**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

RAUPOV DILMUROD RASULOVICH

IKKI KOMPONENTALI BLOW-UP REJIMLI NOCHIZIQLI MUHITLARDA SONLI MODELLASHTIRISH

**05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)**

**Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2023

УДК: 519.957

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

RAUPOV DILMUROD RASULOVICH

IKKI KOMPONENTALI BLOW-UP REJIMLI NOCHIZIQLI MUHITLARDA SONLI MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui (fizika-matematika fanlari)

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

Toshkent – 2023

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2019.2.PhD/FM392 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya O‘zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz/) va “Ziyonet” Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Matyakubov Alisher Samandarovich** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Normurodov Chori Begaliyevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Seytov Aybek Jumabayevich texnika fanlari doktori, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Toshkent axborot texnologiyalari universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi Dsc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning 2023-yil “___”___________ soat____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro‘yxatga olingan) (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil “____” _______________kuni tarqatildi.

(2023-yil “____” _______________ dagi № ___-raqamli reestr bayonnomasi).

M.M.Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi
ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z.R.Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., dotsent

B.F.Abduraximov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar
raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Bugungi kunda jahon miqyosida blow-up rejimli jarayonlar va sistemalarga bag‘ishlangan tadqiqotlar dolzarb hamda zarur hisoblanadi. Bunday jarayonlarning matematik modellari xususiy hosilali nochiziqli differensial tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadi va yonish jarayonlari (qattiq va suyuq yonuvchilarning alangalanish modellari), issiqlik yadroviy lazerli sintez, nochiziqli to‘lqinlar nazariyasi, issiqlik diffuziya jarayonlari, filtratsiya kabi masalalarning tadqiqot obyekti hisoblanadi. Shu sababli ikki komponentali blow-up rejimli nochiziqli muhitlarda matematik modellarni tadqiq etish, samarali sonli yechish sxemalari va algoritmlarini qurish hamda ularning dasturiy ta’minotini yaratish amaliy matematikaning muhim vazifalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahonda nodivergent ko‘rinishdagi parabolik tipdagi tenglamalar sistemalari bilan tavsiflanuvchi diffuzion jarayonlarning matematik modellari keng tadqiq etilmoqda. Bunday diffuziya jarayonlarining matematik modellari yonish nazariyasida qattiq va suyuq yonuvchilarning alangalanish, nochiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik, gaz va suyuqliklar filtratsiyasi, biologik populyatsiya jarayonlarining kechishini ochib berishda keng qo‘llanib kelinmoqda. Shu sababli blow-up rejimli turli nochiziqli matematik modellarning yangi sifat xossalarini aniqlash asosida sonli yechish sxemalari, algoritmlari va dasturiy ta’minotini yaratish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan biologik, biofizik, kimyoviy va seysmologik jarayonlarni matematik modellashtirish, sonli usullarini ishlab chiqish kabi dolzarb yo‘nalishlariga katta e’tibor qaratib kelinmoqda. Bu borada nochiziqli to‘lqin tarqalishi, mexanikada g‘ovak tuproqdagi filtrlash, tibbiyotda mayda qon tomirlarida qonning harakatlanishi, issiqlik tarqalishi, biologik populyatsiyaning o‘sishi va ko‘chishi kabi jarayonlarni matematik modellashtirish, nochiziqli matematik modellarga xos effektlarni aniqlash va sonli-analitik yechish usullarini ishlab chiqish bo‘yicha salmoqli natijalarga erishildi. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”[1] kabi ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish vazifalari belgilab berildi. Ikki komponentali blow-up rejimli nochiziqli muhitda parabolik tipdagi nodivergent tenglamalar sistemalari orqali ifodalanuvchi nochiziqli matematik modellarining tadqiq etilishi va amaliyotga tatbiq qilish yuzasidan quyidagi yo‘nalishlardagi ilmiy tadqiqot izlanishlarini amalga oshirish muhim vazifalardan biri hisoblanadi: nochiziqli parabolik tipdagi nodivergent tenglamalar sistemalarining blow-up xossalarini o‘rganish usullarini ishlab chiqish; turli fazolarda yechim asimptotikalarini topish; blow-up yechimlar baholarini aniqlash; blow-up jarayonlarning matematik modellarini o‘rganishga yordam beruvchi amaliy dasturlar majmuini yaratish; jarayonlarni vaqt bo‘yicha kechishini

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli qarori (Manba: https://lex.uz/docs/4807552).

nazorat qilish. Yuqorida keltirilgan ilmiy tadqiqotlar yo‘nalishida bajarilayotgan ilmiy izlanishlar mazkur dissertatsiya mavzusining dolzarbligini izohlaydi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”, 2022-yil 28-yanvardagi PF-60 sonli “2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmonlari, 2017-yil 17-fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-son “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2018-yil 27-apreldagi PQ-3682-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlantirishning IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Blow-up rejim bo‘yicha ilk marotaba qo‘yilgan muammolar XX asrning o‘rtalarida Zeldovich, Barenblatt va Librovichning yonish nazariyalaridan boshlangan. A.A.Samarskiy, A.S.Kalashnikov, V.A.Galaktionov, A.P.Mixaylov, B.I.Barenblatt, J.L.Lions, Daniela Giachetti, Pan Zheng, J.Vazgues, Ansgar Jüngel, L.Rossi, Juntang Ding va boshqa olimlarning ishlarida yechimning vaqt bo‘yicha chegaralanmaganligi (blow up), issiqlik tarqalish tezligining chekliligi hodisasi va issiqlik tarqalishining fazoviy lokallashishi, manba va yutilish ta’sirida nochiziqli muhitlardagi chekli vaqtda ko‘chishning mavjud bo‘lish xossalari aniqlangan. Yechim asimptotikalarini o‘rganish bo‘yicha Wiegner M., Winkler M., Gage E., Angenent S., Jin Ch., Yin J., Yunzhu Gao, Qiu Meng, Yingjia Guo, Zhi-wen Duan, Li Zhou; nodivergent tenglama va tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi global yechimlar mavjudligi, blow-up yechimlarni tadqiq etish bo‘yicha Deng W., Li Y., Xie Ch., Lu H., Duan Z., Zhou L., Wang M., Wei Y., Sun Y., Shi Y., Wu M., Huiling Li, Yang Zhang, Koichi Anada, Juntang Ding, Shengjia Li va boshqalar shug‘ullanishgan.

Mamlakatimizda turli xil jarayonlarni ifodalaydigan matematik modellarning yangi xossalarini tadqiq qilish va sonli yechish bilan N.Muxitdinov, M.M.Aripov, B.X.Xujayorov, A.S.Rasulov, N.Ravshanov, N.Uteuliyev, A.Haydarov, Z.R.Raxmonov, Sh.A.Sadullayeva, A.S.Matyakubov, D.K.Muxamediyeva va ularning shogirdlari shug‘ullanishgan. Ularning asosiy ishlari diffuziya nochiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasini sonli tadqiq etishga bag‘ishlangan bo‘lib, ularni issiqlik o‘tkazuvchanlik, filtratsiya, diffuziya, biologik populyatsiya jarayonlarini modellashtirish masalalariga tatbiq etish mumkin.

Nodivergent tenglama va tenglamalar sistemasiga oid ilmiy ishlar bilan M.Aripov, Sh.Sadullayeva, A.Matyakubov, D.Muxammadiyeva, J.Raimbekov, M.Xojimurodovalar shug'ullanishgan. Ular tomonidan avtomodel tahlil asosida tabiatshunoslikning turli sohalarida uchraydigan jarayonlarni ifodalovchi nochiziqli masalalar yechimlarining sifat xossalari tadqiq etilgan va sonli yechilgan. Nochiziqli diffuzion jarayonlarni modellashtirish, blow-up yechimlarni o'rganish bo'yicha olingan natijalar hamda mavjud usul va algoritmlar tahlili shuni ko'rsatadiki, nochiziqli jarayonlarni modellashtirish nazariy va amaliy masalalarini yanada chuqurroq hamda to'liq tadqiq etish usullarini ishlab chiqishni talab qiladi.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlar rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq, OT-F4-30 "Ikki marta nochiziqli kross sistemaning konvektiv ko'chish, o'zgaruvchan zichlik, manba yoki yutish ta'siridagi sifat xossalarini tadqiq qilish" (2017-2020-yillar) mavzularidagi ilmiy tadqiqot loyihalari doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi manbaga ega bir jinsli bo'lmagan muhitlarda nochiziqli parabolik tipdagi nodivergent tenglamalar sistemalari bilan ifodalanuvchi jarayonlarning nochiziqli matematik modellarining blow-up xossalarini sonli va analitik tadqiq etish, issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlari masalalarini sonli yechish uchun dasturiy ta'minotini yaratishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarining matematik modellari uchun blow-up yechimga ega bo'lish shartlarini topish;

issiqlik diffuziyasi va yonish masalalarining avtomodel yechimlari asimptotikalarini olish;

issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlari matematik modellarining sifat xossalarini tadqiq qilish uchun sonli yechish sxemalarini qurish;

qo'yilgan masalani yechish uchun dasturiy ta'minotini yaratish hamda blow-up xossaga ega yechimlar grafigini vizuallashtirish.

Tadqiqotning obyekti parabolik tipdagi nodivergent tenglamalar sistemalari bilan ifodalanuvchi nochiziqli issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlaridan iborat.

Tadqiqotning predmeti nochiziqli issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarining matematik modellari, sonli sxemalar, sonli yechish algoritm va dasturiy ta'minotlaridan iborat.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiyada avtomodel va taqribiy avtomodel, yechimlarni taqqoslash teoremalari, nochiziqli differensial tenglamalarni yechish uchun etalon tenglamalar, sonli sxemalarni tuzishning ayirmali, iteratsiya, haydash, chiziqlashtirish usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

bir jinsli bo'lmagan muhitda parabolik tipdagi nodivergent tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining yechimlari uchun taqqoslash teoremalari yordamida quyi va yuqori baholar olingan;

blow-up rejimli muhitda parabolik tipdagi nodivergent tenglamalar sistemasi uchun nochiziqli ajratish usulidan foydalanib Koshi masalasining avtomodel yechimlari asimptotikalari olingan;

issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarining matematik modellari uchun blow-up hamda global yechimlarga ega bo‘lish shartlari avtomodel tahlil va taqqoslash teoremasi asosida isbotlangan;

issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarini ifoda etuvchi chegaraviy shartlar bilan berilgan parabolik tipdagi nodivergent tenglamalar sistemasi uchun blow-up yechim baholari qurilgan;

issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlari masalalarida portlash vaqti uchun maksimum tamoyillari asosida baholar olingan;

muhitning sonli parametrlari qiymatlari asosida sonli yechimlar olishda iteratsion jarayon uchun boshlang‘ich yaqinlashishni qurish masalasi yechilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

yonish va issiqlik diffuziyasi jarayonlarida vujudga keladigan nochiziqli masalalarni yechish uchun asimptotik formulalar qurilgan;

yonish va issiqlik diffuziyasining nochiziqli masalalari uchun sonli yechimlar qurilgan hamda dasturlar majmui yaratilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiya ishida olingan natija va tasdiqlar taqqoslash teoremalari hamda maksimum prinsipi asosida qat’iy isbotlangani va sonli tadqiqotlar natijalari bilan tasdiqlangani hamda etalon tenglamalar usuli va nochiziqli effektlarni saqlagan holda avtomodel tahlilga asoslangan hisoblash metodlarining to‘g‘riligini hamda samaradorligini tasdiqlagani bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarning ilmiy ahamiyati shundan iboratki, shunga o‘xshash masalalarni yechishda Koshi masalasi va nochiziqli matematik modellar blow-up yechimlarining mavjudligi nazariyasini qo‘llash hamda olingan natijalardan kimyoviy kinetikada moddalarning tez birikish, yonish jarayonlarini avtokatalitik reaksiya (qattiq va suyuq yonuvchilarning alangalanish) modellarini, kuchsiz magnit maydonlarida rezistiv diffuziya hodisalari nochiziqli modellarini sonli va analitik yechishda qo‘llanilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati iteratsion jarayonlar qurilgani, sonli hisoblash sxemasi va dasturiy ta’minot yaratilgani, ulardan nochiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik, kimyoviy kinetikada moddalarning tez birikish, yonish jarayonlarida qattiq va suyuq yonuvchilarning alangalanish modellari uchun samarali hisoblash tajribalarini o‘tkazishga imkon berishi bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Ikki komponentli blow-up rejimli nochiziqli muhitlarda issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlari masalalarini sonli hamda analitik yechish bo‘yicha olingan ilmiy natijalar amaliyotda quyidagi yo‘nalishlarda joriy etilgan:

issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarini matematik modellari uchun blow-up hamda global yechimlar, sonli yechish algoritmlari va usullari, iteratsion jarayon uchun boshlang‘ich yaqinlashish hamda ishlab chiqilgan dasturiy ta’minoti natijalaridan PZ-202008061-sonli “Yangi avlod oligomer antipirenlarni qo‘llab yog‘och qurilish materiallari va buyumlarining olovbardoshligini oshirish resurs tejamkor texnologiyasini ishlab chiqish” mavzusidagi amaliy loyihasida foydalanilgan (“O‘zkimyosanoat” AJ Toshkent kimyo texnologiyasi ilmiy tadqiqot institutining, 2022-yil 20-sentabrdagi №0410/289-sonli ma’lumotnomasi). Natijada olingan sonli natijalar bir jinsli bo‘lmagan muhitda yonuvchi materiallarning alangalanishi va portlash vaqtlarini aniqlash imkonini bergan;

bir jinsli bo‘lmagan muhitda parabolik tipdagi nodivergent tenglamalar sistemasi uchun yuqori va quyi yechimlarini qurish, ikki komponentli blow-up rejimli chiziqsiz muhitlarda sonli modellashtirish uchun progonka, sonli natijalarni vizual shaklda tasvirlash uchun dasturiy ta’minot va bir jinsli bo‘lmagan muhitda yonish hamda issiqlik diffuziyasi jarayonlarini tasvirlovchi grafik ko‘rinishdagi natijalaridan MB-ATEX-2018-58. “Yangi avlod metallorganik oligomer qo‘shimchali olovbardosh, issiqlik izolyatsiyalovchi qurilish materiallarini tadqiq etish va texnologiyasini yaratish” mavzusidagi amaliy loyihada foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi favqulodda vaziyatlar vazirligi Akademiyasining 2022-yil 15-noyabrdagi №36/16-2217-sonli ma’lumotnomasi). Natijada olingan sonli natijalarning issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarini sonli modellashtirish uchun amaliy dasturlar paketini yaratishga xizmat qilgan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Tadqiqot natijalari 9 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 7 ta xalqaro va 2 ta respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinishi. Tadqiqot mavzusi bo‘yicha jami 19 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, 8 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etishga tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda, jumladan, 1 tasi xorijiy va 7 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan, shuningdek, 2 ta EHM uchun dasturga mualliflik guvohnomasi olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 112 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Blow-up rejimli nochiziqli muhitda issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarining matematik modellashtirish”** deb nomlangan birinchi bobida masalaning qo‘yilishi, dissertatsiya mavzusiga oid tadqiqotlarning qisqacha tahlili va kelgusida natijalarni yoritishga ko‘maklashuvchi yordamchi tasdiq hamda ta’riflar keltirilgan. Mazkur jarayonlarning avtomodel yechimlar orqali ifodalanuvchi modellarining xossalari tadqiq qilingan. Shuningdek, sonli eksperiment natijalari va ularning tahlili bayon etilgan.

1.3-paragraf nochiziqli muhitda issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarini modellashtiruvchi parabolik tipdagi tenglamalar sistemasi uchun quyidagi Koshi masalasi avtomodel yechimlar asimptotikasi tadqiqiga bag‘ishlangan:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right)+u^{\beta_1},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_2-1}\nabla v\right)+v^{\beta_2},\tag{1}$$

$$u|_{t=0}=u_0\left(x\right)\geq 0,\ \ v|_{t=0}=v_0\left(x\right)\geq 0,\ \ x\in R^N\tag{2}$$

бу yerda, $\nabla(\cdot)=grad_x(\cdot)$, $\alpha_1,\alpha_2,m_1,m_2,\beta_1,\beta_2$ – haqiqiy musbat sonlar, $N\geq 1$ – fazo o‘lchovi, $u=u(t,x)\geq 0,\ v=v\left(t,x\right)\geq 0$ – izlanayotgan yechimlar.

Ma’lumki, (1) sistema sonli parametrlari qiymatlariga bog‘liq holda turli jarayonlarni ifodalaydi: biologik tur diffuziyasi, kuchsiz magnit maydonlarida rezistiv diffuziya hodisalari, infeksion kasalliklar tarqalishi, diffuzion yonish jarayonlarini va boshqalar. (1) tenglamalar $u=0,v=0$ yoki $\nabla u=0,\nabla v=0$ bo‘ladigan sohada buziluvchi bo‘lib, klassik ma’noda yechimga ega bo‘lmasligi mumkin. Bunday holatlarda (1) tenglamalar sistemasi uchun umumlashgan yechimlar izlanadi va o‘rganiladi.

Yechimni quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$u\left(t,x\right)=(T-t)^{q_1}\,\mathrm{w}\left(\tau(t),\mathrm{r}\right),\ v\left(t,x\right)=(T-t)^{q_2}\,\varphi\left(\tau(t),\mathrm{r}\right),\ r=\left|x\right|\tag{3}$$

$$q_1=-\frac{1}{\beta_1-1},\ \mathrm{q}_2=-\frac{1}{\beta_2-1},\ \ \tau(t)=\begin{cases}\int(\mathrm{T-t})^{\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}}dt, & \dfrac{m_1-1}{1-\beta_1}+\dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1\neq 0\\ Ln(\mathrm{T-t}), & \dfrac{m_1-1}{1-\beta_1}+\dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1=0\end{cases}$$

$$w(\tau,x)=f(\xi),\quad \varphi(\tau,x)=\phi(\xi),\quad \xi=\left|x\right|\tau^{-\frac{1}{2}}$$

$f(\xi),\ \ \phi(\xi)$ funksiyalar esa quyidagi avtomodel masalaning yechimi bo‘ladi:

$$\begin{aligned}&\varphi^{\alpha_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f^{m_1-1}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi}-b_1\left(f^{\beta_1}+f\right)=0,\\ &\varphi^{\alpha_2}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f^{m_2-1}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi}-b_2\left(f^{\beta_2}+f\right)=0,\end{aligned}\tag{4}$$

bu yerda, $b_i=\dfrac{q_i}{q_i(\mathrm{m}_i-1)+q_{3-i}\alpha_i},\quad i=1,2$

$$f'\left(0\right)=0,\ \phi'\left(0\right)=0,\ f\left(\infty\right)=0,\ \phi\left(\infty\right)=0\tag{5}$$

Quyidagi almashtirish bajaramiz:

$$f\left(\xi\right)=\overline{f}(\xi)\,\mathrm{y}_1(\eta),\ \phi\left(\xi\right)=\overline{\phi}(\xi)\,\mathrm{y}_2(\eta)$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $b_{i1}(\eta)=\left(\dfrac{N}{2}-1+p_im_i\right)\mathrm{p}_i,\quad b_{i2}(\eta)=\dfrac{p_i-b_i}{4},$

$$c_{i1}(\eta)=\left(p_i m_i-1\right)\mathrm{p}_i, c_{i2}(\eta)=-\frac{p_i}{4}, c_{i3}(\eta)=\frac{-b_i}{4a}, (i=1,2)$$

Tez diffuziya holi. $p_i<0$. Quyidagi funksiyalar

$$\bar{f}\left(\xi\right)=A\left(a+\xi^2\right)^{p_1}, \ \bar{\phi}\left(\xi\right)=B\left(a+\xi^2\right)^{p_2}, A>0, B>0, \mathrm{a}>0, \eta=\ln\left(a+\xi^2\right),$$

(5) shartni qanoatlantiradi, bu yerda $p_i=\dfrac{m_{3-i}-\alpha_i-1}{(m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2}$.

Faraz qilaylik $q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1=q_2(m_2-1)+q_1\alpha_2$ tenglik bajarilsin. U holda quyidagi teorema o‘rinli:

1-teorema. Aytaylik, $\beta_i>1, p_i<0 \ (i=1,2)$ va $q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1+1>0$ bo‘lsin. U holda (1)-(2) masalaning yechimlari $\xi\to\infty$ da quyidagi asimptotik ifodaga ega

$$u(t,x)=\left(T-t\right)^{q_1}\left(a+\xi^2\right)^{p_1}\mathrm{y}_1(\eta), \ v(t,x)=\left(T-t\right)^{q_2}\left(a+\xi^2\right)^{p_2}\mathrm{y}_2(\eta),$$

bu yerda $y_i(\eta)=y_i^0+o(1), 0<y_i^0<+\infty, (i=1,2)$ va $y_i^0, (i=1,2)$ mos ravishda $z_i, (i=1,2)$ nochiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi

$$b_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+b_{i2}=0, \ (i=1,2)$$

Sekin diffuziya holi. Faraz qilaylik, (4) tenglamalar sistemasi uchun quyidagi shart bajarilsin.

$$f'\left(0\right)=0, \phi'\left(0\right)=0, f\left(\infty\right)=\infty, \phi\left(\infty\right)=\infty \qquad (6)$$

Quyidagi funksiyalar

$$\bar{f}\left(\xi\right)=A\left(a-\xi^2\right)^{p_1}, \ \bar{\phi}\left(\xi\right)=B\left(a-\xi^2\right)^{p_2}, A>0, B>0, \mathrm{a}>0, \eta=-\ln\left(a-\xi^2\right),$$

(6) shartni qanoatlantiradi, bu yerda $p_i=\dfrac{m_{3-i}-\alpha_i-1}{(m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2}$.

U holda (4) sistema quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\mathrm{y}_{3-i}^{\alpha_i}\frac{d}{d\eta}\left(Ly_i\right)+a_{i1}(\eta)\,\mathrm{y}_{3-i}^{\alpha_i}\,Ly_i+a_{i2}\left(a_{i0}y_i+\frac{dy_i}{d\eta}\right)+a_{i3}(\eta)\,\mathrm{y}_i+a_{i4}(\eta)y_i^{\beta_i}=0, \qquad (7)$$

bu yerda, $a_{i0}(\eta)=-\mathrm{p}_i$, $a_{i1}(\eta)=\dfrac{Ne^{-\eta}}{2(e^{-\eta}-a)}-1+p_im_i$, $a_{i2}(\eta)=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{a}_{i3}(\eta)=-\dfrac{b_i^{-\eta}}{4(e^{-\eta}-a)}$,

$$\mathrm{a}_{i4}(\eta)=-\frac{b_ie^{-s_i\eta}}{4(e^{-\eta}-a)}, \quad \mathrm{Ly}_i=y_i^{m_i-1}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-p_iy_i\right), \ s_i=p_i(\beta_i-1)+1, \ (i=1,2)$$

2-Teorema. Faraz qilaylik, $q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1+1>0$ bo‘lsin. U holda (7) sistemaning $y_i(\eta)=y_i^0+o(1), \eta\to\infty, \ (0<y_i^0<+\infty, \ (i=1,2))$ ko‘rinishdagi $\left(\mathrm{y}_1(\eta), \mathrm{y}_2(\eta)\right)$ yechimi mavjud bo‘lishi uchun quyidagi shartlardan birining bajarilishi zarur:

1. $p_i=\dfrac{1}{1-\beta_i}$, $y_i^0, (i=1,2)$ – nochiziqli algebraik tenglamalar

$$c_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i2}+c_{i3}z_i^{\beta_i-1}=0, \ (i=1,2)$$

sistemasining mos ravishda $z_i, (i=1,2)$ yechimlari.

2. $p_i < \dfrac{1}{1-\beta_i},\ p_i m_i > 1,\ y_i^0, (i=1,2)$ – nochiziqli algebraik tenglamalar

$$c_{i1} z_i^{m_i-1} z_{3-i}^{\alpha_i} + c_{i2} = 0,\ (i=1,2)$$

sistemasining mos ravishda $z_i, (i=1,2)$ yechimlari.

3. $p_1 = \dfrac{1}{1-\beta_1},\ p_2 < \dfrac{1}{1-\beta_2},\ p_2 m_2 > 1,\ y_i^0, (i=1,2)$ – nochiziqli algebraik

$$\begin{cases} c_{11} z_1^{m_1-1} z_2^{\alpha_1} + c_{i2} + c_{i3} z_1^{\beta_1-1} = 0 \\ c_{21} z_2^{m_2-1} z_1^{\alpha_2} + c_{22} = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining mos ravishda $z_i, (i=1,2)$ yechimlari

4. $p_1 < \dfrac{1}{1-\beta_1},\ p_2 = \dfrac{1}{1-\beta_2},\ p_1 m_1 > 1,\ y_i^0, (i=1,2)$ – nochiziqli algebraik

$$\begin{cases} c_{11} z_1^{m_1-1} z_2^{\alpha_1} + c_{12} = 0 \\ c_{21} z_2^{m_2-1} z_1^{\alpha_2} + c_{22} + c_{23} z_2^{\beta_2-1} = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining mos ravishda $z_i, (i=1,2)$ yechimlari.

1-natija. (1)-(2) masalaning umumlashgan yechimi $|x| \to a^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}$ da quyidagi asimptotik ifodaga ega

$$u_A(t,x) = z_1 \left(T-t\right)^{q_1} \left(a - |x|^2 \tau^{-1}\right)^{p_1} (1+o(1)),\ v_A(t,x) = z_2 \left(T-t\right)^{q_2} \left(a - |x|^2 \tau^{-1}\right)^{p_2} (1+o(1))$$

bu yerda $z_1, z_2, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2$ – aniqlangan o‘zgarmaslar.

Olingan natijalar erkin chegara uchun quyidagi baho o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi: $|x(t)| \le \left[\dfrac{a}{b}\right]^{\frac{1}{2}} \left(T-t\right)^{\frac{b}{2}}$, bu yerda $b = q_1(m_1-1) + q_2\alpha_1 + 1.$

1.4-paragrafda (1) masala uchun ayirmali sxema ishlab chiqilgan va hisoblash eksperimenti o‘tkazilgan. Hisoblash uchun $h = 0,02$ qadam tanlangan hamda iteratsiya aniqligi sifatida $\varepsilon = 10^{-3}$ olingan. Boshlang‘ich yaqinlashish

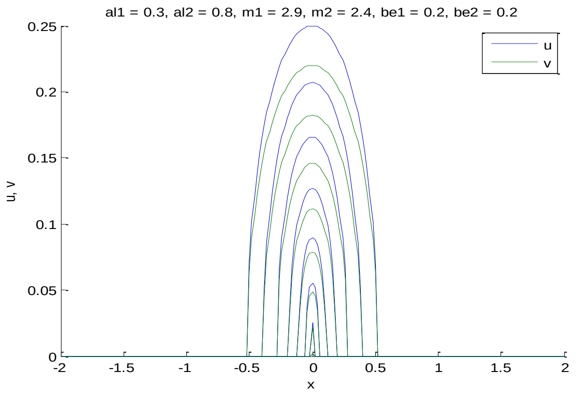
$u_0\left(x\right) = \bar{u}(0) f_A\left(\xi\right),\ v_0\left(x\right) = \bar{v}(0) \varphi_A\left(\xi\right)$ ko‘rinishda olingan,

bu yerda $f_A\left(\xi\right) = A\left(a \pm \xi^2\right)_+^{p_1},\ \varphi_A\left(\xi\right) = B\left(a \pm \xi^2\right)_+^{p_2}, \bar{u}(0) = T^{-\frac{1}{\beta_1-1}},\ \bar{v}(0) = T^{-\frac{1}{\beta_2-1}},$

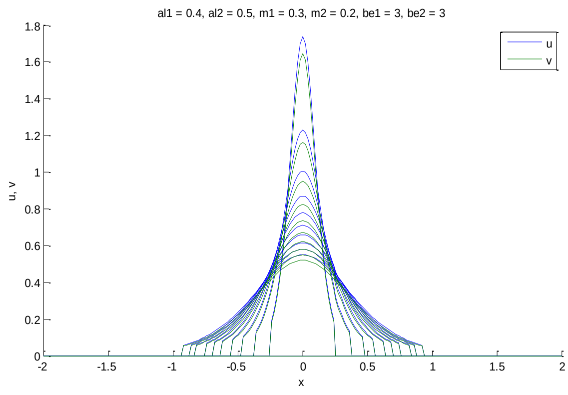
$$\xi = \phi(x)\left[\tau(0)\right]^{-\frac{1}{2}},\quad \phi(x) = |x|,\quad \tau\left(0\right) = \frac{1}{q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1+1} T^{q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1+1},$$

$$p_i = \frac{m_{3-i} - \alpha_i - 1}{\left(m_1-1\right)\left(m_2-1\right) - \alpha_1\alpha_2},\ i = 1,2.$$

Sonli parametr qiymatlari turli bo‘lganda sonli tajriba ayrim natijalari keltirilgan.



1-rasm. (1) masalaning sonli yechish natijalari (sekin diffuziya).



2-rasm. (1) masalaning sonli yechish natijalari (tez diffuziya).

Bu grafiklarda hisoblash eksperementlari yordamida parametrlarning turli sonli qiymatlarida blow-up yechimlari ko‘rsatilgan. Tanlangan boshlang‘ich yaqinlashish yaxshi bo‘lgani uchun analitik nuqtayi nazardan blow-up yechimlar sonli yechimda ham o‘z ifodasini topgan.

Dissertatsiyaning **“O‘zgaruvchan zichlikka ega blow-up rejimli issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarini matematik modellashtirish”** nomli ikkinchi bobida o‘zgaruvchan zichlikka ega nochiziqli issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlari masalalarining matematik modellari tahlil qilingan. Mazkur jarayonlarning avtomodel yechimlar orqali ifodalanuvchi modellarining xossalari va asimptotikalari o‘rganilgan. Shuningdek, sonli eksperiment natijalari va ularning tahlili keltirilgan.

2.1-paragraf quyidagi masala yechimining sifat xossalarini tadqiq etishga bag‘ishlangan.

$$\begin{aligned} |x|^{-l}\frac{\partial u}{\partial t} &= v^{\alpha_1}\nabla\left(|x|^n u^{m_1-1}\nabla u\right)+|x|^{-l}u^{\beta_1}, \\ |x|^{-l}\frac{\partial v}{\partial t} &= u^{\alpha_2}\nabla\left(|x|^n v^{m_2-1}\nabla v\right)+|x|^{-l}v^{\beta_2}, \end{aligned} \qquad (8)$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\ge 0,\ \ v|_{t=0}=v_0(x)\ge 0,\ \ x\in R^N, \qquad (9)$$

bu yerda $\nabla(\cdot)=grad_x(\cdot)$, $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, n, l$ – haqiqiy musbat sonlar, $N\ge 1$ - fazo o‘lchovi, $u=u(t,x)\ge 0,\ v=v(t,x)\ge 0$ – izlanayotgan yechimlar.

(8) masala uchun avtomodel sistema nochiziqli ajratish algoritmi yordamida quriladi, buning uchun sistemaning avtomodel yechimlari quyidagi ko‘rinishda izlanadi: $u(t,x)=(T-t)^{q_1} f_1(\xi),\ v(t,x)=(T-t)^{q_2} f_2(\xi)$ (10)

$$q_1=-\frac{1}{\beta_1-1},\ q_2=-\frac{1}{\beta_2-1}$$

$$\xi=\frac{|x|^{\frac{2-l-n}{2}}}{\tau^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{l+n}{2}\right)},\ \ \tau(t)=\begin{cases}\int (T-t)^{\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}}dt, & \frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1\ne 0\\ Ln(T-t), & \frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1=0\end{cases}$$

$f_1(\xi),\quad f_2(\xi)$ funksiyalar esa quyidagi avtomodel masalaning yechimi bo‘ladi:

$$\begin{aligned} & f_2^{\alpha_1}\xi^{1-s}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}f_1^{m_1-1}\frac{df_1}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df_1}{d\xi}+b_1\left(f_1^{\beta_1}-\frac{1}{\beta_1-1}f_1\right)=0, \\ & f_1^{\alpha_2}\xi^{1-s}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}f_2^{m_2-1}\frac{df_2}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df_2}{d\xi}+b_1\left(f_2^{\beta_2}-\frac{1}{\beta_1-1}f_2\right)=0, \end{aligned} \tag{11}$$

bu yerda, $s=\dfrac{2(N-l)}{2-l-n},\ b_i=\dfrac{q_i}{q_i(\mathrm{m}_i-1)+q_{3-i}\alpha_i},\quad i=1,2$.

3-teorema. Quyidagi shartlar bajarilsin: $q_{3-i}\alpha_i+q_i\left(m_i-1\right)+1<0$, $\beta_i<1,\ s\ge 0,\ u_+\left(0,x\right)\ge u_0\left(x\right),\ v_+\left(0,x\right)\ge v_0\left(x\right),\ x\in R^N$. U holda (8), (9) masala yechimi uchun $u\left(\mathrm{t},x\right)\le u_+\left(\mathrm{t},x\right), v\left(\mathrm{t},x\right)\le v_+\left(\mathrm{t},x\right)$ baho o‘rinli bo‘ladi,
bu yerda

$$u_+\left(t,x\right)=A_1(T-t)^{q_1}\left(a-\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_1},\ v_+\left(t,x\right)=A_2(T-t)^{q_2}\left(a-\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_2}$$

$$p_i=\frac{1+\alpha_i-m_{3-i}}{\alpha_i\alpha_{3-i}-(m_{3-i}-1)(m_i-1)}\qquad A_i=\left(\frac{p_{3-i}}{p_i^{\frac{m_{3-i}-1}{\alpha_i}}}\right)^{-\frac{\alpha_i}{\alpha_1\alpha_2-(m_i-1)(m_{3-i}-1)}},\ i=1,2$$

4-Teorema. Quyidagi shartlar bajarilsin: $q_{3-i}\alpha_i+q_i\left(m_i-1\right)+1>0$,

$A_i^{m_i-1}A_{3-i}^{\alpha_i}s\le\dfrac{b_i}{1-\beta_i}$, $\quad A_i^{m_i-1}A_{3-i}^{\alpha_i}s\le\dfrac{b_i}{1-\beta_i},(i=1,2),\quad u_-\left(0,x\right)\le u\left(0,x\right)$,

$v_-\left(0,x\right)\le v\left(0,x\right),x\in R^N$ U holda (8), (9) masala yechimi uchun $u_-\left(t,x\right)\le u\left(t,x\right),v_-\left(t,x\right)\le v\left(t,x\right),x\in R^N$ baho o‘rinli bo‘ladi, bu yerda

$$u_-\left(t,x\right)=A_1(T-t)^{q_1}\left(a+\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_1},\ v_-\left(t,x\right)=A_2(T-t)^{q_2}\left(a+\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_2}$$

$p_i,A_i,\ i=1,2$ – aniqlangan o‘zgarmaslar.

2.2-paragraf issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonini modellashtiruvchi parabolik tipdagi nochiziqli nodivergent tenglamalar sistemasi uchun avtomodel yechimlar asimptotikasi tadqiqiga bag‘ishlangan.

(8) sistema avtomodel yechimining asimptotik ifodasi va sonli parametrlariga bog‘liq holda ular mavjudligining zaruriy hamda yetarli shartlari topilgan.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$c_{i1}(\eta)=\left(\frac{s}{2}-1+p_i m_i\right)\mathrm{p}_i,\quad c_{i2}(\eta)=\frac{A_i^{1-m_i}A_{3-i}^{-\alpha_i}p_i}{4}-\frac{b_i}{4(\beta_i-1)}$$

5-teorema. Faraz qilaylik, $q_{3-i}\alpha_i+q_i\left(m_i-1\right)+1>0$ va $\beta_i>1,\ p_i<0$ yoki $\beta_i<1,\ p_i>0\,(i=1,2)$ bo‘lsin. U holda (8) sistemaning yechimlari $\xi\to\infty$ da quyidagi asimptotik ifodaga ega:

$$u(t,x)=A_1\left(T-t\right)^{q_1}\left(a+\xi^2\right)^{p_1}\mathrm{y}_1(\eta),\ v(t,x)=A_2\left(T-t\right)^{q_2}\left(a+\xi^2\right)^{p_2}\mathrm{y}_2(\eta)$$

bu yerda $y_i(\eta)=y_i^0+o(1),\ 0<y_i^0<+\infty$ va $y_i^0,(i=1,2)$ nochiziqli algebraik tenglamalar $c_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i2}=0,\ (i=1,2)$ sistemasining mos ravishda $z_i,(i=1,2)$ yechimlari.

(11) sistemaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini qaraylik:

$$f'\left(0\right)=0,\ \phi'\left(0\right)=0,\ f\left(d\right)=0,\ \phi\left(d\right)=0,\quad d<\infty$$

$$f\left(\xi\right)=\overline{f}(\xi)\,\mathrm{y}_1(\eta),\ \phi\left(\xi\right)=\overline{\phi}(\xi)\,\mathrm{y}_2(\eta)$$

$$\overline{f}\left(\xi\right)=\left(a-\xi^2\right)^{p_1},\ \overline{\phi}\left(\xi\right)=\left(a-\xi^2\right)^{p_2},\ \mathrm{a}>0,\eta=-\ln\left(a-\xi^2\right),$$

U holda (11) sistema quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\mathrm{y}_{3-i}^{\alpha_i}\frac{d}{d\eta}\left(Ly_i\right)+a_{i1}(\eta)\,\mathrm{y}_{3-i}^{\alpha_i}Ly_i+a_{i2}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}y_i\right)+a_{i3}(\eta)\,\mathrm{y}_i+a_{i4}(\eta)y_i^{\beta_i}=0 \qquad (12)$$

Bu yerda a_{ij} ifodasi aniqlangan funksiyalar.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$d_{i1}(\eta)=\left(p_i m_i-1\right)\mathrm{p}_i,\quad d_{i2}(\eta)=-\frac{A_i^{1-m_i}A_{3-i}^{-\alpha_i}p_i}{4},\ d_{i3}(\eta)=\frac{b_i A_i^{1-m_i}A_{3-i}^{-\alpha_i}}{4a},(i=1,2)$$

6-teorema. Faraz qilaylik, $q_{3-i}\alpha_i+q_i\left(m_i-1\right)+1>0$ bo‘lsin. U holda (12) sistemaning $y_i(\eta)=y_i^0+o(1),\eta\to\infty,\ (0<y_i^0<+\infty,\ (i=1,2))$ ko‘rinishdagi $\left(\mathrm{y}_1(\eta),\ \mathrm{y}_2(\eta)\right)$ yechimi mavjud bo‘lishi uchun quyidagi shartlardan birining bajarilishi zarur:

1. $p_i=\dfrac{1}{1-\beta_i},\ y_i^0,(i=1,2)$ – nochiziqli algebraik tenglamalar

$$d_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+d_{i2}+d_{i3}z_i^{\beta_i-1}=0,\ (i=1,2)$$

sistemasining mos ravishda $z_i,(i=1,2)$ yechimlari.

2. $p_i<\dfrac{1}{1-\beta_i},\ p_i m_i>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ – nochiziqli algebraik tenglamalar

$$c_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i2}=0,\ (i=1,2)$$

sistemasining mos ravishda $z_i,(i=1,2)$ yechimlari.

3. $p_1=\frac{1}{1-\beta_1},\ p_2<\frac{1}{1-\beta_2},\ p_2m_2>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ – nochiziqli algebraik tenglamalar

$$\begin{cases} d_{11}z_1^{m_1-1}z_2^{\alpha_1}+d_{12}+d_{13}z_1^{\beta_1-1}=0 \\ d_{21}z_2^{m_2-1}z_1^{\alpha_2}+d_{22}=0 \end{cases}$$

sistemasining mos ravishda $z_i,(i=1,2)$ yechimlari.

4. $p_1<\frac{1}{1-\beta_1},\ p_2=\frac{1}{1-\beta_2},\ p_1m_1>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ – nochiziqli algebraik tenglamalar

$$\begin{cases} d_{11}z_1^{m_1-1}z_2^{\alpha_1}+d_{12}=0 \\ d_{21}z_2^{m_2-1}z_1^{\alpha_2}+d_{22}+d_{23}z_2^{\beta_2-1}=0 \end{cases}$$

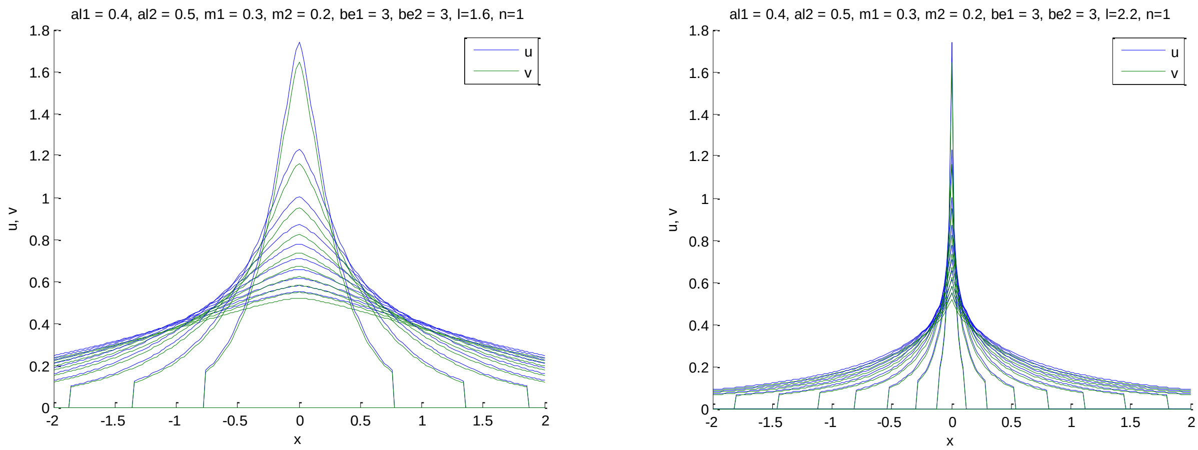
sistemasining mos ravishda $z_i,(i=1,2)$ yechimlari.

2-natija. (8)-(9) masalaning umumlashgan yechimi $|x|\to a^{\frac{1}{2-l-n}}\tau\left(1-\frac{1+n}{2}\right)^{\frac{1}{2-l-n}}$ da quyidagi asimptotik ifodaga ega:

$$u(t,x)=z_1\left(T-t\right)^{q_1}\left(a-\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_1}(1+o(1)),\ v(t,x)=z_2\left(T-t\right)^{q_2}\left(a-\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_2}(1+o(1))$$

bu yerda $z_1,z_2,\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2$ – o‘zgarmas sonlar.

2.3-paragrafda (8), (9) masala uchun ayirmali sxema ishlab chiqilgan va hisoblash eksperimenti o‘tkazilgan. Hisoblash uchun $h=0,02$ qadam tanlangan, iteratsiya aniqligi sifatida $\varepsilon=10^{-3}$ olingan. Iteratsiya jarayoni uchun boshlang‘ich yaqinlashish sifatida (10) formuladan foydalanilgan. Sonli natijalar vizual shaklda va animatsiya bilan taqdim etildi.



3-rasm. (8) masalaning sonli yechish natijalari.

$\alpha_1=0.4,\ \alpha_2=0.5,\ \mathrm{m}_1=0.3,\ \mathrm{m}_2=0.2,\ \beta_1=3,\ \beta_2=3$

Hisoblash eksperementlari shuni ko‘rsatadiki, bu yerda sonli yechimda vaqtning har bir momentida yechimning fazoviy lokallashish hodisasi ko‘rsatilgan.

Dissertatsiyaning uchinchi bobi “**Ko‘p o‘lchovli hollarda chegaraviy shartlar bilan berilgan issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarini matematik modellashtirish**” deb nomlangan bo‘lib, unda ko‘rib chiqilayotgan masalaning blow-up va global yechimga ega bo‘lish shartlari topilgan.

3.1-paragrafda quyidagi masalaning blow-up va global xossaga ega yechimlari qaralgan:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = b(u)\nabla\left(a(u)\nabla u\right) + f(u), \qquad (x,t)\in D\times(0,T) \\ &\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x,t)u = 0, \qquad (x,t)\in \partial D\times(0,T) \\ &u(x,0) = u_0(x) > 0, \ \ x\in \overline{D} \end{aligned} \tag{13}$$

bu yerda D – silliq chegaralangan R^N dagi soha, $N\ge 2$, $\overline{D}$ – uni yopig‘i ∇ – gradient simvol, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – tashqi normal bo‘yicha hosila, a, b, f musbat funksiyalar $C^2\left(R^+\right)$ sinfda aniqlangan, σ – funksiya $C^1(\overline{Q_T})$ da manfiy emas, $\left(Q_T = D\times(0,T),\, R^+ = (0,+\infty)\right)$, u_0 – funksiya $C^3(\overline{D})$ da musbat va $\dfrac{\partial u_0}{\partial n} + \sigma(x,t)u_0 = 0 \ \ (x,t)\in\partial D\times(0,T)$.

$u(x,t)\in C^3(\mathrm{D}\times(0,\mathrm{T}))\cap C^2(\overline{D}\times(0,\mathrm{T})$ (13) masalaning yechimi bo‘lsin.

7-teorema. Faraz qilaylik, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $s\in R^+$da

$$0 < a(\mathrm{s}) \le \beta,\ b(\mathrm{s}) > 0,\ a'(\mathrm{s}) \ge 0,\ f(s) > 0,\ af''(s) - a'f'(s) \ge 0,\ \left(\frac{sa(s)}{f(s)}\right)' \le 0$$

2) $D\times\left(0,T\right)$sohada $\sigma(\mathrm{x},t)\ge 0, \sigma_t(\mathrm{x},t)\le 0$

3) $\beta = \min\limits_{\overline{D}}\left\{\dfrac{a(u_0)}{f(u_0)}\left[b(u)\nabla\left(a(u_0)\nabla u_0\right) + f(u_0)\right]\right\} > 0,$

4) $\displaystyle\int_{M_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{f(s)}ds < +\infty$, bu yerda $M_0 = \max\limits_{\overline{D}} \mathrm{u}_0$.

U holda chekli T vaqtda $u(x,t)$ blow-up yechimga ega va

$T \le \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_{M_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{f(s)}ds$, $u(x,t)\le H^{-1}(\beta(\mathrm{T}-\mathrm{t}))$ baho o‘rinli bo‘ladi,

bu yerda $H(z) = \displaystyle\int_{z}^{+\infty}\frac{a(s)}{f(s)}ds,\ \mathrm{z}>0$ va H^{-1} –-unga teskari funksiya.

Agar 7-teoremada $a(u)=u^{m-1},\ b(u)=u^{\alpha}$ va $f(u)=u^{\,p}$ desak, quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

3-natija . Faraz qilaylik, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $1\le m\le p,$ 2) $D\times\left(0,T\right)$sohada $\sigma(\mathrm{x},t)\ge 0,\sigma_t(\mathrm{x},t)\le 0$

3) $\beta=\min\limits_{\overline{D}}\left\{\frac{u_0^{m-1}}{u_0^{p}}\left[u_0^{\alpha}\nabla\left(u_0^{m-1}\nabla u_0\right)+u_0^{p}\right]\right\}>0$

4) $\int\limits_{M_0}^{+\infty}s^{m-p-1}ds=\frac{M_0^{m-p}}{p-m},\quad m<p$ bu yerda $M_0=\max\limits_{\overline{D}}\mathrm{u}_0.$

U holda (13) sistema chekli T vaqtda $u(x,t)$ blow-up yechimga ega bo‘ladi va

$$T\le\frac{1}{\beta}\frac{M_o^{m-p}}{p-m},\ \ u(x,t)\le H^{-1}(\beta(\mathrm{T-t}))=\left(\left(p-m\right)\beta\left(T-t\right)\right)^{\frac{1}{m-p}},$$

bu yerda $H(z)=\frac{z^{m-p}}{p-m},\mathrm{z}>0$ va H^{-1} – unga teskari bo‘lgan funksiya.

3.2-paragrafda quyidagi masalaning blow-up va global xossaga ega yechimlari qaralgan:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=b_i(u_{3-i})\nabla\left(a_i(u_i)\nabla u_i\right)+f_i(u_i),\ \mathrm{i}=1,2\ \ (x,t)\in D\times(0,T)$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial n}+\sigma_i(x,t)u_i=0,\ \mathrm{i}=1,2\quad (x,t)\in\partial D\times(0,T)\tag{14}$$
$$u_i(x,0)=u_{i0}(x)>0,\ \mathrm{i}=1,2\qquad x\in\overline{D}$$

bu yerda $a_i,b_i,f_i\ (\mathrm{i}=1,2)$ musbat funksiyalar $C^2\left(R^+\right)$ sinfda aniqlangan, $\sigma_i\ (\mathrm{i}=1,2)$ – funksiya $C^1(\overline{Q}_T)$ da manfiy emas, $\left(Q_T=D\times(0,T),\ R^+=(0,+\infty)\right)$, u_{i0} – funksiya $C^3\left(\overline{D}\right)$ da musbat va $\frac{\partial u_{0i}}{\partial n}+\sigma_i(x,t)u_{i0}=0,\ \mathrm{i}=1,2\ \ (x,t)\in\partial D\times(0,T)$.

$u_i(x,t)\in C^3(\mathrm{D}\times(0,\mathrm{T}))\cap C^2(\overline{D\times(0,\mathrm{T})})$ (14) masalaning yechimi bo‘lsin.

8-teorema. Faraz qilaylik, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $s\in R^+$ da

$$0<a_i(\mathrm{s})\le\beta_i,b_i(\mathrm{s})>0,a_i'(\mathrm{s})\ge 0,\ f_i(s)>0,\ a_if_i''(s)-a_i'f_i'(s)\ge 0,\ \left(\frac{sa_i(s)}{f_i(s)}\right)'\le 0$$

2) $D\times\left(0,T\right)$sohada $\sigma_i(\mathrm{x},t)\ge 0,\sigma_{it}(\mathrm{x},t)\le 0\ (\mathrm{i}=1,2)$

3 $\beta_i=\min\limits_{\overline{D}}\left\{\frac{a_i(u_{i0})}{f_i(u_{i0})}\left[b_i(u_{3-i0})\nabla\left(a_i(u_{i0})\nabla u_{i0}\right)+f_i(u_{i0})\right]\right\}>0,\ \mathrm{i}=1,2$

4) $\int\limits_{M_{0i}}^{+\infty}\frac{a_i(s)}{f_i(s)}ds<+\infty,\ \mathrm{i}=1,2$, bu yerda $M_{0i}=\max\limits_{\overline{D}}\mathrm{u}_{i0},\ \mathrm{i}=1,2.$

U holda chekli T vaqtda $u_i(x,t)$ blow-up yechimga ega va

$$T \le \frac{1}{\beta_i}\int\limits_{M_{0i}}^{+\infty}\frac{a_i(s)}{f_i(s)}ds,\ T=\min\{T_1,T_2\},,\quad u_i(x,t)\le H_i^{-1}(\beta(\mathrm{T-t})),\ \mathrm{i}=1,2\ \text{ bo‘ladi,}$$

bu yerda $H_i(z)=\int\limits_{z}^{+\infty}\frac{a_i(s)}{f_i(s)}ds,\ \mathrm{z}>0,\ \mathrm{i}=1,2$ va $H_i^{-1},\ \mathrm{i}=1,2$ – teskari funksiya.

Agar 8-teoremada $a_i(u_i)=u_i^{m_i-1},\ b_i(u_{3-i})=u_{3-i}^{\ \alpha_i}$ va $f_i(u_i)=u_i^{p_i},\ i=1,2$ desak, quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

4-natija. Faraz qilaylik, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $1\le m_i\le p_i,$ 2) $D\times(0,T)$ sohada $\sigma_i(\mathrm{x},t)\ge 0,\sigma_{it}(\mathrm{x},t)\le 0\ (\mathrm{i}=1,2)$

3) $\beta_i=\min\limits_{\bar D}\left\{\frac{u_{i0}^{m_i-1}}{u_{i0}^{p_i}}\left[u_{3-i0}^{\alpha_i}\nabla\left(u_{i0}^{m_i-1}\nabla u_{i0}\right)+u_{i0}^{p_i}\right]\right\}>0,\ \mathrm{i}=1,2$

4 $\int\limits_{M_{0i}}^{+\infty}s^{m_i-p_i-1}ds=\frac{M_{0i}^{m_i-p_i}}{p_i-m_i},\qquad m_i<p_i,\mathrm{i}=1,2,\ M_{0i}=\max\limits_{\bar D}\mathrm{u}_{i0},\ \mathrm{i}=1,2.$

U holda(14) masala chekli T vaqtda $u_i(x,t)$ blow-up yechimga ega va

$$T\le\frac{1}{\beta_i}\frac{M_{oi}^{m_i-p_i}}{p_i-m_i},\ u_i(x,t)\le H^{-1}(\beta_i(\mathrm{T-t}))=\left(\left(p_i-m_i\right)\beta_i\left(T-t\right)\right)^{\frac{1}{m_i-p_i}}\ \text{ bo‘ladi,}$$

bu yerda $H_i(z)=\frac{z^{m_i-p_i}}{p_i-m_i},\ \mathrm{z}>0$ va $H_i^{-1},\ \mathrm{i}=1,2$ – unga teskari funksiya.

9-teorema. Faraz qilaylik, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $s\in R^+$ da

$$0<\beta_i\le a_i(\mathrm{s}),b_i(\mathrm{s})>0,a_i'(\mathrm{s})\le 0,\ f_i(s)>0,\ a_i f_i''(s)-a_i'\,f_i'(s)\le 0,\left(\frac{sa_i(s)}{f_i(s)}\right)'\ge 0$$

2) $D\times(0,T)$ $\sigma_i(\mathrm{x},t)\ge 0,\sigma_{it}(\mathrm{x},t)\ge 0\ (\mathrm{i}=1,2)$

3) $\delta_i=\max\limits_{\bar D}\left\{\frac{a_i(u_{i0})}{f_i(u_{i0})}\left[b_i(u_{3-i0})\nabla\left(a_i(u_{i0})\nabla u_{i0}\right)+f_i(u_{i0})\right]\right\}>0,\ \mathrm{i}=1,2$

4) $\int\limits_{m_{0i}}^{+\infty}\frac{a_i(s)}{f_i(s)}ds<+\infty,\ \mathrm{i}=1,2$, bu yerda $m_{0i}=\min\limits_{\bar D}\mathrm{u}_{i0},\ \mathrm{i}=1,2.$

U holda $u_i(x,t)$ global yechimlarga ega bo‘ladi va

$$u_i(x,t)\le G_i^{-1}(\delta_i\,\mathrm{t}+\mathrm{G}_i(\mathrm{u}_{0i}(\mathrm{x}))),\ \text{bu yerda } G_i(z)=\int\limits_{m_{0i}}^{z}\frac{a_i(s)}{f_i(s)}ds,\ \mathrm{z}>m_{0i},i=1,2.$$

Agar 9-teoremada $a_i(u_i)=u_i^{m_i-1},\ b_i(u_{3-i})=u_{3-i}^{\ \alpha_i}$ va $f_i(u_i)=u_i^{p_i},\ i=1,2$ desak, quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

5-natija. Faraz qilaylik, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $0\le p_i\le m_i\le 1,$ 2) $D\times(0,T)$ sohada $\sigma_i(\mathrm{x},t)\ge 0,\sigma_{it}(\mathrm{x},t)\ge 0\ (\mathrm{i}=1,2)$

3) $\delta_i = \max\limits_{\overline{D}} \left\{ \frac{u_{i0}^{m_i-1}}{u_{i0}^{p_i}} \left[u_{3-i0}^{\alpha_i} \nabla \left(u_{i0}^{m_i-1} \nabla u_{i0} \right) + u_{i0}^{p_i} \right] \right\} > 0, \mathrm{i}=1,2$

4) $\int\limits_{m_{0i}}^{+\infty} s^{m_i-p_i-1} ds = \lim\limits_{k\to+\infty} \left[\frac{k^{m_i-p_i}}{m_i-p_i} - \frac{m_{0i}^{m_i-p_i}}{m_i-p_i} \right], \quad m_i > p_i, \;\; m_{0i} = \min\limits_{\overline{D}} \mathrm{u}_{i0}, \mathrm{i}=1,2.$

U holda (14) masala $u_i(x,t)$ global yechimlarga ega bo‘ladi va

$$u_i(x,t) \le G_i^{-1}(\delta_i \mathrm{t} + \mathrm{G}_i(\mathrm{u}_{i0}(\mathrm{x}))) = \left(\left(m_i - p_i \right) \delta_i t + u_{i0}^{m_i-p_i} \right)^{\frac{1}{m_i-p_i}}, \mathrm{i}=1,2$$

bu yerda, $G_i(z) = \int\limits_{m_{0i}}^{z} s^{m_i-p_i-1} ds = \frac{z^{m_i-p_i}}{m_i-p_i} - \frac{m_{0i}^{m_i-p_i}}{m_i-p_i}$, $m_i > p_i$ va $G_i^{-1}, \mathrm{i}=1,2$ – teskari funksiya.

3.3-paragrafda ikki komponentali nochiziqli muhitda yonish va issiqlik diffuziya jarayonlarini sonli tadqiq qilish dasturining interfeysi hamda ishlatilishi keltirib o‘tilgan.

XULOSA

“Ikki komponentali blow-up rejimli nochiziqli muhitlarda sonli modellashtirish” mavzusidagi dissertatsiya bo‘yicha olib borilgan tadqiqot natijalarining xulosalari quyidagilardan iborat:

1. Bir jinsli bo‘lmagan muhitda nochiziqli parabolik tipdagi nodivergent tenglamalar sistemalari bilan ifodalanuvchi issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlari nochiziqli modellarining blow-up xossalari tadqiq etildi.

2. Bir jinsli bo‘lmagan muhitda parabolik tipdagi nodivergent tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining avtomodel yechimlarining asimptotikalari olindi hamda muhitning sonli parametrlari qiymatlariga qarab sonli yechimlar olishda iteratsion jarayon uchun boshlang‘ich yaqinlashishni qurish masalasi yechildi.

3. Issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlarini ifoda etuvchi ko‘p o‘lchovli masalalar uchun ayirmali sxemalar qurildi hamda nochiziqli effektlarni saqlagan holda izlanayotgan yechimga tez yaqinlashuvchi iteratsion jarayonni qurish uchun yaxshi natijalar berishi aniqlandi.

4. Maksimum tamoyiliga asosan nodivergent ko‘rinishdagi nochiziqli matematik modellari uchun blow-up va global yechimlarga ega bo‘lish shartlari isbotlanilgan.

5. Nodivergent parabolik tenglamalar sistemasining blow-up yechimlarga ega bo‘lish shartlari olindi hamda blow-up va global yechimlarning yuqoridan baholari ko‘rsatildi.

6. Issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlari matematik modellari uchun vaqt bo‘yicha baholari olindi (portlash vaqti).

7. Ikki komponentali blow-up rejimli nochiziqli muhitlarda issiqlik diffuziyasi va yonish jarayonlari masalalarini sonli tadqiq etish uchun ayirmali sxemalar, algoritmlar va dasturlar majmuasi ishlab chiqildi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

РАУПОВ ДИЛМУРОД РАСУЛОВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ BLOW-UP РЕЖИМОВ В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
физико-математическим наукам**

Ташкент – 2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.2.PhD/FM392

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Матякубов Алишер Самандарович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Нормуродов Чори Бегалиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Сейтов Айбек Жумабаевич доктор техических наук, доцент
Ведущая организация:	**Ташкентский университет информационных технологий**

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2023 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2023 года

(протокол рассылки № ____от «____» _______________2023 года).

М.М.Арипов
Председатель Научного совета по
присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета
по присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., доцент

Б.Ф.Абдурахимов
Председатель Научного семинара
при научном совете по присуждению
ученых степеней, д.ф.-м..н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. На сегодняшний день в мировых исследованиях, посвященных blow-up (сверхбыстрые) процессам и системам, являются актуальными и востребованными. Математические модели таких процессов описываются нелинейными системами дифференциальных уравнений в частных производных и являются объектом исследований в задачах теории горения (модели воспламенения твердого и жидкого горючего), лазерного термоядерного синтеза, в теории нелинейных волн, в задачах процессов диффузии тепла, фильтрации и других. Поэтому исследование нелинейных математических моделей blow-up режимов в двухкомпонентных нелинейных средах, построение эффективных численных схем и алгоритмов, разработка комплекса программ остаются важными задачами прикладной математики.

В настоящее время в мире широко исследуются математические модели диффузии, которые описываются с помощью систем уравнений параболического типа недивергентного вида. Математические модели процессов диффузии широко применяются в биофизике для описания биофизических механизмов морфогенеза, для модели воспламенения твердого и жидкого горючего в теории горения, в задачах коллапса (быстрое сжатие вещества) химической кинетики, для построения моделей процессов биологических популяций, теплопроводности и фильтрации. Поэтому создание численных схем решения, алгоритмов и программного обеспечения на основе определения новых качественных свойств различных нелинейных математических моделей в blow-up режимах, относятся к числу целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется таким актуальным направлениям, как математическое моделирование биологических, биофизических, химических, сейсмологических процессов и разработке методов аналитического и численного решения нелинейных математических моделей, имеющих научное и практическое применение фундаментальных наук. В связи с этим были достигнуты значительные результаты в математическом моделировании таких процессов, как распространение волн, фильтрации политропного газа в пористом грунте в механике, движения крови в мелких кровеносных сосудах в медицине, распространение тепла, роста и миграции биологических популяций в биологии, разработке численных и аналитических методов математических моделей, широком внедрении полученных результатов в практику решения нелинейных задач. Определены задачи проведения исследований на уровне международных стандартов по таким приоритетным направлениям, как «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика»[1]. Исследование численного моделирования blow-up режимов в двухкомпонентных нелинейных средах, описываемых параболическими системами уравнениями недивергентного вида с диффузией и практическому применению таких систем уравнений является одним из важных задач, которые ведутся в ниже следующих направлениях: разработка методов изучения качественных blow-up свойств решения нелинейных параболических систем недивергентного вида; нахождение асимптотики решений в различных пространствах; определение оценки blow-up свойств решений; создание комплекса программ для изучения математических моделей blow-up процессов; визуализация и контроль динамики нелинейного процесса по времени. Научные исследования, которые ведутся во всех вышеперечисленных направлениях, указывают актуальность темы данной диссертации.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит выполнению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 07 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», №УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», в постановлениях №ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП-4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В середине XX века с теории горения Зельдович, Баренблатт и Либрович в первые было начато изучение проблем режимов blow-up. В работах А.А.Самарский, А.С.Калашников, В.А.Галактионов, А.П.Михайлов, Б.И.Баренблатт, J.L.Lions, Daniela Giachetti, Pan Zheng, J. Vazgues, Ansgar Jüngel, L.Rossi, Juntang Ding и других авторов, обнаружены неограниченность решений (blow up), эффект конечной скорости распространения и пространственная локализация возмущений, в конечном времени существования возмущений в нелинейной среде при

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli qarori (Manba: https://lex.uz/docs/4807552).

наличии источника и поглощения. Изучением асимптотического поведения решений занимались Wiegner M., Winkler M., Gage E., Angenent S., Jin Ch., Yin J., Yunzhu Gao, Qiu Meng, Yingjia Guo, Zhi-wen Duan, Li Zhou; исследованием условий blow-up решений, о глобальной разрешимости и не разрешимости решений по времени задачи Коши для нелинейных уравнений и систем уравнений недивергентного вида занимались Deng W., Li Y., Xie Ch., Lu H., Duan Z., Zhou L., Wang M., Wei Y., Sun Y., Shi Y., Wu M., Huiling Li, Yang Zhang, Koichi Anadaa, Juntang Ding, Shengjia Li и другие авторы.

В нашей стране нелинейными уравнениями и процессами, связанными с ними задачами, занимались Н.М.Мухитдинов, М.М.Арипов, Б.Х.Хужаёров, А.С.Расулов, Н.Равшанов, Ж.Тохиров, Н.Утеулиев, А.Ҳайдаров, З.Р.Рахмонов, Ш.А.Садуллаевой, А.С.Матякубов, Д.К.Мухамедиевой и их ученики. Их основные работы посвящены численному изучению свойств решений задач нелинейной диффузии для дивергентных уравнений и систем уравнений, которые можно применить к задачам моделирования процессов диффузии, фильтрации, теплопроводности.

Для недивергентных уравнений и систем уравнений посвящены работы М.Арипова, Ш.Садуллаевой, А.Матякубова Д.Мухаммадиевой, Ж.Раимбекова, М.Хожимуродовой, в которых на основе автомодельного анализа исследованы качественные свойства решений нелинейных задач, моделирующие процессы, встречающихся в различных разделах естествознания. Анализ работ по моделированию диффузионных систем исследование условий blow-up решений, о глобальной разрешимости и не разрешимости решений по времени задачи для систем уравнений диффузии и результаты практического применения методов и алгоритмов при решении различных прикладных задач показывает, что теоретические и прикладные проблемы в области моделирования нелинейных процессов требуют более глубокого и полного исследования.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках научно-исследовательских проектов Национального Университета Узбекистана по теме ОТ-Ф4-30 - «Исследование качественных свойств решений кросс систем с двумя нелинейностями, конвективным переносом, переменной плотностью, источником или поглощением» (2017-2020 гг).

Целью исследования является численное и аналитическое исследование blow-up свойств нелинейных математических моделей, описывающихся параболическими системами недивергентного вида в неоднородной среде с источником, разработка алгоритмов и программного обеспечения для численного решения нелинейной задачи процессов горения и диффузии тепла.

Задачи исследования:

получить условие существования blow-up решения для математической модели горения и диффузии тепла;

получить асимптотики автомодельных решений нелинейной задачи горения и диффузии тепла;

построить численные схемы для исследования качественных нелинейных свойств математических моделей горения и диффузии тепла;

разработать программное обеспечение для решения поставленных задач и визуализировать график blow-up решений.

Объектом исследования являются нелинейные процессы горения и диффузии тепла, описываемые системами параболических уравнений недивергентного вида.

Предмет исследования являются вычислительные схемы и программное обеспечение для численного исследования качественных нелинейных свойств математических моделей горения и диффузии тепла.

Методы исследования. В диссертации использовались автомодельный анализ и приближенно автомодельные методы, принцип сравнения решений для построения и анализа различных типов решений, методы эталонных уравнений, разностные схемы для построения численных решений, методы итерации, метод прогонки.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

на основе теоремы сравнения построены верхние и нижние оценки решений задачи Коши для параболических систем недивергентного вида в неоднородной среде;

с помощью алгоритма нелинейного расщепления получены асимптотики автомодельных решений задачи Коши для параболических систем недивергентного вида в неоднородной среде с blow-up режимом;

условия наличия глобальных и blow-up решений для математических моделей процессов горения и диффузии тепла доказано на основе автомодельного анализа и теорем сравнения;

построены оценки blow-up решений для параболических систем недивергентного вида с граничными условиями описывающие процессы диффузии тепла и горение;

на основе принципа максимума получены оценки для времени обострения (время взрыва) математических моделей процессов диффузии тепла и горения;

при получении численных решений, на основе значений числовых параметров среды, решена задача нахождения начального приближения для интерационного процесса.

Практические результаты исследования следующие:

построены асимптотические формулы для решения нелинейных задач, возникающих в процессе горения и диффузии тепла;

построен алгоритм численных решений и разработан комплекс программ для нелинейных задач горения и диффузии тепла.

Достоверность результатов исследований. Изложенные в диссертации утверждения обоснованы строгими доказательствами на основе теорем сравнения и принципа максимума, а также подтверждены результатами вычислительных экспериментов, соответствием полученных результатов с сохранение нелинейные эффекты основанных автомодельному анализу.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что при решении аналогичных задач могут быть применены существование blow-up решений задачи Коши для нелинейных математических моделей, а также полученные результаты могут быть применены в исследовании задач на быстрое сжатие веществ химической кинетики, моделирование автокаталитических реакций в теории горения (модели воспламенения твердого и жидкого горючего), в резистивные диффузионные явления в бессиловых магнитных полях.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что построены итерационные процессы, созданы численные вычислительные схемы и программное обеспечение, позволяющие проводить эффективные вычислительные эксперименты по таким нелинейным задачам, как таксисные волны, моделям автокаталитических реакций в теории горения (модели воспламенения твердого и жидкого горючего), быстрое сжатие вещества химической кинетики.

Внедрение резултатов исследования. Полученные научные результаты, по численному и аналитическому решению задач горения и диффузии тепла в двухкомпонентных нелинейных средах blow-up режимов, в практику внедрены по следующим направлениям:

полученные blow-up и глобальные решения для математических моделей процессов диффузии тепла и горения, алгоритмы и методы численного решения, начальное приближение для итерационного процесса и результаты разработанного программного обеспечения были использованы в рамках проекта гранта ПЗ-202008061 «Yangi avlod oligomer antipirenlarni qo‘llab yog‘och qurilish materiallari va buyumlarining olovbardoshligini oshirish resurs tejamkor texnologiyasini ishlab chiqish» (Справка АО УЗКИМЁСАНОАТ. Ташкентский научно исследовательский институт. № 0410/289 от 20 сентября 2022 года). Применение этих научных результатов дало возможность определить воспламенение и время взрыва горючих материалов в неоднородных средах;

построение верхних и нижних решений для систем недивергентных уравнений параболического типа в неоднородной среде, метод прогонки для численного моделирования в неоднородной среде с двухкомпонентным blow-up режимом, программное обеспечение для визуализации численных результатов и графические результаты, описывающие процессы диффузии тепла и горения в неоднородной среде были использованы в практическом проекте MB-ATEX - 2018-58. «Yangi avlod metallorganik oligomer qo‘shimchali olovbardosh, issiqlik izolyatsiyalovchi qurilish materiallarini tadqiq etish va texnologiyasini yaratish» (Справка Академия Минстерства по черезвычайным ситуациам Республики Узбекистан №36/16-2217 от 15 ноября 2022 года). В результате, полученные численные результаты использованы для создания пакета приложений для численного моделирования процессов горения и диффузии тепла.

Апробация результатов исследований. Основные результаты диссертационной работы обсуждались на 7 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 19 научных работ, из них 8 статей в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации результатов диссертационных исследований, в том числе 1 статья опубликована в зарубежном издании с импакт-фактором (Scopus), 7 в республиканских научных изданиях, получены 2 авторских свидетельства на программы для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений. Объем диссертации составляет 112 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, отмечено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, описана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, указаны объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, даны сведения об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная «**Математическое моделирование процессов диффузии тепла и горения в нелинейных средах с blow-up режимом**», имеет обзорный характер. В первом параграфе излагаются свойства математической модели процессов нелинейной диффузии в blow-up режимов в нелинейных средах и результаты исследований ученых со всего мира. Во втором параграфе приводятся основные вспомогательные определения и утверждения.

Параграф 1.3 посвящен исследованию blow-up свойства нелинейной задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right)+u^{\beta_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_2-1}\nabla v\right)+v^{\beta_2}, \end{aligned} \quad . \qquad (1)$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\geq 0,\;\; v|_{t=0}=v_0(x)\geq 0,\;\; x\in R^N \tag{2}$$

где, $\nabla(\cdot)=grad_x(\cdot)$, $\alpha_1,\alpha_2,m_1,m_2,\beta_1,\beta_2$ –положительные числа, $N\geq 1$– размер пространства, $u=u(t,x)\geq 0,\;\; v=v(t,x)\geq 0$ - искомые решения.

Известно, что в зависимости от значения числовых параметров система (1) описывает различные физические процессы такие, как процесс диффузии для биологических видов, резистивных диффузионных явлениях в бессиловых магнитных полей, распространение инфекционных заболеваний, диффузионное горение и в ряде других областей. Хорошо известно, что вследствие вырождения система уравнения (1) при $u=0, v=0$ или $\nabla u=0, \nabla v=0$ может не иметь классического решения.

Рассмотрим решение следующего вида

$$u(t,x)=(T-t)^{q_1}\,\mathrm{w}(\tau(t),\mathrm{r}),\; v(t,x)=(T-t)^{q_2}\,\varphi(\tau(t),\mathrm{r}),\; r=|x| \tag{3}$$

$$q_1=-\frac{1}{\beta_1-1},\; \mathrm{q}_2=-\frac{1}{\beta_2-1},\;\; \tau(t)=\begin{cases}\int(\mathrm{T-t})^{\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}}dt, & \dfrac{m_1-1}{1-\beta_1}+\dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1\neq 0\\ Ln(\mathrm{T-t}), & \dfrac{m_1-1}{1-\beta_1}+\dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1=0\end{cases}$$

$$w(\tau,x)=f(\xi),\quad \varphi(\tau,x)=\phi(\xi),\quad \xi=|x|\tau^{-\frac{1}{2}}$$

Функции $f(\xi),\;\phi(\xi)$ являются решением следующей автомодельной задачи

$$\begin{aligned}&\varphi^{\alpha_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f^{m_1-1}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi}-b_1\left(f^{\beta_1}+f\right)=0,\\ &\varphi^{\alpha_2}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f^{m_2-1}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi}-b_2\left(f^{\beta_2}+f\right)=0,\end{aligned} \tag{4}$$

где $b_i=\dfrac{q_i}{q_i(\mathrm{m}_i-1)+q_{3-i}\alpha_i},\quad i=1,2$

$$f'(0)=0,\,\phi'(0)=0,\,f(\infty)=0,\,\phi(\infty)=0 \tag{5}$$

$$f(\xi)=\overline{f}(\xi)\,\mathrm{y}_1(\eta),\;\phi(\xi)=\overline{\phi}(\xi)\,\mathrm{y}_2(\eta)$$

Введем следующие обозначения:

$$b_{i1}(\eta)=\left(\frac{N}{2}-1+p_im_i\right)\mathrm{p}_i,\;\; b_{i2}(\eta)=\frac{p_i-b_i}{4},\; c_{i1}(\eta)=\left(p_im_i-1\right)\mathrm{p}_i,$$

$$c_{i2}(\eta)=-\frac{p_i}{4},\, c_{i3}(\eta)=\frac{-b_i}{4a},(i=1,2)$$

Случай быстрой диффузии. $p_i<0$.Отметим, что функции

$$\overline{f}(\xi)=A\left(a+\xi^2\right)^{p_1},\;\overline{\phi}(\xi)=B\left(a+\xi^2\right)^{p_2},\,A>0,\,B>0,\,\mathrm{a}>0,\,\eta=\ln\left(a+\xi^2\right),$$

удовлетворяют условию (4), где $p_i=\dfrac{m_{3-i}-\alpha_i-1}{(m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2}$.

Пусть выполняется равенство $q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1=q_2(m_2-1)+q_1\alpha_2$. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $\beta_i>1,\, p_i<0\ (i=1,2)$ и $q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1+1>0$. Тогда решение системы уравнений (1) имеет асимптотику при $\xi\to\infty$

$$u(t,x)=\left(T-t\right)^{q_1}\left(a+\xi^2\right)^{p_1}\mathrm{y}_1(\eta),\ v(t,x)=\left(T-t\right)^{q_2}\left(a+\xi^2\right)^{p_2}\mathrm{y}_2(\eta),$$

где $y_i(\eta)=y_i^0+o(1),\ 0<y_i^0<+\infty,\ (i=1,2)$ и $y_i^0,(i=1,2)$ являются, соответственно, корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$b_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+b_{i2}=0,\ (i=1,2)$$

Случай медленной диффузии. Пусть для систем уравнений (4) выполняется условия

$$f\,'\left(0\right)=0,\ \phi'\left(0\right)=0,\ f\left(\infty\right)=\infty,\ \phi\left(\infty\right)=\infty \tag{6}$$

Отметим, что функции

$$\overline{f}\left(\xi\right)=A\left(a-\xi^2\right)^{p_1},\ \overline{\phi}\left(\xi\right)=B\left(a-\xi^2\right)^{p_2},\ A>0,\ B>0,\ \mathrm{a}>0,\ \eta=-\ln\left(a-\xi^2\right),$$

удовлетворяют условию (6), где $p_i=\dfrac{m_{3-i}-\alpha_i-1}{(m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2}$.

Тогда система (5) приводится к виду

$$\mathrm{y}_{3-i}^{\alpha_i}\frac{d}{d\eta}\left(Ly_i\right)+a_{i1}(\eta)\,\mathrm{y}_{3-i}^{\alpha_i}Ly_i+a_{i2}\left(a_{i0}y_i+\frac{dy_i}{d\eta}\right)+a_{i3}(\eta)\,\mathrm{y}_i+a_{i4}(\eta)y_i^{\beta_i}=0, \tag{7}$$

где

$$a_{i0}(\eta)=-\mathrm{p}_i,\ a_{i1}(\eta)=\frac{Ne^{-\eta}}{2(e^{-\eta}-a)}-1+p_im_i,\quad a_{i2}(\eta)=\frac{1}{4},\ \mathrm{a}_{i3}(\eta)=-\frac{b_i^{-\eta}}{4(e^{-\eta}-a)},$$

$$\mathrm{a}_{i4}(\eta)=-\frac{b_ie^{-s_i\eta}}{4(e^{-\eta}-a)},\quad \mathrm{L}y_i=y_i^{m_i-1}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-p_iy_i\right),\ s_i=p_i(\beta_i-1)+1,\ (i=1,2)$$

Теорема 2. Пусть $q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1+1>0$. Для того чтобы система (7) имела решения $\left(\mathrm{y}_1(\eta),\ \mathrm{y}_2(\eta)\right)$ вида $y_i(\eta)=y_i^0+o(1),\eta\to\infty,$

где $(0<y_i^0<+\infty,\ (i=1,2))$ необходимо, чтобы соблюдалось одно из следующих условий:

1. $p_i=\dfrac{1}{1-\beta_i},\ y_i^0,(i=1,2)$ – являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i2}+c_{i3}z_i^{\beta_i-1}=0,\ (i=1,2)$$

2. $p_i<\dfrac{1}{1-\beta_i},\ p_im_i>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ —-являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i2}=0,\ (i=1,2)$$

3. $p_1=\dfrac{1}{1-\beta_1}$, $p_2<\dfrac{1}{1-\beta_2}$, $p_2 m_2>1$, $y_i^0,(i=1,2)$ – являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_{11}z_1^{m_1-1}z_2^{\alpha_1}+c_{i2}+c_{i3}z_1^{\beta_1-1}=0 \\ c_{21}z_2^{m_2-1}z_1^{\alpha_2}+c_{22}=0 \end{cases}$$

4. $p_1<\dfrac{1}{1-\beta_1}$, $p_2=\dfrac{1}{1-\beta_2}$, $p_1 m_1>1$, $y_i^0,(i=1,2)$ – являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_{11}z_1^{m_1-1}z_2^{\alpha_1}+c_{12}=0 \\ c_{21}z_2^{m_2-1}z_1^{\alpha_2}+c_{22}+c_{23}z_2^{\beta_2-1}=0 \end{cases}$$

Следствие 1. Обобщенное решение системы уравнений (1)-(2) имеет асимптотику при $|x|\to a^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}$,

$$u_A(t,x)=z_1\left(T-t\right)^{q_1}\left(a-|x|^2\tau^{-1}\right)^{p_1}(1+o(1)),\ v_A(t,x)=z_2\left(T-t\right)^{q_2}\left(a-|x|^2\tau^{-1}\right)^{p_2}(1+o(1))$$

где $z_1,z_2,\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2$ – определенные выше константы.

Результаты дают возможность получить следующую оценку для свободной границы $|x(t)|\le\left[\dfrac{a}{b}\right]^{\frac{1}{2}}\left(T-t\right)^{\frac{b}{2}}$, где $b=q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1+1$.

В параграфе 1.4 разработаны разностные схемы для (1) и проведен вычислительный эксперимент. Для расчета использовали шаг сетки *h*=0.02, точность итерации $\varepsilon=10^{-3}$.Начальное приближение взято в виде

$$u_0\left(x\right)=\bar{u}(0)f_A\left(\xi\right),\ v_0\left(x\right)=\bar{v}(0)\varphi_A\left(\xi\right)$$

где $f_A\left(\xi\right)=A\left(a\pm\xi^2\right)_+^{p_1}$, $\varphi_A\left(\xi\right)=B\left(a\pm\xi^2\right)_+^{p_2}$, $\bar{u}(0)=T^{-\frac{1}{\beta_1-1}}$, $\bar{v}(0)=T^{-\frac{1}{\beta_2-1}}$,

$$\xi=\phi(x)\left[\tau(0)\right]^{-\frac{1}{2}},\quad \phi(x)=|x|,\quad \tau\left(0\right)=\frac{1}{q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1+1}T^{q_1(m_1-1)+q_2\alpha_1+1},$$

$$p_i=\frac{m_{3-i}-\alpha_i-1}{\left(m_1-1\right)\left(m_2-1\right)-\alpha_1\alpha_2},\ i=1,2.$$

Приведем некоторые результаты численных экспериментов.

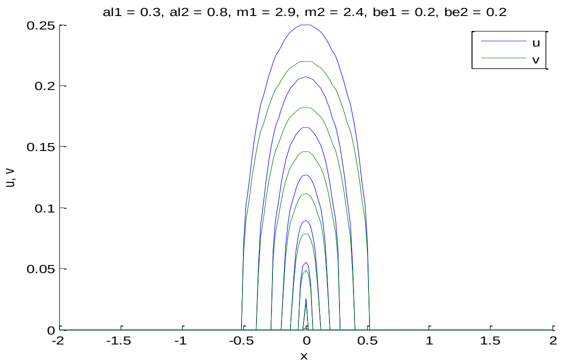


Рис 1. Численное решение задачи (1) (медленной диффузии).

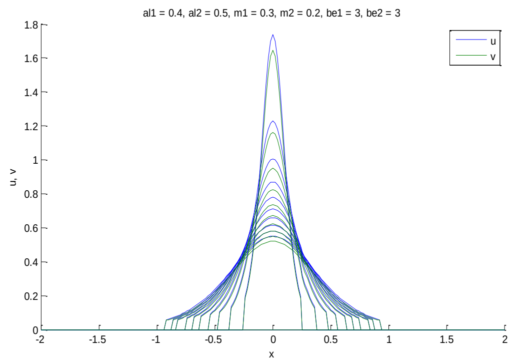


Рис 2. Численное решение задачи (1) (быстрой диффузии).

Вычислительные эксперименты показывают, что на основе качественных свойств blow-up решений проведены численные расчеты и решения задачи представляются в визуализированном виде с анимацией, что даёт возможность проследить за эволюцией изучаемого процесса.

Вторая глава диссертации **«Математическое моделирование процессов диффузии тепла и горения для blow-up режимов с переменной плотностью»** посвящена исследованию качественных blow-up свойств решений нелинейной модели диффузии тепла и горения в неоднородной среде с источником. Построена автомодельная система уравнений, изучено асимптотическое поведение решений нелинейной системы, в зависимости от значения численных параметров системы.

В параграфе 2.1 исследуются качественные blow-up свойства решений следующих нелинейных задач:

$$\begin{aligned} |x|^{-l}\frac{\partial u}{\partial t} &= v^{\alpha_1}\nabla\left(|x|^n u^{m_1-1}\nabla u\right)+|x|^{-l}u^{\beta_1}, \\ |x|^{-l}\frac{\partial v}{\partial t} &= u^{\alpha_2}\nabla\left(|x|^n v^{m_2-1}\nabla v\right)+|x|^{-l}v^{\beta_2}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\geq 0,\quad v|_{t=0}=v_0(x)\geq 0,\quad x\in R^N, \tag{9}$$

где, $\nabla(\cdot)=grad_x(\cdot)$, $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, n, l$ – положительные числа, $N\geq 1$ – размер пространства, $u=u(t,x)\geq 0,\ v=v(t,x)\geq 0$ – искомые решения.

Рассмотрим следующее автомодельное решение

$$u(t,x)=(T-t)^{q_1}f_1(\xi),\ v(t,x)=(T-t)^{q_2}f_2(\xi) \tag{10}$$

$$q_1=-\frac{1}{\beta_1-1},\ \mathrm{q}_2=-\frac{1}{\beta_2-1}$$

$$\xi=\frac{|x|^{\frac{2-l-n}{2}}}{\tau^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{l+n}{2}\right)},\ \tau(t)=\begin{cases}\int(\mathrm{T}-\mathrm{t})^{\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}}dt, & \frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1\neq 0\\ Ln(\mathrm{T}-\mathrm{t}), & \frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1=0\end{cases}$$

Функции $f_1(\xi), f_2(\xi)$ являются решением следующей автомодельной задачи

$$\begin{aligned} & f_2^{\alpha_1}\xi^{1-s}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}f_1^{m_1-1}\frac{df_1}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df_1}{d\xi}+b_1\left(f_1^{\beta_1}-\frac{1}{\beta_1-1}f_1\right)=0, \\ & f_1^{\alpha_2}\xi^{1-s}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}f_2^{m_1-1}\frac{df_2}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df_2}{d\xi}+b_1\left(f_2^{\beta_2}-\frac{1}{\beta_1-1}f_2\right)=0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $s=\dfrac{2(N-l)}{2-l-n},\quad b_i=\dfrac{q_i}{q_i(\mathrm{m}_i-1)+q_{3-i}\alpha_i},\quad i=1,2$

Теорема 3. Пусть $q_{3-i}\alpha_i+q_i(m_i-1)+1<0,\ \beta_i<1,\ s\geq 0,\ u_+(0,x)\geq u_0(x)$, $v_+(0,x)\geq v_0(x),\ x\in R^N$ Тогда для решения задачи (8)-(9) справедлива следующая оценка $u(\mathrm{t},x)\leq u_+(\mathrm{t},x), v(\mathrm{t},x)\leq v_+(\mathrm{t},x)$,

$$u_+(t,x)=A_1(T-t)^{q_1}\left(a-\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_1},\ v_+(t,x)=A_2(T-t)^{q_2}\left(a-\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_2}$$

$$p_i=\frac{1+\alpha_i-m_{3-i}}{\alpha_i\alpha_{3-i}-(m_{3-i}-1)(m_i-1)}\qquad A_i=\left(\frac{p_{3-i}}{p_i^{\frac{m_{3-i}-1}{\alpha_i}}}\right)^{-\frac{\alpha_i}{\alpha_1\alpha_2-(m_i-1)(m_{3-i}-1)}},\ i=1,2$$

Теорема 4. Пусть выполняется равенство $q_{3-i}\alpha_i+q_i\left(m_i-1\right)+1>0$,

$A_i^{m_i-1}A_{3-i}^{\alpha_i}s\le\frac{b_i}{1-\beta_i}$, $\quad A_i^{m_i-1}A_{3-i}^{\alpha_i}s\le\frac{b_i}{1-\beta_i},(i=1,2),\quad u_-(0,x)\le u(0,x)$,

$v_-(0,x)\le v(0,x),x\in R^N$. Тогда для решения задачи (8)-(9) справедлива следующая оценка $\quad u_-(t,x)\le u(t,x),v_-(t,x)\le v(t,x),x\in R^N$,

где

$$u_-(t,x)=A_1(T-t)^{q_1}\left(a+\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_1},\ v_-(t,x)=A_2(T-t)^{q_2}\left(a+\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_2}.$$

В §2.2 изучена асимптотическое поведение решений нелинейной системы параболического уравнения недивергентного вида с диффузией тепла и горения.

Введем обозначения

$$c_{i1}(\eta)=\left(\frac{s}{2}-1+p_im_i\right)\mathrm{p}_i,\quad c_{i2}(\eta)=\frac{A_i^{1-m_i}A_{3-i}^{-\alpha_i}p_i}{4}-\frac{b_i}{4(\beta_i-1)}$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 5. Пусть $q_{3-i}\alpha_i+q_i\left(m_i-1\right)+1>0$ и $\beta_i>1,\,p_i<0$ или $\beta_i<1,\,p_i>0(i=1,2)$. Тогда решение системы уравнения (8) имеет асимптотику при $\xi\to\infty$, $u(t,x)=A_1\left(T-t\right)^{q_1}\left(a+\xi^2\right)^{p_1}\mathrm{y}_1(\eta),\ v(t,x)=A_2\left(T-t\right)^{q_2}\left(a+\xi^2\right)^{p_2}\mathrm{y}_2(\eta)$

где $y_i(\eta)=y_i^0+o(1),\ 0<y_i^0<+\infty,(i=1,2)$ и $y_i^0,(i=1,2)$ являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i2}=0,\ (i=1,2)$$

Рассмотрим решения системы уравнений (11), удовлетворяющих следующим условиям:

$$f'(0)=0,\phi'(0)=0,f(d)=0,\phi(d)=0,\quad d<\infty,\ f(\xi)=\bar f(\xi)\,\mathrm{y}_1(\eta),\ \phi(\xi)=\bar\phi(\xi)\,\mathrm{y}_2(\eta)$$

$$\bar f(\xi)=\left(a-\xi^2\right)^{p_1},\ \bar\phi(\xi)=\left(a-\xi^2\right)^{p_2},\ \mathrm{a}>0,\eta=-\ln\left(a-\xi^2\right),$$

Тогда система (11) приводится к виду

$$y_{3-i}^{\alpha_i}\frac{d}{d\eta}\left(Ly_i\right)+a_{i1}(\eta)\,y_{3-i}^{\alpha_i}\,Ly_i+a_{i2}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}y_i\right)+a_{i3}(\eta)\,y_i+a_{i4}(\eta)y_i^{\beta_i}=0 \qquad (12)$$

В которой $a_{ij}(\eta)$ определенные функции.

Введем обозначения

$$d_{i1}(\eta)=\left(p_im_i-1\right)p_i,\quad d_{i2}(\eta)=-\frac{A_i^{1-m_i}A_{3-i}^{-\alpha_i}p_i}{4},\ d_{i3}(\eta)=\frac{b_iA_i^{1-m_i}A_{3-i}^{-\alpha_i}}{4a},(i=1,2)$$

Теорема 6. Пусть $q_{3-i}\alpha_i+q_i\left(m_i-1\right)+1>0$. Для того чтобы система (12) имела решения $\left(y_1(\eta),\,y_2(\eta)\right)$ вида $y_i(\eta)=y_i^0+o(1),\eta\to\infty,$ где $0<y_i^0<+\infty,\ (i=1,2)$ необходимо, чтобы соблюдалось одно из следующих условий:

1. $p_i=\dfrac{1}{1-\beta_i},\ y_i^0,(i=1,2)$ – являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$d_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+d_{i2}+d_{i3}z_i^{\beta_i-1}=0,\ (i=1,2)$$

2. $p_i<\dfrac{1}{1-\beta_i},\ p_im_i>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ $p_i<\dfrac{1}{1-\beta_i},\ p_im_i>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ – являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i2}=0,\ (i=1,2)$$

3. $p_1=\dfrac{1}{1-\beta_1},\ p_2<\dfrac{1}{1-\beta_2},\ p_2m_2>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ – являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}d_{11}z_1^{m_1-1}z_2^{\alpha_1}+d_{12}=0\\ d_{21}z_2^{m_2-1}z_1^{\alpha_2}+d_{22}+d_{23}z_2^{\beta_2-1}=0\end{cases}$$

4. $p_1<\dfrac{1}{1-\beta_1},\ p_2=\dfrac{1}{1-\beta_2},\ p_1m_1>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ – являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}d_{11}z_1^{m_1-1}z_2^{\alpha_1}+d_{12}=0\\ d_{21}z_2^{m_2-1}z_1^{\alpha_2}+d_{22}+d_{23}z_2^{\beta_2-1}=0\end{cases}$$

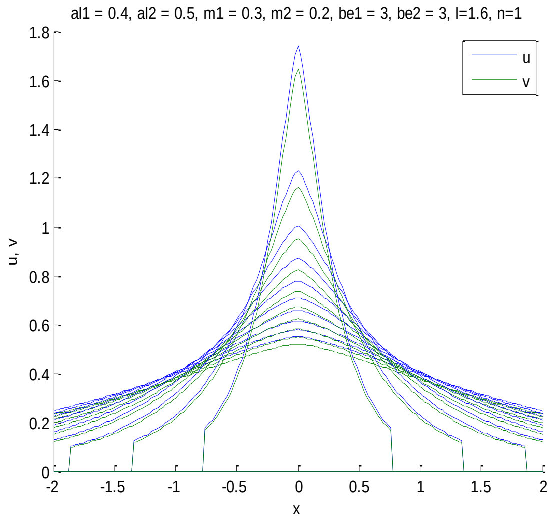
Следствие 2. Обобщенное решение систему уравнения (8)-(9) имеет асимптотику при $|x|\to a^{\frac{1}{2-l-n}}\tau\left(1-\dfrac{1+n}{2}\right)^{\frac{1}{2-l-n}}$,

$$u(t,x)=z_1\left(T-t\right)^{q_1}\left(a-\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_1}(1+o(1)),\ v(t,x)=z_2\left(T-t\right)^{q_2}\left(a-\frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_2}(1+o(1))$$

где $z_1, z_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ – определенные выше константы.

В §2.3. разработаны численные схемы для задачи (8)-(9) и проведен вычислительный эксперимент. Для расчета использовали шаг сетки h=0.05 и точность итерации $\varepsilon=10^{-3}$. В качестве начального приближения для итерационного процесса использованы формулы (10) автомодельные решения.

Результаты численных экспериментов представлены в визуальной форме и с анимацией.



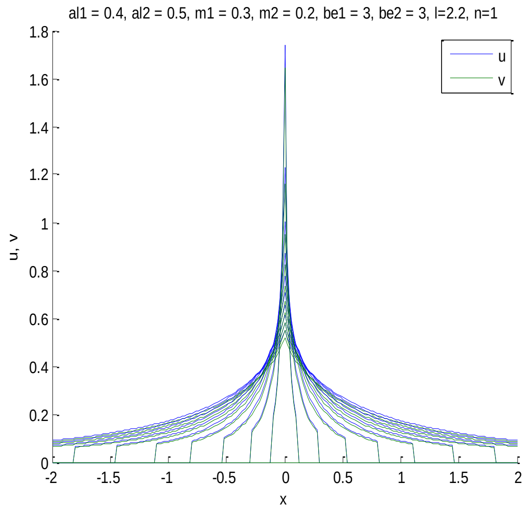


Рис 3. Численное решение задачи (8) в одномерном случае при $\alpha_1=0.4,\ \alpha_2=0.5,\ m_1=0.3,\ m_2=0.2,\ \beta_1=3,\ \beta_2=3$

Вычислительные эксперименты показывают, что явление локализации здесь проявляется в численном решении. При использовании схемы было подтверждено с аналитической точки зрения, что явление локализации может сохраняться при численном решении.

Третья глава диссертации **«Свойства математической модели процессов диффузии тепла и горения с граничными условиями в многомерном случае»** посвящена условия существования и неограниченных (blow-up) решений параболических систем уравнений недивергентного вида за конечное время, а также показаны верхние оценки blow-up и глобальных решений.

В §3.1 рассморели blow-up свойства и глобальные решения следующей задачи,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(u)\nabla\left(a(u)\nabla u\right) + f(u), \qquad (x,t)\in D\times(0,T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x,t)u = 0, \quad (x,t)\in\partial D\times(0,T) \tag{13}$$

$$u(x,0) = u_0(x) > 0, \ \ x\in\overline{D}$$

где D – гладкая ограниченная область в R^N, $N\geq 2$, $\overline{D}$ – ее замыкание ∇ – градиентный символ, $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная от внешной нормали, функции a, b, f являются положительными $C^2\left(R^+\right)$, функция σ – неотрицательная $C^1(\overline{Q_T})$, $\left(Q_T = D\times(0,T),\ R^+ = (0,+\infty)\right)$, функция u_0 – положительная $C^3(\overline{D})$ и $\frac{\partial u_0}{\partial n} + \sigma(x,t)u_0 = 0 \ \ (x,t)\in\partial D\times(0,T)$.

Пусть $u(x,t)$ -решение $(u\in C^3(\mathrm{D}\times(0,\mathrm{T}))\cap C^2(\overline{D}\times(0,\mathrm{T}))$ задачи (1).

Теорема 7. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) При $s\in R^+$,

$$0 < a(\mathrm{s}) \leq \beta,\ b(\mathrm{s}) > 0,\ a'(\mathrm{s}) \geq 0,\ f(s) > 0,\ af''(s) - a'f'(s) \geq 0,\ \left(\frac{sa(s)}{f(s)}\right)' \leq 0$$

2) В $D\times(0,T)$ $\sigma(\mathrm{x},t)\geq 0, \sigma_t(\mathrm{x},t)\leq 0$

3) $\beta = \min\limits_{\overline{D}}\left\{\frac{a(u_0)}{f(u_0)}\left[b(u)\nabla\left(a(u_0)\nabla u_0\right) + f(u_0)\right]\right\} > 0,$

4) $\int\limits_{M_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{f(s)}ds < +\infty$, где $M_0 = \max\limits_{\overline{D}} \mathrm{u}_0$.

Тогда решение (blow-up) $u(x,t)$ существует за конечное время T и

$$T \leq \frac{1}{\beta}\int\limits_{M_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{f(s)}ds, \qquad u(x,t)\leq H^{-1}(\beta(\mathrm{T}-\mathrm{t}))$$

где $H(z) = \int\limits_{z}^{+\infty}\frac{a(s)}{f(s)}ds,\ \mathrm{z}>0$ и H^{-1} – обратная функция.

Если в теореме 7 $a(u) = u^{m-1},\ b(u) = u^{\alpha}$ и $f(u) = u^{\,p}$, то имеет следующий вывод.

Следствие 3. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) $1 \le m \le p,$ 2) В $D \times (0,T)$ $\sigma(\mathrm{x},t) \ge 0, \sigma_t(\mathrm{x},t) \le 0$

3) $\beta = \min\limits_{\overline{D}} \left\{ \dfrac{u_0^{m-1}}{u_0^p} \left[u_0^{\alpha} \nabla \left(u_0^{m-1} \nabla u_0 \right) + u_0^p \right] \right\} > 0$

4) $\int\limits_{M_0}^{+\infty} s^{m-p-1} ds = \dfrac{M_0^{m-p}}{p-m},$ $m < p$ где $M_0 = \max\limits_{\overline{D}} \mathrm{u}_0$.

Тогда $u(x,t)$ решение существует за конечное время T и $T \le \dfrac{1}{\beta} \dfrac{M_o^{m-p}}{p-m}$

так же как $u(x,t) \le H^{-1}(\beta(\mathrm{T}-\mathrm{t})) = \left(\left(p-m \right) \beta \left(T-t \right) \right)^{\frac{1}{m-p}}$

где $H(z) = \dfrac{z^{m-p}}{p-m}, \mathrm{z} > 0$ и H^{-1} – обратная функция H .

В §3.2 рассморели blow-up свойства и глобального решения следующей задачи ,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial t} = b_i(u_{3-i}) \nabla \left(a_i(u_i) \nabla u_i \right) + f_i(u_i), \ \mathrm{i} = 1,2 \ \ (x,t) \in D \times (0,T) \\
&\frac{\partial u_i}{\partial n} + \sigma_i(x,t) u_i = 0, \ \mathrm{i} = 1,2 \quad (x,t) \in \partial D \times (0,T) \\
&u_i(x,0) = u_{i0}(x) > 0, \ \mathrm{i} = 1,2 \quad x \in \overline{D}
\end{aligned} \tag{14}$$

где D – гладкая ограниченная область в R^N, $N \ge 2,$ $\overline{D}$ – ее замыкание ∇ – градиентный символ, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная от внешной нормали, функции $a_i, b_i, f_i \ (\mathrm{i} = 1,2)$ является положительная $C^2 \left(R^+ \right)$, функция $\sigma_i \ (\mathrm{i} = 1,2)$ – неотрицательная $C^1(\overline{Q_T})$, $\left(Q_T = D \times (0,T), R^+ = (0,+\infty) \right)$, функция u_{i0} – положительная $C^3(\overline{D})$ и $\dfrac{\partial u_{0i}}{\partial n} + \sigma_i(x,t) u_{i0} = 0, \mathrm{i} = 1,2$

Теорема 8. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) При $s \in R^+$,

$0 < a_i(\mathrm{s}) \le \beta_i, b_i(\mathrm{s}) > 0, a_i\,'(\mathrm{s}) \ge 0, f_i(s) > 0, a_i f_i\,''(s) - a_i\,' f_i\,'(s) \ge 0, \left(\dfrac{s a_i(s)}{f_i(s)} \right)' \le 0$

2) В $D \times (0,T)$ $\sigma_i(\mathrm{x},t) \ge 0, \sigma_{it}(\mathrm{x},t) \le 0 \ (\mathrm{i} = 1,2)$

3) $\beta_i = \min\limits_{\overline{D}} \left\{ \dfrac{a_i(u_{i0})}{f_i(u_{i0})} \left[b_i(u_{3-i0}) \nabla \left(a_i(u_{i0}) \nabla u_{i0} \right) + f_i(u_{i0}) \right] \right\} > 0,\ \mathrm{i} = 1,2$

4) $\int\limits_{M_{0i}}^{+\infty} \dfrac{a_i(s)}{f_i(s)} ds < +\infty,\ \mathrm{i} = 1,2$, где $M_{0i} = \max\limits_{\overline{D}} \mathrm{u}_{i0},\ \mathrm{i} = 1,2.$

Тогда $u_i(x,t)$ решение (blow-up) существует за конечное время T и

$T \le \dfrac{1}{\beta_i} \int\limits_{M_{0i}}^{+\infty} \dfrac{a_i(s)}{f_i(s)} ds,\ \mathrm{i} = 1,2$, $u_i(x,t) \le H_i^{-1}(\beta(\mathrm{T} - \mathrm{t})),\ \mathrm{i} = 1,2$

где $H_i(z) = \int\limits_{z}^{+\infty} \dfrac{a_i(s)}{f_i(s)} ds,\ \mathrm{z} > 0,\ \mathrm{i} = 1,2$ и H_i^{-1} – обратная функция H_i, $\mathrm{i} = 1,2$.

В теореме 8, если $a_i(u_i) = u_i^{m_i - 1},\ b_i(u_{3-i}) = u_{3-i}^{\alpha_i}$ и $f_i(u_i) = u_i^{p_i},\ i = 1,2$, то имеет следующий вывод.

Следствие 4. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) $1 \le m_i \le p_i$, 2) В $D \times (0,T)$ $\sigma_i(\mathrm{x},t) \ge 0, \sigma_{it}(\mathrm{x},t) \le 0\ (\mathrm{i} = 1,2)$

3) $\beta_i = \min\limits_{\overline{D}} \left\{ \dfrac{u_{i0}^{m_i - 1}}{u_{i0}^{p_i}} \left[u_{3-i0}^{\alpha_i} \nabla \left(u_{i0}^{m_i - 1} \nabla u_{i0} \right) + u_{i0}^{p_i} \right] \right\} > 0,\ \mathrm{i} = 1,2$

4) $\int\limits_{M_{0i}}^{+\infty} s^{m_i - p_i - 1} ds = \dfrac{M_{0i}^{m_i - p_i}}{p_i - m_i}, \quad m_i < p_i, \mathrm{i} = 1,2$, $M_{0i} = \max\limits_{\overline{D}} \mathrm{u}_{i0},\ \mathrm{i} = 1,2.$

Тогда решение $u_i(x,t)$ существует за конечное время T и

$T \le \dfrac{1}{\beta} \dfrac{M_{oi}^{m_i - p_i}}{p_i - m_i}$, $u_i(x,t) \le H^{-1}(\beta_i(\mathrm{T} - \mathrm{t})) = \left(\left(p_i - m_i \right) \beta_i \left(T - t \right) \right)^{\frac{1}{m_i - p_i}}$,

где $H_i(z) = \dfrac{z^{m_i - p_i}}{p_i - m_i},\ \mathrm{z} > 0$ и $H_i^{-1},\ \mathrm{i} = 1,2$ – обратная функция H_i, $\mathrm{i} = 1,2$.

Теорема 9. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) При $s \in R^+$,

$0 < \beta_i \le a_i(\mathrm{s}), b_i(\mathrm{s}) > 0, a_i{}'(\mathrm{s}) \le 0,\ f_i(s) > 0,\ a_i f_i{}''(s) - a_i{}' f_i{}'(s) \le 0, \left(\dfrac{s a_i(s)}{f_i(s)} \right)' \ge 0$

2) В $D \times (0,T)$ $\sigma_i(\mathrm{x},t) \ge 0, \sigma_{it}(\mathrm{x},t) \ge 0\ (\mathrm{i} = 1,2)$

3) $\delta_i = \max\limits_{\overline{D}} \left\{ \dfrac{a_i(u_{i0})}{f_i(u_{i0})} \left[b_i(u_{3-i0}) \nabla \left(a_i(u_{i0}) \nabla u_{i0} \right) + f_i(u_{i0}) \right] \right\} > 0,\ \mathrm{i} = 1,2$

4) $\int\limits_{m_{0i}}^{+\infty} \dfrac{a_i(s)}{f_i(s)} ds < +\infty,\ \mathrm{i} = 1,2$, где $m_{0i} = \min\limits_{\overline{D}} \mathrm{u}_{i0},\ \mathrm{i} = 1,2.$

Тогда существует $u_i(x,t)$ глобальным решением и

$$u_i(x,t) \le G_i^{-1}(\delta_i\ \mathrm{t} + \mathrm{G}_i(\mathrm{u}_{0i}(\mathrm{x}))),\ \text{где}\ G_i(z) = \int\limits_{m_{0i}}^{z} \frac{a_i(s)}{f_i(s)} ds,\ \mathrm{z} > m_{0i},\ \ \mathrm{i} = 1,2$$

В теореме 9, если $a_i(u_i) = u_i^{m_i - 1},\ b_i(u_{3-i}) = u_{3-i}^{\alpha_i}$ и $f_i(u_i) = u_i^{p_i},\ i = 1,2$, то имеет место следующий вывод.

Следствие 5. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) $0 \le p_i \le m_i \le 1,$

2) В $D \times (0,T)$ $\sigma_i(\mathrm{x},t) \ge 0, \sigma_{it}(\mathrm{x},t) \ge 0\ (\mathrm{i} = 1,2)$

3) $\delta_i = \max\limits_{\bar{D}} \left\{ \dfrac{u_{i0}^{m_i - 1}}{u_{i0}^{p_i}} \left[u_{3-i0}^{\alpha_i} \nabla \left(u_{i0}^{m_i - 1} \nabla u_{i0} \right) + u_{i0}^{p_i} \right] \right\} > 0,\ \mathrm{i} = 1,2$

4) $\int\limits_{m_{0i}}^{+\infty} s^{m_i - p_i - 1} ds = \lim\limits_{k \to +\infty} \left[\dfrac{k^{m_i - p_i}}{m_i - p_i} - \dfrac{m_{0i}^{m_i - p_i}}{m_i - p_i} \right],\quad m_i > p_i,$

$m_{0i} = \min\limits_{\bar{D}} \mathrm{u}_{i0},\ \mathrm{i} = 1,2.$

Тогда существует глобальным решением $u_i(x,t)$ и

$$u_i(x,t) \le G_i^{-1}(\delta_i\ \mathrm{t} + \mathrm{G}_i(\mathrm{u}_{i0}(\mathrm{x}))) = \left((m_i - p_i)\delta_i t + u_{i0}^{m_i - p_i} \right)^{\frac{1}{m_i - p_i}},\ \mathrm{i} = 1,2$$

где

$$G_i(z) = \int\limits_{m_{0i}}^{z} s^{m_i - p_i - 1} ds = \frac{z^{m_i - p_i}}{m_i - p_i} - \frac{m_{0i}^{m_i - p_i}}{m_i - p_i},$$

при $m_i > p_i$, и $G_i^{-1}, \mathrm{i} = 1,2$ – обратная функция G_i, $\mathrm{i} = 1,2$.

В §3.3 приведен интерфейс и запуск программы «Численное исследование процессов диффузии тепла и горения в двухкомпонентных нелинейных средах».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных исследований по диссертации «Численное моделирование blow-up режимов в двухкомпонентных нелинейных средах» представлены следующие выводы:

1. Исследованы blow-up свойства решений нелинейной модели диффузии тепла и горения описывающихся нелинейными параболическими системами в недивергентной форме в неоднородной среде.

2. Получены асимптотики автомодельных решений задачи Коши для параболических систем недивергентного вида в неоднородной среде, а также для численного исследования рассматриваемой задачи предложен способ выбора начального приближения для итерационного процесса.

3. Построены разностные схемы для многомерной задачи диффузии тепла и горения на основе метода баланса, гарантирующие законы сохранения, сконструирован итерационный процесс и проведены численные расчеты, показывающие быструю сходимость к решению.

4. На основе принципа максимума доказаны теоремы условия существования неограниченных (blow-up) и глобальных решений нелинейной задачи недивергентного вида;

5. Получены решения параболических систем уравнений недивергентного вида, условия существования неограниченных (blow-up) решений за конечное время, а также показаны верхние оценки blow-up и глобальных решений.

6. Получены оценки для времени обострения(время взрыва) математических моделей процессов диффузии тепла и горения.

7. Разработаны алгоритмы, программные средства и комплекс программ для численного исследования blow-up режимов в двухкомпонентных нелинейных средах нелинейной задачи процессов диффузии тепла и горения.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

RAUPOV DILMUROD RASULOVICH

NUMERICAL MODELING OF BLOW-UP MODES IN TWO-COMPONENT NONLINEAR MEDIA

05.01.07 – Mathematical modelling. Numerical methods and complexes of applications (Physical and mathematical sciences)

CONTENT OF DISSERTATION
abstract of the Doctor of Philosophy (PhD) on
Physical and Mathematical Sciences

Tashkent – 2023

The theme of the Philosophy Doctor (PhD) dissertation was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2019.2.PhD/FM392.

Dissertation has been prepared at the National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and on the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Matyakubov Alisher Samandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent
Official opponents:	**Normurodov Chori Begaliyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Seytov Aybek Jumabayevich Doctor of Technical Sciences, docent
Leading organization:	**Tashkent University of Information Technologies**

Defense will take place on "____" _____________ 2023 at ____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at the National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

The dissertation is possible to review in Information-resource centre at the National University of Uzbekistan (registered № _____). (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "____" ______________ 2023

(mailing report №___ on "____" ______________ 2023).

M.M.Aripov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.M.S., professor

Z.R.Raxmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.M.S., docent

B.F.Abdurakhimov
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of
scientific degrees, D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (Abstract of PhD thesis)

The aim of the research is a numerical and analytical study of the blow-up properties of nonlinear mathematical models described by non-divergent parabolic systems in an inhomogeneous medium with a source, the development of algorithms and software for the numerical solution of a nonlinear problem of combustion and heat diffusion processes.

The research objectives are:

to obtain a condition for the existence of a blow-up solution for a mathematical model of gorenje and heat diffusion;

to obtain the asymptotics of self-similar solutions to the nonlinear gorenje and diffusion of heat problem;

to construct numerical schemes for the study of qualitative nonlinear properties of mathematical models of gorenje and heat diffusion;

develop software to solve the tasks and visualize the schedule of blow-up solutions.

The scientific novelty of the research is as follows:

on the basis of the comparison theorem, upper and lower estimates for solutions of the Cauchy problem for parabolic systems of non-divergence form in an inhomogeneous medium are constructed;

using the nonlinear splitting algorithm, the asymptotics of self-similar solutions of the Cauchy problem for non-divergence parabolic systems in an inhomogeneous medium with a blow-up regime are obtained;

the conditions for the availability of global and blow-up solutions for mathematical models of gorenje processes and heat diffusion are proved on the basis of self-model analysis and comparison theorems;

estimates of blow-up solutions for non-divergent parabolic systems with boundary conditions describing the processes of heat diffusion and gorenje are constructed;

on the basis of the maximum principle, estimates were obtained for the aggravation time (explosion time) of mathematical models of the processes of heat diffusion and combustion;

when obtaining numerical solutions, based on the values of the numerical parameters of the medium, the problem of finding the initial approximation for the iteration process is solved.

Implementation of research results. Scientific results on numerical and analytical solution of nonlinear gorenje and heat diffusion problems obtained in the dissertation work have been put into practice in the following areas:

blow-up and global solutions for mathematical models of heat diffusion and combustion processes, numerical solution algorithms and methods, initial approximation for the iterative process, and the results of the developed software PZ-202008061 "Fire resistance of wooden construction materials and products using new generation oligomeric flame retardants was used in the practical project on the topic of "development of resource-saving technology" ("Uzkimyosanoat"

JSC Tashkent Chemical Technology Scientific Research Institute, reference No. 0410/289 dated September 20, 2022). The application of these scientific results made it possible to determine the ignition and explosion time of combustible materials in inhomogeneous media;

construction of upper and lower solutions for a system of parabolic-type nodivergent equations in a non-same - sex environment, progonka for numerical modeling in two-component blow-up mode non-linear environments, software for visual representation of numerical results, and MB-ATEX-2018-58 from graphical representation results describing combustion and heat diffusion processes in a non-same-sex environment. Used in a practical project on the topic "research and creation of technology of flame retardant, heat-insulating building materials with the addition of a new generation metallurgical oligomer" (reference book No. 36/16-2217 of November 15, 2022 of the Academy of the Ministry of Emergency Situations of the Republic of Uzbekistan). The heat from the resulting numerical results made it possible to create a package of applications for numerical modelling of diffusion and combustion processes.

Structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and appendices. The volume of the dissertation is 112 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Матякубов А.С., Раупов Д.Р. Численное моделирование процессов распространения тепла в нелинейной неоднородной среде // Пожаровзрывобезопасность научно-технический журнал, 2018. – № 1 (1). – С. 48-52 (05.00.00. № 28).

2. Матякубов А.С., Раупов Д.Р. Асимптотическое поведение blow-up решений нелинейного параболического систем уравнений недивергентного вида // SamDU Ilmiy axborotnomasi (Aniq fanlar seriyasi), 2019. – № 5. – B. 53-58 (01.00.00. № 2).

3. Раупов Д.Р., Юлдашев И.Ж. О некоторых свойствах решений уравнения реакция-диффузии с двойной нелинейностью с переменной плотностью и источником // Пожаровзрывобезопасность научно-технический журнал, 2019. – № 1 (3). – С. 42-46 (05.00.00. №28).

4. Матякубов А.С., Раупов Д.Р. Оценка для blow-up и глобального решения нелинейной системы параболического уравнения с граничными условиями // Ilm sarchashmalari. – Urganch, 2021. – B. 6-16 (01.00.00. № 12).

5. Matyakubov A.S., Raupov D.R. On some properties of the blow-up solutions of a nonlinear parabolic system non-divergent form with cross-diffusion // Lecture Notes in Civil Engineering (LNCE). Volume 180. Springer Nature Switzerland AG, 2022. – P. 289-303 (№ 3 Scopus IF=0.6).

6. Matyakubov A.S., Raupov D.R. Numerical and visual modeling for blow-up modes in two-component nonlinear media // Hisoblash va amaliy matematika muammolari. (Problems of Computational and Applied mathematics), 2022. – № 2 (39). – B. 40-52 (01.00.00, №9).

7. Раупов Д.Р. Математическое моделирование blow-up режимов в двух компонентных нелинейных средах с переменной плотностью и источником // Наука, Защита, Безопастность, 2022. – С. 120-126 (05.00.00. № 36).

8. Матякубов А.С., Раупов Д.Р., Чориев Б.Б. Оценка для blow-up и глобального решения нелинейного параболического уравнения недивергентного вида с граничными условиями // Research and education, 2022. Volume 1. Issue 5. – P. 29-41 (№ 23. Scientific Journal Impact Factor. IF=4.628).

II бўлим (часть II; part II)

9. Матякубов А., Раупов Д. О качественных свойствах Blow-up решений для квазилинейной системы уравнений параболического типа / International conference “Modern problems of applied mathematics and information technologies-Al-Khorezmiy”, 2018. – P. 223-224.

10. Matyakubov A.S., Raupov D.R. Estimates of the blow-up solution of a cross diffusion parabolic system not in divergence form / 2019-yil 13-17-may kunlari oʻtkazilgan oʻzbek va Izrail matematiklari hamkorligidagi Xalqaro Konferensiya materiallari, 2019. – P. 106.

11. Матякубов А.С., Раупов Д.Р. Оценка для глобального решения нелинейной системы параболических уравнений недивергентного вида с кросс-диффузией / “Matematika va informatikaning zamonaviy muammolari” mavzusidagi ilmiy-amaliy anjumani materiallari. – Fargʻona, 2019. 1-qism. – B. 66.

12. Матякубов А.С., Раупов Д.Р. К асимптотическому поведению Blow-up решений нелинейных параболических систем уравнений недивергентного вида / “Amaliy matematika va informatsion texnologiyalarning dolzarb muammolari” mavzusidagi Xalqaro anjuman tezislar toʻplami. OʻzMU matematika fakulteti. – Toshkent, 2019. – B. 86-87.

13. Матякубов А.С., Раупов Д.Р. Оценка для Blow-up решения нелинейной системы параболического уравнения с граничными условиями / “Matematika, fizika va axborot texnologiyalarining dolzarb muammolari” mavzusidagi Respublika miqyosidagi onlayn ilmiy-amaliy anjumani tezislar toʻplami. Buxoro Davlat universiteti, 2020. – B. 190-192.

14. Matyakubov A.S., Raupov D.R. Explicit estimate for blow-up solutions of nonlinear parabolic systems of non divergence form with variable density / Abstracts of the international scientific conference of “Contemporary mathematics and its application”. – Tashkent, Uzbekistan, 2021. – P. 62-63.

15. Раупов Д.Р. Математическое моделирование blow-up режимов в двух компонентных нелинейных средах с переменной плотностью и источником / “Innovatsion texnika va texnologiyalarning qishloq xoʻjaligi – oziq-ovqat tarmogʻidagi muammo va istiqbollari” II Xalqaro anjuman ilmiy ishlar toʻplami. – Toshkent: ToshDTU, 2022. 2-qism. – B. 317-318.

16. Матякубов А.С., Раупов Д.Р. Оценка для Blow-up свойства решений нелинейных параболических систем уравнений недивергентного вида / Материалы Международной научно-практической конференции “Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий”. – Бухара 2022. – С. 337-339.

17. Матякубов А.С., Раупов Д.Р., Нортиллаев К. Оценка для blow-up решения нелинейного параболического уравнения недивергентного вида с граничными условиями / Samarqand davlat universiteti Oʻzbekiston Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti hamkorligida 2022-yil 23-24-sentabr kunlari Samarqand shahrida “Matematik analiz va uning zamonaviy matematik fizikaga tatbiqlari” nomli Xalqaro ilmiy-amaliy anjuman materiallar toʻplami. – Samarqand, 2022. 2-qism. – B. 203-204.

18. Raupov D.R. Ikki komponentali blow-up rejimli nochiziqli muhitlarda sonli va vizual modellashtirish dasturi. № DGU 14527, 10.02.2022.

19. Raupov D.R. Ikki komponentali muhitda yonish va issiqlik diffuziya jarayonlarini sonli tadqiq qilish dasturi. № DGU 18980, 31.10.2022.

Avtoreferat "O'zMU xabarlari" ilmiy jurnali tahririyatida tahrirdan o'tkazildi.

Bosishga ruxsat etildi: 22.02.2023-yil
Bichimi: 60x84 $^{1/16}$, "Times New Roman"
garniturada raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog'i 2,9. Adadi 100. Buyurtma: № 49
Tel: (99) 3832 99 79; (99) 817 44 54
Guvohnoma reestr № 10-3279
"IMPRESS MEDIA" MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Toshkent sh., Yakkasaroy tumani, Qushbegi ko'chasi, 6 uy.