror Yusupovich Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place "____" ____________2023 at ____ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 at Karshi State University (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225-34-13, fax: (+998 75) 221-00-56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Karshi State University, The faculty of mathematics and computer sciences, room 202.

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Karshi State University (is registered №_____). (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225-34-13).

Abstract of dissertation sent out on "____" ___________2023
(Mailing report №____ on "_____" ___________2023).

B.A.Shoimkulov
Chairman of scientific council on
award of scientific degrees,
Dr.Phys.-Math.Sci., professor

Sh.D.Nodirov
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, (PhD)

A.A.Imomov
Deouty Chairman of scientific seminar
under scientific council on
award of scientific degrees,
DSc., associate professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to determine the structure of the essential spectrum of the family of operator matrices of order three, corresponding to the system of particles on a lattice, whose number is not preserved and does not exceed three, and to find the conditions for the number of its eigenvalues to be finite or infinite.

The object of the research work. A family of operator matrices of order three, corresponding to a system of particles on a lattice, whose number is not preserved and does not exceed three.

The scientific novelty of the research work is as follows:

two-particle and three-particle branches of the essential spectrum of the family of operator matrices of order three, corresponding to the system of particles in the three-dimensional lattice, whose number is not preserved and does not exceed three are defined;

for the values of the spectral parameter of the family of generalized Friedrichs models of an operator matrix form of order two, from discrete set, the existence of the threshold eigenvalue and the virtual level and positivity conditions were found;

if the number zero is an eigenvalue for the generalized Friedrichs model or the generalized Friedrichs model is non-negative and the number zero is a point of regular type, then it is proved that the number of negative eigenvalues of the family of operator matrices is finite in the values of the spectral parameter taken from the discrete set;

if the generalized Friedrichs model has zero-energy resonance, then it is proved that the number of eigenvalues of the family of operator matrices of order three is an infinite for the spectral parameter obtained from the discrete set, and an asymptotic formula for the number of eigenvalues is found.

Implementation of research results. Based on the scientific results obtained on operator matrices of order three:

from the location and structure of the essential spectrum of the family of operator matrices of order three and from the methods of finding the condition for the existence of infinity of the number of eigenvalues lying below the essential spectrum were used in the grant OT-F4-66 on the topic “Models of systems with a finite number of particles on a lattice. Essential and discrete spectra of energy operators” (Samarkand State University, reference No. 10-4143 dated September 29, 2022). The application of these scientific results made it possible to determine the location of the essential spectrum and the number of eigenvalues of the Hamiltonians of systems of two and three particles on a lattice;

The methods used to check the threshold phenomena for the generalized Friedrichs model and the finiteness of the eigenvalues of the operator matrix of order three were applied in the fundamental project number FRGS19-039-0647 of the International Islamic University of Malaysia (International Islamic University of Malaysia, reference dated 25 October 2022). The application of scientific results made us to determine the numerical approximations of the lower bounds of mu-values by means of ordinary differential equation.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and references. The volume of the dissertation is 90 pages.

E’LON QILINGAN ILMIY ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (часть I; part I)

1. M.I.Muminov, T.H.Rasulov, N.A.Tosheva. Analysis of the discrete spectrum of the family of 3×3 operator matrices. Communications in Mathematical Analysis. 23:1 (2020). – Pp. 17-37. (Scopus, IF=0.5)
2. T.H.Rasulov, N.A.Tosheva. Analytic description of the essential spectrum of a family of 3×3 operator matrices. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 10:5 (2019) – Pp. 511-519. (Web of Science)
3. Н.А.Тошева. Регуляризованный определитель Фредгольма соответствующий семействе 3×3 операторных матриц. Научный вестник БухГУ, 1 (2020). – С. 75-81 (01.00.00;03).
4. N.A.Tosheva. Umumlashgan Fridrixs modellari oilasining musbatlik shartlari. “Ilm sarchashmalari” ilmiy-nazariy, metodik jurnal. 10(2022). – B. 11-15. (01.00.00; 12)

II бўлим (часть II; part II)

5. N.A.Tosheva. Finiteness of the number of eigenvalues of the family of 3×3 operator matrices: 1d case. International scientific and practical conference “Modern problems of applied mathematics and information technologies”, 11-12 may 2022, Bukhara. – Pp. 51-53.
6. Н.А.Тошева. Уравнения Вайнберга для собственных вектор-функций семейства 3×3 операторных матриц. Международной научно-практической конференции «современные проблемы прикладной математики и информационных технологий». (Бухара, 2021) – С. 276-277.
7. N.A.Tosheva. Discrete spectrum of a family of 3×3 operator matrices. Abstracts of the conference “Problems of Mathematics, physics and information technologies”. (2020 y., Bukhara) – Pp. 103-104.
8. Т.Х.Расулов, Н.А.Тошева. Характеристические свойства уравнения Фаддеева для семейства 3x3 – операторных матриц. Материалы Республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы математики и информатики». (22-23 мая, 2019 г., Фергана) – С. 49-51.
9. Н.А.Тошева. О спектре семейства 3×3 операторных матриц. Материалы Республиканской научно-практической конференции «Проблемы фундаментальной математики и их приложения». (25 мая 2019 г Навои) – С. 72-74.
10. N.A.Tosheva. Estimate for lower bound of the essential spectrum of a family of 3×3 operator matrices. “Operator algebras, non-associative structures and related problem” Abstracts of the conference. (2022, Ташкент) – Pp. 135-137.
11. N.A.Tosheva. Threshold analysis for the family of generalized Friedrichs models. Abstracts of the international scientific conference: Mathematical

analysis and its applications in modern mathematical physics. (2022, Samarkand) – Pp. 121-123.

12. Т.Х.Расулов, Н.А.Тошева. О дискретном спектре обобщенной модели Фридрихса. Материалы Второго Международного Российско-Казахского симпозиума Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики. Нальчик, 2011. – С. 182-184.

13. Т.Х.Расулов, Н.А.Тошева. О числе и местонахождении собственных значений обобщенной модели Фридрихса. Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школа-конференции современные проблемы математики. – Екатеринбург, 2011. – С. 102-104.

Автореферат Қарши давлат университетининг “ҚарДУ хабарлари” илмий-назарий, услубий журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (06.01.2023 йил).

Гувоҳнома № 14-061
07.01.2023. Босишга рухсат этилди.
Офсет босма қоғози. Қоғоз бичими 60х84 1/16.
“Times” гарнитураси. Офсет босма усули.
Ҳисоб-нашриёт т. 3.2. шартли б.т. 3,7.
Адади 60 нусха. Буюртма № 1

Қарши давлат университети
Кичик босмахонасида чоп этилди.