QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

BUXORO MUHANDISLIK-TEXNOLOGIYALARI INSTITUTI

MAMATOV TO‘LQIN YUSUPOVICH

ARALASH UZLUKSIZLIK MODULI BILAN ANIQLANGAN KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR FAZOSIDA VOLTER O‘RAMASI MA’NOSIDAGI BA’ZI OPERATORLAR

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Qarshi – 2023

UDK: 517.983.2

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Mamatov To‘lqin Yusupovich
Aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar fazosida Volter o‘ramasi ma’nosidagi ba’zi operatorlar.. 3

Маматов Тулкин Юсупович
Некоторые операторы типа вольтерровской свертки в пространствах функций нескольких переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности ……………………………………………………..…….. 19

Mamatov Tulkin Yusupovich
Some operators of the volterra convolution type in spaces of functions of several variables defined by the mixed modulus of continuity…...................... 35

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published works ……………………………………………….………… 39

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

BUXORO MUHANDISLIK-TEXNOLOGIYALARI INSTITUTI

MAMATOV TO‘LQIN YUSUPOVICH

ARALASH UZLUKSIZLIK MODULI BILAN ANIQLANGAN KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR FAZOSIDA VOLTER O‘RAMASI MA’NOSIDAGI BA’ZI OPERATORLAR

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Qarshi – 2023

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi Oliy attestatsiya komissiyasida B2022.2.PhD/FM704 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Buxoro muhandislik-texnologiya institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (www.qarshidu.uz) va “ZiyoNet” Axborot ta’lim tarmog‘ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Yaxshiboyev Maxmadyor Umirovich** fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor
Rasmiy opponentlar:	**Rasulov To‘lqin Husenovich** fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor
	Kuliev Komil Danaboyevich fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Navoiy davlat pedagogika instituti**

Dissertatsiya himoyasi Qarshi davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil “____” ___________ soat ____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 180103, Qarshi sh., Ko‘chabog‘ ko‘chasi, 17-uy. Tel.: (+998 75) 225-34-13, faks: (+998 75) 221-00-56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Qarshi davlat universiteti 2-binosi, 202-xona.

Dissertatsiya bilan Qarshi davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (____ raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 180103, Qarshi sh., Ko‘chabog‘ ko‘chasi, 17-uy. Tel.: (+998 75) 225-34-13, faks: (+998 75) 221-00-56, e-mail: qarshidu@umail.uz).

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil “_______” ____________ kuni tarqatildi
(2023 yil “_____” ______________ dagi ______-raqamli reyestr bayonnomasi).

B.A.Shoimqulov
Ilmiy darajalar beruvchi
ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

Sh.D.Nodirov
Ilmiy darajalar beruvchi
ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.f.d. (PhD)

A.A.Imomov
Ilmiy darajalar beruvchi
ilmiy kengash huzuridagi
ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d. (DSc), dotsent

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda maxsus (singulyar) integral operatorlar nazariyasi zamonaviy matematik fizika, mexanika, kompleks funksiyalar nazariyasining turli masalalarini yechishda samarali qo‘llanilmoqda. Fazolardagi integral operatorlar nazariyasining eng muhim muammolaridan biri obraz silliqligining proobrazining silliqligiga bog‘liqligini aniqlash dolzarb hisoblanadi. Funksiyaning silliqlilik xossalarini juda nozik tushunishning usullaridan biri uzluksizlik modulining xatti-harakati nuqtayi nazaridan shakllantirilgan umumlashgan Hölder xossalari tushunchasidan foydalanish muhim masalalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Dunyoda kasr tartibli integro-differensial operatorlarning turli fazolarda xossalarini o‘rganishga doir imliy izlanishlar olib borilmoqda. Shu jumladan, Volter o‘ramasi ma’nosidagi ba’zi operatorlarning ko‘p o‘zagruvchili funksiyalarning Hölder fazolarida xossalarini o‘rganish va ularni to‘g‘ridan-to‘g‘ri ko‘p o‘zgaruvchilarga kengaytirish (yoyish) eng dolzarb muammolardan biri bo‘lib qolmoqda. Umumlashgan Hölder fazolarida funksiyalarni kasr tartibli integro-differensiallashni o‘rganishning muhim bosqichi bu Zigmund ma’nosidagi baholarni olishga, ya’ni asl funksiyaning uzluksizlik moduli orqali kasr tartibli integrallarning (kasr tartibli differensiallarning) uzluksizlik modulini baholashga alohida e’tibor berilmoqda.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqlariga ega bo‘lgan mexanika, kimyo texnologiya va fizikaning dolzarb yo‘nalishlarga e’tibor kuchaytirildi. Jumladan, kasr tartibli integrallash va kasr tartibli differensiallashning dolzarb masalalarini yechishga alohida e’tibor qaratildi. Bu yo‘nalishning rivojlanishi natijasida matematik fizika, suyuqliklar mexanikasi, turli fizik hodisalarni matematik modellashtirish va chiziqli bo‘lmagan xususiy differensial tenglamalarni yechish bilan bog‘liq masalalarni yechishda sezilarli natijalarga erishilmoqda. “Funksional analiz, matematik analiz, differensial tenglamalar, matematik fizika, ehtimollar nazariyasi va dinamik tizimlar nazariyasi fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy izlanishlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalar va faoliyat yo‘nalishlari” etib belgilandi[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda ko‘p o‘zgaruvchili umumlashgan Hölder fazolarida kasr tartibli ko‘p o‘lchovli integral operatorlarning xossalarini o‘rganish va rivojlantirish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g’risidagi”gi Farmoni, 2018-yil 27-apreldagi PQ-3682-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga tatbiq qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

[1]O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarori.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ko‘p ilmiy ishlar uzluksizlik moduliga ega bo‘lgan bir o‘zgaruvchili funksiyalarning Hölder fazolarida kasr tartibli integral-differensiallash operatorlarining xatti-harakati haqidagi masalalariga bag‘ishlangandir. Ilk aniq natijalar G.H.Hardi va Dj.E.Littlvudga tegishlidir. Keyinchalik Hardi-Littlvudlarning bu natijalari turli yo‘nalishlarda umumlashtirilgan.

B.S.Rubin va B.G.Vakulovlar bu natijalarni vaznli holda umumlashtirdi. Keyinchalik N.K.Karapetyants, L.D.Shankishvili Hölder fazosida Hardi-Littlvud teoremasining qisqacha isbotini keltirdilar.

Umumlashgan Hölder fazolaridagi funksiyalarni integral-differensiallashni o‘rganishning eng muhim bosqichi Zigmund ma’nosidagi baholari olish bilan bog‘liq, ya’ni berilgan funksiyaning uzluksizlik moduli yordamida kasr tartibli integral (kasr tartibli hosila) ning uzluksizlik modulini baholashdan iborat. Bunday masalalar quyidagi olimlarning ishlarida o‘rganilgan.

X.M.Murdayev va S.G.Samkolar o‘z ishlarida darajali vaznli umumlashgan Hölder fazolarida kasr tartibli integro-differensial operatorlaning akslantishlarini o‘rganib, xarakteristikalari Bari-Stechkin sinfidan bo‘lgan va umumlashgan Hölder fazolarida bu operatorlarning akslantirishi izomorfligni ko‘rsatdilar. N.K.Karapetyants, M.X.Murdayev va A.Ya.Yakubovlar integral uzluksizlik modulining xatti-harakati bilan aniqlangan umumlashgan Hölder fazolarida kasr tartibli integro-differensial operatorlarni o‘rganganlar. S.G.Samko va Z.U.Mussalayeva ishlari Hölder va umumlashgan Hölder sinflarida kasr tartibli integral va hosilalarni o‘rganishga bag‘ishlangan bo‘lib, bunda Volter o‘ramasi ma’nosidagi integral operator umumiy vazn va yadrolarga ega. N.K.Karapetyants va Z.U.Mussalayevalarning ilmiy tadqiqot ishlari Veyl (davriy) kasr tartibli integral-differensiallashga bag‘ishlangandir. E.S.Kochurov va B.G.Vakulovlarning ishlarida parametrga bog‘liq xarakteristikaga ega bo‘lgan, umumlashgan Hölder fazolarda va darajali vaznli o‘zgaruvchan ko‘rsatkichli Hölder fazolarda kasr tartibli integral va o‘zgaruvchan kasr tartibli differensial operatorlarining ko‘chirilishi va chegaralanganligini o‘rganishga bag‘ishlangan. Ushbu ishlarda funksiya uchun tartibni aniqlaydigan shartlar topilgan bo‘lib, buning uchun Hardi va Littlvud teoremalarining o‘xshashlari o‘rinli bo‘ladi. H.A.H.Salem, M.Chicon o‘z ishlarida umumlashgan Hölder fazosida o‘rtacha kasr tartibli integral operatorlarni o‘rganganlar.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Buxoro muhandislik-texnologiya instituti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasining 2018-2022-yillarga mo‘ljallangan MA.01.2018-raqamli “Kasr tartibli integro-differensial operatorlar nazariyasi” ilmiy-tadqiqot yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi ham vaznsiz ham vaznli hollarda aralash uzluksizik moduli bilan aniqlangan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar Hölder fazosida aralash kasr tartibli integral operatorlarning xossalarini o‘rganishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

oddiy va aralash Hölder shartlari bilan aniqlangan ikki oʻzgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz Hölder fazolarini akslantiruvchi Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operatorning chegaralanganligi haqidagi teoremalarni isbotlash;

aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki oʻzgaruvchili Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integrallarning vaznli va vaznsiz Zigmund ma’nosidagi baholarni olish hamda bu baholardan foydalanib, aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki oʻzgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz umumlashgan Hölder fazolarini akslantiruvchi Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operatorning chegaralanganligi haqidagi teoremalarni isbotlash;

aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki oʻzgaruvchili Volter oʻramasi ma’nosidagi aralash integral uchun vaznli va vaznsiz Zigmund ma’nosidagi baholarni olish;

Zigmund ma’nosidagi baholardan foydalanib, aralash uzluksizik moduli bilan aniqlangan ikki oʻzgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz umumlashgan Hölder fazolarini akslantiruvchi Volter oʻramasi ma’nosidagi aralash integral operatorning chegaralanganligi haqidagi teoremalarni isbotlash.

Tadqiqotning ob’yekti sifatida aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki oʻzgaruvchi funksiyalarning umumlashgan Hölder fazolarida Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operatori va Volter oʻramasi ma’nosidagi aralash integral operatorlar olingan.

Tadqiqotning predmetini turli funksional fazolarda integral operatorlar nazariyasini yanada rivojlantirishga yordam beradigan yangi tasdiqlarni olish va oʻzaro munosabatlarning bogʻliqligini oʻrganish tashkil qiladi.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot ishida integral operatorlar usullari, koʻp oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasi va kasr tartibli integrallar nazariyasidan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

bir oʻzgaruvchili funksiyalarning vaznli va vazinsiz Hölder fazolarini akslantituvchi Riman-Liuvill kasr tartibli integral operatorning chegaralanganligi haqidagi teoremalarni isbotlash usullaridan foydalangan holda oddiy va aralash Hölder shartlari bilan aniqlangan ikki oʻzgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz Hölder fazolarini akslantiruvchi Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operatorning chegaralanganligi haqidagi teoremalar isbotlangan;

uzluksizlik moduli bilan aniqlangan bir oʻzgaruvchili Riman-Liuvill kasr tartibli va Volter oʻramasi ma’nosidagi integrallarning vaznli va vaznsiz Zigmund ma’nosidagi baholarini olish usullaridan foydalanib, aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki oʻzgaruvchili Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral va Volter oʻramasi ma’nosidagi aralash integrallarnig vaznli va vaznsiz Zigmund ma’nosidagi baholari olingan;

Zigmund ma’nosidagi baholardan foydalanib, aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki oʻzgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz umumlashgan Hölder fazolarini akslantiruvchi Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operatorning chegaralanganligi haqidagi teoremalar isbotlangan;

Zigmund ma’nosidagi baholardan foydalanib, aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz umumlashgan Hölder fazolarini akslantiruvchi Volter o‘ramasi ma’nosidagi aralash integral operatorning chegaralanganligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

ikki o‘lchovli Volter va Abel integral tenglamalarini yechishda Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integrallari qo‘llanilgan;

Volter o‘ramasi ma’nosidagi aralash integral operatorning xossalaridan qovushqoqlikni hisobga oluvchi Volter tipidagi relaksatsiya yadro parametrlarini hisoblashda foydalanilgan;

aralash kasr tartibli Riman-Liuvill integrallarining Zigmund ma’nosidagi baholaridan qovushqoqlikni ifodalovchi Robotnov yadrosidagi kasr tartibli integrallarni hisoblashda foydalanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik analizdagi xosmas integrallarni baholashning ma’lum usullaridan foydalanilganligi hamda matematik mulohazalarning va isbotlarning qat’iyligi bilan izohlanadi. Bundan tashqari, dissertatsiya natijalari nufuzli ilmiy jurnallarda, xususan, yuqori impakt-faktorli jurnallarda nashr etilgan va ilmiy seminarlarda ishdan olingan natijalar muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarning ilmiy ahamiyati shundan iboratki, olingan natijalardan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning umumlashgan Hölder fazolarida Volter o‘ramasi ma’nosidagi integral operatorlarning yanada rivojlanishida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati olingan ilmiy natijalar kasr tartibli chiziqli va chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalar va Abelning integral tenglamalarini yechishda qo‘llash mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiya tadqiqoti jarayonida olingan ilmiy natijalar quyidagi yo‘nalishlarda amaliyotga joriy qilingan:

oddiy va aralash Hölder shartlari bilan aniqlanadigan ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz Hölder fazolarini akslantiruvchi Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operator chegaralanganligi haqidagi teoremalardan yetakchi xorijiy jurnallarda foydalanilgan (Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory, 2013, vol 41, 21-56; Intelligent Mathematics II: Applied Mathematics and Approximation Theory, 2016, vol 441, 1-13; Computational Analysis, 2016, vol. 155, 1-17; Intelligent Comparisons: Analytic Inequalities, 2016, vol. 609, 623-659; Abstract Fractional Monotone Approximation, Theory and Applications, 2022, vol 411, 121-144; Abstract Fractional Monotone Approximation, Theory and Applications, 2022, vol 411, 73-96; Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 2022, vol.91, no.3, 1-19). Natijada ikki o‘zgaruvchili kasr tartibli integral operatorlarni tadqiq qilishda foydalanilgan. Ilmiy natijaning qo‘llanilishi qaralayotgan operatorlar xossalarini isbotlashga imkon bergan;

aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning ham vaznli va ham vaznsiz umumlashgan Hölder fazolarini akslantiruvchi Volter o‘ramasi ma’nosidagi aralash integral operator chegaralanganligi haqidagi teoremalarda asosan qovushqoqlikni hisobga oluvchi Volter tipidagi relaksatsiya yadro parametrlarini hisoblashda OT-F4-01 “Qovushqoq suyuqlik oquvchi koʻp qatlamli kompozit quvurlar egri chiziqli boʻlaklarining harorat va dinamik yuklanishlar ta’sirida chiziqli boʻlmagan dinamik kuchlanish-deformatsiya holatini oʻrganish usullarini ishlab chiqish va nazariyasini rivojlantirish” mavzusidagi fundamental loyihada foydalanilgan (Toshkent kimyo-texnologiya institutining 2022-yil 26-dekabrdagi 1/01-3193-son ma’lumotnomasi). Natijada foydalanilgan yadrodagi qovushqoqlik xususiyatini ifodalovchi parametrlarning aniqlik darajasi 10% gacha oshishiga imkon bergan;

aralash kasr tartibli Riman-Liuvill integrallarining Zigmund ma’nosidagi baholaridan qovushqoqlikni ifodalovchi Robotnov yadrosidagi kasr tartibli integrallarni hisoblashda F-4-40 raqamli “Suyuqlik oquvchi yer osti egri chiziqli quvurning tashqi kuchlari ta’siridagi kuchlanish-deformatsiyalar holatini tadqiq qilish nazariyasini rivojlantirish va hisoblash usularini ishlab chiqish” mavzusidagi fundamental loyihada foydalanilgan (Buxoro muhandislik-texnologiya institutining 2022-yil 13-dekabrdagi 02/01-87-2218-son ma’lumotnomasi). Natijada mavjud modellar orqali hisoblashga nisbatan aniqlik 10% gacha oshishiga imkon bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 7 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 4 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan oʻtkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya tadqiqoti mavzusi boʻyicha jami 14 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan Oʻzbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta, jumladan 4 tasi xorijiy va 3 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uch bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar roʻyxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 103 betni tashkil qiladi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yoʻnalishlariga mosligi koʻrsatilgan, mavzu boʻyicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning oʻrganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar roʻyxati va dissertatsiya tuzilishi boʻyicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi “**Kasr tartibli integrallar nazariyasidan zarur boʻlgan ma’lumotlar**” deb nomlangan boʻlib, Hölder fazolarida kasr tartibli integral operatorlar uchun zarur boʻlgan dastlabki ma’lumotlar va belgilashlar keltirilgan.

1.1 paragrafi yordamchi xususiyatga ega bo‘lib, bir o‘zgaruvchili funksiya uchun ma’lum bo‘lgan ta’riflar, belgilashlar, yordamchi ma’lumotlar va kasr tartibli integral operatorning asosiy tasdiqlari bayon qilingan.

1-ta’rif. *Agar* $\omega(\sigma)$ $(0<\sigma\le l_0=b-a)$ *funksiya quyidagi*

1) $\omega(0)=0$;

2) $\omega(\sigma)$ σ *ning kamaymaydigan funksiyasi*;

3) $\omega(\sigma)$ *yarim additiv, ya’ni* $\omega(\sigma_1+\sigma_2)\le\omega(\sigma_1)+\omega(\sigma_2)$;

4) $\omega(\sigma)$ $[0,b-a]$ *da* σ *ning uzluksiz funksiyasi*

shartlarni qanoatantirsa, u holda bu funksiya uzluksiz moduli deyiladi.

2-ta’rif. *Agar* $(0,b-a]$ *oraliqda aniqlangan* $\omega(\sigma)$ *funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa,*

a) $\omega(\sigma)$ *uzluksizlik modul funksiyasi*;

b) $\int\limits_0^\sigma \frac{\omega(t)}{t}dt\le C_1\omega(\sigma)$;

c) $\sigma\int\limits_\sigma^{b-a}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\le C_1\omega(\sigma)$;

d) $\omega'(\sigma)\sim\frac{\omega(\sigma)}{\sigma}$,

u holda bu funksiya Φ^1 *sinfga qarashli deyiladi.*

3-ta’rif. *Agar* $[0,l]$ *oraliqda aniqlangan* $\psi(x)$ *quyidagi shartlarni qanoatlantirsa*:

1) $\psi(x)$ - $[0,l]$ *kesmada uzluksiz, bundan tashqari* $\psi(0)=0$ *va* $x>0$ *da* $\psi(x)>0$;

2) $\frac{\psi(x)}{x^\mu}$ - *deyarli kamayuvchi*;

3) $\psi(x)$ - *deyarli o‘suvchi*;

4) $x^*=\max(x,y)$ *bo‘lsa, shunday o‘zgarmas son* C_1 *mavjudki*

$$\left|\frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y}\right|\le C_1\frac{\psi(x^*)}{x^*} \text{ o‘rinli,}$$

u holda bu funksiya W_μ, $\mu>0$ *sinfga qarashli deyiladi.*

4-ta’rif. *Agar* $[0,l]$ *oraliqda aniqlangan* $k(x)$ *musbat funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa*

1) $k(x)\ne 0$, $x^\lambda k(x)$ - *deyarli o‘suvchi va* $x^\lambda k(x)\big|_{x=0}=0$;

2) *shunday* $\varepsilon>0, 0<\varepsilon<\lambda$ *son mavjudki, bunda* $x^{\lambda-\varepsilon}k(x)$ – *deyarli kamayuvchi*;

3) $x^*=\max(x,y)$ *bo‘lsa, shunday o‘zgarmas son* C_1 *mavjudki*

$$\left|\frac{k(x)-k(y)}{x-y}\right|\le C_1\frac{k(x^*)}{x^*} \text{ o‘rinli,}$$

u holda bu funksiya V_λ, $\lambda>0$ *sinfga qarashli deyiladi.*

1.2 paragrafda ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun asosiy natijalarni bayon qilishda zarur bo‘ladigan boshlang‘ich ma’lumotlar, belgilashlar, ta’riflar va tasdiqlar keltirilgan.

R^2 da $\varphi(x_1, x_2)$ uzuksiz funksiya aniqlangan bo‘lsin. Quyida kelgusida zarur bo‘ladigan belgilashlarni kiritamiz:

$$\left(\overset{1,0}{\Delta}_{h_1}\varphi\right)(x_1,x_2)=\varphi(x_1+h_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2),$$

$$\left(\overset{0,1}{\Delta}_{h_2}\varphi\right)(x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2+h_2)-\varphi(x_1,x_2),$$

$$\left(\overset{1,1}{\Delta}_{h_1,h_2}\varphi\right)(x_1,x_2)=\left(\overset{1,0}{\Delta}_{h_1}\left(\overset{0,1}{\Delta}_{h_2}\varphi\right)\right)(x_1,x_2)=$$

$$=\varphi(x_1+h_1,x_2+h_2)-\varphi(x_1+h_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2+h_2)+\varphi(x_1,x_2).$$

Yuqoridagi belgilashlarga asosan, ushbu

$$\varphi(x_1+h_1,x_2+h_2)=\left(\overset{1,1}{\Delta}_{h_1,h_2}\varphi\right)(x_1,x_2)+\left(\overset{1,0}{\Delta}_{h_1}\varphi\right)(x_1,x_2)+\left(\overset{0,1}{\Delta}_{h_2}\varphi\right)(x_1,x_2)+\varphi(x_1,x_2).$$

ayniyat o‘rinli bo‘ladi.

Ushbu $\varphi(x_1,x_2)$ funksiya $Q=\left\{\,(x_1,x_2):\, a_1\le x_1\le b_1,\ a_2\le x_2\le b_2\right\}$ to‘g‘ri to‘rtburchakda aniqlangan bo‘lsin.

5-ta’rif. $\lambda_i\in(0,1],\, i=1,2$ *bo‘lsin. Agar barcha* $(x'_1,\, x'_2),\,(x''_1,\ x''_2)\in Q$ *uchun ushbu* $\left|\varphi(x'_1,x'_2)-\varphi(x''_1,x''_2)\right|\le C_1\left|x'_1-x''_1\right|^{\lambda_1}+C_2\left|x'_2-x''_2\right|^{\lambda_2}$ *shart bajarilsa, u holda* $\varphi(x_1,x_2)\in H^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *Hölder fazosiga qarashli deyiladi, bunda* C_1, C_2 *o‘zgarmaslar.*

Q to‘g‘ri to‘rtburchakning chegaraviy nuqtalarida nolga teng bo‘luvchi $H^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ funksiyalar fazosining qism fazosini $H_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ orqali belgilaymiz.

6-ta’rif. *Agar* $\varphi(x_1,x_2)\in H^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *va* $\left|\left(\overset{1,1}{\Delta}_{h_1,h_2}\varphi\right)(x_1,x_2)\right|\le C_{12}\left|h_1\right|^{\lambda_1}\left|h_2\right|^{\lambda_2}$ *bo‘lsa, u holda* $\varphi(x_1,x_2)\in\tilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *deyiladi, bunda* $\lambda_i\in(0,1],\ i=1,2$.

Ushbu $\tilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ sinfni aralash Hölder sinfi deb ataymiz.

Agar $\varphi(x_1,x_2)\in\tilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *va* $\varphi(x_1,x_2)\big|_{x_i=a_i}\equiv\varphi(x_1,x_2)\big|_{x_i=b_i}\equiv 0,\ i=1,2$ *bo‘lsa, u holda* $\varphi(x_1,x_2)\in\tilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *deyiladi.*

7-**ta’rif.** R^2 *da aniqlangan* $\rho(x_1,x_2)-$ *manfiymas funksiya bo‘lsin.* $\rho(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\in\tilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *ni qanoatlantiruvchi* $\varphi(x_1,x_2)$ *funksiyalar sinfini* $\tilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(\rho)=\tilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(Q;\,\rho)$ *orqali belgilaymiz. Bu sinf vaznli aralash Hölder fazosi deb ataladi.*

Q to‘g‘ri to‘rtburchakning chegaraviy nuqtalarida nolga teng bo‘luvchi $\varphi(x_1,x_2)\rho(x_1,x_2)$ funksiyalar $\widetilde{H}^{\lambda}=\widetilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ fazosining qism fazosini $\widetilde{H}_0^{\lambda}=\widetilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ orqali belgilaymiz.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

1) birinchi o‘zgaruvchi bo‘yicha birinchi tartibli xususiy uzluksizlik moduli

$$\overset{1,0}{\omega}_{\varphi}(\sigma_1,0):=\sup_{x_2\in[a_2,b_2]}\sup_{0<h_1\le\sigma_1}\left|\left(\overset{1,0}{\Delta}_{h_1}\varphi\right)(x_1,x_2)\right|,\ 0<\sigma_1\le b_1-a_1;$$

2) ikkinchi o‘zgaruvchi bo‘yicha birinchi tartibli xususiy uzluksizlik moduli

$$\overset{0,1}{\omega}_{\varphi}(0,\sigma_2):=\sup_{x_1\in[a_1,b_1]}\sup_{0<h_2\le\sigma_2}\left|\left(\overset{0,1}{\Delta}_{h_2}\varphi\right)(x_1,x_2)\right|,\ 0<\sigma_2\le b_2-a_2;$$

3) 1.1- tartibli aralash uzluksizlik moduli

$$\overset{1,1}{\omega}_{\varphi}(\sigma_1,\sigma_2):=\sup_{x_i\in[a_i,b_i]}\sup_{0<h_i\le\sigma_i}\left|\left(\overset{1,1}{\Delta}_{h_1,h_2}\varphi\right)(x_1,x_2)\right|,\ 0<\sigma_i\le b_i-a_i,\ i=1,2.$$

8-ta’rif. *Ikki o‘zgaruvchili funksiya $\omega(\sigma_1,\sigma_2)$ quyidagi shartlarni qanoatlantirsa*

1) *tayinlangan σ_2 uchun σ_1 o‘zgaruvchi bo‘yicha $\omega(\sigma_1,\sigma_2)\in\Phi^1$;*

2) *tayinlangan σ_1 uchun σ_2 o‘zgaruvchi bo‘yicha $\omega(\sigma_1,\sigma_2)\in\Phi^1$,*

u holda bu funksiya $\Phi^{1,1}(Q)$ sinfga qarashli deyiladi.

Bu sinfni ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning birinchi tartibli aralash uzluksizlik modullari sinfi deb ataymiz.

9-ta’rif. *Agar quyidagi*

1) $\omega_1(\sigma_1),\omega_2(\sigma_2)\in\Phi^1$ va $\omega_{1,1}(\sigma_1,\sigma_2)\in\Phi^{1,1}$;

2) $\omega_{1,1}(\sigma_1,\sigma_2)\le C_{12}\min\{\omega_1(\sigma_1),\omega_2(\sigma_2)\}$, *bu yerda $C_{12}-$ $\omega_1,\omega_2,\omega_{1,1}$ larga bog‘liq emas, shartlarni qanoatlantiradigan $\varpi=(\omega_1,\omega_2,\omega_{1,1})$ uchliklar to‘plamini $\Phi(Q)$ orqali belgilaymiz.*

10-ta’rif. *$\omega(\sigma_1,\sigma_2)\in\Phi(Q)$ bo‘lsin. Agar $\varphi(x_1,x_2)$ funksiya Q to‘plamda aniqlangan va*

$$\sup_{0<\sigma_1\le b_1-a_1}\frac{\overset{1,0}{\omega}_{\varphi}(\sigma_1,0)}{\omega_1(\sigma_1)}<\infty,\quad \sup_{0<\sigma_2\le b_2-a_2}\frac{\overset{0,1}{\omega}_{\varphi}(0,\sigma_2)}{\omega_2(\sigma_2)}<\infty$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda bu funksiya $H^{(\omega_1,\omega_2)}(Q)=H^{\omega}(Q)$ sinfga tegishli deyiladi.

Ushbu $\omega_1(\sigma_1)$ va $\omega_2(\sigma_2)$ funksiyalarni $H^{(\omega_1,\omega_2)}(Q)$ umumlashgan Hölder fazoning xarakteristik funksiyalari deb ataymiz.

11-ta'rif. *Agar* $\varphi(x_1, x_2) \in H^{\omega_1, \omega_2}(Q)$ *bo'lib,*

$$\sup_{\substack{0<\sigma_i \le b_i - a_i \\ i=1,2}} \frac{\overset{1,1}{\omega_\varphi}(\sigma_1, \sigma_2)}{\omega_{1,1}(\sigma_1, \sigma_2)} < \infty$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $\varphi(x_1, x_2)$ *funksiya* $\tilde{H}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(Q) = \tilde{H}^{\varpi}(Q)$ *sinfga tegishli deyiladi.*

Ushbu $\omega_{1,1}(\sigma_1, \sigma_2)$ *funksiyani* $\tilde{H}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(Q)$ *aralash umumlashgan Hölder fazosining xarakteristik funksiyalari deb ataymiz.*

$(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1}) \in \Phi$ xarakteristikalar bilan Q to'rtburchakning chegaraviy nuqtalarida nolga aylanadigan, $\tilde{H}^{\varpi}(Q) = \tilde{H}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(Q)$ fazodan olingan $\varphi(x_1, x_2)$ funksiyalar qism fazosini $\tilde{H}_0^{\varpi}(Q) = \tilde{H}_0^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(Q)$ orqali belgilamiz.

12-ta'rif. *Agar* $\rho(x_1, x_2)$ *nomanfiy vazn funksiyasi bo'lib,* $\rho(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_2) \in \tilde{H}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(Q)$ *sinfga qarashli bo'lsa, u holda* $\varphi(x_1, x_2)$ *funksiya* $\tilde{H}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(\rho) = \tilde{H}^{\varpi}(Q;\rho)$ *fazoga tegishli deyiladi.*

Shunday $\rho(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_2)\big|_{x_i=a_i} = \rho(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_2)\big|_{x_i=b_i} \equiv 0,\ i = 1,2$ shartni qanoatlantiruvchi $\tilde{H}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(\rho) = \tilde{H}^{\varpi}(Q;\rho)$ fazodan olingan funksiyalar fazosini $\tilde{H}_0^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(\rho) = \tilde{H}_0^{\varpi}(Q;\rho)$ orqali belgilaymiz.

1.3 paragrafda ikki va ko'p o'zgaruvchili kasr tartibli integral operatorlarning ta'riflari va ko'rinishlari keltirilgan. Ikki o'zgaruvchili funksiyalar uchun aniqlangan quyidagi

$$\left(I_{a_1+, a_2+}^{\alpha_1, \alpha_2}\varphi\right)(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2} \frac{\varphi(t_1, t_2)dt_1 dt_2}{(x_1 - t_1)^{1-\alpha_1}(x_2 - t_2)^{1-\alpha_2}},\ x_i > a_i$$

$(\alpha_1, \alpha_2)\ \alpha_i > 0, i = 1,2$ aralash kasr tartbili Riman-Liuvill hamda aralash Volter o'ramasi ma'nosidagi

$$\left(\tilde{K}\varphi\right)(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2} k(x_1 - t_1)k(x_2 - t_2)\varphi(t_1, t_2)dt_1 dt_2,\ a_i < x_i,\ i = 1,2$$

integrallarni qaraymiz.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi "Ikki o'zgaruvchili **Hölder fazolarida aralash kasr tartibli integral operatorlar"** deb nomlangan. Ushbu bobda biz har bir o'zgaruvchisiga nisbatan turli tartibli Hölder hamda aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan umumlashgan Hölder ikki o'zgaruvchili funksiyalar fazolarida Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operatorini tadqiq qilamiz. Hölder fazolari har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmalarda hamda aralash orttirmalarda aniqlanadi, asosiy qiziqish har ikkala holda ham aralash kasr tartibli integral uchun aralash orttirmani baholash muhim bo'lib, bunda integralning zichligi Hölder sinflariga tegishlidir.

Dissertatsiyada biz faqat ajraladigan vazn funksiyalarni qaraymiz.

2.1 paragrafda ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning oddiy va aralash Hölder shartlari bilan aniqlangan vaznli va vaznsiz Hölder fazolarida Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operatorning akslantirishi o‘rganilgan.

1-teorema. *Agar* $0 \le \lambda_i \le 1,\ 0 < \alpha_i < 1$ *va* $\lambda_i + \alpha_i < 1, i = 1,2$ *bo‘lsa, u holda* $H_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *fazoni* $H_0^{\lambda_1+\alpha_1,\lambda_2+\alpha_2}(Q)$ *fazoga akslantiruvchi* $I_{a_1+,a_2+}^{\alpha_1,\alpha_2}$ *aralash kasr tartibli integral operator chegaralangandir.*

2-teorema. *Agar* $0 \le \lambda_i \le 1,\ \lambda_i + \alpha_i < 1,\ 0 < \alpha_i < 1,\ i = 1,2$ *bo‘lsa, u holda* $\widetilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *fazoni* $\widetilde{H}_0^{\lambda_1+\alpha_1,\lambda_2+\alpha_2}(Q)$ *fazoga akslantiruvchi* $I_{a_1+,a_2+}^{\alpha_1,\alpha_2}$ *aralash kasr tartibli integral operator chegaralangan bo‘ladi.*

Vazn funksiyasi $\rho(x_1,x_2) = (x_1 - a_1)^{\mu_1}(x_2 - a_2)^{\mu_2}$, $\mu_i < \lambda_i + 1,\ i = 1,2$ ko‘rinishda bo‘lsin.

3-teorema. *Agar* $0 < \lambda_i < 1,\ 0 < \alpha_i < 1$ *va* $\lambda_i + \alpha_i < 1,\ i = 1,2$ *bo‘lsa, u holda* $\widetilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\rho)$ *fazoni* $\widetilde{H}_0^{\lambda_1+\alpha_1,\lambda_2+\alpha_2}(\rho)$ *fazoga akslantiruvchi* $I_{a_1+,a_2+}^{\alpha_1,\alpha_2}$ *aralash kasr tartibli integral operator chegaralangandir.*

2.2 paragrafda ikki o‘zgaruvchili funksiyalar uchun aralash uzluksizlik modullarda aralash kasr tartibli integrallarning vaznli va vaznsiz Zigmund ma’nosidagi baholari olingan.

4-teorema. *Faraz qilaylik* $\varphi(x_1,x_2) \in C(Q)$ *va* $\varphi(x_1, x_2)|_{x_i=a_i} = 0,\ i = 1,2$ *bo‘lsin, u holda* $f(x_1, x_2) = \left(I_{a_1+,a_2+}^{\alpha_1,\alpha_2}\varphi\right)(x_1, x_2)$ *aralash kasr tartibli integral uchun quyidagi Zigmund ma’nosidagi baholar o‘rinli:*

$$\overset{1,0}{\omega}(f;\, h_1, 0) \le C_1 h_1 \int_{h_1}^{b_1-a_1} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi;\ t_1, b_2 - a_2)}{t_1^{2-\alpha_1}} dt_1 ,$$

$$\overset{0,1}{\omega}(f;\, 0,\, h_2) \le C_2 h_2 \int_{h_2}^{b_2-a_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi;\, b_1 - a_1,\, t_2)}{t_2^{2-\alpha_2}} dt_2 ,$$

$$\overset{1,1}{\omega}(f;\, h_1, h_2) \le C_{12} h_1 h_2 \int_{h_1}^{b_1-a_1} \int_{h_2}^{b_2-a_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi;\ t_1,\ t_2)}{t_1^{2-\alpha_1} t_2^{2-\alpha_2}} dt_1 dt_2 .$$

5-teorema. $\rho(x_1,x_2) = (x_1 - a_1)^{\mu_1}(x_2 - a_2)^{\mu_2},\ 0 \le \mu_i < 2 - \alpha_i\ \ i = 1,2$ *bo‘lsin. Agar* $\varphi(x_1,x_2)$ *funksiya ushbu*

1) $\varphi_0(x_1,x_2) = \rho(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2) \in C(Q)$ *va* $\varphi_0(x_1,x_2)|_{x_i=a_i} = 0,\ i = 1,2;$

2) $\gamma_i = \max\{1,\mu_i\},\ \ i = 1,2$ *da* $\displaystyle\int_0^{b_1-a_1}\int_0^{b_2-a_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0;t_1,t_2)}{t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2}} dt_1 dt_2 < \infty$ *shartlarni*

qanoatlantirsa, u holda $f(x_1,x_2) = \left(I_{a_1+,a_2+}^{\alpha_1,\alpha_2}\varphi\right)(x_1,x_2)$ *aralash kasr tartibli integral uchun*

$$\overset{1,0}{\omega}(\rho f;h_1,0)\le C_1\left[h_1^{\alpha_1+\gamma_1-1}\int\limits_0^{h_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;t_1,b_2-a_2)}{t_1^{\gamma_1}}dt_1+h_1\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;t_1,b_2-a_2)}{t_1^{2-\alpha_1}}dt_1\right],$$

$$\overset{0,1}{\omega}(\rho f;0,h_2)\le C_2\left[h_2^{\alpha_2+\gamma_2-1}\int\limits_0^{h_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;b_1-a_1,t_2)}{t_2^{\gamma_2}}dt_2+h_2\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;\,b_1-a_1,\,t_2)}{t_2^{2-\alpha_2}}dt_2\right],$$

$$\overset{1,1}{\omega}(\rho f;h_1,h_2)\le C_{12}\left[h_1^{\alpha_1+\gamma_1-1}\,h_2^{\alpha_2+\gamma_2-1}\int\limits_0^{h_1}\int\limits_0^{h_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;\,t_1,\,t_2)}{t_1^{\gamma_1}t_2^{\gamma_2}}dt_1dt_2+\right.$$

$$+h_1h_2^{\alpha_2+\gamma_2-1}\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\int\limits_0^{h_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;t_1,t_2)}{t_1^{2-\alpha_1}t_2^{\gamma_2}}dt_1dt_2+h_1^{\alpha_1+\gamma_1-1}h_2\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;\;t_1,t_2)}{t_1^{\gamma_1}t_2^{2-\alpha_2}}dt_1dt_2+$$

$$\left.+h_1h_2\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;\;t_1,t_2)}{t_1^{2-\alpha_1}t_2^{2-\alpha_2}}\right]$$

Zigmund ma'nosidagi baholar o'rinli bo'ladi.

2.3 paragrafida aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o'zgaruvchili funksiyaning vaznli va vaznsiz umumlashgan Hölder fazolarida Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operatorning akslantirishi o'rganilgan.

6-teorema. $0<\alpha_i<1,\ i=1,\ 2$ *bo'lib, quyidagi*

1) $\displaystyle\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\frac{\omega(t_1,\,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}\omega(x_1,\,x_2),$

2) $\displaystyle\int\limits_{x_1}^{b_1-a_1}\int\limits_{x_2}^{b_2-a_2}\left(\frac{x_1}{t_1}\right)^{1-\alpha_1}\left(\frac{x_2}{t_2}\right)^{1-\alpha_2}\frac{\omega(t_1,\,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}\omega(x_1,\,x_2).$

shartlar bajarilsa, u holda $\tilde{H}_0^{\varpi}$ *fazoni* $\tilde{H}_0^{\varpi_\alpha}$ *fazoga* $\varpi_\alpha(x)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\omega(x_1,\,x_2)$ *xarakteristikasi bilan akslantiruvchi* $I_{a_1+,a_2+}^{\alpha_1,\alpha_2}$ *aralash kasr tartibli integral operator chegaralangan bo'ladi.*

7-teorema. $\rho(x_1,\,x_2)=(x_1-a_1)^{\mu_1}(x_2-a_2)^{\mu_2},\ \gamma_i=\max(\mu_i-1,0),\ \ \mu_i<2-\alpha_i,$ $0<\alpha_i<1,\ i=1,2$ *bo'lsin. Agar quyidagi*

1) $\displaystyle\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\left(\frac{x_1}{t_1}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{x_2}{t_2}\right)^{\gamma_2}\frac{\omega(t_1,\,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}\omega(x_1,\,x_2),$

2) $\displaystyle\int\limits_{x_1}^{b_1-a_1}\int\limits_{x_2}^{b_2-a_2}\left(\frac{x_1}{t_1}\right)^{1-\alpha_1}\left(\frac{x_2}{t_2}\right)^{1-\alpha_2}\frac{\omega(t_1,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}\omega(x_1,\,x_2)$

shartlar bajarilsa, u holda $\tilde{H}_0^{\varpi}(\rho)$ *fazoni* $\tilde{H}_0^{\varpi_\alpha}(\rho)$ *fazoga* $\varpi_\alpha(x)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\omega(x_1,\,x_2)$ *xarakteristikasi bilan akslantiruvchi* $I_{a_1+,a_2+}^{\alpha_1,\alpha_2}$ *aralash kasr tartibli integral operator chegaralangandir.*

Dissertatsiyaning uchinchi bobi “**Ikki o‘zgaruvchili umumlashgan Hölder fazolarida Volter o‘ramasi ma’nosidagi aralash integral operatorlari**” deb nomlangan. Ikkinchi bobda biz yadro va vazn funksiyasi darajali funksiyalar bo‘lgan holni o‘rgandik. Endi ushbu bobda biz ixtiyoriy yadro va vazn funksiyalar bo‘lgan holni qaraymiz.

3.1 paragrafda ikki o‘zgaruvchili funksiyalar aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlanganda Volter o‘ramasi ma’nosidagi aralash integrallarning vaznli va vaznsiz Zigmund ma’nosidagi baholari olingan.

8-teorema. $k(x_i)\in V_{\lambda_i}$, $0<\lambda_i<1, \varphi(x_1, x_2)\big|_{x_i=a_i}=0$ *va* $\varphi(x_1,x_2)\in C(Q)$ $i=1, 2,$ *bo‘lsa, u holda quyidagi Zigmund ma’nosidagi baholar o‘rinli:*

$$\overset{1,0}{\omega}\left(\tilde{K}\varphi;\, h_1, 0\right)\le C_1\left[\,h_1 k(h_1)\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, h_1,\, b_2-a_2\right)+h_1\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, t_1,\, b_2-a_2\right)}{t_1}k(t_1)dt_1\right],$$

$$\overset{0,1}{\omega}\left(\tilde{K}\varphi;0, h_2\right)\le C_2\left[\,h_2 k(h_2)\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi; b_1-a_1, h_2\right)+h_2\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, b_1-a_1,\, t_2\right)}{t_2}k(t_2)dt_2\right],$$

$$\overset{1,1}{\omega}\left(\tilde{K}\varphi;\, h_1,\, h_2\right)\le C_{12}\left[\,h_1 k(h_1)h_2 k(h_2)\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, h_1,\, h_2\right)+\right.$$

$$+h_1h_2k(h_2)\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;t_1,b_2-a_2\right)}{t_1}k(t_1)dt_1+h_1h_2k(h_1)\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;b_1-a_1,t_2\right)}{t_2}k(t_2)dt_2+$$

$$\left.+h_1h_2\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, t_1,\, t_2\right)}{t_1t_2}k(t_1)k(t_2)dt_1dt_2\right].$$

9-teorema. $k(x_i)\in V_{\lambda_i}, 0<\lambda_i<1,\, i=1{,}2$ *va* $\rho(x_1,x_2)=\psi(x_1-a_1)\psi(x_2-a_2)$ *bo‘lsin, bunda* $\psi(x_i)\in W_{\mu_i}$, $0<\mu_i<1+\lambda_i$, $i=1{,}2$. *Agar quyidagi*

1) $\varphi_0(x_1, x_2)=\rho(x_1, x_2)\varphi(x_1,x_2)\in C(Q)$ *va* $\varphi_0(x_1, x_2)\big|_{x_i=a_i}=0, i=1{,}2;$

2) $\displaystyle\int\limits_0^{b_1-a_1}\int\limits_0^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi_0;\, t_1, t_2\right)}{t_1^{\delta_1}t_2^{\delta_2}}dt_1dt_2<\infty$, bu yerda $\delta_i=\max(1,\, \mu_i)$, $i=1{,}2$ shartlar

bajarilsa, u holda

$$\overset{1,0}{\omega}\left(\rho\tilde{K}\varphi;\, h_1,\, 0\right)\le C_1\left[h_1^{\delta_1}k(h_1)\int\limits_0^{h_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi_0;t_1,b_2-a_2\right)}{t_1^{\delta_1}}dt_1+h_1\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi_0;t_1,b_2-a_2\right)}{t_1}k(t_1)dt_1\right],$$

$$\overset{0,1}{\omega}\left(\rho\tilde{K}\varphi;0,h_2\right)\le C_2\left[h_2^{\delta_2}k(h_2)\int\limits_0^{h_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi_0;b_1-a_1,t_2\right)}{t_2^{\delta_2}}dt_2+h_2\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi_0;b_1-a_1,h_2\right)}{t_2}k(t_2)dt_2\right],$$

$$\overset{1,1}{\omega}\left(\rho\tilde{K}\varphi;\,h_1,\,h_2\right)\le C_{12}\left[\,h_1^{\delta_1}h_2^{\delta_2}k(h_1)k(h_2)\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0;\,t_1,\,t_2)}{t_1^{\delta_1}t_2^{\delta_2}}dt_1dt_2+\right.$$

$$+h_1h_2^{\delta_2}k(h_2)\int_{h_1}^{b_1-a_1}\int_0^{h_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0;t_1,t_2)}{t_1t_2^{\delta_2}}k(t_1)dt_1+h_2h_1^{\delta_1}k(h_1)\int_0^{h_1}\int_0^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0;t_1,t_2)}{t_2t_1^{\delta_1}}k(t_2)dt_2+$$

$$\left.+h_1h_2\int_{h_1}^{b_1-a_1}\int_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0;t_1,t_2)}{t_1t_2}k(t_1)k(t_2)dt_1dt_2\right]$$

Zigmund ma’nosidagi baholar o‘rinli bo‘ladi.

3.2 paragrafda aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz umumlashgan Hölder fazolarida Volter o‘ramasi ma’nosidagi aralash integral operatorning akslantirishi o‘rganilgan.

10-teorema. *Agar* $k(x_i)\in V_{\lambda_i}$, $0<\lambda_i<1,\ i=1,2$ *va*

1) $\displaystyle\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}\frac{\omega(\varphi;\,t_1,\,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}\omega(\varphi;\,h_1,\,h_2)$,

2) $\displaystyle\int_{h_1}^{b_1-a_1}\int_{h_2}^{b_2-a_2}k(t_1)k(t_2)\frac{\omega(\varphi;\,t_1,\,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}k(h_1)k(h_2)\omega(\varphi;\,h_1,\,h_2)$.

bo‘lsa, u holda $\tilde{H}_0^{\varpi}$ *fazoni* $\tilde{H}_0^{\varpi k}$ *fazoga* $\varpi_k(h_1,\,h_2)=h_1h_2k(h_1)k(h_2)\omega(h_1,\,h_2)$ *xarakteristikasi bilan akslantiruvchi* $\tilde{K}$ *aralash integral operator chegaralangan bo‘ladi.*

11-teorema. $\rho(x_1,\,x_2)=\psi(x_1-a_1)\psi(x_2-a_2)$, $\psi(x_i)\in W_{\mu_i}$, $k(t_i)\in V_{\lambda_i}$, $\mu_i<\lambda_i+1,\ 0<\lambda_i<1,\ i=1,2$ *bo‘lsin. Agar*

1) $\displaystyle\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}\left(\frac{h_1}{t_1}\right)^{\max(\mu_1-1,\ 0)}\left(\frac{h_2}{t_2}\right)^{\max(\mu_2-1,\ 0)}\frac{\omega(t_1,\,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}\omega(h_1,h_2)$,

2) $\displaystyle\int_{h_1}^{b_1-a_1}\int_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\omega(t_1,\,t_2)}{t_1t_2}k(t_1)k(t_2)dt_1dt_2\le C_{12}k(h_1)k(h_2)\omega(h_1,h_2)$

shartlar bajarilsa, u holda $\tilde{H}_0^{\varpi}(\rho)$ *fazoni* $\tilde{H}_0^{\varpi k}(\rho)$ *fazoga* $\varpi_k(h_1,\,h_2)=h_1h_2k(h_1)k(h_2)\omega(h_1,\,h_2)$ *xarakteristikasi bilan akslantiruvchi* $\tilde{K}$ *aralash integral operator chegaralangandir.*

XULOSA

Umuman olganda, dissertatsiyada olingan natijalardan dissertatsiya ishining maqsadiga erishilgan deb hisoblash mumkin. Barcha asosiy natijalar yangi va shu bilan birga integral operatorlar nazariyasiga ma’lum hissa qo‘shadi. Ish aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar fazosida

Volter o‘ramasi ma’nosidagi ba’zi operatorlarning xossalarini o‘rganishga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Oddiy va aralash Hölder shartlari bilan aniqlangan ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz Hölder fazolarini akslantiruvchi Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operator chegaralanganligi haqidagi teoremalar isbotlangan;

2. Aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o‘zgaruvchili Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integrallarning vaznli va vaznsiz Zigmund ma’nosidagi baholari olingan. Zigmund ma’nosidagi baholardan foydalanib, aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz umumlashgan Hölder fazolarini akslantiruvchi Riman-Liuvill aralash kasr tartibli integral operator chegaralanganligi haqidagi teoremalar isbotlangan;

3. Aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o‘zgaruvchili Volter o‘ramasi ma’nosidagi aralash integral uchun vaznli va vaznsiz Zigmund ma’nosidagi baholari olingan;

4. Zigmund ma’nosidagi baholardan foydalanib, aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning vaznli va vaznsiz umumlashgan Hölder fazolarini akslantiruvchi Volter o‘ramasi ma’nosidagi aralash integral operator chegaralanganligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

Olingan natijalar ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasida integral operatorni tadqiq qilish masalalariga qo‘llaniladi.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ № PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ

КАРШИНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
БУХАРСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАМАТОВ ТУЛКИН ЮСУПОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА ВОЛЬТЕРРОВСКОЙ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СМЕШАННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Карши – 2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии за B2022.2.PhD/FM704.

Диссертация выполнена в Бухарском инженерно-технологическом институте.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.qarshidu.uz) и на информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Яхшибаев Махмадёр Умирович** доктор физико-математических наук (DSc), профессор
Официальные оппоненты:	**Расулов Тулкин Хусенович** доктор физико-математических наук (DSc), профессор
	Кулиев Комил Данабоевич доктор физико-математических наук (DSc), доцент
Ведущая организация:	**Навоийский государственный педагогический институт**

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2023 года в ____ на заседании Научного совета PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 при Каршинском государственном университете (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225-34-13; факс: (+998 75) 221-00-56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Каршинский государственный университет 2-корпус (аудитория № 202).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Каршинского государственного университета (зарегистрирована за №__). (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225-34-13; факс: (+998 75) 221-00-56, e-mail: qarshidu@umail.uz).

Автореферат диссертации разослан «_____» ____________ 2023 года
(протокол рассылки №_____ от «_____» ____________ 2023 года).

Б.А.Шоимкулов
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ш.Д.Нодиров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

А.А.Имомов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н. (DSc), доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Теория особых (сингулярных) интегральных операторов эффективно используется для решения различных задач современной математической физики, механики, теории функций комплексных переменных. Одной из важнейших задач в теории интегральных операторов в пространствах является задача выяснения гладкости образа в зависимости от гладкости прообраза. Один из способов тонко понять свойства гладкости функций – использование понятия обобщённой гельдеровости, формулируемой в терминах поведения модуля непрерывности.

В мире проводятся научные исследования по изучению свойств дробных интегро-дифференциальных операторов в различных пространствах. Одной из наиболее актуальных задач является изучение свойств функций многих переменных некоторых операторов типа вольтерровской свертки в пространствах Гельдера и их непосредственное распространение на случай многих переменных. Важным этапом изучения дробного интегро-дифференцирования функций в обобщенных пространствах Гельдера является получение оценок типа Зигмунда, т.е. оценка модуля непрерывности дробного интеграла (дробной производной) через модуль непрерывности исходной функции.

В нашей стране уделяется особое внимание современным направлениям механики, химической технологии и физики, имеющие научные и практические приложения фундаментальных наук. В частности, особое внимание уделяется решению актуальных задач дробного интегрирования и дробного дифференцирования. В результате развития этого направления достигаются значительные результаты в решении задач, связанных с математической физикой, механикой жидкости, математическим моделированием различных физических явлений, решением нелинейных дифференциальных уравнений. В качестве основных задач и направлений деятельности математической науки определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным областях функционального анализа, математического анализа, дифференциальных уравнений, математической физики, теории вероятностей и теории динамических систем[1]. Изучение и развитие свойств многомерных интегральных операторов дробного порядка в многомерных обобщенных пространствах Гельдера приобретает все большее значение для обеспечения принятия решений.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит выполнению задач, отраженных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований

[1]Постановление Президента Республики Узбекистан от 7 мая 2020 года № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию исследований в области математики».

в области математики», а также других нормативно-правовых актах, связанных с данной деятельностью.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Вопросу о поведении операторов дробного интегро-дифференцирования в пространствах Гельдера функций одной переменной, имеющих модуль непрерывности, посвящено немало работ. Первые точные результаты здесь принадлежат Г.Х.Харди и Д.Е.Литтлвуду. В дальнейшем эти результаты Харди и Литтлвуда обобщались в самых различных направлениях.

Б.С.Рубин и Б.Г.Вакулов обобщили эти результаты на весовой случай. Н.К.Карапетянц и Л.Д.Шанкишвили дали короткое доказательство теоремы Харди и Литтлвуда в весовом Гельдеровском пространстве.

Важным этапом изучения дробного интегро-дифференцирования функций из обобщенных Гельдеровских пространств является получение оценок типа Зигмунда, т.е. оценка модуля непрерывности дробного интеграла (дробной производной) через модуль непрерывности исходной функции.

В работах Х.М.Мурдаев и С.Г.Самко исследовали действие операторов дробного интегро-дифференцирования в обобщенных пространствах Гельдера со степенными весами и установили изоморфизм, осуществляемый оператором между обобщенными пространствами Гельдера и характеристикой из класса типа Бари-Стечкина. Н.К.Карапетянц, Х.М.Мурдаев и А.Я.Якубов рассмотрели дробное интегро-дифференцирование в обобщённых Гельдеровских пространствах, определяемых поведением интегральных модулей непрерывности. Исследованию дробных интегралов и производных в Гельдеровских и обобщённых Гельдеровских классах посвящены работы С.Г.Самко и З.У.Муссалаева, когда интегральный оператор типа вольтерровской свёртки, имеет общие веса и ядра. В работах Н.К.Крапетянца и З.У.Муссалаевой рассматривается периодическое дробное интегро-дифференцирование по Вейлю, причём в этих работах допускается и произвольный положительный порядок у дробного интеграла. Работы Е.С.Кочурова, а также Б.Г.Вакулова посвящены исследованию действия операторов дробного интегрирования и дробного дифференцирования переменного порядка в обобщенных пространствах Гельдера с характеристикой, зависящей от параметра и в пространствах Гельдера со степенными весами. В этих работах найдены условия на функцию, определяющую порядок, при котором имеют место аналоги теорем Харди и Литтлвуда. В своей работе Salem H.A.H., Chicon M. исследуют умеренные дробные интегральные операторы, действующие на обобщённых пространствах Гельдера.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где была выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с темой плана научно-исследовательских работ МА.01.2018 «Теория дробных интегро-дифференциальных операторов» Бухарского инженерно-технологического института.

Целью исследования является изучение свойств смешанных дробных интегральных операторов в пространствах Гельдера функций нескольких переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности как в невесовом, так и в весовом случае.

Задачи исследования:

доказать теоремы о действии смешанного дробного интегрального оператора Римана-Лиувилля в пространствах Гельдера функций двух переменных, определяемых обычным и смешанным условиями Гельдера, в случае веса и без веса;

получить весовые и невесовые оценки типа Зигмунда для смешанного дробного интеграла Римана-Лиувилля функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности и с помощью этих оценок доказать теоремы о действии смешанного дробного интегрального оператора Римана-Лиувилля в весовых и невесовых обобщённых пространствах Гельдера функций двух переменных;

получить весовые и невесовые оценки типа Зигмунда для смешанного интеграла типа вольтерровской свёртки функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности;

доказать теоремы о действии смешанного интегрального оператора типа вольтерровской свёртки в весовых и невесовых обобщённых пространствах Гельдера функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности, с использованием оценок типа Зигмунда.

Объектом исследования являются операторы смешанного дробного интегрирования Римана-Лиувилля и операторы типа вольтерровской свёртки в пространствах Гельдера функций нескольких переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности.

Предметом исследования диссертации является изучение объектов исследования с целью установки их взаимосвязей и получения новых утверждений, которые будут способствовать дальнейшему развитию теории интегральных операторов в различных нестандартных функциональных пространствах.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы интегральных операторов, теории функций многих переменных и теории интегралов дробного порядка.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказаны теоремы об ограниченных действиях смешанного дробного интегрального оператора Римана-Лиувилля в весовых и невесовых пространствах Гельдера функций двух переменных, определяемых обычными и смешанными условиями Гельдера с использованием методов доказательства теорем об ограниченных действиях дробного интегрального оператора Римана-Лиувилля в пространствах Гельдера функциий одной переменной;

используя методов получения весовые и невесовые оценки типа Зигмунда для дробного интеграла Римана-Лиувилля и интеграла типа вольтерровской свертки функций одной переменной, имеющих модуль непрерывности получены весовые и невесовые оценки типа Зигмунда для смешанного дробного интеграла Римана-Лиувилля и смешанного интеграла типа вольтерровской свёртки функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности;

с помощью оценок типа Зигмунда доказаны теоремы об ограниченных действиях смешанного дробного интегрального оператора Римана-Лиувилля в весовых и невесовых обобщённых пространствах Гельдера функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности;

с помощью оценок типа Зигмунда доказаны теоремы об ограниченных действиях смешанного интегрального оператора типа вольтерровской свёртки в весовых и невесовых обобщённых пространствах Гельдера функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности.

Практические результаты исследования:

для расчета параметров ядра релаксации типа Вольтера, учитывающие вязкости используется свойства смешанного интеграла типа вольтерровской свертки;

оценки типа Зигмунда смешанного дробного интеграла Римана-Лиувилля использовались для вычисления дробных интегралов в ядре Роботнова, представляющие вязкость;

смешанные дробные интегралы Римана-Лиувилля использовались для решения двумерных интегральных уравнений Вольтера и Абеля.

Достоверность результатов исследования обоснована строгой последовательностью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов оценивания несобственных интегралов из математического анализа. Кроме того, результаты диссертации опубликованы в престижных научных журналах, в частности, в журналах с высоким значением импакт-фактора, наряду с этим полученные результаты работы были обсуждены на научных семинарах.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития дробного интегрирования типа вольтерровской свёртки в обобщённых пространствах Гельдера функции многих переменных.

Практическая значимость результатов исследования заключается в том, что полученные научные результаты применяются при решении дробно-линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Абеля.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были внедрены в следующих научно-исследовательских направлениях:

теоремы о действии смешанного дробного интегрального оператора Римана-Лиувилля в весовых и невесовых пространствах Гельдера функций двух переменных, определяемых обычным и смешанным условиями Гельдера, использовались при исследовании дробных интегральных операторов двух переменных в ведущих зарубежных журналах (Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory, 2013, vol 41, 21-56; Intelligent Mathematics II: Applied Mathematics and Approximation Theory, 2016, vol 441, 1-13; Computational Analysis, 2016, vol. 155, 1-17; Intelligent Comparisons: Analytic Inequalities, 2016, vol. 609, 623-659; Abstract Fractional Monotone Approximation, Theory and Applications, 2022, vol 411, 121-144; Abstract Fractional Monotone Approximation, Theory and Applications, 2022, vol 411, 73-96; Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 2022, vol.91, no.3, 1-19). Применение научных результатов позволило доказать свойства рассматриваемых операторов;

результаты о свойствах смешанного интегрального оператора типа вольтерровской свёртки в обобщённых пространствах Гельдера функции двух переменных, определяемых смешанными модулями непрерывности, как в невесовом, так и в весовом случаях были использованы в фундаментальном проекте № ОТ-Ф4-01 по теме «Развитие теории и разработка методов исследования нелинейного напряжённо-деформированного состояния многослойных композитных вязкоупругих криволинейных участков труб, протекающей вязкой жидкостью под действием температурных и динамических нагрузок» (Справка Ташкентского химико-технологического института от 26 декабря 2022 года). В результате было достигнуто повышение степени точности выражения свойства вязкости в используемом ядре до 10%;

оценки типа Зигмунда смешанных дробных интегралов Римана-Лиувилля были использованы в фундаментальном проекте № Ф-4-40 по теме «Развитие теории и разработка методов расчёта напряжённо-деформированного состояния криволинейных труб, протекающей жидкостью под действием внешних сил» (Справка Бухарского инженерно-технологического института от 13 декабря 2022 года). В результате точность по сравнению с расчётом существующих моделей была увеличена до 10%.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 7 научно-практических конференциях, в том числе, на 4-х международных и 3-х республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 14 научных работ из них 7-в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций на соискания степени доктора философии (PhD), в том числе 4-в зарубежном журнале и 3-республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 103 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется «**Необходимые факты из теории дробного интегрирования**». В этой главе представлены необходимые предварительные сведения и обозначения для операторов дробного интеграла в пространствах Гельдера как в одномерном так и в двумерном случаях. Также приведены некоторые известные результаты о дробном интегрировании в одномерном случае.

Параграф 1.1 носит вспомогательный характер. В нём содержатся некоторые известные результаты для дробного интегрирования функции от одной переменной. Ниже приводим известные утверждения и понятия, которые нам необходимы для изложения рассматриваемых вопросов.

Определение 1. *Функция* $\omega(\sigma)$ $(0<\sigma\le l_0=b-a)$ *называется модулем непрерывности, если она удовлетворяет условиям*:

1) $\omega(0)=0$;
2) $\omega(\sigma)$ *является неубывающей функцией от* σ;
3) $\omega(\sigma)$ *полуаддитивна, т.е.* $\omega(\sigma_1+\sigma_2)\le\omega(\sigma_1)+\omega(\sigma_2)$;
4) $\omega(\sigma)$ *есть непрерывная по* σ *функция на* $[0,b-a]$.

Определение 2. *Утверждается, что* $\omega(\sigma)\in\Phi^1$, *если она определена в* $(0,b-a]$ *и удовлетворяет условиям*:

a) $\omega(\sigma)$ *является модулем непрерывности*;

b) $\int\limits_0^\sigma \frac{\omega(t)}{t}dt\le C_1\omega(\sigma)$;

c) $\sigma\int\limits_\sigma^{b-a}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\le C_1\omega(\sigma)$;

d) $\omega'(\sigma)\sim\frac{\omega(\sigma)}{\sigma}$.

Определение 3. *Утверждается, что* $\psi(x)$ *принадлежит классу* W_μ, $\mu>0$, *если она определена в* $[0,l]$ *и удовлетворяет условиям*:

1) $\psi(x)$-*непрерывна в* $[0,l]$, *а также* $\psi(0)=0$ *и* $\psi(x)>0$ *при* $x>0$;
2) $\psi(x)$- *почти возрастающая и* $\frac{\psi(x)}{x^\mu}$- *почти убывающая;*
3) *существует такая постоянная* C_1, *что*

$$\left|\frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y}\right|\le C_1\frac{\psi(x^*)}{x^*},\ \text{если}\ x^*=\max(x,y).$$

Определение 4. *Утверждается, что положительная функция* $k(x)$ *определена в* $[0,l]$ *и принадлежит классу* V_λ, $\lambda > 0$, *если удовлетворяет условиям:*

1) $k(x) \neq 0$, $x^\lambda k(x)$*-почти возрастающая и* $x^\lambda k(x)\big|_{x=0} = 0$;
2) *существует такое* $\varepsilon > 0, 0 < \varepsilon < \lambda$, *что* $x^{\lambda-\varepsilon} k(x)$*– почти убывающая;*
3) *существует такая постоянная* C_1, *что*

$$\left|\frac{k(x)-k(y)}{x-y}\right| \leq C_1 \frac{k(x^*)}{x^*}, \text{ если } x^* = \max(x, y).$$

Параграф 1.2 содержит предварительные сведения, определения и утверждения, необходимые для представления результатов диссертации.

Пусть непрерывная функция $\varphi(x_1, x_2)$ определена в $\mathbf{R}^2$. Введём необходимые в дальнейшем обозначения:

$$\left(\overset{1,0}{\Delta}_{h_1} \varphi\right)(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + h_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2),$$

$$\left(\overset{0,1}{\Delta}_{h_2} \varphi\right)(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2 + h_2) - \varphi(x_1, x_2),$$

$$\left(\overset{1,1}{\Delta}_{h_1, h_2} \varphi\right)(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \varphi(x_1 + h_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2 + h_2) + \varphi(x_1, x_2).$$

Нетрудно убедиться, что имеет место тождество

$$\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = \left(\overset{1,1}{\Delta}_{h_1, h_2} \varphi\right)(x_1, x_2) + \left(\overset{1,0}{\Delta}_{h_1} \varphi\right)(x_1, x_2) + \left(\overset{0,1}{\Delta}_{h_2} \varphi\right)(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2).$$

Пусть функция $\varphi(x_1, x_2)$ определена в прямоугольнике $Q = \{(x_1, x_2):\ a_1 \leq x_1 \leq b_1,\ a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$.

Определение 5. *Пусть* $\lambda_i \in (0, 1], i = 1, 2$. *Утверждается, что* $\varphi(x_1, x_2) \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$, *если для всех* $(x'_1,\ x'_2), (x''_1,\ x''_2) \in Q$ *выполнено условие:*

$$|\varphi(x'_1, x'_2) - \varphi(x''_1, x''_2)| \leq C_1 |x'_1 - x''_1|^{\lambda_1} + C_2 |x'_2 - x''_2|^{\lambda_2},$$

где C_1, C_2 *- постоянные.*

Через $H_0^\lambda = H_0^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ будем обозначать подпространство функций из $H^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ обращающихся в нуль в граничных точках Q.

Определение 6. *Утверждается, что* $\varphi(x_1, x_2) \in \widetilde{H}^\lambda(Q) = \widetilde{H}^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$, *где* $\lambda_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2$, *если*

$$\varphi(x_1, x_2) \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(Q) \text{ и } \left|\left(\overset{1,1}{\Delta}_{h_1, h_2} \varphi\right)(x_1, x_2)\right| \leq C_{12} |h_1|^{\lambda_1} |h_2|^{\lambda_2}.$$

Класс $\widetilde{H}^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ назовем смешанным Гельдеровском классом.

Говорят, что $\varphi(x_1,x_2)\in \widetilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$, *если* $\varphi(x_1,x_2)\in \widetilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *и* $\varphi(x_1,x_2)\big|_{x_i=a_i}\equiv \varphi(x_1,x_2)\big|_{x_i=b_i}\equiv 0,\ i=1,2$.

Определение 7. *Пусть* $\rho(x_1,x_2)$*-неотрицательная функция определена в* $\mathbf{R}^2$. *Через* $\widetilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(\rho)=\widetilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(Q;\rho)$ *будем обозначать класс функций* $\varphi(x_1,x_2)$ *таких, что* $\rho(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\in \widetilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$.

Через $\widetilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\rho)$ *обозначим множество всех тех функций из* $\widetilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(\rho)$, *для которых функция* $\rho(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)$ *обращается в нуль в граничных точках Q.*

Введём следующие обозначения:

1) частный модуль непрерывности первого порядка по первой переменной

$$\overset{1,0}{\omega}_{\varphi}(\sigma_1,0):=\sup_{x_2\in[a_2,b_2]}\ \sup_{0<h_1\le\sigma_1}\left|\left(\overset{1,0}{\Delta}_{h_1}\varphi\right)(x_1,x_2)\right|,\ 0<\sigma_1\le b_1-a_1;$$

2) частный модуль непрерывности первого порядка по второй переменной

$$\overset{0,1}{\omega}_{\varphi}(0,\sigma_2):=\sup_{x_1\in[a_1,b_1]}\ \sup_{0<h_2\le\sigma_2}\left|\left(\overset{0,1}{\Delta}_{h_2}\varphi\right)(x_1,x_2)\right|,\ 0<\sigma_2\le b_2-a_2;$$

3) смешанный модуль непрерывности порядка 1,1

$$\overset{1,1}{\omega}_{\varphi}(\sigma_1,\sigma_2):=\sup_{x_i\in[a_i,b_i]}\ \sup_{0<h_i\le\sigma_i}\left|\left(\overset{1,1}{\Delta}_{h_1,h_2}\varphi\right)(x_1,x_2)\right|,\ 0<\sigma_i\le b_i-a_i,\ i=1,2.$$

Определение 8. *Обозначим через* $\Phi^{1,1}(Q)$ *класс функций двух переменных* $\omega(\sigma_1,\sigma_2)$, *удовлетворяющих условиям:*

1) $\omega(\sigma_1,\sigma_2)\in\Phi^1$ *по* σ_1 *при фиксированном* σ_2;

2) $\omega(\sigma_1,\sigma_2)\in\Phi^1$ *по* σ_2 *при фиксированном* σ_1.

Называем этот класс классом смешанных модулей непрерывности первого порядка непрерывных функций двух переменных.

Определение 9. *Обозначим через* Φ *множество троек* $\varpi=(\omega_1,\omega_2,\omega_{1,1})$, *удовлетворяющих условиям:*

1) $\omega_1(\sigma_1),\omega_2(\sigma_2)\in\Phi^1$ и $\omega_{1,1}(\sigma_1,\sigma_2)\in\Phi^{1,1}$;

2) $\omega_{1,1}(\sigma_1,\sigma_2)\le C_{12}\min\{\omega_1(\sigma_1),\ \omega_2(\sigma_2)\}$,

где C_{12} *– не зависит* от $\omega_1,\omega_2,\omega_{1,1}$.

Определение 10. *Пусть* $\omega(\sigma_1,\sigma_2)\in\Phi(Q)$. *Будем говорить, что функция* $\varphi(x_1,x_2)\in H^{(\omega_1,\omega_2)}(Q)=H^{\omega}(Q)$, *если она определена на Q и удовлетворяет условиям:*

$$\sup_{0<\sigma_1\le b_1-a_1}\frac{\overset{1,0}{\omega}_{\varphi}(\sigma_1,0)}{\omega_1(\sigma_1)}<\infty \ \text{ и } \sup_{0<\sigma_2\le b_2-a_2}\frac{\overset{0,1}{\omega}_{\varphi}(0,\sigma_2)}{\omega_2(\sigma_2)}<\infty.$$

Функции $\omega_1(\sigma_1)$ *и* $\omega_2(\sigma_2)$ *мы будем называть характеристическими функциями обобщенного Гельдеровского пространства* $H^{(\omega_1,\omega_2)}(Q)$.

Определение 11. *Будем говорить, что функция* $\varphi(x_1,x_2)$ *принадлежит классу* $\widetilde{H}^{(\omega_1,\omega_2,\omega_{1,1})}(Q)=\widetilde{H}^{\varpi}(Q)$, *если* $\varphi(x_1,x_2)\in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ *и удовлетворяет условию*

$$\sup_{\substack{0<\sigma_i\le b_i-a_i\\ i=1,2}}\frac{\overset{1,1}{\omega_{\varphi}}(\sigma_1,\,\sigma_2)}{\omega_{1,1}(\sigma_1,\sigma_2)}<\infty.$$

Функцию $\omega_{1,1}(\sigma_1,\sigma_2)$ *мы будем называть характеристической функцией смешанного обобщённого Гельдеровского пространства* $\widetilde{H}^{(\omega_1,\omega_2,\omega_{1,1})}(Q)$.

Через $\widetilde{H}_0^{\varpi}(Q)=\widetilde{H}_0^{(\omega_1,\omega_2,\omega_{1,1})}(Q)$ *будем обозначать подпространство функций* $\varphi(x_1,x_2)$ *из* $\widetilde{H}_0^{\varpi}(Q)=\widetilde{H}_0^{(\omega_1,\omega_2,\omega_{1,1})}(Q)$ *обращающихся в нуль в граничных точках прямоугольника Q, с характеристиками* $(\omega_1,\omega_2,\omega_{1,1})\in\Phi$.

Определение 12. *Через* $\widetilde{H}^{(\omega_1,\omega_2,\omega_{1,1})}(\rho)=\widetilde{H}^{\varpi}(Q;\rho)$ *обозначим множество всех функций* $\varphi(x_1,x_2)$, *удовлетворяющих условию* $\rho(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\in\widetilde{H}^{\varpi}(Q)$, *где* $\rho(x_1,x_2)$*– неотрицательная весовая функция.*

Через $\widetilde{H}_0^{\varpi}(Q;\rho)$ *будем обозначать множество всех тех функций из* $\widetilde{H}^{\varpi}(Q;\rho)$ *для которых* $\rho(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\big|_{x_i=a_i}=\rho(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\big|_{x_i=b_i}\equiv 0, i=1,2$.

В параграфе 1.3 дано непосредственное распространение операций дробного интегрирования на случай многих переменных, когда эти операции применяются независимо по каждой переменной или по некоторым из них. Рассмотрим смешанный дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $(\alpha_1,\,\alpha_2)$ для функций двух переменных

$$\left(I^{\alpha_1,\alpha_2}_{a_1+,a_2+}\varphi\right)(x_1,x_2)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2}\frac{\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2}{(x_1-t_1)^{1-\alpha_1}(x_2-t_2)^{1-\alpha_2}},\ \ x_i>a_i$$

где $\alpha_i>0,\,i=1,2$, а также смешанные интегралы типа вольтерровской свертки

$$\left(\widetilde{K}\varphi\right)(x_1,x_2)=\int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2}k(x_1-t_1)k(x_2-t_2)\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2,\ a_i<x_i,\ i=1,2.$$

Вторая глава диссертации, называется «**Смешанные интегральные операторы в пространствах Гельдера функции двух переменных**». В этой главе исследуется смешанный интеграл Римана-Лиувилля функций двух переменных в пространствах Гельдера разных порядков по каждой переменной, а также в обобщённых пространствах Гельдера, определяемых смешанным модулем непрерывности. Рассмотрены пространства Гельдера, определяемые как разностями первого порядка по каждой переменной, так и смешанной разностью второго порядка, причём основной интерес представляет оценка последнего для смешанного дробного интеграла в обоих случаях, когда плотность интеграла принадлежит Гельдеровским классам.

В диссертации мы имеем дело только с вырожденными весовыми функциями.

В параграфе 2.1 рассмотрим действия смешанного дробного интегрального оператора в пространствах Гельдера функций двух переменных, определяемых обычным и смешанным условиями Гельдера в случае веса и без веса.

Теорема 1. *Пусть* $0 \le \lambda_i \le 1,\ 0 < \alpha_i < 1,\ i = 1,2$. *Тогда смешанный дробный интегральный оператор* $I^{\alpha_1,\alpha_2}_{a_1+,a_2+}$ *ограниченно действует из пространства* $H_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *в* $H_0^{\lambda_1+\alpha_1,\lambda_2+\alpha_2}(Q)$, *если* $\lambda_i + \alpha_i < 1,\ i = 1,2$.

Теорема 2. *Смешанный дробный интегральный оператор* $I^{\alpha_1,\alpha_2}_{a_1+,a_2+}$ *ограниченно действует из пространства* $\widetilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *в* $\widetilde{H}_0^{\lambda_1+\alpha_1,\lambda_2+\alpha_2}(Q)$, *если* $0 \le \lambda_i \le 1,\ 0 < \alpha_i < 1,\ \lambda_i + \alpha_i < 1,\ i = 1,2$.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_i \in [0,1)$, $\alpha_i \in (0,1)$, $\lambda_i + \alpha_i < 1,\ i = 1,2$. *Тогда оператор* $I^{\alpha_1,\alpha_2}_{a_1+,a_2+}$ *ограниченно действует из* $\widetilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\rho)$ *в* $\widetilde{H}_0^{\lambda_1+\alpha_1,\lambda_2+\alpha_2}(\rho)$, *если* $\rho(x_1,x_2) = (x_1 - a_1)^{\mu_1}(x_2 - a_2)^{\mu_2}$, $\mu_i < \lambda_i + 1,\ i = 1,2$.

В параграфе 2.2 получены весовые и невесовые оценки типа Зигмунда для смешанных дробных интегралов функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x_1,x_2) \in C(Q)$ *и* $\varphi(x_1,x_2)|_{x_i=a_i} = 0$, $i = 1,2$. *Тогда для* $f(x_1,x_2) = \left(I^{\alpha_1,\alpha_2}_{a_1+,a_2+}\varphi\right)(x_1,x_2)$ *справедливы оценки типа Зигмунда:*

$$\overset{1,0}{\omega}(f;\, h_1, 0) \le C_1 h_1 \int_{h_1}^{b_1-a_1} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi;\ t_1,\, b_2 - a_2)}{t_1^{2-\alpha_1}}\, dt_1\ ,$$

$$\overset{0,1}{\omega}(f;\, 0,\, h_2) \le C_2 h_2 \int_{h_2}^{b_2-a_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi;\, b_1 - a_1,\, t_2)}{t_2^{2-\alpha_2}}\, dt_2\ ,$$

$$\overset{1,1}{\omega}(f;\, h_1, h_2) \le C_{12} h_1 h_2 \int_{h_1}^{b_1-a_1}\int_{h_2}^{b_2-a_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi;\ t_1,\ t_2)}{t_1^{2-\alpha_1} t_2^{2-\alpha_2}}\, dt_1 dt_2\ .$$

Теорема 5. *Пусть* $\rho(x_1,x_2) = (x_1 - a_1)^{\mu_1}(x_2 - a_2)^{\mu_2}$, $0 \le \mu_i < 2 - \alpha_i, i = 1,2$. *Если функция* $\varphi(x_1,x_2)$, *удовлетворяет условиям:*

1) $\varphi_0(x_1,x_2) = \rho(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2) \in C(Q)$, $\quad \varphi_0(x_1,x_2)|_{x_i=a_i} = 0, i = 1,2$

2) $\displaystyle\int_0^{b_1-a_1}\int_0^{b_2-a_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0; t_1, t_2)}{t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2}}\, dt_1 dt_2$ *сходится при* $\gamma_i = \max\{1,\mu_i\}$, $i = 1,2$, *то*

для $f(x_1,x_2) = \left(I^{\alpha_1,\alpha_2}_{a_1+,a_2+}\varphi\right)(x_1,x_2)$ *справедливы оценки типа Зигмунда:*

$$\overset{1,0}{\omega}(\rho f;\,h_1,0)\le C_1\left[h_1^{\alpha_1+\gamma_1-1}\int\limits_0^{h_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;t_1,b_2-a_2)}{t_1^{\gamma_1}}dt_1+h_1\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;t_1,b_2-a_2)}{t_1^{2-\alpha_1}}dt_1\right],$$

$$\overset{0,1}{\omega}(\rho f;\,0,h_2)\le C_2\left[h_2^{\alpha_2+\gamma_2-1}\int\limits_0^{h_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;b_1-a_1,t_2)}{t_2^{\gamma_2}}dt_2+h_2\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;\,b_1-a_1,\,t_2)}{t_2^{2-\alpha_2}}dt_2\right],$$

$$\overset{1,1}{\omega}(\rho f;\,h_1,h_2)\le C_{12}\left[h_1^{\alpha_1+\gamma_1-1}\,h_2^{\alpha_2+\gamma_2-1}\int\limits_0^{h_1}\int\limits_0^{h_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;\,t_1,\,t_2)}{t_1^{\gamma_1}t_2^{\gamma_2}}dt_1dt_2+\right.$$

$$+h_1h_2^{\alpha_2+\gamma_2-1}\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\int\limits_0^{h_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;t_1,t_2)}{t_1^{2-\alpha_1}t_2^{\gamma_2}}dt_1dt_2+h_1^{\alpha_1+\gamma_1-1}h_2\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;\;t_1,t_2)}{t_1^{\gamma_1}t_2^{2-\alpha_2}}dt_1dt_2+$$

$$\left.+h_1h_2\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}(\rho\varphi;\,t_1,\,t_2)}{t_1^{2-\alpha_1}t_2^{2-\alpha_2}}dt_1dt_2\right].$$

В параграфе 2.3 рассмотрим действие оператора смешанного дробного интегрирования Римана-Лиувилля в обобщённых пространствах Гельдера функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности.

Теорема 6. *Пусть*

1) $\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\frac{\omega(t_1,\,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}\omega(x_1,\,x_2),$

2) $\int\limits_{x_1}^{b_1-a_1}\int\limits_{x_2}^{b_2-a_2}\left(\frac{x_1}{t_1}\right)^{1-\alpha_1}\left(\frac{x_2}{t_2}\right)^{1-\alpha_2}\frac{\omega(t_1,\,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}\omega(x_1,\,x_2)$

и $0<\alpha_i<1,\ i=1,\,2$. *Тогда оператор* $I_{a_1+,a_2+}^{\alpha_1,\alpha_2}$ *ограниченно действует из пространства* $\tilde H_0^{\varpi}$ *в* $\tilde H_0^{\varpi_\alpha}$ *с характеристикой* $\varpi_\alpha(x_1,\,x_2)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\omega(x_1,\,x_2)$.

Теорема 7. *Пусть* $\rho(x_1,\,x_2)=(x_1-a_1)^{\mu_1}(x_2-a_2)^{\mu_2}$, $\mu_i<2-\alpha_i$, $0<\alpha_i<1$, $i=1,2$. *Если выполняются условия:*

1) $\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\left(\frac{x_1}{t_1}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{x_2}{t_2}\right)^{\gamma_2}\frac{\omega(t_1,\,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}\omega(x_1,\,x_2),$

2) $\int\limits_{x_1}^{b_1-a_1}\int\limits_{x_2}^{b_2-a_2}\left(\frac{x_1}{t_1}\right)^{1-\alpha_1}\left(\frac{x_2}{t_2}\right)^{1-\alpha_2}\frac{\omega(t_1,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le C_{12}\omega(x_1,\,x_2),$

где $\gamma_i=\max(\mu_i-1,0),\ i=1,\,2$. *Тогда оператор* $I_{a_1+,a_2+}^{\alpha_1,\alpha_2}$ *ограниченно действует из весового пространства* $\tilde H_0^{\varpi}(\rho)$ *в* $\tilde H_0^{\varpi_\alpha}(\rho)$ *с характеристикой* $\varpi_\alpha(x_1,\,x_2)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\omega(x_1,\,x_2)$.

Третья глава диссертации называется «**Смешанные интегральные операторы типа вольтерровской свёртки в обобщённых пространствах Гельдера функции двух переменных**». В этой главе рассматриваем произвольные ядра и весовые функции.

В параграфе 3.1 получены весовые и невесовые оценки типа Зигмунда для смешанных интегралов типа вольтерровской свертки функции двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности.

Теорема 8. *Пусть* $k(x_i)\in V_{\lambda_i}$, $0<\lambda_i<1$, $\varphi(x_1, x_2)\big|_{x_i=a_i}=0$, $i=1, 2$. *и* $\varphi(x_1,x_2)\in C(Q)$. *Тогда для* $(\tilde{K}\varphi)(x_1,x_2)$ *справедливы оценки типа Зигмунда*

$$\overset{1,0}{\omega}\left(\tilde{K}\varphi;\, h_1,0\right)\le C_1\left[\; h_1k(h_1)\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;h_1,b_2-a_2\right)+h_1\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, t_1,\, b_2-a_2\right)}{t_1}k(t_1)dt_1\right],$$

$$\overset{0,1}{\omega}\left(\tilde{K}\varphi;\, 0,\, h_2\right)\le C_2\left[\; h_2k(h_2)\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;b_1-a_1,h_2\right)+h_2\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, b_1-a_1,\, t_2\right)}{t_2}k(t_2)dt_2\right],$$

$$\overset{1,1}{\omega}\left(\tilde{K}\varphi;\, h_1,\, h_2\right)\le C_{12}\left[\; h_1k(h_1)h_2k(h_2)\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, h_1,\, h_2\right)+\right.$$

$$+h_1h_2k(h_2)\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, t_1,\, b_2-a_2\right)}{t_1}k(t_1)dt_1+h_1h_2k(h_1)\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, b_1-a_1,\, t_2\right)}{t_2}k(t_2)dt_2+$$

$$\left.+h_1h_2\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\int\limits_{h_2}^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi;\, t_1,\, t_2\right)}{t_1t_2}k(t_1)k(t_2)dt_1dt_2\right].$$

Теорема 9. *Пусть* $k(x_i)\in V_{\lambda_i}$, $0<\lambda_i<1$, $\rho(x_1,x_2)=\psi(x_1-a_1)\psi(x_2-a_2)$, *где* $\psi(x_i)\in W_{\mu_i}$, $0<\mu_i<1+\lambda_i$, $i=1, 2$. *Если выполняются условия:*

1) $\varphi_0(x_1, x_2)=\rho(x_1, x_2)\varphi(x_1,x_2)\in C(Q)$ *и* $\varphi_0(x_1, x_2)\big|_{x_i=a_i}=0,\ i=1,2;$

2) $\displaystyle\int\limits_0^{b_1-a_1}\int\limits_0^{b_2-a_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi_0;\, t_1,\, t_2\right)}{t_1^{\delta_1}t_2^{\delta_2}}dt_1dt_2<\infty$, *где* $\delta_i=\max(1,\, \mu_i),\ i=1,2.$

Тогда справедливы следующие оценки типа Зигмунда:

$$\overset{1,0}{\omega}\left(\rho\tilde{K}\varphi;h_1,0\right)\le C_1\left[h_1^{\delta_1}k(h_1)\int\limits_0^{h_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi_0;t_1,b_2-a_2\right)}{t_1^{\delta_1}}dt_1+h_1\int\limits_{h_1}^{b_1-a_1}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi_0;t_1,b_2-a_2\right)}{t_1}k(t_1)dt_1\right],$$

$$\overset{0,1}{\omega}\left(\rho\tilde{K}\varphi;0,h_2\right)\le C_2\left[h_2^{\delta_2}k(h_2)\int\limits_0^{h_2}\frac{\overset{1,1}{\omega}\left(\varphi_0;b_1-a_1,t_2\right)}{t_2^{\delta_2}}dt_2+\right.$$

$$+h_2 \int_{h_2}^{b_2-a_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0; b_1-a_1, h_2)}{t_2} k(t_2)\,dt_2 \Bigg],$$

$$\overset{1,1}{\omega}(\rho\widetilde{K}\varphi;\, h_1, h_2) \le C_{12}\Bigg[h_1^{\delta_1} h_2^{\delta_2} k(h_1)k(h_2) \int_0^{h_1}\int_0^{h_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0;\, t_1, t_2)}{t_1^{\delta_1} t_2^{\delta_2}} dt_1 dt_2 +$$

$$+h_1 h_2^{\delta_2} k(h_2) \int_{h_1}^{b_1-a_1}\int_0^{h_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0;\, t_1, t_2)}{t_1 t_2^{\delta_2}} k(t_1)\,dt_1 + h_2 h_1^{\delta_1} k(h_1) \int_0^{h_1}\int_0^{b_2-a_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0;\, t_1, t_2)}{t_2 t_1^{\delta_1}} k(t_2)\,dt_2 +$$

$$+h_1 h_2 \int_{h_1}^{b_1-a_1}\int_{h_2}^{b_2-a_2} \frac{\overset{1,1}{\omega}(\varphi_0;\, t_1, t_2)}{t_1 t_2} k(t_1)k(t_2)\,dt_1 dt_2 \Bigg].$$

В параграфе 3.2 изучается действие смешанного интегрального оператора типа вольтерровской свертки в обобщенных Гельдеровских пространствах функции двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности.

Теорема 10. *Пусть* $k(x_i) \in V_{\lambda_i}$, $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2$ *и*

1) $\displaystyle\int_0^{h_1}\int_0^{h_2} \frac{\omega(\varphi;\, t_1, t_2)}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 \le C_{12}\,\omega(\varphi;\, h_1, h_2)$,

2) $\displaystyle\int_{h_1}^{b_1-a_1}\int_{h_2}^{b_2-a_2} k(t_1)k(t_2) \frac{\omega(\varphi;\, t_1, t_2)}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 \le C_{12}\, k(h_1)k(h_2)\,\omega(\varphi;\, h_1, h_2)$.

Тогда оператор $\widetilde{K}$ *ограниченно действует из пространства* $\widetilde{H}_0^{\varpi}(Q)$ *в* $\widetilde{H}_0^{\varpi_k}(Q)$, *с характеристикой* $\varpi_k(h_1, h_2) = h_1 h_2 k(h_1)k(h_2)\omega(h_1, h_2)$.

Теорема 11. *Пусть* $\rho(x_1, x_2) = \psi(x_1 - a_1)\psi(x_2 - a_2)$, $\psi(x_i) \in W_{\mu_i}$, $k(t_i) \in V_{\lambda_i}$ $0 < \mu_i < 1 + \lambda_i$, $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2$. *Если*

1) $\displaystyle\int_0^{h_1}\int_0^{h_2} \left(\frac{h_1}{t_1}\right)^{\max(\mu_1 - 1,\, 0)} \left(\frac{h_2}{t_2}\right)^{\max(\mu_2 - 1,\, 0)} \frac{\omega(t_1, t_2)}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 \le C_{12}\,\omega(h_1, h_2)$,

2) $\displaystyle\int_{h_1}^{b_1-a_1}\int_{h_2}^{b_2-a_2} \frac{\omega(t_1, t_2)}{t_1 t_2} k(t_1)k(t_2)\,dt_1 dt_2 \le C_{12}\, k(h_1)k(h_2)\,\omega(h_1, h_2)$.

Тогда оператор $\widetilde{K}$ *ограниченно действует из пространства* $\widetilde{H}_0^{\varpi}(\rho)$ *в* $\widetilde{H}_0^{\varpi_k}(\rho)$, *с характеристикой* $\varpi_k(h_1, h_2) = h_1 h_2 k(h_1)k(h_2)\omega(h_1, h_2)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом, полученные в диссертации результаты позволяют говорить о достижении цели диссертационной работы. Все основные результаты являются новыми и в совокупности вносят определённый вклад в теорию интегральных операторов.

Работа посвящена изучению свойств операторов типа вольтерровской свёртки в пространствах Гельдера функции двух переменных, определяемых модулем непрерывности.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

1) доказаны теоремы об ограниченных действиях смешанного дробного интегрального оператора Римана-Лиувилля в пространствах Гельдера функций двух переменных, определяемых обычным и смешанным условиями Гельдера, в случае веса и без веса;

2) получены весовые и невесовые оценки типа Зигмунда для смешанного дробного интеграла Римана-Лиувилля функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности и с помощью оценок типа Зигмунда доказаны теоремы об ограниченных действиях смешанного дробного интегрального оператора Римана-Лиувилля в весовых и невесовых обобщённых пространствах Гельдера функций двух переменных;

3) получены оценки типа Зигмунда для смешанного интеграла типа вольтерровской свёртки функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности, в случае веса и без веса;

4) с помощью оценок типа Зигмунда доказаны теоремы об ограниченных действиях смешанного интегрального оператора типа вольтерровской свёртки в весовых и невесовых обобщённых пространствах Гельдера функций двух переменных, определяемых смешанным модулем непрерывности.

Полученные результаты применяются к задачам исследования интегральных операторов в теории функций многих переменных.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIK DEGREES PhD.03/30.06.2020.FM.70.04
KARSHI STATE UNIVERSITY

BUKHARA ENGINEERING AND TECHNOLOGY INSTITUTE

MAMATOV TULKIN YUSUPOVICH

SOME OPERATORS OF THE VOLTERRA CONVOLUTION TYPE IN SPACES OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES DEFINED BY THE MIXED MODULUS OF CONTINUITY

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION
OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Karshi – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission under number B2022.2.PhD/FM704.

Dissertation has been prepared at Bukhara engineering and technology institute.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (www.qarshidu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Yakhshiboev Makhmadiyar Umirovich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
Official opponents:	**Rasulov Tulkin Husenovich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
	Kuliev Komil Danaboevich Doctor of physical and mathematical sciences (DSc), Associate Professor
Leading organization:	**Navoi State Pedagogical Institute**

Defense will take place "______" ___________2023 at ____ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 at Karshi State University (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103. Ph.: (+998 75) 225-34-13; fax: (+998 75) 221-00-56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Karshi State University, Building№2, Room №202.

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Karshi State University (is registered №_____). (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103. Ph.: (+998 75) 225-34-13; fax: (+998 75) 221-00-56, e-mail: qarshidu@umail.uz).

Abstract of dissertation sent out on «____» ____________2023 year
(Mailing report №___________ on «_____» _______________2023 year).

B.A.Shoimkulov
Chairman of Scientific council
on award of scientific degrees,
Dr.Phys.-Math.Sci., professor

Sh.D.Nodirov
Scientific secretary of
Scientific council on award
of scientific degrees, PhD

A.A.Imomov
Chairman of scientific seminar under
Scientific council on award of scientific
degree, DSc., associate professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is the study of the properties of mixed fractional integral operators in the Hölder spaces of functions of several variables defined by the mixed modulus of continuity both in the non-weighted and weighted cases.

The object of the research work. Mixed fractional Riemann-Liouville integral operators and mixed integral operators of the volterra convolution type operators in generalized Hölder spaces of functions of two variables defined by a mixed modulus of continuity.

Scientific novelty of the research work is as follows:

prove theorems on the action of the Riemann-Liouville mixed fractional integral operator in the Hölder spaces of functions of two variables defined by the usual and mixed Hölder conditions, in the case of weight and without weight;

obtain weighted and non-weighted Zygmund-type estimates for the Riemann-Liouville mixed fractional integral of functions of two variables defined by the mixed modulus of continuity and using these estimates, prove theorems on the action of the Riemann-Liouville mixed fractional integral operator in weighted and non-weighted generalized Hölder spaces of functions of two variables;

obtain weighted and non-weighted estimates of the Zygmund type for a mixed integral of the volterra convolution type of functions of two variables defined by a mixed modulus of continuity;

prove theorems on the action of a mixed integral operator of the volterra convolution type in weighted and non-weighted generalized Hölder spaces of functions of two variables defined by a mixed modulus of continuity.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis were implemented in the following research areas:

theorems on the action of the Riemann-Liouville mixed fractional integral operator in weighted and unweighted Hölder spaces of functions of two variables defined by the usual and mixed Hölder conditions were used in the study of two-variable fractional integral operators in leading foreign journals (Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory, 2013, vol 41, 21-56; Intelligent Mathematics II: Applied Mathematics and Approximation Theory, 2016, vol 441, 1-13; Computational Analysis, 2016, vol. 155, 1-17; Intelligent Comparisons: Analytic Inequalities, 2016, vol. 609, 623-659; Abstract Fractional Monotone Approximation, Theory and Applications, 2022, vol 411, 121-144; Abstract Fractional Monotone Approximation, Theory and Applications, 2022, vol 411, 73-96; Acta Mathematica Universitatis Comeniae, 2022, vol. 91, no.3, 1-19). The application of scientific results made it possible to prove the properties of the considered operators;

results on the properties of a mixed integral operator of the Volterra convolution type in generalized Hölder spaces of a function of two variables defined by mixed moduli of continuity, both in non-weighted and weighted cases, were used in the fundamental project OT-F4-01 on the topic “Development of the theory and development of research methods nonlinear stress-strain state of multilayer composite viscoelastic curvilinear sections of pipes flowing viscous liquid under the action of temperature and dynamic loads (Reference of the Tashkent Institute of Chemical Technology dated December 26, 2022). As a result, an increase in the degree of accuracy of the expression of the viscosity property in the used core was achieved up to 10%;

Zygmund-type estimates of Riemann-Liouville mixed fractional integrals were used in the fundamental project F-4-40 on the topic “Development of the theory and development of methods for calculating the stress-strain state of curved pipes flowing with liquid under the action of external forces” (Reference of Bukhara Institute of Engineering and Technology dated December 13, 2022). As a result, the accuracy compared to the calculation of existing models is increased up to 10%.

The structure and volume of the thesis. The thesis consist of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 103 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (часть I; part I)

1. Mamatov T., Samko S. Mixed fractional integration operators in mixed weighted Hölder spaces // Fractional Calculus & Applied Analysis, 2010. – Volume 13(3). – P.245-259. (Scopus IF=3,457)

2. Маматов Т. Смешанный дробный интегральный оператор в обобщенном пространстве Гельдера // Узбекский математический журнал, 2011. – №4. – С. 104-114. (01.00.00, №6)

3. Mamatov T. Weighted Zygmund estimates for mixed fractional integration // Case Studies Journal, 2018. – Volume 7(5). – P. 82-88. (Impact Factor 3.582)

4. Mamatov T. Mixed fractional integration in mixed weighted generalized Hölder spaces // Case Studies Journal, 2018. – Volume 7(6). – P.1-8. (Impact Factor 3.582)

5. Маматов Т.Ю. Гельдер фазосида аралаш каср тартибли интеграл операторлар // НамДУ илмий ахборотномаси, 2020. – 2-сон. – Б. 32-39. (01.00.00, №14)

6. Маматов Т.Ю. Смешанные дробные интегральные операторы в весовых пространствах Гельдера // БухДУ илмий ахбороти, 2020. – 2 (78). – С. 72-82. (01.00.00, №3)

7. Mamatov T. Operators of Volterra convolution type in generalized Hölder spaces // Poincare Journal of Analysis & Applications, 2020. – Volume 7(2). – P. 275-288. (Scopus IF=0,5)

II bo‘lim (часть II; part II)

8. Яхшибоев М., Маматов Т.Ю. Действие операторов смешанного дробного интегрирования функций двух переменных в пространствах Гельдера. TATU Samarqand filiali professor-o‘qituvchilar va ilmiy xodimlarning 2-ilmiy-amaliy konferensiyasi. – Samarqand, 24-26 aprel, 2007. – B. 121-124.

9. Маматов Т. Об изоморфизме, осуществляемом смешанными дробными интегралами в классах Гельдера//Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Операторы алгебры и смежные проблемы». – Ташкент, 12-14 сентябрь 2012 г. – С. 177-180.

10. Mamatov T. Mixed fractional integro-differentiation operators in Hölder spaces // “The latest research in modern science: experience, traditions and innovations” Proceedings of the VII International Scientific Conference North Charleston, SC, USA, 20-21 June, 2018. – P. 6-9.

11. Маматов Т., Газиев А. Смешанные дробные интегральные операторы типа вольтерровской свертки в обобщенных пространствах Гельдера // Новые результаты математики и их приложения: Республиканская научная конференция. – Самарканд, 14-15 мая 2018 г. – С. 34-36.

12. Маматов Т., Газиев А. Смешанные дробные интегральные операторы типа Вольтерровской свертки в весовых обобщенных пространствах Гельдера // «Analytical methods of analysis and differential equation» Materials of the 9th International Workshop. – Minsk, Belarus, September 17-21 2018. – P. 56-57.
13. Маматов Т. Смешанные дробные интегральные операторы в пространствах Гельдера // “Mathematical Analysis and its Application to Mathematical Physics” international scientific conference. – Samarkand, September 17-20, 2018. – P. 23-24.
14. Mamatov T. Hölder fazolarida aralash kasr tartibli integral operator // International conference science and education. – Antalya, Turkey, may 2021. – P. 38-39.

Avtoreferat Qarshi davlat universitetining “QarDU xabarlari” ilmiy-nazariy, uslubiy jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazildi (08.04.2023 yil).

Guvohnoma № 14-061
08.04.2023. Bosishga ruxsat etildi.
Ofset bosma qog‘ozi. Qog‘oz bichimi 60x84 1/16.
“Times” garniturasi. Ofset bosma usuli.
Hisob-nashriyot t. 3.2. shartli b.t. 3,7.
Adadi 60 nusxa. Buyurtma № 44.

Qarshi davlat universiteti
Kichik bosmaxonasida chop etildi.