V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

RAXIMOV KAMOLADDIN O‘RINBAYEVICH

METRIK GRAFLARDA BERILGAN KASR HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN POTENSIALLAR USULI

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

UDK: 517.953

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

RAXIMOV KAMOLADDIN O‘RINBAYEVICH

METRIK GRAFLARDA BERILGAN KASR HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN POTENSIALLAR USULI

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2023

Fizika-matematika fanlari boʻyicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B2022.3.PhD/FM747 raqam bilan roʻyxatga olingan.

Dissertatsiya Mirzo Ulugʻbek nomidagi Oʻzbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (oʻzbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://kengash.mathinst.uz) va "ZiyoNet" ta'lim axborot tarmogʻiga http://www.ziyonet.uz/ joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Sobirov Zarifboy Axmedovich** fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Durdiev Durdimurod Qalandarovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Karimov Erkinjon Toʻlqinovich fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
Yetakchi tashkilot:	**Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil " 14 " mart soat 17:00 dagi majlisida boʻlib oʻtadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet koʻchasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (157-raqami bilan roʻyxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet koʻchasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil " 28 " fevral kuni tarqatildi.
(2023 yil " 28 " fevraldagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

Oʻ. A. Roziqov
ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

J. K. Adashev
ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A. A. Azamov
ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Ma’lumki, fizika, mexanika, kimyo, biofizika, biotexnologiya va ishlab chiqarishdagi ko‘plab ilmiy tadqiqotlar xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi masalalariga keltiriladi. Shu jumladan, ko‘plab tarmoqlangan sistemalardagi jarayonlar graflarda ushbu tenglamalarni o‘rganishni taqozo etadi. Masalan, tarmoqlangan sohalardagi jarayonlarni modellashtirishda metrik graflarda berilgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar qo‘llaniladi. Bunda grafning tarmoqlanish nuqtasida oqimning lokal saqlanishi umumiy sharti, ya’ni Kirxgoff sharti qo‘llanilib, u eng sodda holatda graf uchida yechimning uzluksizligini va yechim bir tomonlama hosilalarining yig‘indisi nolga tengligini ifodalaydi.

Asab tizimlarida impulsning tarqalish jarayonlarini modellashtirishda esa, metrik graflarda berilgan diffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar ishlatiladi. Ba’zan Eyri tenglamasi deb ataluvchi chiziqlashtirilgan Korteveg-de Friz tenglamasi chiziqli, yo‘nalmagan, oz tebranuvchi uzun to‘lqinlar, masalan kichik havzadagi suvlardagi to‘lqinlarni asimptotik tasvirlash uchun qo‘llaniladi. Shuningdek, tibbiyot sohasida jarayonlarni matematik modellashtirishda graflarda berilgan differensial tenglamalar keng qo‘llaniladi. Xususan, genlarda RNK bilan bog‘liq jarayonlarni modellashtirishda differensial tenglamalar zinapoyasimon graflarda qaraladi.

So‘nggi yillarda mamlakatimizda fundamental fanlarning, shu jumladan matematik fizika tenglamalari fanining zamonaviy usullarini o‘rganishga katta e’tibor qaratilmoqda. Bunga metrik graflarda berilgan noklassik tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni o‘rganishga qaratilgan e’tiborni ham qo‘shish mumkin. Metrik graflarda berilgan noklassik Eyri va subdiffuziya tenglamalarini kvant fizikasi jarayonlariga qo‘llab, e’tiborga molik natijalar olingan. «Differensial tenglamalar va matematik fizika»[1] fanining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalar va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi. Shu bois, metrik graflarda berilgan tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechish fanning muhim vazifalaridan hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-sonli Farmoni, 2017 yil 17 fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2789-sonli Qarori va 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi 292-son qarori.

vazifalarni amalga oshirishga ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. O‘tgan asrning 80-yillarida rus olimi Merkov tomonidan graflarda berilgan issiqlik tarqalish tenglamasini o‘rganish boshlangan. Chex olimlari P.Eksner va P.Seba graflarda berilgan klassik tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni o‘rganishgan. Eyri tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni o‘rganishga qiziqish o‘tgan asrning o‘rtalaridayoq mavjud bo‘lgan. Joriy asr boshlarida italyan matematik ayoli B. Pelloni tomonidan uchinchi darajali tenglamalar uchun chegaraviy masalalar o‘rganilgan. 2010-yillarda metrik graflarda berilgan Eyri tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar va Koshi masalasiga bag‘ishlangan bir qator ishlar nashr etilgan. So‘nggi yillarda ko‘plab ilg‘or olimlar kasr hosilali differensial tenglamalar ustida ish olib bormoqdalar. Jumladan, vatandoshlarimiz Sh. Alimov, R. Ashurov, E. Karimov, O. Abdullaev va boshqalar ham. XXI asr boshlarida kasr hosilaning qo‘llanilishi haqida bir qator ishlar nashr qilingan. Jumladan, rus matematigi A. Aliev tomonidan kasr tartibli hosilali tenglamalar uchun masalalarni o‘rganishga katta turtki beradigan darajadagi juda muhim tengsizliklar olingan, A.V. Psxu tomonidan vaqt kasr tartibli hosilali Eyri tenglamasi uchun Koshi masalasining fundamental yechimi qurilgan.

Ma’lumki, diffuziya tenglamasi fizika, biologiya, mexanika, kimyo kabi fanning bir nechta sohalarida keng qo‘llaniladi. Xususan, Bartolomey Dibiyes va Yeva Gudovska-Novak 2009 yilda anomal diffuziya tenglamasi uchun modelni o‘rganishgan. Sal keyinroq Lenglends va Genri biologik organizmalar ko‘chishining kimyoviy yo‘nalishlarini modellashtirish uchun subdiffuziya tenglamasining mezoskopik va makroskopik modelini kiritishgan. A.V.Psxu va S.Rexviashvili birgalikda chop etgan maqolasida vaqt bo‘yicha kasr hosilali diffuzion-to‘lqin tenglamasi uchun boshlang‘ich shartsiz asimptotik masalani tadqiq qilishgan. So‘nggi yillarda rus olimlari D.Gerasimov, I.Popov, I.Blinovalar esa Maksvell nanosuyuqligi uchun magnitogidrodinamik aralash masalaning yechimini topishgan. S.A. Chivilxin va V.V. Gusarov nanosuyuqliklar dinamikasini tasvirlash uchun kasr hosilali modellardan foydalanishgan. Xususan, vaqt bo‘yicha kasr hosilaning tartibi oshishi bilan issiqlik sig‘imining o‘zgarish tezligi oshishi aniqlangan. Grin funksiyasi metodi chegaraviy masalalarni yechish uchun muhim usullardan biri hisoblanadi. A.V.Psxu 2005 yil nashr etilgan monografiyasida Grin funksiyasi metodini kasr hosilali tenglamalar uchun qo‘llagan. D.Mexdi va D.Muhammad Grin funksiyasi metodi orqali turli sohalarda berilgan statsionar va nostatsionar differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalaning sonli yechimini topishgan.

Metrik graflarda berilgan kasr hosilali differensial tenglamalar oqim bilan bog‘liq ko‘plab tarmoqlangan sistemalarni, shu jumladan tarmoqlangan nanotruba orqali oqimni ifodalovchi aniq model sifatida xizmat qiladi. Shu boisdan, so‘nggi yillarda bu borada ko‘plab izlanishlar olib borilmoqda. Shu jumladan, grafda berilgan Shryodinger tenglamasi ham keng tadqiq qilingan. D.S. Nikiforov va I.V.Blinovaning 2019 yilda chop etilgan maqolasida o‘zgaruvchan qirrali grafda berilgan Shryodinger operatori o‘rganilgan. Shuningdek, G.Xudoyberganov, Z.Sobirov va M.Eshimbetovlar metrik grafda berilgan Shryodinger tenglamasi uchun unifitsirlangan Fokas almashtirishi usulini qo‘llashgan. I.Lobanov va D.Nikiforov 2020 yilda Kazimir dinamik effektini tasvirlash uchun vaqtga bog‘liq bo‘lgan geometrik graf modelini taklif qilishdi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Tadqiqot O‘zbekiston Milliy universitetining №14-022 RG/MATHS/AS_G; UNESCO FR:324028610 raqamli “Mezoskopik fizikada yuzaga keluvchi metrik graflarda nochiziqli evolyusion va transport tenglamalari” nomli ilmiy loyihasi doirasida amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi metrik graflarda berilgan kasr tartibli hosilali tenglamalar, xususan, Eyri va subdiffuziya tenglamalari uchun masalalarni qo‘yish va bu masalalarning yechimini qurishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

yarim cheksiz qirralarga ega ochiq yulduzsimon metrik graflarda berilgan vaqt bo‘yicha kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun Koshi masalasining graf uchidagi to‘lqin dinamikasini o‘rganish imkonini beruvchi yechimini qurish;

chekli sondagi chekli va yarim chekli intervallardan tashkil topgan yulduzsimon metrik graflarda berilgan kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning yechimini topish;

Grin funksiyasi metodini qo‘llab, yulduzsimon grafda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalani yechish;

chekli intervallardan tashkil topgan zinapoyasimon metrik grafda berilgan subdiffuziya tenglamasining yechimi mavjudligi va yagonaligini isbotlash.

Tadqiqotning ob’ekti. Ochiq va yopiq sodda yulduzsimon metrik graflar, chekli sondagi chekli va yarimchekli intervallardan tashkil topgan yulduzsimon metrik graf, chekli intervallardan tashkil topgan zinapoyasimon metrik graf.

Tadqiqotning predmeti. Subdiffuziya tenglamasi, vaqt bo‘yicha kasr hosilali Eyri tenglamasi, Koshi masalasi, boshlang‘ich-chegaraviy masalalar, Grin funksiyasi metodi, kasr hosilalar.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot ishida potensiallar metodi, Grin funksiyasi metodi, energiya integrallari usuli, shuningdek boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechishning boshqa usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat**:**

sodda ochiq yulduzsimon metrik graflarda berilgan vaqt bo‘yicha kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimi qurilgan;

chekli sondagi chekli qirralardan tashkil topgan yulduzsimon metrik graflarda berilgan kasr hosilali Eyri va subdiffuziya tenglamalari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masala yechimining integral ifodasi topilgan;

Grin funksiyasi metodi graflarda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechish uchun matritsaviy Grin funksiyasi sifatida umumlashtirilgan;

chekli intervallardan tashkil topgan zinapoyasimon metrik grafda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

Olingan natijalar va dissertatsiyada qo‘llanilgan usullar oliy o‘quv yurtlarida magistratura talabalari va doktorantlar uchun o‘quv kurs sifatida o‘qitilishi mumkin. Bundan tashqari, metrik graflarda berilgan kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishiga oid dissertatsiya natijalaridan tarmoqlangan sistemalarda to‘lqin tarqalishi bilan bog‘liq jarayonlarda o‘tish va aks etish koeffitsientlarini hisoblash va jarayonlarning matematik modellarini ishlab chiqish uchun foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi Grin funksiyasi metodi, kasr hosilali potensiallarning xossalarini isbotlovchi bir qator lemmalar va chiziqli integral tenglamalar nazariyasi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati olingan natijalar metrik graflarda issiqlik tarqalishining va Eyri tenglamasi uchun tarmoqlangan strukturalarda to‘lqin tarqalishining xossalarini o‘rganish uchun qo‘llanilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati olingan natijalar to‘lqin tarqalishining tarmoqlanish nuqtasidan o‘tish va qaytish koeffitsientini aniqlashda, tarmoqlangan mezoskopik va makroskopik maydonlarda to‘lqin jarayonlarini tahlil qilishda, asab tizimlarida impuls tarqalishi jarayonini modelleshtirishda asos bo‘lib xizmat qiladi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Metrik graflarda berilgan Eyri va subdiffuziya tenglamasi uchun potensiallar va Grin funksiyasi metodi orqali olingan natijalar asosida:

grafda qaralgan subdiffuziya tenglamasi uchun topilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning Grin funksiyalaridan OT-Ф4-(37+29) raqamli “A-analitik funksiyalarning funksional xossalari va ularning qo‘llanilishi. Matritsaviy sohalarda kompleks analizning ba’zi masalalari” mavzusidagi fundamental loyihada berilgan chegaraviy masalalarning chegaraviy qiymatlarini topishda, hamda matritsa argumentli golomorf funksiyalar uchun ortonormal sistema bazisi qurishda foydalanilgan. (O‘zbekiston Milliy universitetining 2022 yil 22 oktabrdagi 04/11-6626-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi Koshi formulasining analogini isbotlash imkonini bergan;

Eyri tenglamasi uchun sodda metrik grafda Koshi masalasining fundamental yechimidan OT-Ф-4-(36+32) raqamli “Matematik fizika va optimal boshqaruv masalalarini yechishning zamonaviy usullarini ishlab chiqish. Toq tartibli xususiy hosilali tenglamalar uchun noklassik boshlang‘ich va spektral masalalar va ularning tatbiqlari” mavzusidagi fundamental loyihada uchinchi tartibli tenglama uchun nolokal masala yechimining mavjudligini ko‘rsatishda hamda masala yechimining integral ifodasini topishda foydalanilgan (O‘zbekiston Milliy universitetining 2022 yil 22 oktabrdagi 04/11-6625-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi uchinchi tartibli tenglama uchun nolokal masala yechimining mavjud va yagonaligini isbotlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 10 ta ilmiy anjumanlarda, jumladan 6 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 15 ta ilmiy ishlar chop etilgan bo‘lib, shundan 5 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktorlik dissertatsiyalarining asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda chop etilgan, 2 tasi SCOPUS ma’lumotlar bazalarida indekslangan jurnallarda chop etilgan, 3 tasi respublika jurnallarida chop etilgan maqolalar va 10 tasi tezisdir.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 108 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning “**Dastlabki ma’lumotlar**” deb nomlangan birinchi bobida kasr hosilalar, Eyri va subdiffuziya tenglamalari nazariyasiga bag‘ishlangan muhim tushunchalar va yordamchi ma’lumotlar keltirilgan. Bu bobda biz kasr tartibli hosila tushunchasini keltirib o‘tamiz va Rayt tipidagi funksiyalar xossalariga to‘xtalamiz. Bundan tashqari, vaqt bo‘yicha kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun Koshi masalasini qaraymiz. Birinchi bobning to‘rtinchi paragrafi subdiffuziya tenglamasi uchun Grin funksiyasi metodiga bag‘ishlanadi. Birinchi bobning birinchi, ikkinchi va uchinchi paragraflarida keltirilgan tushuncha va tasdiqlar umumiy tushunchalar bo‘lib, biz uni A.V.Psxu muallifligidagi maqoladan, I.Podlyubni va L.Kattabriga monografiyalaridan, to‘rtinchi paragrafidagi natijalarni esa A.Psxu monografiyasidan keltirdik.

1-ta’rif. Quyidagi

$$\partial_{\eta t}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\eta}^{t} \frac{g^{(n)}(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}} d\xi, \quad n-1 < \alpha < n,$$

va

$$D_{\eta t}^{\alpha} g(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left(\int_{\eta}^{t}\frac{g(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}}d\xi\right),\quad n-1<\alpha<n,$$

munosabat bilan aniqlangan operatorlar mos ravishda Kaputo va Riman-Liuvill kasr tartibli hosilalari deyiladi. Quyidagi

$$D_{\eta t}^{-\alpha} g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\eta}^{t}\frac{g(\xi)}{|t-\xi|^{1-\alpha}}d\xi,\quad 0<\alpha<1, \eta\le t$$

tenglik bilan aniqlangan operator esa kasr tartibli integrallash operatori deyiladi. Ba'zan $D_{\eta t}^{-\alpha} g(t)$ belgilash o'rniga $J_{\eta t}^{\alpha} g(t)$ belgilash ishlatiladi. Kaputo va Riman-Liuvill kasr hosilalari quyidagi tenglik orqali bog'langan:

$$\partial_{0t}^{\alpha} g(t)=D_{0t}^{\alpha} g(t)-\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}g(0),\ \ 0<\alpha<1.$$

1-lemma. Aytaylik, $v(t)$ funksiya $[0,T]$ kesmada absolyut uzluksiz bo'lsin. U holda quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$v(t)\partial_{0t}^{\alpha} v(t)\ge\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha} v^2(t).$$

2-lemma. Aytaylik, nomanfiy $y(t)$ funksiya deyarli barcha $t\in[0,T]$ lar uchun absolyut uzluksiz funksiya bo'lib, quyidagi

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t)\le c_1 y(t)+c_2(t),\ \ 0<\alpha\le 1,$$

tengsizlikni qanoatlantirsin, bu yerda $c_1>0$ va $c_2(t)$ funksiya $[0,T]$ kesmada nomanfiy va integrallanuvchi funksiya bo'lsin. U holda quyidagi

$$y(t)\le y(0)E_{\alpha}\left(c_1 t^{a}\right)+\Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}\left(c_1 t^{\alpha}\right)D_{0,t}^{-\alpha} c_2(t),$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda $E_{\alpha}(z)$ va $E_{\alpha,\mu}(z)$ funksiyalar Mittag–Leffler funksiyalari.

Kasr tartibli hisob nazariyasida quyidagi

$$\phi(\lambda,\mu;z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)},\quad \lambda>-1, \mu\in\mathbb{C}.$$

qator bilan aniqlanuvchi Rayt funksiyasi muhim rol o'ynaydi.

2-ta'rif. Quyidagi

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)}$$

funksiya Rayt tipidagi funksiya deb ataladi. Agar $\alpha=\mu=1$ bo'lsa, bu funksiya Rayt funksiyasi bilan ustma-ust tushadi: $e_{1,\beta}^{1,\delta}(z)=\phi(-\beta,\delta,z)$.

A.V. Psxu maqolasida vaqt bo'yicha Kaputo kasr hosilali Eyri tenglamasi

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)=f(x,t),\quad -\infty<x<+\infty, 0<t\le T,$$

ushbu

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x,t)=\tau(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

boshlang‘ich shart bilan tadqiq etilgan, bu yerda $\tau\left(x\right)$ – berilgan uzluksiz funksiya va $0<\alpha\le 1$.

A.V. Psxu tomonidan yuqoridagi masalaning fundamental yechimi quyidagi

$$G_{\alpha}^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\eta)=\frac{1}{3(t-\eta)^{1-2\alpha/3}}\begin{cases}\phi(-\frac{\alpha}{3},\frac{2\alpha}{3};\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha/3}}), & x\le\xi,\\ -2\operatorname{Re}[e^{2\pi i/3}\phi(-\frac{\alpha}{3},\frac{2\alpha}{3};e^{2\pi i/3}\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha/3}})], & x>\xi,\end{cases}$$

ko‘rinishda aniqlangan, bu yerda $t>\eta$. Bu funksiyaning ba’zi xossalarini keltirib o‘tamiz.

1-teorema. *Aytaylik, $\tau\left(x\right)\in C\left(\mathbb{R}\right)$ va biror ν_{+} va ν_{-} lar uchun*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\tau\left(x\right)\exp\left(-\nu_{\pm}x^{\frac{3}{3-\alpha}}T^{-\frac{3}{3-\alpha}}\right)=0,$$

bo‘lsin. Shuningdek, $f\left(x,t\right)$ funksiya $f\left(x,t\right)=D_{0t}^{-\gamma}g\left(x,t\right)$ ko‘rinishida ifodalansin, bu yerda $t^{1-\delta}g\left(x,t\right)\in C\left(\overline{D}\right)$, $\gamma>0$, $\delta>0$, $\gamma+\delta>1-\alpha$, va ushbu

$$\lim_{x\to\pm\infty}t^{1-\delta-\gamma}g\left(x,t\right)\exp\left(-\nu_{\pm}x^{\frac{3}{3-\alpha}}T^{-\frac{3}{3-\alpha}}\right)=0$$

munosabat bajarilsin. U holda

$$u\left(x,t\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau\left(\xi\right)D_{0t}^{\beta-1}G_{\alpha}^{\frac{2\alpha}{3}}\left(x-\xi,t-0\right)d\xi+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\xi,\eta\right)G_{\alpha}^{\frac{2\alpha}{3}}\left(x-\xi,t-\eta\right)d\xi d\eta$$

funksiya vaqt bo‘yicha kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimi hisoblanadi.

Endi, to‘g‘ri to‘rtburchakli D sohada berilgan quyidagi

$$\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}u\left(x,t\right)-D_{0,t}^{\alpha}u\left(x,t\right)=f\left(x,t\right),$$

subdiffuziya tenglamasi uchun chegaraviy masalaning yechimini topish uchun Grin funksiyasi metodini keltiramiz. Bu tenglama $0<\alpha\le 1$ bo‘lganida subdiffuziya tenglamasi, $1<\alpha<2$ bo‘lganida esa kasr hosilali to‘lqin tenglamasi deyiladi.

1-masala. Subdiffuziya tenglamasining, $0<\alpha<2$, $n-1<\alpha\le n$, $n\in\{1,2\}$, D sohada aniqlangan va quyidagi

$$u\left(a_{1},t\right)=\varphi_{0}\left(t\right),\ u\left(a_{2},t\right)=\varphi_{1}\left(t\right),\ 0<t<b,$$
$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-k}u\left(x,t\right)=\tau_{k}\left(x\right),\ a_{1}<x<a_{2},$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini toping.

3-ta’rif. Ushbu

$$G\left(x,t,\xi,\eta\right)-D_{t\eta}^{\alpha}G\left(x,t,\xi,\eta\right)=0$$

tenglamaning quyidagi

$$\lim_{\xi\to a_1} G\left(x,t,\xi,\eta\right)=0,\ \lim_{\xi\to a_2} G\left(x,t,\xi,\eta\right)=0,\ t\neq\eta,$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $G\left(x,t,\xi,\eta\right)$ yechimi subdiffuziya tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning Grin funksiyasi deyiladi.

Birinchi chegaraviy masalaning Grin funksiyasi quyidagi

$$G\left(x,t,\xi,\eta\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\Gamma_n\left(x-\xi,t-\eta\right)-\Gamma_n\left(x+\xi-2a_1,t-\eta\right)\right]$$

ko‘rinishga ega, bu yerda

$$\Gamma_n\left(s,\tau\right)=\frac{1}{2}\tau^{\beta-1}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{\left|s+2n\left(a_2-a_1\right)\right|}{\tau^{\beta}}\right).$$

Ikkinchi chegaraviy masalaning Grin funksiyasi quyidagi

$$G_1\left(x,t,\xi,\eta\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\Gamma_n\left(x-\xi,t-\eta\right)+\Gamma_n\left(x+\xi-2a_1,t-\eta\right)\right]$$

ko‘rinishga ega.

Yuqorida qaralgan chegaraviy masalaning yechimi

$$u\left(x,t\right)=\int_0^t \nu_1\left(\eta\right)G_{\xi}\left(x,t,a_2,\eta\right)d\eta-\int_0^t \nu_0\left(\eta\right)G_{\xi}\left(x,t,a_1,\eta\right)d\eta+$$

$$+\int_{a_1}^{a_2}\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k-1}\tau_k(\xi)\frac{\partial^{k-1}}{\partial\eta^{k-1}}G_1\left(x,t,\xi,0\right)d\xi-\int_0^t\int_{a_1}^{a_2} f\left(\xi,\eta\right)G_1\left(x,t,\xi,\eta\right)d\xi d\eta$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Dissertatsiyaning “**Yulduzsimon grafda berilgan vaqt bo‘yicha kasr hosilali Eyri tenglamasi**” deb nomlanuvchi ikkinchi bobi to‘rtta paragrafdan iborat. Dissertatsiyaning bu bobida kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar o‘rganilgan.

A.V.Psxu tomonidan topilgan fundamental yechimdan tashqari bizga quyidagi elementar yechim

$$V_{\alpha}^{2\alpha/3}(x,t)=\frac{1}{3t^{1-2\alpha/3}}\operatorname{Im}[e^{2\pi i/3}\phi(-\frac{\alpha}{3},\frac{2\alpha}{3};e^{2\pi i/3}\frac{x}{t^{\alpha/3}})],\ x\geq 0$$

ham kerak bo‘ladi.

$V_{\sigma}^{\mu}\left(x,t\right)$ funksiya uchun quyidagi munosabatlar isbotlangan:

$$D_{0t}^{\nu}V_{\sigma}^{\mu}\left(x,t\right)=V_{\sigma}^{\mu-\nu}\left(x,t\right),\ \frac{\partial^3}{\partial x^3}V_{\sigma}^{\mu}\left(x,t\right)=V_{\sigma}^{\mu-\sigma}\left(x,t\right),\ V_{\sigma}^{\mu}\left(0,t\right)=\frac{\sqrt{3}}{6\Gamma\left(\mu\right)t^{1-\mu}}.$$

Fundamental va elementar yechimlar yordamida quyidagi funksiyalarni tuzamiz:

$$w_1(x,t)=\int_0^t G_{\alpha}^{2\alpha/3}(x-a,t-\eta)\tau_1(\eta)d\eta,$$

$$w_2(x,t)=\int_0^t V_{\alpha}^{2\alpha/3}(x-a,t-\eta)\tau_2(\eta)d\eta,$$

$$w_3(x,t)=\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}G_{\alpha}^{2\alpha/3}(x-a,t-\eta)\tau_3(\eta)d\eta,$$

$$w_4(x,t)=\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}V_\alpha^{2\alpha/3}(x-a,t-\eta)\tau_4(\eta)d\eta,$$

$$w_5(x,t)=\int_a^b G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t)\tau_5(\xi)d\xi,$$

va

$$w_6(x,t)=\int_0^t\int_a^b G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Ushbu potensiallarning quyidagi xossalari isbotlangan.

3-lemma. *Aytaylik,* $t^{1-\alpha}\tau_k(t),\, k=1,2$ *funksiyalar uzluksiz va chegaralangan bo'lsin. U holda:*

1. $w_1(x,t)$ *va* $w_2(x,t)$ *funksiyalar ushbu*

$$D_{0t}^\alpha u(x,t)-\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}=0$$

tenglamaning yechimi bo'ladi;

2. $w_1(x,t)$ *va* $w_2(x,y)$ *funksiyalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:*

$$\lim_{t\to 0} w_k(x,t)=0, \qquad k=1,2.$$

4-lemma. *Aytaylik,* $t^{1-\alpha}\tau_k(t),\ k=3,4$ *funksiyalar biror intervalda variatsiyasi chegaralangan, uzluksiz funksiyalar bo'lsin. U holda quyidagi munosabatlar o'rinli:*

$$\lim_{x\to a-0} w_3(x,t)=\frac{1}{3}\tau_3(t),$$

$$\lim_{x\to a+0} w_3(x,t)=-\frac{2}{3}\tau_3(t)$$

va

$$\lim_{x\to a+0} w_4(x,t)=0.$$

5-lemma. *Aytaylik,* $\tau_5(x)\in C[a,b]$ *bo'lsin. U holda* $w_5(x,t)$ *funksiya ushbu*

$$D_{0t}^\alpha u(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)=0$$

tenglamaning yechimi bo'ladi va quyidagi boshlang'ich shartni qanoatlantiradi:

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}w_5(x,t)=\tau_5(x).$$

6-lemma. *Aytaylik,* $t^{1-\alpha}f(x,t)\in C^{0,1}([a,b]\times(0,T])$ *bo'lsin. U holda ushbu*

$$D_{0t}^\alpha u(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)=f(x,t)$$

tenglamaning quyidagi

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)|_{t=0}=0$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi quyida potensial ko'rinishida aniqlanadi:

$$w_6(x,t)=\int_0^t d\eta\int_a^b G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\eta)\,f(\xi,\eta)d\xi.$$

Aytaylik, $E_1=\{(x,t):0<x<1,0<t\le T\}$, $E_2=\{(x,t):0<x<\infty,0<t\le T\}$, $E_3=\{(x,t):-\infty<x<0,0<t\le T\}$ bo‘lsin.

Kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun quyidagi masalalarni qaraymiz:

2-masala. Ushbu

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)=f(x,t) \qquad (1)$$

tenglamaning quyidagi

$$D_{0t}^{\alpha-1}u\left(x,0\right)=0,\quad 0\le x\le 1,$$

boshlang‘ich shartni, ushbu

$$u\left(0,t\right)=\varphi_1\left(t\right),\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\varphi_2\left(t\right)\ \text{va}\ \ u\left(1,t\right)=\varphi_3\left(t\right)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi E_1 to‘plamdagi regulyar yechimini toping.

Bu yerda regulyar yechim deganda ushbu sinfdan bo‘lgan yechim tushuniladi:

$$V_1=\{u(x,t):u\in C^{2,0}(E_1),\ D_{0,t}^{\alpha}u\in C(E_1),\ t^{1-\alpha}u\in C(\bar{E}_1),t^{1-a}u_x\in C([0,1)\times[0,T])\}.$$

3-masala. (1) tenglamaning

$$D_{0t}^{\alpha-1}u\left(x,0\right)=0,\quad 0\le x<\infty,$$

ushbu boshlang‘ich shartni

$$u(0,t)=\psi_1(t);\ \lim_{x\to 0}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\psi_2(t),$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi E_2 to‘plamdagi regulyar yechimini toping.

Bu yerda regulyar yechim deganda ushbu sinfdan bo‘lgan yechim tushuniladi:

$$V_2=\{u(x,t):u\in C^{2,0}(E_2),\ D_{0,t}^{\alpha}u\in C(E_2),\ t^{1-\alpha}u\in C(\bar{E}_2),t^{1-a}u_x\in C([0,+\infty)\times[0,T])\}.$$

4-masala. (1) tenglamaning

$$D_{0t}^{\alpha-1}u\left(x,0\right)=0,\quad -\infty<x\le 0,$$

boshlang‘ich shartni va ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\psi(t)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi E_3 to‘plamdagi regulyar yechimini toping. Bu yerda regulyar yechim deganda ushbu sinfdan bo‘lgan yechim tushuniladi:

$$V_3=\{u(x,t):u\in C^{2,0}(E_3),\ D_{0,t}^{\alpha}u\in C(E_3),\ t^{1-\alpha}u\in C(\bar{E}_3),t^{1-a}u_x\in C((-\infty,0]\times[0,T])\}.$$

Yuqoridagi masalalarning yechimlari mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

2-teorema. *Agar* $t^{1-\alpha}\varphi_j(t)\in C[0,T]$, $(j=1,2,3)$ *va* $t^{1-\alpha}f(x,t)\in C^{0,1}(\overline{E_1})$, *bo'lsa, 2-masala quyidagi ko'rinishdagi yagona yechimga ega:*

$$u(x,t)=\int_0^t G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t-\tau)\lambda(\tau)d\tau+\int_0^t V_\alpha^{2\alpha/3}(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t G_\alpha^{2\alpha/3}(x-1,t-\tau)\nu(\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

bu yerda $\lambda(t)$, $\mu(t)$ *va* $\nu(t)$ *funksiyalar*

$$\Phi(t)=\int_0^t K(t-\tau)\Phi(\tau)d\tau+\tilde{F}(t),$$

sistema orqali aniqlanadi.

3-teorema. *Agar* $t^{1-\alpha}\psi_j(t)\in C[0,T]$, $(j=1,2,3)$ *va* $t^{1-\alpha}f(x,t)\in C^{0,1}(\overline{E_2})$, *bo'lsa, 3-masala quyidagi ko'rinishdagi yagona yechimga ega:*

$$u(x,t)=\int_0^t G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t-\tau)\lambda(\tau)d\tau+\int_0^t V_\alpha^{2\alpha/3}(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau+Q(x,t),$$

bu yerda,

$$Q(x,t)=\int_0^t\int_0^{+\infty} G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\lambda(t)=\frac{3}{2}D_{0t}^{2\alpha/3}\big(\psi_1(t)-Q(0,t)\big)+\frac{3}{2}\partial_{0t}^{\alpha/3}\left(\psi_2(t)-\frac{\partial}{\partial x}Q(0,t)\right)$$

va

$$\mu(t)=\sqrt{3}D_{0t}^{2\alpha/3}\big(\psi_1(t)-Q(0,t)\big)-\sqrt{3}D_{0t}^{\alpha/3}\left(\psi_2(t)-\frac{\partial}{\partial x}Q(0,t)\right).$$

4-teorema. *Agar* $t^{1-\alpha}\psi\in C[0,T]$ *va* $t^{1-\alpha}f(x,t)\in C^{0,1}(\overline{E_3})$, *bo'lsa, 4-masala quyidagi ko'rinishdagi yagona yechimga ega:*

$$u(x,t)=\frac{3}{2}\int_0^t G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t-\tau)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}R(x,\tau)-\psi(\tau)\right)d\tau+R(x,t),$$

bu yerda

$$R(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^0 G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Dissertatsiya ikkinchi bobining uchinchi paragrafida yarimcheksiz qirrali yulduzsimon grafda berilgan vaqt bo'yicha kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun Koshi masalasi tadqiq qilingan.

Aytaylik, Γ graf k ta kiruvchi va m ta chiquvchi qirradan tashkil topgan bo'lsin. Kiruvchi qirralar koordinatalari $-\infty$ dan 0 gacha, chiquvchi qirralarda esa, 0 dan $+\infty$ gacha aniqlangan bo'lsin. Graf qirralarini B_j, $j=\overline{1,k+m}$ orqali belgilaymiz.

Masalaning qo'yilishi. Γ grafning har bir qirrasida ushbu

$$D_{0t}^{\alpha}u_j(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_j(x,t)=f_j(x,t),\ \ 0<t\le T, x\in B_j,$$

vaqt bo‘yicha kasr hosilali Eyri tenglamasi va quyidagi

$$u_j(x,0)=\phi_j(x),\ \ x\in\overline{B_j},\ \ j=\overline{1,k+m}$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini qidiraylik.

Shuningdek, yechim grafning uchi – 0 nuqtada quyidagi ulanish shartlarini qanoatlantirsin:

$$a_j u_j(0,t)=u_1(0,t),\ 0<t\le T,\ \ j=\overline{2,k+m},$$

$$u_x^+(0,t)=Bu_x^-(0,t),\ 0<t\le T,$$

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_j(x,t)\Big|_{x=0}=\sum_{i=k+1}^{k+m}\frac{1}{a_i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_i(x,t)\Big|_{x=0},\ 0<t\le T,$$

bu yerda $a_1\equiv 1,\ a_j\ne 0,\ j=\overline{1,k+m},\ u^-=(u_1,u_2,...,u_k)^T,\ u^+=(u_{k+1},u_{k+2},...,u_{k+m})^T$ va B – $m\times k$ o‘lchamli o‘zgarmas matritsa. Shuningdek $u=\left(u_1,u_2,...,u_{k+m}\right)^T$ belgilashni kiritamiz.

Masalaning yagona yechimining aniq ko‘rinishi topilgan.

5-teorema. *Aytaylik, B^TB-E manfiy aniqlangan matritsa bo‘lsin, $\phi_j(x)\in C\left(\overline{B_j}\right),\ t^{1-\alpha}f(x,t)\in C^{0,1}\left(B_j\times[0,T]\right),\ j=\overline{1,k+m},$ va bu funksiyalar $x\to\pm\infty$ bo‘lganda nolga aylansin. U holda qaralayotgan masalaning yagona yechimi quyidagi ko‘rinishga ega:*

$$u(x,t)=F(x,t)+\int_0^t U(x-0,t-\tau)M^{-1}\Phi(\tau)d\tau,$$

bu yerda

$$U(x,t)=\begin{pmatrix} G_{\alpha}^{2\alpha/3}(x,t)I_k & | & 0_{k\times m} & | & 0_{k\times m}\\ 0_{m\times k} & | & G_{\alpha}^{2\alpha/3}(x,t)I_m & | & V_{\alpha}^{2\alpha/3}(x,t)I_m\end{pmatrix}.$$

To‘rtinchi paragrafda chekli qirrali yulduzsimon metrik grafda berilgan Eyri tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masala o‘rganilgan.

Aytaylik, Γ_1 graf k ta kiruvchi va m ta chiquvchi qirradan tashkil topgan bo‘lsin. Kiruvchi qirralar koordinatalari $L_j\left(L_j<0,\ j=\overline{1,k}\right)$ dan 0 gacha, chiquvchi qirralarda esa 0 dan $L_i\left(L_i>0,\ i=\overline{k+1,k+m}\right)$ gacha aniqlangan bo‘lsin. Graf qirralarini $b_j,\ \ j=\overline{1,k+m}$ orqali belgilaymiz (2.4.1. rasm).

Masalaning qo‘yilishi. Aytaylik, $f=(f_1,f_2,...,f_{k+m})^T,\ \ u^-=(u_1,u_2,...,u_k)^T,$ $u^+=(u_{k+1},u_{k+2},...,u_{k+m})^T$ va $u=\begin{pmatrix}u^+\\ u^-\end{pmatrix}$ bo‘lsin. Γ_1 grafning har bir qirrasida ushbu

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)=f(x,t),\ \ 0<t\le T, x\in B_j,$$

vaqt bo‘yicha kasr hosilali Eyri tenglamasini va ushbu

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{B_j},\quad j=\overline{1,k+m},$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini qidiraylik, bu yerda $u_0=\left(u_1^0,u_2^0,...,u_{k+m}^0\right)^T$.

Shuningdek, qidirilayotgan yechim grafning uchida ushbu

$$Au\left(0,t\right)=0,\ 0<t\le T$$

va

$$u_x^+(0,t)=Bu_x^-(0,t),\ 0<t\le T,$$

moslik shartlarini qanoatlantirilsin, bu yerda A – o‘zgarmas matritsa

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & -a_2 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & -a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & -a_{k+m} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga ega va B – $m\times k$ o‘lchamli o‘zgarmas matritsa.

Qirralarning birlashish nuqtasida barcha $t\in(0,T]$ uchun quyidagi Kirxgoff shartlari bajarilsin:

$$C^-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^-(x,t)|_{x=0}=C^+\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^+(x,t)|_{x=0},\quad 0<t\le T.$$

Grafning chekka nuqtalarida quyidagi chegaraviy shartlar bajarilsin

$$u(x,t)|_{x=\partial\Gamma}=\varphi(t),\ \frac{\partial}{\partial x}u^-(x,t)|_{x=\partial\Gamma_1}=\phi(t),\ 0<t\le T,$$

bu yerda barcha $j=\overline{2,k+m}$ uchun

$$C^-=(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},...,\frac{1}{a_k}),\ C^+=(\frac{1}{a_{k+1}},...,\frac{1}{a_{k+m}}),\ a_1=1,\ a_j\ne 0$$

va $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{k+m})^T$, $\phi=(\phi_1,\phi_2,...,\phi_k)^T$.

Qo‘yilgan masalaning yechimi mavjud va yagonaligi isbotlangan.

6-teorema. *Aytaylik, B^TB-E manfiy aniqlangan matritsa bo‘lib, $u_j^0\left(x\right)\in C\left(\overline{b_j}\right)$, $D_{0t}^{1-\alpha}f_j(x,t)\in C^{0,1}(\overline{b_j}\times[0,T])$, $j=\overline{1,k+m}$, $\varphi(t)$ va $\phi(t)$ funksiyalar $[0,T]$ kesmada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda qaralayotgan masala yagona yechimga ega.*

Dissertatsiyaning “**Metrik graflarda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar**” deb nomlangan uchinchi bobida subdiffuziya tenglamasi uchun ikki xil metrik grafda boshlang‘ich-chegaraviy masalalar qaralgan.

Aytaylik, Ω graf O nuqtada birlashuvchi $m=k+l$ ta teng qirralardan tashkil topgan bo‘lsin. Grafning koordinatalarini 0 dan L gacha, har bir qirrasini esa $B_j,\ j=\overline{1,m}$ orqali belgilaylik.

Ushbu grafning har bir qirrasida ushbu

$$D_{0t}^{\alpha}u_j(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_j(x,t)=f_j(x,t),\ \ 0<x<L,\,0<t<T,\ j=\overline{1,m} \tag{2}$$

bu yerda $0<\alpha<1$, subdiffuziya tenglamalarini va ushbu

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u_j(x,t)=\varphi_j(x),\ \ 0\le x\le L,\ \ j=\overline{1,m} \tag{3}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini qidiraylik.

Qirralarning tutashish nuqtasida esa barcha $t\in[0,T]$ lar uchun Kirxgoff shartlari bajarilsin:

$$u_1(0,t)=u_2(0,t)=...=u_m(0,t),\ 0<t\le T, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x}u_i(x,t)\right)=0,\ \ 0<t\le T. \tag{5}$$

Grafning chekka nuqtalarida quyidagicha bir xil:

$$u_i(L,t)=\psi_i(t),\quad 0<t\le T,\, i=\overline{1,m}, \tag{6}$$

yoki quyidagicha aralash:

$$u_i(L,t)=\gamma_i(t),\ 0<t\le T,\ i=\overline{1,k},\ \frac{\partial}{\partial x}u_j(L,t)=\gamma_j(t),\ 0<t\le T,\ \ j=\overline{k+1,m}. \tag{7}$$

chegaraviy shartlarni qaraymiz.

5-masala. (2) tenglamaning (3)-(6) shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimlari topilsin.

6-masala. (2) tenglamaning (3)-(5) va (7) shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimlari topilsin.

7-teorema. *Aytaylik,* $t^{1-\alpha}\phi_i(t),\ t^{1-\alpha}\varphi_i(t)\in C[0,T]\ \ (i=\overline{1,m},T>0),$ *va* $t^{1-\alpha}f(x,t)\in C^{0,1}\{(x,t):0\le x\le L,0<t<T\}$. *bo‘lsin. U holda 5-masalaning yagona yechimi quyidagi ko‘rinishga ega:*

$$u(x,t)=-\int_0^t(G_\xi(x,t;L,\tau)u(L,\tau)+)d\tau-\int_0^L\varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi-$$

$$-\int_0^t\int_0^L G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

bu yerda $u=(u_1,...,u_m)^T$, $F=(f_1,...,f_m)^T$ *va*

$$G(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n M^n\left(\Gamma(x-\xi+2nL,t-\tau)+M\Gamma(x+\xi+2nL,t-\tau)\right).$$

8-teorema. *Aytaylik,* $\varphi_i(x)\in C[0,L],\ t^{1-\alpha}\gamma_i(t)\in C[0,T]$. *bo‘lsin. U holda 6-masalaning yagona yechimi quyidagi ko‘rinishga ega:*

$$u(x,t)=\int_0^t G_{1\xi}^{(N)}\left(x,t;L,\tau)\frac{\partial u_N(\xi,\tau)}{\partial}|_{\xi=L} - G_{1\xi}^{(D)}(x,L;t,\tau)u_D(L,\tau)\right)d\tau -$$

$$-\int_0^L \gamma(t)G_1(x,t;\xi,\tau)d\xi - \int_0^t\int_0^L G_1(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

bu yerda

$$G_1^{(D)}=\begin{pmatrix} G_1^{11} & G_1^{12} & ... & G_1^{1m} \\ ... & ... & ... & ... \\ G_1^{k1} & G_1^{k2} & ... & G_1^{km} \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},\ G_1^{(N)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ G_1^{k+1,1} & G_1^{k+1,2} & ... & G_1^{k+1,m} \\ ... & ... & ... & ... \\ G_1^{m1} & G_1^{m2} & ... & G_1^{mm} \end{pmatrix},$$

$u=(u_1,...,u_m)^T$, $u_D=(u_1,...,u_k,0,...,0)^T$, $u_N=(0,...,0,u_{k+1},...,u_m)^T$ *va* $F=(f_1,...,f_m)^T$.

Ikkinchi paragrafda $3m-1$ ta teng qirraga ega bo‘lgan zinapoyasimon graf qaralgan. Graf qirralarining koordinatalarini qirraning 0 dan L gacha bo‘lgan intervalga izometrik akslantirishi sifatida aniqlaymiz. Graf qirralarini $B_k,\ k=\overline{1,3m-1}$ orqali belgilaymiz. Biz shu grafda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalani o‘rganamiz. Bunda, m ning juft va toq qiymatlarida grafning chekka qirralari farq qiladi. Shu sababli ikki xil holatni qaraymiz.

Aytaylik, m juft son bo‘lsin. (3) subdiffuziya tenglamasining (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini qidiramiz.

Grafning ichki nuqtalarida yechimlar barcha $t\in[0,T]$, $j=\overline{0,[\frac{m-2}{2}]}$ lar uchun quyidagi Kirxgoff shartlarini qanoatlantirsin:

$$u_{6j+2}(0,t)=u_{6j+3}(0,t)=u_{6j+5}(0,t),$$

$$u_{6j+4}(0,t)=u_{6j+6}(0,t)=u_{6j+7}(0,t),$$

$$u_{6j+1}(L,t)=u_{6j+3}(L,t)=u_{6j+4}(L,t),$$

$$u_{6j+5}(L,t)=u_{6j+6}(L,t)=u_{6j+8}(L,t) \qquad (8)$$

va

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{6j+2}(x,t)+u_{6j+3}(x,t)+u_{6j+5}(x,t)\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{6j+4}(x,t)+u_{6j+6}(x,t)+u_{6j+7}(x,t)\right)=0,$$

$$\lim_{x\to L}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{6j+1}(x,t)+u_{6j+3}(x,t)+u_{6j+4}(x,t)\right)=0,$$

$$\lim_{x\to L}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{6j+5}(x,t)+u_{6j+6}(x,t)+u_{6j+8}(x,t)\right)=0 \qquad (9)$$

Bu shartlar tarmoqlanish nuqtalarida oqimning saqlanishini ifodalaydi.

Yechim grafning chekka nuqtalarida quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$u_1(0,t)=\psi_1(t),\;\; u_{3m-1}(0,t)=\psi_2(t),\;\; u_2(L,t)=\psi_3(t),\;\; u_{3m-2}(L,t)=\psi_4(t). \qquad (10)$$

7-masala. (2) tenglamaning (3) boshlang‘ich shart va (8) – (10) shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimi topilsin.

Ushbu qo‘yilgan masala yechilgan va yechimning integral ko‘rinishi topilgan.

9-teorema. *Aytaylik,* $t^{1-\alpha}\phi_i(t)\in C[0,T],\varphi_i(x)\in C[0;L],$ $(i=\overline{1,3m-1},T>0), m-$ *juft son va* $t^{1-\alpha}f(x,t)\in C^{0,1}\{(x,t):0\le x\le L, 0\le t\le T\}.$ *bo‘lsin. U holda 7-masalaning yagona yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:*

$$u(x,t)=\int_0^t(G_\xi(x,t;0,\tau)U^{1,3m-1}(0,\tau))d\tau-\int_0^t(G_\xi(x,t;L,\tau)U^{2,3m-2}(L,\tau))d\tau-$$

$$-\int_0^L\varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi-\int_0^t\int_0^L G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

bu yerda $U^{i,j}=(0,0,...0,u_i,0,...,0,u_j,0,...,0)^T$, $F=(f_1,...,f_{3m-1})^T$ *va*

$$G(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(M^n\Gamma(x-\xi+2nL,t-\tau)+(DC^{-1})^n\Gamma(x+\xi+2nL,t-\tau)\right).$$

XULOSA

Dissertatsiya ishi metrik graflarda berilgan kasr hosilali Eyri va subdiffuziya tenglamalari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni Grin funksiyasi metodi va potensiallar metodi orqali tadqiq qilishga bag‘ishlangan.

Tadqiqot ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Ochiq yulduzsimon metrik grafda kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining aniq integral ko‘rinishi topildi.

2. Ochiq va yopiq yulduzsimon metrik grafda vaqt bo‘yicha kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masala yechimi topildi. Potensiallar metodi orqali yechimning aniq ko‘rinishi topildi.

3. Yopiq yulduzsimon metrik grafda subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masala yechimi topildi. Umumlashgan Grin funksiyasi metodi orqali yechimning aniq ko‘rinishi topildi.

4. Umumlashgan Grin funksiyasi metodi orqali zinapoyasimon grafda berilgan subdiffuziya tenglamasining yechimi topildi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

РАХИМОВ КАМОЛАДДИН УРИНБАЕВИЧ

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ, ЗАДАННЫХ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Ташкент – 2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.3.PhD/FM747.

Диссертация выполнена в национальном университете Узбекистана имени М. Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Собиров Зарифбой Ахмедович** кандитат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
	Каримов Эркинжон Тулкинович доктор физико-математических наук, старший научний сотрудник
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 14 » марта 2023 года в 17:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В. И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В. И. Романовского (зарегистрирована за № 157). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 28 » февраля 2023 года.
(протокол рассылки № 2 от « 28 » февраля 2023 года).

У.А. Розиков
Председатель Научного совета
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

А.А. Азамов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Известно, что большинство научных исследований в физике, механике, химии, биофизике, биотехнологии и производстве в основном приводится к теории дифференциальных уравнений с частными производными. В том числе, многие процессы в разветвленных системах позволяет исследовать эти уравнения на графах. Например, при моделировании процессов в разветвленных областях используются начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными на метрических графах. При этом в точках разветвления графа применяется общее условие локального сохранения потока, то есть условие Кирхгоффа, что в самом элементарном случае обеспечит условие непрерывности решения на вершине графа и равенства нулю суммы исходящих односторонних производных решения на вершине.

Моделирование процессов распространение импульсов в нервных системах приводится к начально-краевым задачам для уравнения диффузии на метрических графах. Линеаризованное уравнения Кортевега-де Фриза, иногда называемый уравнением Эйри, обеспечивает асимптотическое описание линейных, ненаправленных, слабодиспергирующих длинных волн, например, волн на мелкой воде. Также дифференциальные уравнения, заданных на графах, широко используются при математическом моделировании процессов в области медицины. В частности, при моделировании процессов, связанных с РНК в генах, дифференциальные уравнения рассматриваются в лестничных графах.

В последние годы, в нашей стране большое внимание выделяется современным методам в фундаментальных науках, в том числе и уравнениям математической физики. Сюда можно включить все внимания, уделяемые изучению начально-краевых задач для неклассических уравнений в метрических графах. Значительные результаты были получены при анализе процессов квантовой физики с применением неклассического уравнения Эйри и субдиффузии, заданного на метрических графах. Главными вопросами и направлениями деятельности математической науки являются проведение изучений на уровне интернациональных стандартов по приоритетным направлениям «Дифференциальные уравнения и математическая физика».[1] Поэтому решение начально-краевые задачи для уравнений на метрических графах, обобщить метод потенциалов для решения начально-краевых задач и разработать методы решения субдиффузионных уравнений на метрических графах является важными задачами в науке.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «Об организации вновь созданных научно-исследовательских институтов Академии наук Республики Узбекистан».

Исследования данной диссертационной работы в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В конце 80-х годов прошлого столетия русским ученым Мерковом начато исследование уравнение теплопроводности на графах. Чешские ученые П.Экснер и П.Себа исследовали краевые-задачи для классических уравнений на графе. Интерес к начально-краевым задачам для уравнения Эйри был еще в середины прошлого века. В начале текущего века итальянской математиком Б.Пеллони изучено краевые задачи для уравнения третьего порядка. В 2010-х годах опубликованы ряд расследований, посвященных начально-краевым задачам для уравнения Эйри на метрических графах и задаче Коши для уравнения Эйри на разных метрических графах. В последние годы многие ведущие ученые активно исследуют уравнения дробного порядка. В том числе и наши соотечественники Ш. Алимов, Р. Ашуров, Э. Каримов, О. Абдуллаев и другие. В начале XXI века были опубликованы немало качественных работ о применение и важности дробных производных. В частности, русским математиком А.Алиевым были получены важные оценки для производных дробного порядка, что дал мощный толчок к изучению проблем для уравнений с дробной производной. В начале 10-х годов текущего столетия русским ученым А.В. Псху было построено фундаментальное решения задачи Коши для уравнения Эйри с дробным производным по времени.

Известно, что уравнение диффузии широко используется во многих областях науки, включая физику, биологию, механику, химию и другие. В частности, Бартломей Дыбиец и Ева Гудовска-Новак в 2009 году рассмотрели модель для уравнения аномальной диффузии. Позже, Ленглендс и Генри ввели мезоскопические и макроскопические модели уравнения субдиффузии для моделирования химических направленный транспортировку биологических организмов. А.В.Псху и С.Рехвиашвили исследовали асимптотическое краевую задачу без начальных условий для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной по времени. В последние годы, русские ученые Д.Герасимов, И.Попов, И.Блинова нашли решения для магнитогидродинамической смешанной задачи наножидкости Максвелла. С.А. Чивилхин и В.В. Гусаров изучали модели с дробными производными для описания динамики в наножидкостях. В частности, замечено, что скорость теплообмена увеличивается с увеличением размера наночастицы и с увеличением порядка дробной производной по времени. Метод функций Грина является мощным инструментом для решения краевых задач. А.В. Псху в своей монографии (2005) использовал метод функций Грина для уравнений дробного порядка. Д.Мехди и Д.Мохаммад по методу функции Грина нашли численное решение краевой задачи для стационарных и нестационарных дифференциальных уравнения в разных областях.

Дифференциальные уравнения с дробной производной на метрических графах служат точной моделью большинство физических разветвленных систем, демонстрируемых течения, например, течения через разветвленные нанотрубки. По этой причине, увеличились исследования по этой тематике. В том числе, и уравнения Шрёдингера на метрическом графе хорошо изучены. Д.С. Никифоров и И.В. Блинова в статьи 2009 года исследовали оператор Шредингера на графе с переменными ребрами. Также, Г. Худойберганов, З. Собиров и М. Эшимбетов исследовали уравнение Шредингера на метрическом графе методом унифицированного преобразования Фокаса. В 2020 году И. Лобанов и Д. Никифоров предложили модель зависящего от времени геометрического графа для описания динамического эффекта Казимира.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялось диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательских работ Национального университета Узбекистана в рамках исследовательского проекта №14-022 RG/MATHS/AS_G; UNESCO FR:324028610 по теме «Нелинейные эволюционные уравнения и транспорт на метрических графах, возникающие в мезоскопической физике».

Целью исследования является постановка задач для уравнений с дробными производными в метрических графах, в частности краевых задач для уравнений Эйри, субдиффузии, и построение решения этих задач.

Задачи исследования:

построить решения задачи Коши для уравнения Эйри с дробной производной по времени в простых звездообразных метрических графах с полубесконечными ребрами и проанализировать волновую динамику в вершине графа, используя полученные решения;

найти решение начально-краевой задачи для уравнений Эйри на звездообразном метрическом графе, состоящем из конечного числа конечных и полубесконечных интервалов;

использовуя метода функции Грина решить начально-краевую задачу для уравнения субдиффузии на звездообразном графе;

доказать существование и единственность решения уравнения субдиффузии на метрическом графе лестничного типа, состоящем из конечного интервала.

Объектом исследования являются простые открытые и замкнутые звездообразные метрические графы, звездообразный метрический граф, состоящий из конечного числа конечных и полубесконечных интервалов, метрический граф лестничного типа, состоящие из конечного интервала.

Предметом исследования являются уравнение субдиффузии, уравнение Эйри с дробной производной по времени, задача Коши, начально-краевые задачи, метод функции Грина, дробные производные.

Методика исследования. В работе используются метод потенциалов, метод функции Грина, метод интегралов энергии, дифференциальные уравнения с дробной производной, а также методы решения начально-краевых задач.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получено решение задачи Коши для уравнения Эйри в простых открытых звездообразных метрических графах;

получено интегральное решение начально-краевых задач для уравнений Эйри и уравнения субдиффузии на метрических графах, соодержащих конечные и бесконечные интервалы;

обобщен метод функции Грина на матричной функции Грина для решения начально-краевых задач для уравнений субдиффузии на графах;

доказаны существование и единственность решения начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии на метрическом графе лестничного типа с равными ребрами.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

Полученные результаты и методы, использованные в диссертации, могут быть использованы в качестве учебного курса для магистрантов и докторантов высших учебных заведений. Кроме того, результаты диссертационной работы по однозначному решению начально-краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, заданных в метрических графах, могут быть использованы для расчета коэффициентов прохождения и отражения в процессах, связанных с распространением волн в разветвленных системах, и для разработки математических моделей процессов.

Достоверность результатов исследования основана на использовании метода функции Грина, ряда лемм, доказывающих свойств потенциалов с дробной производной и теории линейных интегральных уравнений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы для изучения свойств рассеяния тепла и распространения волн в разветвленных структурах.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что результаты могут быть использованы для определения коэффициентов пропускания и возврата распространения волн в точке разветвления, для анализа волновых процессов в разветвленных мезоскопических и макроскопических полях, для математического моделирования процесса распространения импульсов в нервных системах.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по метод потенциалов и методу функции Грина для уравнений Эйри и субдиффузии на метрических графах внедрены в практику по следующим направлениям:

функции Грина для уравнения субдиффузии, расмотренный на графе были использованы для нахождения граничных значений данных краевых задач и для построения базиса ортонормальной системы с голоморфными функциями матричного аргумента в гранте ОТ-Ф4-(37+29) «Функциональные свойства A-аналитических функций и их применения. Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях», для доказательства функциональных свойств аналитических функций (Справка № 04/11-6625 от 22 октября 2022 года, Национальный Университет Узбекистана). Результаты диссертации позволили доказать аналог формулу Коши;

фундаментальное решение задачи Коши для уравнения Эйри было использовано при доказательстве существования решения неклассического уравненения третьего порядка и при нахождения интегралного вида решения по проекту ОТ-Ф-4-(36+32) «Разработка новых методов решения задач математической физики и оптимального управления. Неклассические начальные и спектральные задачи и их приложения для уравнений в частных производных нечетного порядка» (Справка № 04/11-6626 от 22 октября 2022 года, Национальный Университет Узбекистана). Использование научного результата позволило им доказать единственность и существование решения для неклассического уравнения третьего порядка.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 6 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 2 работа опубликована в зарубежном журнале и 3 – в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на девять параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 108 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Предварительные результаты**», приведены необходимые понятия и вспомогательные результаты по теории дробных производных, уравнений Эйри и субдиффузии. В этой предварительной главе мы приводим понятие дробной производной и основные свойства функций типа Райта. Кроме того, мы рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйри с дробной производной по времени. Последний, 4 параграф главы I посвящен методу функции Грина для уравнения субдиффузии. Все приведенные в параграфах 1, 2 и 3 понятия и утверждения общеизвестны, мы их заимствовали из монографий монографий И.Подлубни и из статьи А.В. Псху и Л. Каттабрига, а результаты 4 параграф из монографии А.В. Псху.

Определение 1. Операторы, определяемые соотношениями

$$\partial_{\eta t}^{\alpha} g(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\eta}^{t}\frac{g^{(n)}(\xi)}{\left(t-\xi\right)^{\alpha-n+1}}d\xi, \quad n-1<\alpha<n,$$

и

$$D_{\eta t}^{\alpha} g(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left(\int_{\eta}^{t}\frac{g(\xi)}{\left(t-\xi\right)^{\alpha-n+1}}d\xi\right), \quad n-1<\alpha<n,$$

соответственно, называются дробными производными Капуто и Римана-Лиувилля. Оператор, определяемый равенством

$$J_{0t}^{\alpha} g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{g(\xi)}{\left(t-\xi\right)^{1-\alpha}}d\xi, \quad \alpha>0,$$

называется оператором дробного интегрирования. Иногда вместо обозначение $D_{\eta t}^{-\alpha} g(t)$ используется $J_{\eta t}^{\alpha} g(t)$. Производные Капуто и Римана-Лиувилля связаны следующим соотношением:

$$\partial_{0t}^{\alpha} g\left(t\right)=D_{0t}^{\alpha} g\left(t\right)-\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}g\left(0\right), \ 0<\alpha<1.$$

Лемма 1. Пусть функция $v\left(t\right)$ абсолютно непрерывна на отрезке $\left[0,T\right]$. Тогда имеет место следующее неравенство

$$v\left(t\right)\partial_{0t}^{\alpha} v\left(t\right)\geq\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha} v^2\left(t\right).$$

Лемма 2. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ для почти всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет неравенство

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) \le c_1 y(t) + c_2(t), \quad 0 < \alpha \le 1,$$

где $c_1 > 0$ и $c_2(t)$ неотрицательная и интегрируемая функция на $[0,T]$. Тогда имеет место неравенство

$$y(t) \le y(0) E_{\alpha}\left(c_1 t^{a}\right) + \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}\left(c_1 t^{\alpha}\right) D_{0,t}^{-\alpha} c_2(t),$$

где функции $E_{\alpha}(z)$ и $E_{\alpha,\mu}(z)$ функции Миттаг–Леффлера.

В теории дробного исчисления важную роль играет функция Райта, определяемой с помощью ряда

$$\phi(\lambda,\mu;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)}, \quad \lambda > -1, \mu \in \mathbb{C}.$$

Определение 2. Функция

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)}$$

называется функцией типа Райта. При $\alpha = \mu = 1$ это функция совпадает с функцией Райта: $e_{1,\beta}^{1,\delta}(z) = \phi(-\beta,\delta,z)$.

В работе А.В.Псху исследовано уравнение Эйри с дробной производной Капуто по времени

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x,t) = f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, 0 < t \le T,$$

с начальным условием

$$\lim_{t \to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x,t) = \tau(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\tau(x)$ – заданная непрерывная функция и $0 < \alpha \le 1$.

При этом, найдено фундаментальное решение вышеуказанного уравнения в виде

$$G_{\alpha}^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\eta) = \frac{1}{3(t-\eta)^{1-2\alpha/3}} \begin{cases} \phi(-\frac{\alpha}{3},\frac{2\alpha}{3};\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha/3}}), & x \le \xi, \\ -2\mathrm{Re}[e^{2\pi i/3}\phi(-\frac{\alpha}{3},\frac{2\alpha}{3};e^{2\pi i/3}\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha/3}})], & x > \xi, \end{cases}$$

где $t > \eta$. Приведены несколько свойств этой функции.

Теорема 1. Пусть функция $\tau(x) \in C(\mathbb{R})$ и

$$\lim_{x \to \pm\infty} \tau(x) \exp\left(-\nu_{\pm} x^{\frac{3}{3-\alpha}} T^{-\frac{3}{3-\alpha}}\right) = 0,$$

для некоторых ν_+ и ν_-. И функция $f(x,t)$ представима в виде $f(x,t)=D_{0t}^{-\gamma}g(x,t)$, где $t^{1-\delta}g(x,t)\in C(\overline{D})$, $\gamma>0,\ \delta>0,\ \gamma+\delta>1-\alpha$, и выполнено соотношение

$$\lim_{x\to\pm\infty} t^{1-\delta-\gamma}g(x,t)\exp\left(-\nu_\pm x^{\frac{3}{3-\alpha}}T^{-\frac{3}{3-\alpha}}\right)=0,$$

для некоторых ν_+ и ν_-. Тогда функция

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(\xi)D_{0t}^{\beta-1}G_\alpha^{\frac{2\alpha}{3}}(x-\xi,t-0)d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)G_\alpha^{\frac{2\alpha}{3}}(x-\xi,t-\eta)d\xi d\eta$$

является решением задачи Коши для уравнения Эйри с дробной производной по времени.

Далее, приведен метод функции Грина для решения краевых задач для уравнения субдиффузии

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)-D_{0,t}^{\alpha}u(x,t)=f(x,t),$$

в прямоугольной области D. Это уравнение называется уравнением субдиффузии при $0<\alpha\le 1$, и волновым уравнением дробного порядка при $1<\alpha<2$.

Задача 1. Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения субдиффузии, $0<\alpha<2,\ n-1<\alpha\le n,\ n\in\{1,2\}$, в области D, удовлетворяющие краевым условиям

$$u(a_1,t)=\varphi_0(t),\ u(a_2,t)=\varphi_1(t),\ 0<t<b,$$
$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-k}u(x,t)=\tau_k(x),\ a_1<x<a_2,$$

где $\varphi_0(t),\ \varphi_1(t),\ \tau_k(x)$ – заданные функции.

Определение 3. Функция $G(x,t,\xi,\eta)$, которая является решением уравнения

$$G(x,t,\xi,\eta)-D_{t\eta}^{\alpha}G(x,t,\xi,\eta)=0$$

удовлетворяет условиям

$$\lim_{\xi\to a_1}G(x,t,\xi,\eta)=0,\ \lim_{\xi\to a_2}G(x,t,\xi,\eta)=0,\ t\ne\eta,$$

называется функцией Грина первой краевой задачи для уравнения субдиффузии.

Функция Грина первой краевой задачи имеет вид

$$G(x,t,\xi,\eta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\Gamma_n(x-\xi,t-\eta)-\Gamma_n(x+\xi-2a_1,t-\eta)\right],$$

где

$$\Gamma_n(s,\tau)=\frac{1}{2}\tau^{\beta-1}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{\left|s+2n(a_2-a_1)\right|}{\tau^\beta}\right).$$

Функция Грина второй краевой задачи имеет вид

$$G_1(x,t,\xi,\eta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\Gamma_n(x-\xi,t-\eta)+\Gamma_n(x+\xi-2a_1,t-\eta)\right],$$

где $\Gamma_n(s,\tau)$.

Решение рассматриваемой краевой задачи имеет вид

$$u(x,t)=\int_0^t \nu_1(\eta)G_\xi(x,t,a_2,\eta)d\eta-\int_0^t \nu_0(\eta)G_\xi(x,t,a_1,\eta)d\eta+$$

$$+\int_{a_1}^{a_2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\tau_k(\xi)\frac{\partial^{k-1}}{\partial\eta^{k-1}}G_1(x,t,\xi,0)d\xi-\int_0^t\int_{a_1}^{a_2} f(\xi,\eta)G_1(x,t,\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Вторая глава диссертации, названная «**Уравнение Эйри с дробной производной по времени на звездообразном графе**», состоит из четырех параграфов. В этой главе диссертации исследованы начально-краевые задачи для уравнения Эйри с дробной производной по времени.

Помимо фундаментального решения, найденного А.В.Псху нам понадобится элементарное решение

$$V_\alpha^{2\alpha/3}(x,t)=\frac{1}{3t^{1-2\alpha/3}}\operatorname{Im}[e^{2\pi i/3}\phi(-\frac{\alpha}{3},\frac{2\alpha}{3};e^{2\pi i/3}\frac{x}{t^{\alpha/3}})],\ \ x\ge 0.$$

Для функции $V_\sigma^\mu(x,t)$ доказаны следующие соотношения:

$$\partial_{0t}^{\nu}V_\sigma^\mu(x,t)=V_\sigma^{\mu-\nu}(x,t);$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}V_\sigma^\mu(x,t)=V_\sigma^{\mu-\sigma}(x,t)$$

и

$$V_\sigma^\mu(0,t)=\frac{\sqrt{3}}{6\Gamma(\mu)t^{1-\mu}}.$$

С помощью фундаментальной и элементарной решений составим функции

$$w_1(x,t)=\int_0^t G_\alpha^{2\alpha/3}(x-a,t-\eta)\tau_1(\eta)d\eta,$$

$$w_2(x,t)=\int_0^t V_\alpha^{2\alpha/3}(x-a,t-\eta)\tau_2(\eta)d\eta,$$

$$w_3(x,t)=\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}G_\alpha^{2\alpha/3}(x-a,t-\eta)\tau_3(\eta)d\eta,$$

$$w_4(x,t)=\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}V_\alpha^{2\alpha/3}(x-a,t-\eta)\tau_4(\eta)d\eta,$$

$$w_5(x,t)=\int_a^b G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t)\tau_5(\xi)d\xi,$$

и

$$w_6(x,t)=\int_0^t\int_a^b G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Доказаны следующие свойства этих потенциалов.

Лемма 3. Пусть $t^{1-\alpha}\tau_k(t), k=1,2$ непрерывные и ограниченные функции. Тогда:

1. Функции $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$ являются решениями уравнения

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)-\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}=0;$$

2. Для функций $w_1(x,t)$ и $w_2(x,y)$ имеют место соотношения

$$\lim_{t\to 0}w_k(x,t)=0, \qquad k=1,2.$$

Лемма 4. Пусть функции $t^{1-\alpha}\tau_k(t),\ k=3,4$ – непрерывные функции с ограниченными вариациями на некотором интервале. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\lim_{x\to a-0}w_3(x,t)=\frac{1}{3}\tau_3(t),$$

$$\lim_{x\to a+0}w_3(x,t)=-\frac{2}{3}\tau_3(t)$$

и

$$\lim_{x\to a+0}w_4(x,t)=0.$$

Лемма 5. Пусть $\tau_5(x)\in C[a,b]$. Тогда функция $w_5(x,t)$ является решением уравнения

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)=0$$

и удовлетворяет начальному условию:

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}w_5(x,t)=\tau_5(x).$$

Лемма 6. Пусть $t^{1-\alpha}f(x,t)\in C^{0,1}\big([a,b]\times(0,T]\big)$. Уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)=f(x,t)$$

с начальным условием

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\,|_{t=0}=0$$

имеет решение в виде потенциала

$$w_6(x,t)=\int_0^t d\eta\int_a^b G_{\alpha}^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\eta)f(\xi,\eta)d\xi.$$

Пусть $E_1=\{(x,t):0<x<1,0<t\le T\}$, $E_2=\{(x,t):0<x<\infty,0<t\le T\}$, $E_3=\{(x,t):-\infty<x<0,0<t\le T\}$.

Рассмотрим следующие задачи для уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)=f(x,t), \tag{1}$$

называемой уравнением Эйри с дробной производной.

Задача 2. Найти регулярное решение уравнении (1) на можестве E_1, удовлетворяющий начальную условию

$$D_{0t}^{\alpha-1}u\left(x,0\right)=0,\quad 0\le x\le 1,$$

граничные условии

$$u\left(0,t\right)=\varphi_1\left(t\right),\quad u_x(0,t)=\varphi_2\left(t\right),\quad 0<t\le T,$$

и

$$u\left(1,t\right)=\varphi_3\left(t\right)\quad 0<t\le T.$$

Здесь под регулярным решением понимается решение из класса

$$V_1=\{u(x,t):u\in C^{2,0}(E_1),\ D_{0,t}^{\alpha}u\in C(E_1),\ t^{1-\alpha}u\in C(\bar{E}_1),t^{1-a}u_x\in C([0,1)\times[0,T])\}.$$

Задача 3. Найти решение уравнении (1) на можестве E_2, удовлетворяющий начальную условию

$$D_{0t}^{\alpha-1}u\left(x,0\right)=0,\quad 0\le x<\infty,$$

и граничным условиям

$$u(0,t)=\psi_1(t);\ u_x(0,t)=\psi_2(t)\quad 0<t\le T.$$

Здесь под регулярным решением понимается решение из класса

$$V_2=\{u(x,t):u\in C^{2,0}(E_2),\ D_{0,t}^{\alpha}u\in C(E_2),\ t^{1-\alpha}u\in C(\bar{E}_2),t^{1-a}u_x\in C([0,+\infty)\times[0,T])\}.$$

Задача 4. Найти решение уравнении на можестве E_2, удовлетворяющий начальному условию

$$D_{0t}^{\alpha-1}u\left(x,0\right)=0,\ -\infty<x\le 0,$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\psi(t)\quad 0<t\le T.$$

Здесь под регулярным решением понимается решение из класса

$$V_3=\{u(x,t):u\in C^{2,0}(E_3),\ D_{0,t}^{\alpha}u\in C(E_3),\ t^{1-\alpha}u\in C(\bar{E}_3),t^{1-a}u_x\in C((-\infty,0]\times[0,T])\}.$$

Доказаны существование и единственность решений этих задач.

Теорема 2. *Если* $t^{1-\alpha}\varphi_j\left(t\right)\in C\left[0,T\right],\ (j=1,2,3)$ *и* $t^{1-\alpha}f\left(x,t\right)\in C^{0,1}(\overline{E_1}),$ *то Задача 2 имеет единственное решение в виде*

$$u(x,t)=\int_0^t G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t-\tau)\lambda(\tau)d\tau+\int_0^t V_\alpha^{2\alpha/3}(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t G_\alpha^{2\alpha/3}(x-1,t-\tau)\nu(\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где неизвестные функции $\lambda\left(t\right),\ \mu\left(t\right)$ *и* $\nu\left(t\right)$ *определяются по системе*

$$\Phi(t)=\int_0^t K(t-\tau)\Phi(\tau)d\tau+\tilde{F}(t).$$

Теорема 3. *Если* $t^{1-\alpha}\psi_j\left(t\right)\in C\left[0,T\right],\ (j=1,2,3)$ *и* $t^{1-\alpha}f\left(x,t\right)\in C^{0,1}(\overline{E_2}),$ *то Задача 3 имеет единственное решение в виде*

$$u(x,t)=\int_0^t G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t-\tau)\lambda(\tau)d\tau+\int_0^t V_\alpha^{2\alpha/3}(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau+Q(x,t),$$

где

$$Q(x,t)=\int_0^t\int_0^{+\infty}G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

$$\lambda(t)=\frac{3}{2}\partial_{0t}^{2\alpha/3}\left(\psi_1(t)-Q(0,t)\right)+\frac{3}{2}\partial_{0t}^{\alpha/3}\left(\psi_2(t)-\frac{\partial}{\partial x}Q(0,t)\right)$$

и

$$\mu(t)=\sqrt{3}\partial_{0t}^{2\alpha/3}\left(\psi_1(t)-Q(0,t)\right)-\sqrt{3}\partial_{0t}^{\alpha/3}\left(\psi_2(t)-\frac{\partial}{\partial x}Q(0,t)\right).$$

Теорема 4. *Если* $t^{1-\alpha}\psi\in C[0,T]$ *и* $t^{1-\alpha}f(x,t)\in C^{0,1}(\overline{E_3})$, *то Задача 4 имеет единственное решение в виде*

$$u(x,t)=\frac{3}{2}\int_0^t G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t-\tau)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}R(x,\tau)-\psi(\tau)\right)d\tau+R(x,t),$$

где

$$R(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^0 G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

В третьем параграфе второй гдавы диссертации исследована задача Коши для уравнения Эйри с дробной производной по времени на звездообразном графе с полубесконечными ребрами.

Пусть граф Γ имеет k входящих и m исходящих ребер. Во входящих ребрах координаты определяем от $-\infty$ до $0,$ а в исходящих ребрах от 0 до $+\infty.$ Ребра графа обозначим через $B_j,\ j=\overline{1,k+m}$.

Постановка задачи. На каждом ребре графа Γ рассмотрим уравнение Эйри с дробной производной по времени

$$\partial_{0t}^{\alpha}u_j(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_j(x,t)=f_j(x,t),\ \ 0<t\le T,x\in B_j,$$

с начальными условиями

$$u_j(x,0)=\phi_j(x),\ \ x\in\overline{B_j},\ \ j=\overline{1,k+m}.$$

На вершине графа – в точке 0, требуем выполнение следующих условий склеивания:

$$a_j u_j(0,t)=u_1(0,t),\ 0<t\le T,\ \ j=\overline{2,k+m},$$

$$u_x^+(0,t)=Bu_x^-(0,t),\ 0<t\le T,$$

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_j(x,t)\Big|_{x=0}=\sum_{i=k+1}^{k+m}\frac{1}{a_i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_i(x,t)\Big|_{x=0},\ 0<t\le T,$$

где $a_1\equiv 1,\ a_j\ne 0,\ j=\overline{1,k+m},$ $u^-=(u_1,u_2,...,u_k)^T$, $u^+=(u_{k+1},u_{k+2},...,u_{k+m})^T$ и B – постоянная матрица размерности $m\times k.$ Еще мы используем обозначение $u=\left(u_1,u_2,...,u_{k+m}\right)^T$.

Найдено точное представление единственной решения рассматриваемой задачи.

Теорема 5. *Пусть* $B^T B - E$ *отрицательно определенная матрица,* $\phi_j(x) \in C(\overline{B_j})$, $f(x,t) \in C(B_j \times [0,T])$, $j = \overline{1, k+m}$, *и эти функции обращаются в ноль при* $x \to \pm\infty$. *Тогда единственное решение рассматриваемой задачи имеет вид:*

$$u(x,t) = F(x,t) + \int_0^t U(x-0, t-\tau) M^{-1} \Phi(\tau) d\tau,$$

где

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t) I_k & | & 0_{k\times m} & | & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & | & G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t) I_m & | & V_\alpha^{2\alpha/3}(x,t) I_m \end{pmatrix}.$$

В четвертом параграфе рассмотрена начально-краевая задача для уравнения Эйри на звездообразном метрическом графе с конечными ребрами.

Пусть граф Γ_1 имеет k входящих и m исходящих ребер. Во входящих ребрах координаты определяем от $L_j\left(L_j < 0,\ j = \overline{1,k}\right)$ до 0, а в исходящих ребрах от 0 до $L_i\left(L_i > 0,\ i = \overline{k+1, k+m}\right)$. Ребра графа обозначим через b_j, $j = \overline{1, k+m}$.

Постановка задачи. Пусть $f = (f_1, f_2, ..., f_{k+m})^T$, $u^- = (u_1, u_2, ..., u_k)^T$, $u^+ = (u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_{k+m})^T$ и $u = \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix}$. На каждом ребре графа Γ_1 рассмотрим уравнение Эйри с дробной производной по времени

$$\partial_{0t}^\alpha u(x,t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x,t) = f(x,t),\ \ 0 < t \le T, x \in B_j,$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ x \in \overline{B_j},\ \ j = \overline{1, k+m},$$

здесь $u_0 = \left(u_1^0, u_2^0, ..., u_{k+m}^0\right)^T$.

На вершине графа требуем следующие условия согласования

$$Au(0,t) = 0,\ \ 0 < t \le T$$

и

$$u_x^+(0,t) = Bu_x^-(0,t),\ \ 0 < t \le T,$$

где A – константа матрица в виде

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & -a_2 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & -a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & -a_{k+m} \end{pmatrix}$$

и B – константа матрица размерности $m \times k$.

В точке соединение ребер требуем выполнения условия Кирхгоффа для всех $t \in [0,T]$:

$$C^- \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^-(x,t)|_{x=0} = C^+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^+(x,t)|_{x=0}, \quad 0 < t \le T.$$

На граничных точках используем граничные условия

$$u(x,t)|_{x=\partial\Gamma} = \varphi(t), \ \frac{\partial}{\partial x} u^-(x,t)|_{x=\partial\Gamma_1} = \phi(t), \ 0 < t \le T,$$

где

$$C^- = (\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_k}), \ C^+ = (\frac{1}{a_{k+1}}, ..., \frac{1}{a_{k+m}}), \ a_1 = 1, \ a_j \ne 0$$

для всех $j = \overline{2, k+m}$ и $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{k+m})^T$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k)^T$.

Найдено точное представление единственной решении рассматриваемой задачи.

Теорема 6. *Пусть* $B^T B - E$ *отрицательно определенная матрица, функции* $u_j^0(x) \in C\left(\overline{b_j}\right)$, $D_{0t}^{1-\alpha} f_j(x,t) \in C^{0,1}(\overline{b}_j \times [0,T])$, $j = \overline{1, k+m}$, $\varphi(t)$ *и* $\phi(t)$ *дифференцируемые функции на* $[0,T]$. *Тогда рассматриваемая задача имеет единственное решение.*

В третьей главе диссертации, названной «**Начально-краевые задачи для уравнения субдиффузии на метрических графах**» исследована начально-краевая задача для уравнения субдиффузии заданного на двух разных графах.

Пусть граф Ω состоит из $m = k + l$ равных ребер, соединенных в одной точке 0. Координаты ребер графа определяем от 0 до L, а каждое ребро через B_j, $j = \overline{1,m}$.

На каждом из ребер графа Ω рассмотрим уравнение субдиффузии

$$D_{0,t}^{\alpha} u_j(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_j(x,t) = f_j(x,t), \ \ 0 < x < L, 0 < t < T, \ j = \overline{1,m} \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$, с начальными условиями

$$\lim_{t \to 0} D_{0,t}^{\alpha-1} u_j(x,t) = \varphi_j(x), \ \ 0 \le x \le L, \ \ j = \overline{1,m}. \tag{3}$$

В точке соединение ребер требуем выполнения условия Кирхгоффа для всех $t \in [0,T]$:

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = ... = u_m(0,t),\ 0 < t \le T, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x}u_i(x,t)\right) = 0,\quad 0 < t \le T. \tag{5}$$

На граничных точках используем граничные условия

$$u_i(L,t) = \psi_i(t),\quad 0 < t \le T,\ i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

или условия в виде

$$\begin{gathered} u_i(L,t) = \gamma_i(t),\ 0 < t \le T,\ i = \overline{1,k}, \\ \frac{\partial}{\partial x}u_j(L,t) = \gamma_j(t),\ 0 < t \le T,\quad j = \overline{k+1,m}. \end{gathered} \tag{7}$$

Задача 5. Найти регулярные решения уравнении (2), удовлетворяющие условии (3) – (6).

Задача 6. Найти регулярные решения уравнении (2), удовлетворяющие условии (3) – (5) и (7).

Теорема 7. *Пусть* $\phi_i(t),\ \varphi_i(t) \in C[0,T]\ (i = \overline{1,m}, T > 0),$ *и* $f(x,t) \in C^{0,1}\{(x,t): 0 \le x \le L, 0 < t < T\}$. *Тогда задача 5 имеет единственное решение в виде*

$$u(x,t) = -\int_0^t (G_\xi(x,t;L,\tau)u(L,\tau) +)d\tau - \int_0^L \varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi -$$

$$-\int_0^t\int_0^L G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где $u = (u_1,...,u_m)^T$, $F = (f_1,..., f_m)^T$ *и*

$$G(x,t;\xi,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n M^n\left(\Gamma(x-\xi+2nL,t-\tau) + M\Gamma(x+\xi+2nL,t-\tau)\right).$$

Теорема 8. *Пусть* $\varphi_i(x) \in C[0,L],\ \gamma_i(t) \in C[0,T]$. *Тогда задача 6 имеет единственное решение в виде*

$$u(x,t) = \int_0^t G_{1\xi}^{(N)}\left(x,t;L,\tau)\frac{\partial u_N(\xi,\tau)}{\partial}|_{\xi=L} - G_{1\xi}^{(D)}(x,L;t,\tau)u_D(L,\tau)\right)d\tau -$$

$$-\int_0^L \gamma(t)G_1(x,t;\xi,\tau)d\xi - \int_0^t\int_0^L G_1(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где

$$G_1^{(D)} = \begin{pmatrix} G_1^{11} & G_1^{12} & ... & G_1^{1m} \\ ... & ... & ... & ... \\ G_1^{k1} & G_1^{k2} & ... & G_1^{km} \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \ G_1^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ G_1^{k+1,1} & G_1^{k+1,2} & ... & G_1^{k+1,m} \\ ... & ... & ... & ... \\ G_1^{m1} & G_1^{m2} & ... & G_1^{mm} \end{pmatrix},$$

$u=(u_1,...,u_m)^T$, $u_D=(u_1,...,u_k,0,...,0)^T$, $u_N=(0,...,0,u_{k+1},...,u_m)^T$ и $F=(f_1,...,f_m)^T$.

Во втором параграфе рассмотрен граф лестничного типа с $3m-1$ равными ребрами. Определяем координаты ребер графа через изометрическое отображение этого ребра на интервал от 0 до L. Ребра обозначим через B_k, $k=\overline{1,3m-1}$. Мы рассмотрим начально-краевую задачу для уравнении субдиффузии. При четных и нечетных значениях m краевые ребра графа отличаются. Поэтому рассмотрим два случая.

Пусть m четное число. Рассмотрим уравнение субдиффузии (2) с начальными условиями (3).

Во всех внутренних точках графа требуем следующие условия склеивание (Кирхгоффа)

$$u_{6j+2}(0,t)=u_{6j+3}(0,t)=u_{6j+5}(0,t),$$

$$u_{6j+4}(0,t)=u_{6j+6}(0,t)=u_{6j+7}(0,t),$$

$$u_{6j+1}(L,t)=u_{6j+3}(L,t)=u_{6j+4}(L,t),$$

$$u_{6j+5}(L,t)=u_{6j+6}(L,t)=u_{6j+8}(L,t) \quad (8)$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\Big(u_{6j+2}(x,t)+u_{6j+3}(x,t)+u_{6j+5}(x,t)\Big)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\Big(u_{6j+4}(x,t)+u_{6j+6}(x,t)+u_{6j+7}(x,t)\Big)=0,$$

$$\lim_{x\to L}\frac{\partial}{\partial x}\Big(u_{6j+1}(x,t)+u_{6j+3}(x,t)+u_{6j+4}(x,t)\Big)=0,$$

$$\lim_{x\to L}\frac{\partial}{\partial x}\Big(u_{6j+5}(x,t)+u_{6j+6}(x,t)+u_{6j+8}(x,t)\Big)=0 \quad (9)$$

для всех $t \in (0,T]$, $j = \overline{0,[\frac{m-2}{2}]}$. Эти условия характеризуют локальное сохранение потока в точках ветвление.

В крайних точках графа требуем выполнение следующих граничных условий

$$u_1(0,t) = \psi_1(t), \;\; u_{3m-1}(0,t) = \psi_2(t),$$

$$u_2(L,t) = \psi_3(t), \;\; u_{3m-2}(L,t) = \psi_4(t). \tag{10}$$

Задача 7. Найти регулярные решения уравнении (2), удовлетворяющие начальную условию (3) и условиям (8) – (10).

Найдено интегральное представление единственной решении поставленной задачи.

Теорема 9. *Пусть* $\phi_i(t) \in C[0,T], \varphi_i(x) \in C[0;L], \; (i = \overline{1,3m-1}, T > 0), m-$ *четное число и* $f(x,t) \in C^{0,1}\{(x,t): 0 \le x \le L, 0 \le t \le T\}$. *Тогда задача 7. имеет решение в виде*

$$u(x,t) = \int_0^t (G_\xi(x,t;0,\tau)U^{1,3m-1}(0,\tau))d\tau - \int_0^t (G_\xi(x,t;L,\tau)U^{2,3m-2}(L,\tau))d\tau -$$
$$-\int_0^L \varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi - \int_0^t \int_0^L G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где $U^{i,j} = (0,0,...0,u_i,0,...,0,u_j,0,...,0)^T$, $F = (f_1,..., f_{3m-1})^T$ *и* $G(x,t;\xi,\tau)$ *определяется с формулой*

$$G(x,t;\xi,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(M^n \Gamma(x - \xi + 2nL, t - \tau) + (DC^{-1})^n \Gamma(x + \xi + 2nL, t - \tau) \right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию начально-краевых задач для уравнений Эйри с дробной производной по времени и субдиффузии на метрических графах с использованием метода функции Грина и метода потенциалов.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

1. Найдено точное интегральное представление решения задачи Коши для уравнения Эйри с дробной производной по времени на открытом звездообразном метрическом графе с полубесконечными ребрами.

2. С помощью метода потенциалов и метода интегралов энергии доказано корректность начально-краевой задачи для уравнения Эйри с дробной производной по времени на звездообразном графе с конечными ребрами.

3. Методом функции Грина получен интегральное представление решения начально-краевых задач для уравнения субдиффузии в замкнутом метрическом звездообразном графе. Найден точный вид функции Грина.

4. Обобщенным методом функции Грина найдено решение начально-краевых задач для уравнения субдиффузии в графах лестничного типа. Найден точный вид функции Грина с методом, обобщающим хорошо известный метод отражений для уравнения теплопроводности на отрезке.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKIY

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

RAKHIMOV KAMOLADDIN URINBAYEVICH

METHOD OF POTENTIALS FOR THE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE FRACTIONAL DERIVATIVE GIVEN ON THE METRIC GRAPHS

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT
of dissertation of the doctor of philosophy (PhD)
on physical and mathematical sciences

TASHKENT – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2022.3.PhD/FM747.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" of information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Sobirov Zarifboy Akhmedovich** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent
Official opponents:	**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor
	Karimov Erkinjon Tulkinovich Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Senior researcher
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place " 14 " March 2023 at 17:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy (is registered № 157) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on " 28 " February 2023 year
(Mailing report № 2 on " 28 " February 2023 year)

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

A.A. Azamov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to formulate problems for equations with fractional derivatives in metric graphs, in particular, boundary value problems for the Airy and subdiffusion equations and to construct a solution to these problems.

The object of research is open and closed star-shaped simple metric graphs, a star-shaped metric graph consisting of a finite number of finite and semi-infinite intervals, a ladder-type metric graph consisting of a finite interval.

Scientific novelty of the research work is as follows:

it is obtained the solution of the Cauchy problem for the Airy equation in open and closed metric star graphs;

it is obtained an integral representation of the solution of initial-boundary value problems for the Airy and subdiffusion equations in the metric graph consisting of finite and infinite intervals;

it is generalized the Green's function method on the matrix Green's function for solving initial-boundary value problems for subdiffusion equations on graphs;

it is proved the existence and uniqueness of a solution to the initial-boundary value problem for the subdiffusion equation on a ladder-type metric graph consisting of a finite interval.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis were used in the following research projects:

Green's functions for the subdiffusion equation considered on the graph were used in the framework No grant OT-Ф4-(37+29) "Functional properties of A-analytic functions and their applications. Some problems of complex analysis in matrix domains", to prove the functional properties of analytic functions", to find the boundary values of these boundary value problems and to construct the basis of an orthonormal system with holomorphic functions of the matrix argument. (Reference from National University of Uzbekistan No 04/11-6626, October 10, 2022). The results of the dissertation used to prove an analogue of the Cauchy formula;

the fundamental solution of the Cauchy problem for the Airy equation was used in the framework No OT-Ф-4-(36+32) “Development of new methods for solving problems of mathematical physics and optimal control. Non-classical initial and spectral problems and their applications for partial differential equations of odd order”, to prove the existence of a solution to a non-classical third-order equation and to find the integral form of the solution. (Reference from National University of Uzbekistan No 04/11-6625, October 10, 2022). Using the scientific result allowed them to prove the uniqueness and existence of a solution for a non-classical third-order equation.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters divided into nine paragraphs, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 108 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (1 часть; part 1)

1. Собиров З.А., Рахимов К.У. Задача Коши для уравнения Эйри с дробной производной по времени на звездообразном графе. // Бюллетень Института математики. 2019. – №5. стр.40-49. (01.00.00, №17).
2. Rakhimov K.U. The method of potentials for the Airy equation of fractional order. // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2020. – Vol. 3(2). – P. 221-235. (01.00.00, №8).
3. Rakhimov K.U., Sobirov Z.A., Jabborov N.M. The time-fractional Airy equation on the metric graph. // Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics. 2021. – Vol. 14 (3). – P. 376–388. (Scopus IF=0.7).
4. Sobirov Z.A., Rakhimov K.U., Ergashov R.E. // Green’s function method for time-fractional diffusion equation on the star graph with equal bonds. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2021. – Vol. 12 (3). – P. 1-7. (Scopus IF=0.2).
5. Rakhimov K.U., Sobirov Z.A. Green’s function method for subdiffusion equation on the ladder-type graph with equal bonds. // Uzbek Mathematical Journal. 2022. – Vol. 66(1) – P. 161-172. (01.00.00, №6).

II bo‘lim (2 часть; part 2)

6. Собиров З.А., Рахимов К.У. Задача Коши для уравнения Эйри с дробной производной по времени на звездообразном графе. // Республиканская научная конференция “Актуальные проблемы и применение анализа”. – Карши, 4-5 октября 2019 г. – С. 179–181.
7. Собиров З.А., Рахимов К.У. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с дробной производной на звездообразном графе. // Международная научная конференция “Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий”. – Ташкент, 14-15 ноября. 2019 г. – С. 43–44.
8. Rakhimov K.U. The method of potentials for fractional order airy equation. // International conference “Frontier in mathematics and computer science”. – Tashkent, October 12–15 2020. – P. 126.
9. Rakhimov K.U. The potential method for fractional order KDV equation on the bounded star-shaped graph. // Международная научно-практическая онлайн-конференция «Теории Функций Одного И Многих Комплексных Переменных». – Нукус, 26-28 ноября 2020 г. – С. 116-119.
10. Рахимов К.У. Метод функции Грина для начально-краевой задачи уравнении субдиффузии на звездообразном метрическом графе. // Республиканская научная конференция «Сарымсаковские чтения». – Ташкент, 16–18 сентября 2021 г. – С. 118–120.

11. Rakhimov K.U. Initial-boundary value problem for subdiffusion equation on the star graph with equal bonds. // Республиканская научная конференция «Дифференциальные Уравнения И Родственные Проблемы Анализа». – Бухара, 4–5 ноября, 2021 г. – С. 174-175.
12. Рахимов К.У. Метод функции Грина для уравнения субдиффузии на лестничном графе. // Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы математической физики и математического моделирования». – Карши, 3-4 декабря 2021 г. – С. 321–324.
13. Rakhimov K.U. Green’s function method for time-fractional diffusion equation on the star graph with equal bonds. // Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика. 5-9 декабря 2021 г., - С. 249.
14. Рахимов К.У. Метод функции Грина для начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии заданного на метрическом лестничном графе. – Республика илмий анжумани «Фан, таълим ва ишлаб чиқаришни ривожланишида ёш олимларнинг ўрни». – Тошкент, 30 сентябрь 2022 й. – С. 61-64.
15. Собиров З.А., Рахимов К.У. Начально-краевая задача для уравнения субдиффузии на звездообразном графе с конечными ребрами. // Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». – Ташкент, 6-8 октября 2022 г. – С. 175-176.

Avtoreferat "O'zbekiston matematika jurnali" tahririyatida
2023 yil 20 fevralda tahrirdan o'tkazildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog'i: 3. Adadi 100 dona. Buyurtma № 4/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko'chasi, 83-uy.