SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MIRZAYEV OLIM ERKINOVICH

SHTURM-LIUVILL VA DIRAK OPERATORLARI UCHUN IZOSPEKTRAL CHEGARAVIY MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Samarqand – 2023

UDK: 517.957

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Mirzayev Olim Erkinovich
Shturm-Liuvill va Dirak operatorlari uchun izospektral chegaraviy masalalar........ 3

Мирзаев Олим Эркинович
Изоспектральные краевые задачи для операторов Штурма-Лиувилля и Дирака.. 19

Mirzaev Olim Erkinovich
Isospectral boundary value problems for Sturm-Liouville and Dirac operators 35

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published works 39

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MIRZAYEV OLIM ERKINOVICH

SHTURM-LIUVILL VA DIRAK OPERATORLARI UCHUN IZOSPEKTRAL CHEGARAVIY MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Samarqand – 2023

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiya mavzusi O‘zbekiston respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2020.2.PhD/FM510 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Samarqand davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb-sahifasida (www.samdu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Xasanov Aknazar Bekdurdiyevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Taxirov Jozil Ostonovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Babajanov Bazar Atajanovich fizika-matematika fanlari doktori
Yetakchi tashkilot:	**Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Urganch filiali**

Dissertatsiya himoyasi Samarqand davlat universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil «16» may soat 10[00] dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+99866)231–06–32, faks: (+99866) 235–19–38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertatsiya bilan Samarqand davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (53 raqam bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+99866) 231–06–32, faks: (+99866) 235–19–38.)

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil «27» 05 kuni tarqatildi.
(2023 yil «27» 05 dagi 3 raqamli reestr bayonnomasi).

A.S. Soleev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, fizika-matematika fanlari doktori, professor

A.M. Xalxo‘jayev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, fizika-matematika fanlari doktori

A.X. Begmatov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi o‘rinbosari, fizika-matematika fanlari doktori, professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyligi. Jahonda olib borilayotgan koʻplab ilmiy va amaliy tadqiqotlarda Shturm-Liuvill va Dirak operatorlariga qoʻyilgan toʻgʻri va teskari spektral masalalarni tadqiq qilishga alohida ahamiyat berilmoqda. Hozirgi kunda rivojlangan mamlakatlarda Shturm-Liuvill va Dirak operatorlariga qoʻyilgan toʻgʻri va teskari spektral masalalar turli sohalarda, jumladan, elastiklik nazariyasi, kvant mexanikasi, geofizika, radiotexnika, qattiq jismlarning kristall tuzilmalarini modellashtirishda, fizika, elektronika, metereologiya, massa va issiqlik koʻchishi nazariyasi, kimyo texnologiyalari, yer ichki qatlamlari elektrik xossalarini oʻrganishda, tebranuvchi sistemalar (torlar) va diffuziya tenglamalarini tiklashda, zamonaviy matematik fizikaning evolyutsion tenglamalarini aniq yechimlarini topishda amaliy jihatdan muhim oʻrin tutmoqda. Bu borada bir xil spektrga ega har xil Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari, bir xil spektrga ega har xil Dirak operatorlari va bitta spektri har xil qolgan spektrlari bir xil Dirak operatorlari oilalarini tiklashga oid tadqiqotlarni rivojlantirishga alohida e'tibor qaratilmoqda.

Jahonda boʻylama tebranuvchi sistemalar (torlar), koʻndalang tebranuvchi sistemalar va diffuziya tenglamalarini teskari spektral analiz usuli orqali tadqiq qilish, ularga qoʻyilgan chegaraviy shartlardagi koeffitsiyentlarni aniqlashga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda. Ushbu yoʻnalishda umumiy, xususiy hamda Dirixle chegaraviy shartlari holidagi izospektral Shturm-Liuvill va Dirixle chegaraviy sharti holidagi izospektral Dirak operatorlarini tiklashga oid tadqiqotlar ustuvor hisoblanmoqda. Izospektral Shturm-Liuvill va izospektral Dirak operatorlarini amaliyotga tatbiqlari yetarlicha oʻrganilmagan. Xususan, izospektral Shturm-Liuvill va izospektral Dirak operatorlarini tiklash, ularni oʻzgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalarga qoʻyilgan aralash masalalar, shuningdek, oʻzgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik tipdagi tenglamalar sistemasiga qoʻyilgan aralash masalalarning yechimlarini topishga oid tadqiqotlarni rivojlantirish dolzarb vazifalardan hisoblanadi.

Respublikamizda matematik fizikaning evolyutsion tenglamalarini tiklash, ularni amaliyotda qoʻllash boʻyicha keng koʻlamli chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. "Algebra va uning tatbiqlari, differensial tenglamalar va uning tatbiqlari, chiziqsiz tizimlar, dinamik tizimlar va ularning tatbiqlarini matematik modellashtirish, stoxastik tahlil, tibbiy-biologik informatika, hisoblash matematikasi[1]" fanlarining ustuvor yoʻnalishlari boʻyicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyat yoʻnalishlari etib belgilangan. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, izospektral Shturm-Liuvill va izospektral Dirak operatorlari oilasini tiklash algoritmini qoʻllab, toʻlqin va issiqlik tarqalish tenglamalariga, giperbolik tipdagi tenglamalar sistemasiga qoʻyilgan aralash masalalarning aniq yechimlarini topish

[1]Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qoʻllab-quvvatlash, shuningdek, Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida"gi qarori.

muhim ilmiy ahamiyatga ega hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-sonli “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalari rivojlantirishning IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Hozirgi kunda teskari spektral masalalar oddiy differensial operatorlarning ayrimlari uchungina o‘rganilgan. Bu operatorlar orasida eng soddasi Shturm-Liuvill va Dirak operatorlaridir, bu operatorlar uchun qo‘yilgan teskari spektral masalalar V.A.Ambarsumyan, G.Borg, V.A.Marchenko, I.M.Gelfand, B.M.Levitan, A.N.Tixonov, Sh.A.Alimov, M.G.Kreyn, N.Levinson, M.G.Gasimov, T.T.Djabiyev, Z.L.Leybenzon, L.A.Saxnovich, I.G.Xachatryan, X.Xoxshtadt, B.Liberman, V.A.Yurko, A.M.Savchuk, A.A.Shkalikov, I.S.Frolov, T.V.Misyura, E.Korotyaev, S.Albeverio, R.Xruniv, Yu.V.Mikityuk, L.P.Nijnik, M.M.Malamud, N.P.Bondarenko, E.Abduqodirov, A.B.Xasanov, A.B.Yaxshimuratov va boshqa olimlar tomonidan tatqiq qilingan.

Teskari spektral masalalar nazariyasining rivojiga muhim turtki bo‘lgan ilk natija 1929-yilda V.A.Ambarsumyan tomonidan olingan. 1946-yilda G.Borg Shturm-Liuvill operatori faqat bitta chegaraviy sharti bilan farq qiluvchi ikkita Shturm-Liuvill chegaraviy masalasining spektrlari yordamida yagona tarzda aniqlanishini ko‘rsatib bergan. 1949-yilda A.N.Tixonov yarim o‘qda berilgan Shturm-Liuvill operatorini $I(\lambda)$ “impedans” funksiyasi yordamida yagona tarzda qurish haqidagi teoremani isbotladi. A.N.Tixonovning bu teoremasi muhim tatbiqiy ahamiyatga ega ekanligiga birinchi bo‘lib, o‘zbek matematigi Sh.A.Alimov e’tibor bergan va 1976-yilda “О роботах А.Н.Тихонова по обратным задачам для уравнения Штурма-Лиувилля” maqolasini e’lon qilgan. 1950-yilda V.A.Marchenko almashtirish operatorlaridan foydalanib, Shturm-Liuvill operatori o‘zining spektral funksiyasi orqali yagona ravishda aniqlanishini ko‘rsatib bergan. V.A.Marchenko yagonalik teoremasi e’lon qilinganidan keyin spektral berilganlar bo‘yicha Shturm-Liuvill operatorini tiklash masalasi dolzarb bo‘lib qolgan. Bu masala 1951-yilda I.M.Gelfand va B.M.Levitan tomonidan yechilgan. So‘ngra teskari masalani yechishning Gelfand-Levitan usuli B.M.Levitan, M.G.Gasimov va N.Levinsonlar tomonidan takomillashtirilgan.

Bir xil spektrga ega har xil Shturm-Liuvill chegaraviy masalalariga izospektral chegaraviy masalalar deyiladi. E.L.Isaacson, H.P.McKean, B.E.Dahlberg va E.Trubowitzlarning ishlari izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalarining geometriyasiga bag'ishlangan.

Izospektral masalalar oilasini spektral berilganlar yordamida aniqlash M.Jodeit, B.M.Levitan, Yu.A.Ashrafyan, T.N.Arutyunyan, E.S.Panaxov, N.J.Gulievlar va A.B.Hasanovlar tomonidan ko'rsatilgan.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy o'quv yurtining ilmiy-tadqiqot ishlari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Samarqand davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq №SMat-01 raqamli “Differensial operatorlar spektral nazariyasining nochiziqli evolyutsion tenglamalarga tadbiqlari va zamonaviy matematik fizikaning nokorrekt masalalari” nomli ilmiy-tadqiqot ishlari rejasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi spektral xarakteristkalar yordamida izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari va izospektral Dirak operatorlari oilasini tiklashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

teskari spektral masala usulidan foydalanib, umumiy chegaraviy shart holidagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari oilasining ko'rinishini aniqlash;

teskari spektral masala usulidan foydalanib, xususiy chegaraviy shart holidagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari oilasining ko'rinishini aniqlash;

teskari spektral masala usulidan foydalanib, Dirixle chegaraviy sharti holidagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari oilasining ko'rinishini aniqlash;

teskari spektral masala usulidan foydalanib, Dirixle chegaraviy sharti holidagi izospektral Dirak operatorlari oilasining ko'rinishini aniqlash.

Tadqiqot ob'ekti izospektral Shturm-Liuvill operatorlari hamda izospektral va qisman-izospektral Dirak operatorlaridan iborat.

Tadqiqot predmeti spektral berilganlar yordamida Gelfand-Levitan usulidan foydalanib, Shturm-Liuvill va Dirak izospektral chegaraviy masalalarini aniqlashdan iborat.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiya ishida matematik fizika, differensial operatorlarning spektral nazariyasi, funksional analiz, chiziqli algebra, oddiy differensial tenglamalar va integral tenglamalarni yechish usullaridan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

teskari spektral masala usulidan foydalanib, umumiy chegaraviy shart holidagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalar oilasi tuzilgan va bu chegaraviy masalalarga bog'liq holda o'zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik hamda parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarga qo'yilgan aralash masalalarning yechimlari olingan;

teskari spektral masala usulidan foydalanib, xususiy chegaraviy shart holidagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalar oilasi tuzilgan va bu chegaraviy masalalarga bog'liq holda o'zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik hamda parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarga qo'yilgan aralash masalalarning yechimlari topilgan;

teskari spektral masala usulidan foydalanib, Dirixle chegaraviy sharti holidagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari oilasi tuzilgan va bu chegaraviy masalalarga bog’liq holda o‘zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik hamda parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarga qo‘yilgan aralash masalalarning yechimlari olingan;

teskari spektral masala usulidan foydalanib, Dirixle chegaraviy sharti holidagi izospektral Dirak operatorlar oilasi tuzilgan va bu chegaraviy masalalarga bog’liq holda o‘zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasiga qo‘yilgan aralash masalalarning yechimlari topilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

Izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalar oilasini tiklash algoritmidan foydalanib, yer osti qatlamlarida suspenziyalar sizishi jarayonida cho‘kma hosil bo‘lishining ko‘pbosqichli xodisalarini xarakterlovchi parametrlarning qiymati teskari masalani yechish orqali aniqlangan;

Spektral berilganlar orqali tiklangan izospektral Dirak operatorlari oilasini tiklash algoritmidan va ularni ayrim o‘zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik tipli tenglamalar sistemasiga qo‘yilgan aralash masalalarning yechimini topish jarayoniga qo‘llanilish usulidan foydalanib, yer osti suvlarining harakat tenglamalari va ularning yechimlari topilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi oddiy differensial tenglamalar, integral tenglamalar, teskari spektral masalalar nazariyasi, matematik analiz va funksional analiz usullaridan foydalanilganligi hamda matematik mulohazalar va isbotlarning qat’iyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati – ishda olingan ilmiy natijalardan o‘zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik va parabolik tipli tenglamalarga qo‘yilgan aralash masalalarning aniq yechimlarini topishda foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati – izospektral chegaraviy masalalar tebranuvchi sistemalar (torlar) va diffuziya tenglamalar oilalarini tiklashda ishlatiladi. Bunday tenglamalar kimyo texnologiyalari, massa va issiqlik ko‘chishi nazariyasi jarayonlarida qo‘llaniladi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Shturm-Liuvill va Dirak operatorlari uchun izospektral chegaraviy masalalar bo‘yicha olingan ilmiy natijalar asosida:

Izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalar oilasini tiklash algoritmidan OT-F4-64 raqamli (2017–2020 yy.) “Birjinslimas g‘ovak muhitlarda suyuqlik sizishi va moddalar ko‘chishi gidrodinamik modellarini tuzish va sonli tadqiq etish” mavzusidagi fundamental loyihada g‘ovak muhitlarda cho‘kma hosil qilib suspenziyalar sizishining takomillashtirilgan kinetika tenglamalari koeffitsiyentlarini aniqlashning teskari spektral masalalarni yechishda foydalanilgan (Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universitetining 2022-yil 1-noyabrdagi ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanishi yer osti qatlamlarida suspenziyalar sizishi jarayonida cho‘kma hosil bo‘lishining ko‘pbosqichli xodisalarini xarakterlovchi parametrlarning qiymatini teskari masalani yechish orqali aniqlash imkonini bergan;

Spektral berilganlar orqali tiklangan izospektral Dirak operatorlari oilasini tiklash algoritmidan va ularni ayrim o‘zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik tipli tenglamalar sistemasiga qo‘yilgan aralash masalalarning yechimini topish jarayoniga qo‘llanilgan usuldan OT-F4-30 raqamli (2017–2020 yy.) “Ikki marta nochiziqli kross sistemaning konvektiv ko‘chish, o‘zgaruvchan zichlik, manba yoki yutish ta’siridagi sifat xossalarini tadqiq qilish” mavzusidagi fundamental loyihada ikki karra nochiziqli parabolik tenglama bilan ifodalanuvchi filtratsiya jarayonlarini sifat xossalarini tadqiq qilishda foydalanilgan (Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetining 2022-yil 15-dekabrdagi 04/11-8173-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanishi yer osti suvlarining harakat tenglamalarini topish va ularning yechimlarini tadqiq etish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Ushbu tadqiqot natijalari 7 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 2 ta xalqaro va 5 ta respublika anjumanlarida muhokamadan o‘tgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha 13 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalarini himoya qilishda tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan, 1 tasi xorijiy va 5 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiya hajmi 111 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **“Shturm-Liuvill va Dirak operatorlari uchun teskari spektral masalalar”** deb nomlanuvchi birinchi bobida asosiy natijalarni bayon qilish uchun zarur bo‘lgan belgilashlar, ta’riflar, tushunchalar va asosiy teoremalar keltirilgan.

Ushbu

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y,\ (0 < x < \pi), \tag{1}$$

Shturm-Liuvill tenglamasini quyidagi chegaraviy shartlar bilan qaraymiz:

$$U_1(y) = y'(0) - hy(0) = 0,\ U_2(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

$$y(0) = 0,\ U_2(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{3}$$

$$U_1(y) = y'(0) - hy(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0, \tag{4}$$

$$y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0. \tag{5}$$

Bunda $q(x) \in C[0,\pi]$ – haqiqiy uzluksiz funksiya, λ – kompleks parametr, h va H chekli haqiqiy sonlar. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

1) (1), (2) chegaraviy masalani $L(q(x), h, H)$;

2) (1), (3) chegaraviy masalani $L(q(x), \infty, H)$;

3) (1), (4) chegaraviy masalani $L(q(x), h, \infty)$;

4) (1), (5) chegaraviy masalani $L(q(x), \infty, \infty)$ kabi belgilaymiz.

(1) tenglamaning ushbu

$$\varphi(0,\lambda) = 1,\ \varphi'(0,\lambda) = h \tag{6}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini $\varphi(x,\lambda)$ orqali, xuddi shuningdek, (1) tenglamaning quyidagi

$$\psi(0,\lambda) = 0,\ \psi'(0,\lambda) = 1 \tag{7}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini $\psi(x,\lambda)$ orqali belgilaymiz.

Ma’lumki, (1) va (6) hamda (1) va (7) Koshi masalalarining mos ravishda $\varphi(x,\lambda)$ va $\psi(x,\lambda)$ yechimi mavjud, yagona va har bir fiksirlangan $x \in [0,\pi]$ da λ bo‘yicha butun funksiya bo‘ladi. Shuningdek, ushbu integral tasvirlar o‘rinli:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt, \tag{8}$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x G(x,t)\sin\sqrt{\lambda}t\,dt, \tag{9}$$

$$K(x,x)=h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\,,\ G(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\,.$$

Ko‘rinib turibdiki, $\varphi(x,\lambda)$ va $\psi(x,\lambda)$ funksiyalar barcha λ larda mos ravishda $U_1(y)=0$ va $y(0)=0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Shuning uchun $L(q(x),h,H)$, $L(q(x),\infty,H)$, $L(q(x),h,\infty)$, $L(q(x),\infty,\infty)$ chegaraviy masalalarning λ_n, μ_n, $\tilde{\lambda}_n$, $\tilde{\mu}_n$ xos qiymatlari mos ravishda ushbu

$$\Delta(\lambda)\equiv\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)=0,\ \tilde{\Delta}(\lambda)\equiv\psi'(\pi,\lambda)+H\psi(\pi,\lambda)=0\,,$$

$$\delta(\lambda)\equiv\varphi(\pi,\lambda)=0\,,\ \tilde{\delta}(\lambda)\equiv\psi(\pi,\lambda)=0$$

tenglamalarning ildizlaridan iborat bo‘ladi. Ushbu $\varphi(x,\lambda_n)$, $\psi(x,\mu_n)$, $\varphi(x,\tilde{\lambda}_n)$, $\psi(x,\tilde{\mu}_n)$, funksiyalar esa ularga mos keluvchi xos funksiyalardir.

Quyidagi

$$\alpha_n=\int_0^\pi\varphi^2(x,\lambda_n)dx,\delta_n=\int_0^\pi\psi^2(x,\mu_n)dx,\tilde{\alpha}_n=\int_0^\pi\varphi^2(x,\tilde{\lambda}_n)dx,\tilde{\delta}_n=\int_0^\pi\psi^2(x,\tilde{\mu}_n)dx,$$

sonlarga mos ravishda $L(q(x),h,H)$, $L(q(x),\infty,H)$, $L(q(x),h,\infty)$, $L(q(x),\infty,\infty)$ chegaraviy masalalarning normallovchi o‘zgarmaslari deb ataladi.

1-ta’rif. Ushbu $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\mu_n,\delta_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\tilde{\lambda}_n,\tilde{\alpha}_n\}_{n=0}^\infty$ hamda $\{\tilde{\mu}_n,\tilde{\delta}_n\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketliklar juftliklariga mos ravishda $L(q(x),h,H)$, $L(q(x),\infty,H)$, $L(q(x),h,\infty)$, $L(q(x),\infty,\infty)$ chegaraviy masalalarning spektral berilganlari deyiladi.

2-ta’rif. $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ spektral berilganlar yordamida $L(q(x),h,H)$ chegaraviy masalaning $q(x)$ potensiali va h,H koeffitsiyentlarini topish masalasiga teskari spektral masala deyiladi.

1-teorema. $\{\lambda_n,\alpha_n;\alpha_n>0\}_{n=0}^\infty$, $\{\mu_n,\delta_n;\delta_n>0\}_{n=0}^\infty$, $\{\tilde{\lambda}_n,\tilde{\alpha}_n;\tilde{\alpha}_n>0\}_{n=0}^\infty$ *va* $\{\tilde{\mu}_n,\tilde{\delta}_n;\tilde{\delta}_n>0\}_{n=1}^\infty$ *haqiqiy sonlar ketma-ketliklari mos ravishda* $L(q(x),h,H)$, $L(q(x),\infty,H)$, $L(q(x),h,\infty)$ *va* $L(q(x),\infty,\infty)$ *Shturm-Liuvill chegaraviy masalalarining spektral berilganlari bo‘lishi uchun quyidagi*

1) $\sqrt{\lambda_n}=n+\dfrac{c}{n\pi}+\dfrac{\varepsilon_n}{n},\ \{\varepsilon_n\}\in l_2,\ \lambda_n\neq\lambda_m,\ n\neq m,$

$$\alpha_n=\frac{\pi}{2}+\frac{\beta_n}{n},\ \alpha_n>0,\ \{\beta_n\}\in l_2,\ c=h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\,; \tag{10}$$

2) $\sqrt{\mu_n}=n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{d}{(n+1/2)\pi}+\dfrac{\omega_n}{n},\ \{\omega_n\}\in l_2,\ \mu_n\neq\mu_m, n\neq m,$

$$\delta_n=\frac{\pi}{2(n+1/2)^2}+\frac{\sigma_n}{n^3},\ \delta_n>0,\ \{\sigma_n\}\in l_2,\ d=H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\,; \tag{11}$$

3) $\sqrt{\tilde{\lambda}_n}=n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\tilde{c}}{(n+1/2)\pi}+\dfrac{\tilde{\varepsilon}_n}{n},\ \{\tilde{\varepsilon}_n\}\in l_2,\ \tilde{\lambda}_n\neq\tilde{\lambda}_m, n\neq m,$

$$\tilde{\alpha}_n=\frac{\pi}{2}+\frac{\tilde{\beta}_n}{n},\tilde{\alpha}_n>0,\ \{\tilde{\beta}_n\}\in l_2,\ \tilde{c}=h+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\,; \tag{12}$$

4) $\sqrt{\tilde{\mu}_n} = n + \dfrac{\tilde{d}}{n\pi} + \dfrac{\tilde{\omega}_n}{n}$, $\{\tilde{\omega}_n\} \in l_2$, $\tilde{\mu}_n \neq \tilde{\mu}_m$, $n \neq m$,

$$\tilde{\delta}_n = \frac{\pi}{2n^2} + \frac{\tilde{\sigma}_n}{n^3},\ \tilde{\delta}_n > 0,\ \{\tilde{\sigma}_n\} \in l_2,\ \tilde{d} = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt \tag{13}$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Ma'lumki, (8) va (9) integral tasvirlardagi $K(x,t)$ hamda $G(x,t)$ funksiyalar mos ravishda quyidagi

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = 0,\ (0 < t < x), \tag{14}$$

$$G(x,t) + \tilde{F}(x,t) + \int_0^x G(x,s)\tilde{F}(s,t)ds = 0,\ (0 < t < x), \tag{15}$$

Gelfand-Levitan integral tenglamalarini qanoatlantiradi. Bunda

1) $L(q(x),h,H)$ chegaraviy masala holida

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x\cos\sqrt{\lambda_n}t - \frac{1}{\alpha_n^0}\cos nx\cos nt\right\},\ \alpha_0^0 = \pi, \alpha_n^0 = \frac{\pi}{2}, n \geq 1; \tag{16}$$

2) $L(q(x),\infty,H)$ chegaraviy masala holida

$$\tilde{F}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\delta_n}\frac{\sin\sqrt{\mu_n}x\sin\sqrt{\mu_n}t}{\mu_n} - \frac{2}{\pi}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}; \tag{17}$$

3) $L(q(x),h,\infty)$ chegaraviy masala holida

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\tilde{\alpha}_n}\cos\sqrt{\tilde{\lambda}_n}x\cos\sqrt{\tilde{\lambda}_n}t - \frac{2}{\pi}\cos(n+1/2)x\cos(n+1/2)t\right\}; \tag{18}$$

4) $L(q(x),\infty,\infty)$ chegaraviy masala holida

$$\tilde{F}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\tilde{\delta}_n}\frac{\sin\sqrt{\tilde{\mu}_n}x\sin\sqrt{\tilde{\mu}_n}t}{\tilde{\mu}_n} - \frac{2}{\pi}\sin nx\sin nt\right\}. \tag{19}$$

Aytaylik, (10) shartlarni qanoatlantiruvchi $\{\lambda_n, \alpha_n; \alpha_n > 0\}_{n=0}^{\infty}$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklari berilgan bo'lsin. U holda (16) formuladan foydalanib, $F(x,t)$ funksiyani tuzib olamiz. Uni (14) Gelfand-Levitan integral tenglamasiga qo'yib, $K(x,t)$ noma'lumni topib olamiz. Ushbu

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x,x),\ h = K(0,0),\ H = c - h - \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt$$

tengliklar yordamida $L(q(x),h,H)$ Shturm-Liuvill chegaraviy masalasining barcha koeffitsiyentlarini topib olamiz.

Birinchi bobning beshinchi paragrafida Dirak differensial tenglamalar sistemasiga $[0,\pi]$ oraliqda qo'yilgan chegaraviy masalalar uchun to'g'ri va teskari spektral masalalar haqidagi zaruriy ma'lumotlar bayon qilingan.

Ushbu chegaraviy masalani qaraymiz:

$$D\big(p(x),q(x),\infty,\infty\big)y \equiv By' + Q(x)y = \lambda y,\ y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$y_1(0)=0,\ y_1(\pi)=0. \tag{21}$$

Bu yerda

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

$p(x),\, q(x) \in C^1[0,\pi]$ – haqiqiy uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar, λ – kompleks parametr. (20) tenglamaning

$$\varphi_1(0,\lambda)=0,\ \varphi_2(0,\lambda)=-1 \tag{22}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini $\varphi(x,\lambda) = (\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda))^T$ orqali belgilaymiz. Ma’lumki, (20), (22) masalaning $\varphi(x,\lambda)$ yechimi mavjud, yagona va har bir fiksirlangan $x \in [0,\pi]$da λ bo‘yicha butun vektor-funksiya bo‘ladi. Shuningdek, ushbu integral tasvir o‘rinli:

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ -\cos\lambda x \end{pmatrix} + \int_0^x K(x,t) \begin{pmatrix} \sin\lambda t \\ -\cos\lambda t \end{pmatrix} dt. \tag{23}$$

Bu yerda $K(x,t) = \left\| K_{ij}(x,t) \right\|_{i,j=1,2}$ matritsa-funksiya ushbu

$$BK'_x(x,t) + K'_t(x,t)B = -Q(x)K(x,t),$$

xususiy hosilali differensial tenglamaning

$$BK(x,x) - K(x,x)B = -Q(x),\quad K_{11}(x,0) = K_{21}(x,0) = 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi. Ko‘rinib turibdiki, $\varphi(x,\lambda) = (\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda))^T$ vektor-funksiya barcha λ larda (21) chegaraviy shartlarning birinchisini qanoatlantiradi. (20), (21) masalaning $\lambda_n,\ n \in Z$ xos qiymatlari

$$\Delta(\lambda) \equiv \varphi_1(\pi,\lambda) = 0$$

tenglamaning ildizlaridan iborat bo‘ladi. $\varphi(x,\lambda_n) = (\varphi_1(x,\lambda_n), \varphi_2(x,\lambda_n))^T,\ n \in Z$ vektor-funksiyalar esa ularga mos keluvchi xos vektor-funksiyalardir. Ushbu

$$\alpha_n = \int_0^\pi [\varphi_1^2(x,\lambda_n) + \varphi_2^2(x,\lambda_n)]dx,\ n \in Z$$

sonlarga (20), (21) chegaraviy masalaning normallovchi o‘zgarmaslari deb ataladi. $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ketma-ketliklar juftligiga (20), (21) chegaraviy masalaning spektral berilganlari deyiladi.

2-teorema. (M.G.Gasimov, T.T.Djabiyev[2]) $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \alpha_n > 0, n \in Z$ *haqiqiy sonlar ketma-ketliklari* $D(p(x), q(x), \infty, \infty)$ *ko‘rinishdagi biror chegaraviy masalaning spektral berilganlari bo‘lishi uchun*

[2] Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам. Труды летней школы по спектральной теории операторов и представлению теории групп – Баку: Элм, 1975, с. 46–71.

$$\lambda_n = n + \frac{\beta_{1,n}}{n}, \quad \alpha_n = \pi + \frac{c_{1,n}}{n} \qquad (24)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli. Bu yerda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\beta_{1,n}\right|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_{1,n}\right|^2 < \infty.$$

Ma'lumki, (23) integral tasvirdagi $K(x,t) = \left\|K_{ij}(x,t)\right\|_{i,j=1,2}$ matritsa-funksiya quyidagi integral tenglamani

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = 0, \ (0 < t \le x < \pi) \qquad (25)$$

qanoatlantiradi. Bu yerda

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \begin{pmatrix} \sin\lambda_n x \\ -\cos\lambda_n x \end{pmatrix} \left(\sin\lambda_n t, -\cos\lambda_n t\right) - \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} \left(\sin nt, -\cos nt\right) \right\}. \qquad (26)$$

Aytaylik, (24) shartlarni qanoatlantiruvchi $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \alpha_n > 0$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklari berilgan bo'lsin. U holda avvalo (26) formuladan foydalanib, $F(x,t)$ matritsa-funksiyani tuzib olamiz. So'ngra uni (25) integral tenglamaga qo'yib, undan $K(x,t)$ noma'lum matritsa-funksiyani topib olamiz. Ushbu

$$Q(x) = K(x,x)B - BK(x,x)$$

tenglik yordamida $D(p(x), q(x), \infty, \infty)$ Dirak chegaraviy masalasining barcha koeffitsiyentlarini topib olamiz.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi "**Izospektral Shturm-Liuvill operatorlari**" deb nomlanib, chekli oraliqdagi bir xil spektrga ega Shturm-Liuvill chegaraviy masalalarini tiklashga va ularning tatbiqlariga bag'ishlangan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafini asosiy natijasi quyidagi teoremada keltirilgan.

3-teorema. *Aytaylik* $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ *haqiqiy sonlardan tuzilgan ketma-ketliklar juftligi quyidagi shartlarni qanoatlantirsin*

$$\sqrt{\lambda_n} = n, \ n \ge 0, \ \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_n^0} + \frac{\gamma_n}{(n+1)^2}, \ \gamma_n > 0, \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty, \alpha_0^0 = \pi, \alpha_n^0 = \frac{\pi}{2}, n \ge 1. \qquad (27)$$

U holda bu juftlik $L(q(x,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...), h(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...), H(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...))$ *ko'rinishdagi biror Shturm-Liuvill chegaraviy masalasining spektral berilganlari bo'ladi.*

Ushbu

$$L(q(x,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...), h(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...), H(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)) = L(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$$

chegaraviy masalaning $q(x,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$, $h(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$, $H(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$ koeffitsiyentlarini topish uchun teskari spektral masalani yechishning Gelfand-Levitan usulidan foydalanamiz. U holda $q(x,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$ funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$q(x,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...) = -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(n+1)^2} \left\{\varphi(x,\lambda_n)\cos nx\right\}'.$$

Bu yerda $\varphi(x,\lambda_n), n\geq 0$ funksiyalar quyidagi

$$\varphi(x,\lambda_n)=\cos nx-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{(k+1)^2}\varphi(x,\lambda_k)\left\{\int_0^x \cos kt\cos nt\,dt\right\}, n\geq 0$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. $h(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$ va $H(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$ koeffitsiyentlar esa quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$h(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{(n+1)^2},\quad H(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{(k+1)^2+\gamma_k\alpha_k^0}.$$

Shunday qilib, $L(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$ ko‘rinishdagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari oilasining barcha koeffitsiyentlarini topishga muvaffaq bo‘ldik. Xususan, agar $\gamma_0>0, \gamma_n=0, n\geq 1$ bo‘lsa, u holda quyidagi izospektral chegaraviy masalaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{gathered} L(\gamma_0)y\equiv -y''+\frac{2\gamma_0^2}{(1+\gamma_0 x)^2}y=\lambda y, 0<x<\pi, \\ y'(0)+\gamma_0 y(0)=0,\ y'(\pi)+\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0\pi}y(\pi)=0. \end{gathered} \tag{28}$$

$L(\gamma_0)$ chegaraviy masalaning barcha xos qiymatlari $\lambda_n=n^2, n\geq 0$ berilgan sonlardan iborat bo‘lib, unga mos keluvchi xos funksiyalari ushbu

$$y_0(x)=\frac{1}{1+\gamma_0 x},\ y_n(x)=\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}, n\geq 1$$

formulalar orqali topiladi.

Endi (28) izospektral chegaraviy masalalardan foydalanib, berilgan chastotaga ega bo‘lgan tebranuvchi sistemalar (torlar)

$$\Box(\gamma_0)u\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\gamma_0^2}{(1+\gamma_0 x)^2}\right)u=0, \gamma_0>0 \tag{29}$$

va diffuziya tenglamalar oilasini tuzamiz:

$$\Im(\gamma_0)u\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\gamma_0^2}{(1+\gamma_0 x)^2}\right)u=0, \gamma_0>0. \tag{30}$$

(30) ko‘rinishdagi o‘zgaruvchan koeffitsiyentli parabolik tipga mansub tenglama massa va issiqlik ko‘chishi nazariyasida hamda kimyo texnologiyalarida uchraydi.

3-teoremadan foydalanib, quyidagi natijalar olingan.

1-natija. O‘zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik tipdagi (29) tenglamaga qo‘yilgan

$$u(x,0)=f_1(x), u_t(x,0)=f_2(x),\ f_1(x)\in C^3[0,\pi], f_2(x)\in C^2[0,\pi],$$

$$u'_x(0,t)+\gamma_0 u(0,t)=0,\ u'_x(\pi,t)+\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0\pi}u(\pi,t)=0$$

aralash masalaning yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$u(x,t)=\frac{p_0}{1+\gamma_0 x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(p_n\cos nt+q_n\sin nt\right)\left(\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}\right).$$

Bu yerda $p_0=\left(\frac{1}{\pi}+\gamma_0\right)\int_0^{\pi}\frac{f_1(x)}{1+\gamma_0 x}dx$, $p_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_1(x)\left(\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}\right)dx,\ n\geq 1$,

$$q_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}f_2(x)\left(\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}\right)dx,\ n\geq 1.$$

2-natija. O‘zgaruvchan koeffitsiyentli parabolik tipdagi (30) tenglamaga qo‘yilgan

$$u(x,0)=f(x),\ f(x)\in C^1[0,\pi],$$

$$u'_x(0,t)+\gamma_0 u(0,t)=0,\ u'_x(\pi,t)+\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0\pi}u(\pi,t)=0$$

aralash masalaning yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$u(x,t)=\frac{B_0}{1+\gamma_0 x}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-n^2 t}\left(\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}\right).$$

Bu yerda $B_0=\left(\frac{1}{\pi}+\gamma_0\right)\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{1+\gamma_0 x}dx$, $B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\left(\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}\right)dx,\ n\geq 1.$

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafini asosiy natijasi quyidagi teoremada keltirilgan.

4-teorema. *Aytaylik,* $\{\mu_n,\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ *haqiqiy sonlardan tuzilgan ketma-ketliklar juftligi quyidagi shartlarni qanoatlantirsin*

$$\sqrt{\mu_n}=n+\frac{1}{2},n\geq 0,\frac{1}{\delta_n}=\frac{1}{\delta_n^0}+\frac{\tau_n}{n+1/2},\tau_n>0,\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n^2<\infty,\delta_n^0=\frac{\pi}{2(n+1/2)^2},\ n\geq 0\ .(31)$$

U holda bu juftlik $L(q(x,\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...),\infty,H(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...))$ *ko‘rinishdagi biror Shturm-Liuvill chegaraviy masalasining spektral berilganlari bo‘ladi.*

Ushbu $L(q(x,\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...),\infty,H(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...))=L(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$ chegaraviy masalaning $q(x,\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$, $H(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$ koeffitsiyentlarini topish uchun teskari spektral masalani yechishning Gelfand-Levitan usulidan foydalanamiz. U holda $q(x,\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$ funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$q(x,\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n}{(n+1/2)^3}\left(\psi(x,\mu_n)\sin(n+1/2)x\right)'.$$

Bu yerda $\psi(x,\mu_n),n\geq 0$ funksiyalar quyidagi

$$\psi(x,\mu_n)=\sin(n+\frac{1}{2})x-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_k}{(k+1/2)^3}\psi(x,\mu_k)\int_0^x\sin(n+\frac{1}{2})s\sin(k+\frac{1}{2})sds,\ n\geq 0$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. $H(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$ koeffitsiyent quyidagi formula orqali topiladi:

$$H(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\tau_k}{2(k+1/2)^3+\tau_k\pi}.$$

Shunday qilib, $L(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$ ko‘rinishdagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari oilasining barcha koeffitsiyentlarini topishga muvaffaq bo‘ldik. Xususan, agar $\tau_0>0,\ \tau_n=0,\ n\geq 1$ bo‘lsa, u holda quyidagi izospektral chegaraviy masalaga ega bo‘lamiz:

$$L(\tau_0)y\equiv -y''+\frac{128\tau_0^2\sin^4\dfrac{x}{2}-8\tau_0\sin x(2+\tau_0(x-\sin x))}{(1+4\tau_0(x-\sin x))^2}y=\lambda y, 0<x<\pi,$$

$$y(0)=0,\ y'(\pi)+\frac{8\tau_0}{1+4\pi\tau_0}y(\pi)=0.$$

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafini asosiy natijasi quyidagi teoremada keltirilgan.

5-teorema. *Aytaylik, $\{\tilde{\lambda}_n,\tilde{\alpha}_n\}_{n=0}^{\infty}$ haqiqiy sonlardan tuzilgan ketma-ketliklar juftligi quyidagi shartlarni qanoatlantirsin*

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_n}=n+\frac{1}{2},\ n\geq 0;\ \frac{1}{\tilde{\alpha}_n}=\frac{1}{\tilde{\alpha}_n^0}+\frac{\tilde{\gamma}_n}{(n+1/2)^2},\ \tilde{\gamma}_n>0, \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\gamma}_n^2<\infty, \tilde{\alpha}_n^0=\frac{\pi}{2},\ n\geq 0. \quad (32)$$

U holda bu juftlik $L(q(x,\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...),h(\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...),\infty)$ ko‘rinishdagi biror Shturm-Liuvill chegaraviy masalasining spektral berilganlari bo‘ladi.

Ushbu $L(q(x,\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...),h(\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...),\infty)=L(\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...)$ chegaraviy masalaning $q(x,\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...)$, $h(\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...)$ koeffitsiyentlarini topish uchun teskari spektral masalani yechishning Gelfand-Levitan usulidan foydalanamiz. U holda $q(x,\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...)$ funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$q(x,\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...)=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{\gamma}_n}{(n+1/2)^2}(\varphi(x,\tilde{\lambda}_n)\cos(n+1/2)x)'.$$

Bu yerda $\varphi(x,\tilde{\lambda}_n), n\geq 0$ funksiyalar quyidagi

$$\varphi(x,\tilde{\lambda}_n)=\cos(n+\frac{1}{2})x-\sum_{k=0}^{\infty}\{\frac{\tilde{\gamma}_k}{(k+1/2)^2}\varphi(x,\tilde{\lambda}_k)\int_0^x\cos(n+\frac{1}{2})s\cos(k+\frac{1}{2})sds\},\ n\geq 0$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. $h(\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...)$ koeffitsiyent quyidagi formula orqali topiladi:

$$h(\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{\gamma}_n}{(n+1/2)^2}.$$

Shunday qilib, $L(\tilde{\gamma}_0,\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_n,...)$ ko‘rinishdagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari oilasining barcha koeffitsiyentlarini topishga muvaffaq bo‘ldik. Xususan, agar $\tilde{\gamma}_0>0,\ \tilde{\gamma}_n=0,\ n\geq 1$ bo‘lsa, u holda quyidagi izospektral chegaraviy masalaga ega bo‘lamiz:

$$L(\tilde{\gamma}_0)y\equiv -y''+\frac{4\tilde{\gamma}_0\sin x(1+2\tilde{\gamma}_0(x+\sin x))+32\tilde{\gamma}_0^2\cos^4\dfrac{x}{2}}{(1+2\tilde{\gamma}_0(x+\sin x))^2}y=\lambda y, 0<x<\pi,$$

$$y'(0)+4\tilde{\gamma}_0y(0)=0,\ y(\pi)=0.$$

Ikkinchi bobning to‘rtinchi paragrafini asosiy natijasi quyidagi teoremada keltirilgan.

6-teorema. *Aytaylik,* $\{\tilde{\mu}_n, \tilde{\delta}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *haqiqiy sonlardan tuzilgan ketma-ketliklar juftligi quyidagi shartlarni qanoatlantirsin*

$$\sqrt{\tilde{\mu}_n} = n,\ n \ge 1;\ \frac{1}{\tilde{\delta}_n} = \frac{1}{\tilde{\delta}_n^0} + \frac{\tilde{\tau}_n}{n}, \tilde{\tau}_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tau}_n^2 < \infty, \tilde{\delta}_n^0 = \frac{\pi}{2n^2},\ n \ge 1. \qquad (33)$$

U holda bu juftlik $L(q(x,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...),\infty,\infty)$ *ko‘rinishdagi biror Shturm-Liuvill chegaraviy masalasining spektral berilganlari bo‘ladi.*

Ushbu $L(q(x,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...),\infty,\infty) = L(\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...)$ chegaraviy masalaning $q(x,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...)$ koeffitsiyentini topish uchun teskari spektral masalani yechishning Gelfand-Levitan usulidan foydalanamiz. U holda $q(x,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...)$ funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$q(x,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\tau}_n}{n^3} (\psi(x,\tilde{\mu}_n)\sin nx)'\ .$$

Bu yerda $\psi(x,\tilde{\mu}_n), n \ge 1$ funksiyalar quyidagi

$$\psi(x,\tilde{\mu}_n) = \sin nx - \sum_{k=1}^{\infty} \{\frac{\tilde{\tau}_k}{k^3} \psi(x,\tilde{\mu}_k) \int_0^x \sin ns \sin ks ds\},\ n \ge 1,$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. Shunday qilib, $L(\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...)$ ko‘rinishdagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari oilasining barcha koeffitsiyentlarini topishga muvaffaq bo‘ldik. Xususan, agar $\tilde{\tau}_1 > 0,\ \tilde{\tau}_n = 0,\ n \ge 2$ bo‘lsa, u holda quyidagi izospektral chegaraviy masalaga ega bo‘lamiz:

$$L(\tilde{\tau}_1)y \equiv -y'' + \frac{32\tilde{\tau}_1^2 \sin^4 x - 8\tilde{\tau}_1 \sin 2x(4 + \tilde{\tau}_1(2x - \sin 2x))}{(4 + \tilde{\tau}_1(2x - \sin 2x))^2} y = \lambda y, 0 < x < \pi\ ,$$

$$y(0) = 0\ ,\ y(\pi) = 0\ .$$

Uchinchi bob **“Izospektral Dirak operatorlari”** deb nomlanadi. Bunda $[0,\pi]$ kesmada Dirixle sharti bilan berilgan Dirak tenglamalar sistemasi uchun izospektral chegaraviy masalalar qaralgan.

Uchinchi bobning birinchi paragrafini asosiy natijasi quyidagi teoremada keltirilgan.

7-teorema. *Aytaylik ushbu* $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\alpha_n > 0$, $n \in Z$ *haqiqiy sonlardan tuzilgan ketma-ketliklar juftligi quyidagi shartlarni qanoatlantirsin*

$$\lambda_n = n,\ n \in Z,\ \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{\gamma_n}{|n|+1},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{|n|+1} < \infty,\ \gamma_n > 0. \qquad (34)$$

U holda bu juftlik $D(p(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...), q(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...),\infty,\infty)$ *ko‘rinishdagi biror Dirak sistemasi uchun qo‘yilgan chegaraviy masalaning spektral berilganlari bo‘ladi.*

Ushbu $D(p(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...), q(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...),\infty,\infty)$ chegaraviy masalaning $p(x) = p(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...)$ va

$q(x)=q(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...)$ koeffitsiyentlarini topish uchun M.G.Gasimov va B.M.Levitan[3] usulidan foydalanamiz. U holda quyidagi

$$p(x)=p\left(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_n}{|n|+1}[\varphi_2(x,n)\sin nx-\varphi_1(x,n)\cos nx],$$

$$q(x)=q\left(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...\right)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_n}{|n|+1}[\varphi_1(x,n)\sin nx+\varphi_2(x,n)\cos nx]$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi. Bunda $\varphi(x,\lambda)=(\varphi_1(x,\lambda),\varphi_2(x,\lambda))^T$ vektor-funksiya quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:

$$\varphi(x,n)=\begin{pmatrix}\sin nx\\ -\cos nx\end{pmatrix}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_k}{|k|+1}\varphi(x,k)\int_0^x(\sin ks,-\cos ks)\begin{pmatrix}\sin ns\\ -\cos ns\end{pmatrix}ds,\ n\in Z\ .$$

[3] Гасымов М.Г., Левитан Б.М. «Обратная задача для системы Дирака» // ДАН СССР, -1966. –т.167, №5. –с.967-970.

XULOSA

Dissertatsiya ishi Shturm-Liuvill va Dirak operatorlari uchun izospektral chegaraviy masalalarni o‘rganishga bag‘ishlangan.

Asosiy tadqiqot natijalari quyidagilardan iborat:

1. Teskari spektral masala usulidan foydalanib, umumiy chegaraviy shart holidagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalar oilasi tuzilgan va bu chegaraviy masalalarga bog’liq holda o‘zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik hamda parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarga qo‘yilgan aralash masalalarning yechimlari olingan;

2. Teskari spektral masala usulidan foydalanib, xususiy chegaraviy shart holidagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalar oilasi tuzilgan va bu chegaraviy masalalarga bog’liq holda o‘zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik hamda parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarga qo‘yilgan aralash masalalarning yechimlari topilgan;

3. Teskari spektral masala usulidan foydalanib, Dirixle chegaraviy sharti holidagi izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari oilasi tuzilgan va bu chegaraviy masalalarga bog’liq holda o‘zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik hamda parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarga qo‘yilgan aralash masalalarning yechimlari olingan;

4. Teskari spektral masala usulidan foydalanib, Dirixle chegaraviy sharti holidagi izospektral Dirak operatorlar oilasi tuzilgan va bu chegaraviy masalalarga bog’liq holda o‘zgaruvchan koeffitsiyentli giperbolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasiga qo‘yilgan aralash masalalarning yechimlari topilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
ШАРОФА РАШИДОВА**

МИРЗАЕВ ОЛИМ ЭРКИНОВИЧ

ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И ДИРАКА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Самарканд–2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за номером B2020.2.PhD/FM510.

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Хасанов Аканазар Бекдурдиевич** доктор физико-математических наук,профессор
Официальные оппоненты:	**Тахиров Жозил Остонович** доктор физико-математических наук, профессор
	Бабажанов Базар Атажанович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Ургенчского филиала Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль-Хорезми**

Защита диссертации состоится «16» май 2023 года в 10^{00} часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №59). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «27» 05 2023 года.
(протокол рассылки №3 от «27» 05 2023 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI • SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI • O'ZBEKISTON

А.С. Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук

А.Х.Бегматов
Заместитель председателя научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Большинство научных и практических исследований, проводимых в мире, сводится к исследованию прямых и обратных спектральных задач операторов Штурма-Лиувилля и Дирака. В настоящее время в развитых странах прямых и обратных спектральных задач к операторам Штурма-Лиувилля и Дирака занимают важное место в различных областях, в том числе в теории упругости, квантовой механике, геофизике, радиотехнике, моделировании кристаллических структур твердых тел, физике, электронике, метеорологии, в теории тепла и массопереноса, химической технологии, при изучении электрических свойств внутренних слоев Земли, восстановленые колебательных систем (струн) и уравнения диффузии, в поиске точных решений эволюционных уравнений современной математической физики. В связи с этим особое внимание уделяется восстановления к различным граничным задачам Штурма-Лиувилля имеющий одинаковый спектр, к различным операторам Дирака имеющий одинаковый спектр, к различным операторам Дирака имеющий различный спектр, а другие одинаковые.

В мире с помощью метода обратного спектрального анализа проводятся исследования систем с продольными колебаниями (струны), поперечными колебаниями и уравнение диффузии и определение коэффициентов поставленных к ним граничных задач. В этом направлении приоритет отдается изоспектральным операторам Штурма-Лиувилля при общих, специальных и граничных условиях Дирихле и изоспектральным операторам Дирака при граничных условиях Дирихле. Практическое применение изоспектральных операторов Штурма-Лиувилля и Дирака достаточно неизучено. Например, актуальной задачей считается развитие исследований по восстановлению изоспектральных операторов Штурма-Лиувилля и Дирака нахождение точных решений смешанных задач уравнений гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами, а также нахождение решений систем уравнений гиперболического типа с переменными коэффициентами.

В нашей республике проводятся широкие мероприятия по восстановлению эволюционных уравнений математической физике и их применение на практике. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Алгебра и ее приложения, дифференциальные уравнения и ее приложения, математическое моделирование нелинейных систем, динамические системы и их приложения, стохастический анализ, медико-биологическая информатика, вычислительная математика[4]» отмечены как основные задачи и направления деятельности математической науки. При реализации этих

[4]Постановление Президента Республики Узбекистан №PQ-4387 от 9 июля 2019 года «О государственной поддержке дальнейшего развития математического образования и науки, а также мерах по коренному совершенствованию деятельности Института математики Академии наук Республики Узбекистан имени В. И. Романовского».

задач применяя алгоритм восстановления изоспектральных операторов Штурма-Лиувилля и Дирака, нахождение точных решений смешанных задач, накладываемые на волновые и тепловые уравнения, систем уравнений гиперболического типа имеет большое научное значение.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле проблем, которые входят в тематику задач, отмеченных в Указах Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В настоящее время обратные задачи достаточно изучены только для некоторых обыкновенных дифференциальных операторов. Простейшими среди этих операторов являются операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, обратные задачи для этих операторов исследовались учеными В.А.Амбарцумян, Г.Борг, В.А.Марченко, И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, А.Н.Тихонов, Ш.А.Алимов, М.Г.Крейн, Н.Левинсон, М.Г.Гасымов, Т.Т.Джабиев, З.Л.Лейбензон, Л.А.Сахнович, И.Г.Хачатрян, Х.Хохштадт, Б.Либерман, В.А.Юрко, А.М.Савчук, А.А.Шкаликов, И.С.Фролов, Т.В.Мисюра, Э.Коротяев, С.Албеверио, Р.Хрунив, Ю.В.Микитюк, Л.П.Нижник, М.М.Маламуд, Н.П.Бондаренко, Э.Абдукадыров, А.Б.Хасанов, А.Б.Яхшимуратов и другими.

Первый результат, послуживший важным толчком для развития теории обратных задач, был получен в 1929 г. В.А.Амбарцумяном. В 1946 г. Г.Борг показал, что оператор Штурма-Лиувилля можно однозначно определить, используя спектры двух граничных задач Штурма-Лиувилля, которые отличаются только одним краевым условием. В 1949 г. А.Н.Тихонову удалось доказать теорему о том, что оператор Штурма-Лиувилля, заданный на полуоси, может быть однозначно построен с помощью функции $I(\lambda)$ «импеданса». Узбекский математик Ш.А.Алимов первым заметил, что эта теорема А.Н.Тихонова имеет важное практическое значение, и в 1976 г. опубликовал статью «О работе А.Н.Тихонова по обратным задачам для уравнения Штурма-Лиувилля». В 1950 г. В.А.Марченко с помощью операторов преобразования показал, что оператор Штурма-Лиувилля однозначно определяется своей спектральной функцией. После доказательства В.А.Марченко теоремы единственности стало актуальным задача восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральным данным. Эта задача была решена И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном 1951 году. После этого, метод Гельфанда-Левитана решения обратной задачи была обобщена Б.М.Левитаном, М.Г.Гасымовым и Н.Л.Левинсоном.

Различные граничные задачи Штурма-Лиувилля имеющие одинаковый спектр называются изоспектральной. Работы E.L.Isaacson, H.P.McKean, B.E.Dahlberg, E.Trubowitz посвящены геометрии изоспектральных граничных задач Штурма-Лиувилля.

M.Jodeit, Б.М.Левитана, Ю.А.Ашрафяна, Т.Н.Арутюняна, Э.С.Панахова, Н.Дж.Гулиева и А.Б.Хасанова былы показаны восстановления семейства изоспектральных задач по спектральным данным.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательской работы Самаркандского государственного университета имени Шарафа Рашидова в рамках комплексной научной работы № SMат-01 «Приложения спектральной теории дифференциальных операторов к нелинейным эволюционным уравнениям и некорректным задачам современной математической физики».

Целью исследования состоит в восстановлении изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля и семейства изоспектральных операторов Дирака с использованием спектральных характеристик.

Задачи исследования:

методом обратной спектральной задачи определить вид семейства изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля при общем краевом условии;

методом обратной спектральной задачи определить вид семейства изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля при специальных граничных условиях;

методом обратной спектральной задачи определить вид семейства изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля при краевом условии Дирихле;

методом обратной спектральной задачи определить вид семейства изоспектральных операторов Дирака при краевом условии Дирихле.

Объектом исследования является изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля, изоспектральные и частично-изоспектральные операторы Дирака.

Предметом исследования является в нахождение изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля и Дирака по спектральным данным, используясь метод Гельфанда-Левитана.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы математического анализа, математической физики, спектральной теории дифференциальных операторов, функционального анализа, теория функций комплексного переменного, линейной алгебры, методы решения дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

методом обратной спектральной задачи построено семейство изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля при общих краевых условиях и с помощью этой краевой задачи получены решения смешанных задач, поставленных к дифференциальным уравнениям с частными производными гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами;

методом обратной спектральной задачи построено семейство изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля при специальных краевых условиях и с помощью этой краевой задачи найдены решения смешанных задач, поставленных к дифференциальным уравнений с частными производными гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами;

методом обратной спектральной задачи построено семейство изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля при краевом условии Дирихле и с помощью этой краевой задачи получены решения смешанных задач, поставленных к дифференциальным уравнений с частными производными гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами;

методом обратной спектральной задачи построено семейство изоспектральных операторов Дирака при краевом условии Дирихле и с помощью этой краевой задачи найдены решения смешанных задач, поставленных для системы дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа с переменными коэффициентами.

Практическими результатами исследования являются следующие:

с помощью алгоритма восстановления изоспектрального семейства краевых задач Штурма-Лиувилля путем решения обратной задачи определены значения параметров, характеризующих многостадийные явления осадкообразования при просачивании взвесей в подземные слои;

с помощью алгоритма восстановления семейства изоспектральных операторов Дирака, восстановленных по спектральным данным, используя метод приложения к процессу поиска решения смешанных задач, поставленных в системе гиперболических уравнений, с некоторыми переменными коэффициентами, уравнения движения подземных вод и были найдены их решения.

Достоверность результатов исследования обосновывается использованием методов обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, теории обратных спектральных задач, математического анализа, функционального анализа, а также строгостью математических рассуждений и доказательств.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследований – полученные в работе научные результаты можно использовать для нахождения точного решения смешанных задач для уравнения гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами.

Практическая значимость результатов исследований – изоспектральные краевые задачи применяется для восстановления семейства уравнений колебательных систем (струн) и диффузии. Эти уравнения применяется в процессах химической технологии, теории тепла и массопереноса.

Внедрение результатов исследования. На основании полученных научных результатов по изоспектральным краевым задачам для операторов Штурма-Лиувилля и Дирака:

алгоритм восстановления изоспектрального семейства краевых задач Штурма-Лиувилля в фундаментальном проекте № ОТ-Ф4-64 (2017-2020) по теме «Составление и численный анализ гидродинамических моделей фильтрации жидкости и переноса веществ в неоднородных пористых средах» используется при решении обратных спектральных задач определения коэффициентов уравнений уточненной кинетики истечения взвесей, образующих отложения в пористых средах (Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, справка от 1 ноября 2022 г.). Применение научных результатов позволило определить значения параметров, характеризующих многостадийные явления осадкообразования при просачивании взвесей в подземные слои;

Из алгоритма восстановления семейства изоспектральных операторов Дирака, восстановленного по спектральным данным, и из метода решения смешанных задач, поставленных в систему уравнений гиперболического типа с некоторыми переменными коэффициентами, применялась при исследовании качественных свойств процессов фильтрации, представленных двойным нелинейным параболическим уравнением в фундаментальном проекте ОТ-Ф4-30 (2017-2020) «Исследование качественных свойств двойной нелинейной кросс-системи под действием конвективного переноса, переменной плотности, источника или стока». (Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, справка 04/№11-8173 от 15 декабря 2022 года). Использование научных результатов позволило найти уравнения движения подземных вод и изучить их решения.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждались на 7 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 5 республиканских конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, из них 6 статей входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 1 зарубежных журналах и 5 в национальных научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 111 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Обратные спектральные задачи для операторов Штурма-Лиувилля и Дирака»,** приведены исходные данные, основные обозначения, определения, понятия и основные теоремы, необходимые для последующего изложения основных результатов диссертации.

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y,\ (0 < x < \pi), \tag{1}$$

со следующими граничными условиями:

$$U_1(y) = y'(0) - hy(0) = 0,\ U_2(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

$$y(0) = 0,\ U_2(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{3}$$

$$U_1(y) = y'(0) - hy(0) = 0,\ y(\pi) = 0, \tag{4}$$

$$y(0) = 0,\ y(\pi) = 0. \tag{5}$$

где $q(x) \in C[0,\pi]$ – вещественная непрерывная функция, λ – комплексный параметр h и H – конечные действительные числа.

Введем следующие обозначения:

1) граничную задачу (1), (2) обозначим через $L(q(x),h,H)$;

2) граничную задачу (1), (3) обозначим через $L(q(x),\infty,H)$;

3) граничную задачу (1), (4) обозначим через $L(q(x),h,\infty)$;

4) граничную задачу (1), (5) обозначим через $L(q(x),\infty,\infty)$.

Решение уравнения (1) удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0,\lambda) = 1,\ \varphi'(0,\lambda) = h \tag{6}$$

обозначим через $\varphi(x,\lambda)$, а решение уравнения (1) удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0,\lambda) = 0,\ \psi'(0,\lambda) = 1 \tag{7}$$

через $\psi(x,\lambda)$. Известно, что решение задачи Коши (1) и (6), а также (1) и (7) соответственно $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ существует, единственно и является целой функцией относительно λ при каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$. Справедливы также такие интегральные представления:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt, \tag{8}$$

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x G(x,t)\sin\sqrt{\lambda}t dt\,, \tag{9}$$

$$K(x,x)=h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\,,\ G(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\,.$$

Очевидно, функции $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ при всех λ удовлетворяют граничным условиям $y(0)=0$ и $U_1(y)=0$ соответственно. Поэтому собственные значения λ_n, μ_n, $\tilde{\lambda}_n$, $\tilde{\mu}_n$ граничных задач $L(q(x),h,H)$, $L(q(x),\infty,H)$, $L(q(x),h,\infty)$, $L(q(x),\infty,\infty)$ являются корнями уравнений

$$\Delta(\lambda)\equiv\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)=0,\quad \tilde{\Delta}(\lambda)\equiv\psi'(\pi,\lambda)+H\psi(\pi,\lambda)=0,$$

$$\delta(\lambda)\equiv\varphi(\pi,\lambda)=0\,,\quad \tilde{\delta}(\lambda)\equiv\psi(\pi,\lambda)=0$$

соответственно. Функции $\varphi(x,\lambda_n)$, $\psi(x,\mu_n)$, $\varphi(x,\tilde{\lambda}_n)$, $\psi(x,\tilde{\mu}_n)$ являются их соответствующими собственными функциями. Числа

$$\alpha_n=\int_0^\pi\varphi^2(x,\lambda_n)dx,\ \delta_n=\int_0^\pi\psi^2(x,\mu_n)dx,\ \tilde{\alpha}_n=\int_0^\pi\varphi^2(x,\tilde{\lambda}_n)dx,\ \tilde{\delta}_n=\int_0^\pi\psi^2(x,\tilde{\mu}_n)dx$$

называются нормирующими постоянными соответственно, краевых задач $L(q(x),h,H)$, $L(q(x),\infty,H)$, $L(q(x),h,\infty)$, $L(q(x),\infty,\infty)$.

Определение 1. Пары последовательностей $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\mu_n,\delta_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\tilde{\lambda}_n,\tilde{\alpha}_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\tilde{\mu}_n,\tilde{\delta}_n\}_{n=1}^\infty$ называются спектральными данными соответственно, граничных задач $L(q(x),h,H)$, $L(q(x),\infty,H)$, $L(q(x),h,\infty)$, $L(q(x),\infty,\infty)$.

Определение 2. Задача нахождения потенциала $q(x)$ и коэффициентов h,H граничной задачи $L(q(x),h,H)$ по спектральным данным $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ называется обратной спектральной задачей.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательности действительных чисел $\{\lambda_n,\alpha_n;\alpha_n>0\}_{n=0}^\infty$, $\{\mu_n,\delta_n;\delta_n>0\}_{n=0}^\infty$, $\{\tilde{\lambda}_n,\tilde{\alpha}_n;\tilde{\alpha}_n>0\}_{n=0}^\infty$ и $\{\tilde{\mu}_n,\tilde{\delta}_n;\tilde{\delta}_n>0\}_{n=1}^\infty$ были спектральными данными соответственно граничных задач Штурма-Лиувилля $L(q(x),h,H)$, $L(q(x),\infty,\infty)$, $L(q(x),h,\infty)$, $L(q(x),\infty,H)$ необходимо и достаточно выполнения следующих равенств:*

1) $\sqrt{\lambda_n}=n+\dfrac{c}{n\pi}+\dfrac{\varepsilon_n}{n},\lambda_n\neq\lambda_m,\ n\neq m,$

$$\alpha_n=\frac{\pi}{2}+\frac{\beta_n}{n},\ \alpha_n>0,\{\beta_n\},\ \{\varepsilon_n\}\in l_2,\ c=h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\,; \tag{10}$$

2) $\sqrt{\mu_n}=n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{d}{(n+1/2)\pi}+\dfrac{\omega_n}{n},\ \{\omega_n\}\in l_2,\ \mu_n\neq\mu_m,\ n\neq m,$

$$\delta_n=\frac{\pi}{2(n+1/2)^2}+\frac{\sigma_n}{n^3},\ \delta_n>0,\{\sigma_n\}\in l_2,\ \ d=H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\,; \tag{11}$$

3) $\sqrt{\tilde{\lambda}_n}=n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\tilde{c}}{(n+1/2)\pi}+\dfrac{\tilde{\varepsilon}_n}{n},\tilde{\lambda}_n\neq\tilde{\lambda}_m,\ n\neq m\,,$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\tilde{\beta}_n}{n}, \tilde{\alpha}_n > 0,\ \{\tilde{\varepsilon}_n\}, \{\tilde{\beta}_n\} \in l_2,\ \tilde{c} = h + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt; \quad (12)$$

4) $\sqrt{\tilde{\mu}_n} = n + \frac{\tilde{d}}{n\pi} + \frac{\tilde{\omega}_n}{n},\ \tilde{\mu}_n \neq \tilde{\mu}_m,\ n \neq m,$

$$\tilde{\delta}_n = \frac{\pi}{2n^2} + \frac{\tilde{\sigma}_n}{n^3},\ \tilde{\delta}_n > 0, \{\tilde{\omega}_n\}, \{\tilde{\sigma}_n\} \in l_2,\ \tilde{d} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt. \quad (13)$$

Известно, что в интегральных представлениях (8) и (9) функции $K(x,t)$ и $G(x,t)$ удовлетворяют соответственно, интегральным уравнениям Гельфанда-Левитана

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = 0,\ (0 < t < x), \quad (14)$$

$$G(x,t) + \tilde{F}(x,t) + \int_0^x G(x,s)\tilde{F}(s,t)ds = 0,\ (0 < t < x). \quad (15)$$

При этом:

1) в случае граничной задачи $L(q(x), h, H)$

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x\cos\sqrt{\lambda_n}t - \frac{1}{\alpha_n^0}\cos nx\cos nt\right\},\ \alpha_0^0 = \pi, \alpha_n^0 = \frac{\pi}{2}, n \geq 1; \quad (16)$$

2) в случае граничной задачи $L(q(x), \infty, H)$

$$\tilde{F}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\delta_n}\frac{\sin\sqrt{\mu_n}x\sin\sqrt{\mu_n}t}{\mu_n} - \frac{2}{\pi}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}; \quad (17)$$

3) в случае граничной задачи $L(q(x), h, \infty)$

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\tilde{\alpha}_n}\cos\sqrt{\tilde{\lambda}_n}x\cos\sqrt{\tilde{\lambda}_n}t - \frac{2}{\pi}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}; \quad (18)$$

4) в случае граничной задачи $L(q(x), \infty, \infty)$

$$\tilde{F}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\tilde{\delta}_n}\frac{\sin\sqrt{\tilde{\mu}_n}x\sin\sqrt{\tilde{\mu}_n}t}{\tilde{\mu}_n} - \frac{2}{\pi}\sin nx\sin nt\right\}. \quad (19)$$

Пусть задана пара $\{\lambda_n, \alpha_n; \alpha_n > 0\}_{n=0}^{\infty}$ последовательностей действительных чисел, удовлетворяющие условиям (10). Тогда мы можем построить функцию $F(x,t)$ используя формулу (16). Подставляя его в интегральное уравнение Гельфанда-Левитана (14), мы можем найти неизвестное $K(x,t)$. С помощью равенств

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x,x),\ h = K(0,0), H = c - h - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt$$

можем найти все коэффициенты краевой задачи Штурма-Лиувилля $L(q(x), h, H)$.

В пятом параграфе первой главы приведены необходимые сведения о прямых и обратных спектральных задачах для граничных задач поставленных системе дифференциальных уравнений Дирака на отрезке $[0,\pi]$.

Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$D\big(p(x),q(x),\infty,\infty\big)y \equiv By' + Q(x)y = \lambda y,\ y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$y_1(0) = 0,\ y_1(\pi) = 0. \tag{21}$$

Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

$p(x),\, q(x) \in C^1[0,\pi]$ – вещественные непрерывно дифференцируемые функции, λ – комплексный параметр. Решение уравнения (20) удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0,\lambda) = 0,\ \varphi_2(0,\lambda) = -1 \tag{22}$$

обозначим через $\varphi(x,\lambda) = (\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda))^T$. Известно, что решение задачи (20), (22) $\varphi(x,\lambda)$ существует, единственно и является целой вектор-функцией относительно λ при каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$. Также справедливо интегральное представление:

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ -\cos\lambda x \end{pmatrix} + \int_0^x K(x,t) \begin{pmatrix} \sin\lambda t \\ -\cos\lambda t \end{pmatrix} dt. \tag{23}$$

Здесь $K(x,t) = \left\| K_{ij}(x,t) \right\|_{i,j=1,2}$ матрица-функция такова, что она является решением уравнения в частных производных

$$BK'_x(x,t) + K'_t(x,t)B = -Q(x)K(x,t)$$

удовлетворяющее условиям

$$BK(x,x) - K(x,x)B = -Q(x),\ K_{11}(x,0) = K_{21}(x,0) = 0.$$

Очевидно, что $\varphi(x,\lambda) = (\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda))^T$ вектор-функция при всех λ удовлетворяет первому из граничных условий (21). Собственные значения $\lambda_n,\ n \in Z$ задачи (20), (21) состоят из корней уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \varphi_1(\pi,\lambda) = 0,$$

а вектор-функции $\varphi(x,\lambda_n) = (\varphi_1(x,\lambda_n), \varphi_2(x,\lambda_n))^T$, $n \in Z$ являются соответствующие им собственными вектор-функциями. Числа

$$\alpha_n = \int_0^\pi [\varphi_1^2(x,\lambda_n) + \varphi_2^2(x,\lambda_n)]dx,\ n \in Z$$

называются нормирующими постоянными граничной задачи (20), (21). $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ пара последовательностей называется спектральными данными граничной задачи (20), (21).

Теорема 2. (М.Г.Гасымов, Т.Т.Жабиев[5]) *Для того чтобы последовательности действительных чисел* $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\alpha_n>0, n\in Z$ *были спектральными данными некоторой граничной задачи вида* $D(p(x),q(x),\infty,\infty)$ *необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$\lambda_n=n+\frac{\beta_{1,n}}{n},\ \ \alpha_n=\pi+\frac{c_{1,n}}{n}. \qquad (24)$$

Здесь

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\beta_{1,n}\right|^2<\infty,\ \ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_{1,n}\right|^2<\infty.$$

Известно, что матрица-функция $K(x,t)=\left\|K_{ij}(x,t)\right\|_{i,j=1,2}$ в интегральном представлении (23) удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$K(x,t)+F(x,t)+\int_0^x K(x,s)F(s,t)ds=0,\ (0<t\le x<\pi). \qquad (25)$$

Здесь

$$F(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n x\\ -\cos\lambda_n x\end{pmatrix}\left(\sin\lambda_n t,-\cos\lambda_n t\right)-\frac{1}{\pi}\begin{pmatrix}\sin nx\\ -\cos nx\end{pmatrix}\left(\sin nt,-\cos nt\right)\right\}. \qquad (26)$$

Пусть даны последовательности действительных чисел $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\alpha_n>0$, удовлетворяющие условиям (24). В этом случае прежде всего используя формулу (26) построим матрицу-функцию $F(x,t)$. Затем, подставляя его в интегральное уравнение (25), решая это интегральное уравнение найдем искомую матрицу-функцию $K(x,t)$. С помощью равенства

$$Q(x)=K(x,x)B-BK(x,x)$$

найдем все коэффициенты граничной задачи Дирака $D(p(x),q(x),\infty,\infty)$.

Вторая глава диссертации называется «**Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля**» и посвящена изучению граничных задач Штурма-Лиувилля с одним и тем же спектром на конечном интервале.

Основной результат первого параграфа второй главы представлен в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть пара* $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ *последовательности действительных чисел удовлетворяет следующим условиям*

$$\sqrt{\lambda_n}=n,\ n\ge 0,\ \frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{\alpha_n^0}+\frac{\gamma_n}{(n+1)^2},\ \gamma_n>0,\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n^2<\infty,\alpha_0^0=\pi,\alpha_n^0=\frac{\pi}{2},n\ge 1. \qquad (27)$$

Тогда эта пара является спектральными данными некоторой граничной задачи Штурма-Лиувилля вида

$$L(q(x,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...),h(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...),H(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)).$$

Для нахождения коэффициентов $q(x,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$, $h(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$, $H(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$ этой граничной задачи

[5] Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам. Труды летней школы по спектральной теории операторов и представлению теории групп – Баку: Элм, 1975, с. 46–71.

$$L(q(x,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...),h(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...),H(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...))=L(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$$

используем метод Гельфанда-Левитана решения обратной спектральной задачи. Тогда функция $q(x,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$ определяется следующим образом:

$$q(x,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{(n+1)^2}\{\varphi(x,\lambda_n)\cos nx\}'.$$

Здесь функции $\varphi(x,\lambda_n), n\geq 0$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\varphi(x,\lambda_n)=\cos nx-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{(k+1)^2}\varphi(x,\lambda_k)\left\{\int_0^x\cos kt\cos nt dt\right\}, n\geq 0.$$

Коэффициенты $h(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$ и $H(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$ находятся по следующим формулам:

$$h(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{(n+1)^2},\ H(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{(k+1)^2+\gamma_k\alpha_k^0}.$$

Таким образом, удалось найти все коэффициенты семейства изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля вида $L(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$. В частности, если $\gamma_0>0,\ \gamma_n=0,\ n\geq 1$, то имеем следующую изоспектральную краевую задачу:

$$\begin{gathered}L(\gamma_0)y\equiv -y''+\frac{2\gamma_0^2}{(1+\gamma_0 x)^2}y=\lambda y,\ 0<x<\pi,\\ y'(0)+\gamma_0 y(0)=0,\ y'(\pi)+\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0\pi}y(\pi)=0.\end{gathered}\tag{28}$$

Все собственные значения краевой задачи $L(\gamma_0)$ состоят из заданных чисел $\lambda_n=n^2, n\geq 0$, а соответствующие им собственные функции находятся по формулам

$$y_0(x)=\frac{1}{1+\gamma_0 x}, y_n(x)=\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)},\ n\geq 1.$$

Теперь с помощью изоспектральных граничных задач (28) построим семейство колебательных систем (струн) с заданной частотой:

$$\square(\gamma_0)u\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\gamma_0^2}{(1+\gamma_0 x)^2}\right)u=0,\ \gamma_0>0\tag{29}$$

и уравнения диффузии:

$$\Im(\gamma_0)u\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\gamma_0^2}{(1+\gamma_0 x)^2}\right)u=0,\ \gamma_0>0.\tag{30}$$

Уравнения этого вида (30) часто встречаются в теории массы и теплообмена и в химической технологии.

Используя теорему 3, получаем следующие результаты.

Следствие 1. Решение смешанной задачи

$$u(x,0)=f_1(x),\ u_t(x,0)=f_2(x),\ f_1(x)\in C^3[0,\pi],\ f_2(x)\in C^2[0,\pi],$$

$$u'_x(0,t)+\gamma_0 u(0,t)=0,\ \ u'_x(\pi,t)+\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0\pi}u(\pi,t)=0$$

поставленный для уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами (29) выглядит следующим образом:

$$u(x,t)=\frac{p_0}{1+\gamma_0 x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(p_n\cos nt+q_n\sin nt\right)\left(\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}\right).$$

Здесь $p_0=\left(\frac{1}{\pi}+\gamma_0\right)\int_0^{\pi}\frac{f_1(x)}{1+\gamma_0 x}dx,\ p_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_1(x)\left(\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}\right)dx, n\ge 1,$

$$q_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}f_2(x)\left(\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}\right)dx, n\ge 1.$$

Следствие 2. Решение смешанной задачи

$$u(x,0)=f(x),\ f(x)\in C^1[0,\pi],$$

$$u'_x(0,t)+\gamma_0 u(0,t)=0,u'_x(\pi,t)+\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0\pi}u(\pi,t)=0$$

поставленный для уравнения параболического типа с переменными коэффициентами (30) выглядит следующим образом:

$$u(x,t)=\frac{B_0}{1+\gamma_0 x}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-n^2t}\left(\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}\right).$$

Здесь $B_0=\left(\frac{1}{\pi}+\gamma_0\right)\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{1+\gamma_0 x}dx,\ B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\left(\cos nx-\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0 x)}\right)dx, n\ge 1.$

Основной результат второго параграфа второй главы представлен в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть пара* $\{\mu_n,\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ *последовательности действительных чисел удовлетворяет следующим условиям*

$$\sqrt{\mu_n}=n+\frac{1}{2},n\ge 0,\frac{1}{\delta_n}=\frac{1}{\delta_n^0}+\frac{\tau_n}{n+1/2},\tau_n>0,\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n^2<\infty,\delta_n^0=\frac{\pi}{2(n+1/2)^2},\ n\ge 0.\quad(31)$$

Тогда эта пара является спектральными данными некоторой граничной задачи Штурма-Лиувилля вида $L(q(x,\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...),\infty,H(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...))$.

Для нахождения коэффициентов $q(x,\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$, $H(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$ этой краевой задачи $L(q(x,\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...),\infty,H(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...))=L(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$ воспользуемся методом Гельфанда-Левитана решения обратной спектральной задачи. Тогда функция $q(x,\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$ определяется следующим образом:

$$q(x,\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n}{(n+1/2)^3}\left(\psi(x,\mu_n)\sin(n+1/2)x\right)'.$$

Здесь функции $\psi(x,\mu_n),n\ge 0$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\psi(x,\mu_n)=\sin(n+\frac{1}{2})x-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_k}{(k+1/2)^3}\psi(x,\mu_k)\int_0^x\sin(n+\frac{1}{2})s\sin(k+\frac{1}{2})sds,\ n\ge 0.$$

Коэффициент $H(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$ находится по следующей формуле:

$$H(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\tau_k}{2(k+1/2)^3+\tau_k\pi}.$$

Таким образом, удалось найти все коэффициенты семейства изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля вида $L(\tau_0,\tau_1,...,\tau_n,...)$. В частности, если $\tau_0>0,\ \tau_n=0,\ n\ge 1$, то имеем следующую изоспектральную краевую задачу:

$$L(\tau_0)y\equiv -y''+\frac{128\tau_0^2\sin^4\dfrac{x}{2}-8\tau_0\sin x(2+\tau_0(x-\sin x))}{(1+4\tau_0(x-\sin x))^2}y=\lambda y,\ \ 0<x<\pi,$$

$$y(0)=0,\ \ y'(\pi)+\frac{8\tau_0}{1+4\pi\tau_0}y(\pi)=0.$$

Основной результат третьего параграфа второй главы представлен в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть пара* $\{\tilde\lambda_n,\tilde\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ *последовательности действительных чисел удовлетворяет следующим условиям*

$$\sqrt{\tilde\lambda_n}=n+\frac{1}{2},\ n\ge 0;\ \frac{1}{\tilde\alpha_n}=\frac{1}{\tilde\alpha_n^0}+\frac{\tilde\gamma_n}{(n+1/2)^2},\ \tilde\gamma_n>0,\sum_{n=0}^{\infty}\tilde\gamma_n^2<\infty,\tilde\alpha_n^0=\frac{\pi}{2},\ n\ge 0. \quad (32)$$

Тогда эта пара является спектральными данными некоторой граничной задачи Штурма-Лиувилля вида $L(q(x,\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...),h(\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...),\infty)$.

Для нахождения коэффициентов $q(x,\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...)$, $h(\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...)$ этой краевой задачи $L(q(x,\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...),h(\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...),\infty)=L(\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...)$ воспользуемся методом Гельфанда-Левитана решения обратной спектральной задачи. Тогда функция $q(x,\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...)$ определяется следующим образом:

$$q(x,\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...)=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde\gamma_n}{(n+1/2)^2}(\varphi(x,\tilde\lambda_n)\cos(n+1/2)x)'.$$

Здесь функции $\varphi(x,\tilde\lambda_n),n\ge 0$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\varphi(x,\tilde\lambda_n)=\cos(n+\frac{1}{2})x-\sum_{k=0}^{\infty}\{\frac{\tilde\gamma_k}{(k+1/2)^2}\varphi(x,\tilde\lambda_k)\int_0^x\cos(n+\frac{1}{2})s\cos(k+\frac{1}{2})s\,ds\},\ n\ge 0.$$

Коэффициент $h(\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...)$ находится по следующей формуле:

$$h(\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde\gamma_n}{(n+1/2)^2}.$$

Таким образом, удалось найти все коэффициенты семейства изоспектральных граничных задач Штурма-Лиувилля вида $L(\tilde\gamma_0,\tilde\gamma_1,...,\tilde\gamma_n,...)$. В частности, если $\tilde\gamma_0>0,\ \tilde\gamma_n=0,\ n\ge 1$, то имеем следующую изоспектральную краевую задачу:

$$L(\tilde{\gamma}_0)y \equiv -y'' + \frac{4\tilde{\gamma}_0 \sin x(1+2\tilde{\gamma}_0(x+\sin x)) + 32\tilde{\gamma}_0^2 \cos^4 \dfrac{x}{2}}{(1+2\tilde{\gamma}_0(x+\sin x))^2} y = \lambda y,\ 0 < x < \pi,$$
$$y'(0) + 4\tilde{\gamma}_0 y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

Основной результат четвертого параграфа второй главы представлен в следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть пара* $\{\tilde{\mu}_n, \tilde{\delta}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательности действительных чисел удовлетворяет следующим условиям*

$$\sqrt{\tilde{\mu}_n} = n,\ n \ge 1;\ \frac{1}{\tilde{\delta}_n} = \frac{1}{\tilde{\delta}_n^0} + \frac{\tilde{\tau}_n}{n}, \tilde{\tau}_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tau}_n^2 < \infty, \tilde{\delta}_n^0 = \frac{\pi}{2n^2},\ n \ge 1. \tag{33}$$

Тогда эта пара является спектральными данными некоторой граничной задачи Штурма-Лиувилля вида $L(q(x,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...),\infty,\infty)$.

Для того, чтобы найти коэффициент $q(x,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...)$ граничной задачи $L(q(x,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...),\infty,\infty) = L(\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...)$ воспользуемся методом Гельфанда-Левитана решения обратной спектральной задачи. В этом случае $q(x,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...)$ функция определяется следующим образом:

$$q(x,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\tau}_n}{n^3} (\psi(x,\tilde{\mu}_n)\sin nx)'.$$

Здесь функции $\psi(x,\tilde{\mu}_n), n \ge 1$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\psi(x,\tilde{\mu}_n) = \sin nx - \sum_{k=1}^{\infty} \{\frac{\tilde{\tau}_k}{k^3} \varphi(x,\tilde{\mu}_k) \int_0^x \sin ns \sin ks ds\},\ n \ge 1.$$

Таким образом, удалось найти все коэффициенты семейства изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля вида $L(\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...,\tilde{\tau}_n,...)$. В частности, если $\tilde{\tau}_1 > 0,\ \tilde{\tau}_n = 0,\ n \ge 2$, то имеем следующую изоспектральную краевую задачу:

$$L(\tilde{\tau}_1)y \equiv -y'' + \frac{32\tilde{\tau}_1^2 \sin^4 x - 8\tilde{\tau}_1 \sin 2x(4+\tilde{\tau}_1(2x - \sin 2x))}{(4+\tilde{\tau}_1(2x-\sin 2x))^2} y = \lambda y,\ 0 < x < \pi,$$
$$y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

Третья глава называется **«Изоспектральные операторы Дирака».** В этой главе рассматриваются изоспектральные краевые задачи для системы уравнений Дирака, заданной условием Дирихле на отрезке $[0,\pi]$. Основной результат первого параграфа третьей главы представлен в следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть пара* $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\alpha_n > 0$, $n \in Z$ *последовательности действительных чисел удовлетворяет следующим условиям*

$$\lambda_n = n,\ n \in Z,\ \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{\gamma_n}{|n|+1},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{|n|+1} < \infty,\ \gamma_n > 0. \tag{34}$$

Тогда эта пара является спектральными данными граничной задачи, поставленной для оператора Дирака вида $D(p(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...),q(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...),\infty,\infty)$.

Для нахождения коэффициентов $q(x)=q(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...)$ и $p(x)=p(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...)$ этой краевой задачи $D(p(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...),q(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...),\infty,\infty)$ используем метод М.Г.Гасымова и Б.М.Левитана[6]. Справедливы формулы

$$p(x)=p\left(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_n}{|n|+1}[\varphi_2(x,n)\sin nx-\varphi_1(x,n)\cos nx],$$

$$q\left(x\right)=q\left(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...\right)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_n}{|n|+1}[\varphi_1(x,n)\sin nx+\varphi_2(x,n)\cos nx].$$

При этом векторная функция $\varphi(x,\lambda)=(\varphi_1(x,\lambda),\varphi_2(x,\lambda))^T$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\varphi(x,n)=\begin{pmatrix}\sin nx\\ -\cos nx\end{pmatrix}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_k}{|k|+1}\varphi(x,k)\int_0^x(\sin ks,-\cos ks)\begin{pmatrix}\sin ns\\ -\cos ns\end{pmatrix}ds,\ n\in Z\ .$$

[6] Гасымов М.Г., Левитан Б.М. «Обратная задача для системы Дирака» // ДАН СССР, -1966. –т.167, №5. – с.967-970.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию изоспектральных краевых задач для операторов Штурма-Лиувилля и Дирака.

Основные выводы исследования заключаются в следующем:

1. Методом обратной спектральной задачи построено семейство изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля при общих краевых условиях и с помощью этой краевой задачи получены решения смешанных задач, поставленных к дифференциальным уравнениям с частными производными гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами;
2. Методом обратной спектральной задачи построено семейство изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля при специальных краевых условиях и с помощью этой краевой задачи найдены решения смешанных задач, поставленных к дифференциальным уравнений с частными производными гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами;
3. Методом обратной спектральной задачи построено семейство изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля при краевом условии Дирихле и с помощью этой краевой задачи получены решения смешанных задач, поставленных к дифференциальным уравнений с частными производными гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами;
4. Методом обратной спектральной задачи построено семейство изоспектральных операторов Дирака при краевом условии Дирихле и с помощью этой краевой задачи найдены решения смешанных задач, поставленных для системы дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа с переменными коэффициентами.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV

MIRZAEV OLIM ERKINOVICH

ISOSPECTRAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE AND DIRAC OPERATORS

01.01.02 - Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand – 2023

The theme of the dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2020.2.PhD/FM510

Dissertation was prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Khasanov Aknazar Bekdurdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Takhirov Jozil Ostonovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Babajanov Bazar Atajanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Urgench branch of the Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi**

Defense will take place « 16 » may 2023 at 10⁰⁰ at the meeting of Scientific Council number DSc 03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered № 59) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on « 12 » 05 2023 year

(Mailing report № 1 on « 27 » 05 2023 year)

A.S.Soleev

Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

A.M.Khalkhuzhaev

Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

A.X.Begmatov

Vice Chairman of the Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to restore the family of isospectral Sturm-Liouville boundary value problems and isospectral Dirac operators using spectral characteristics.

The object of the research work is to determine Sturm-Liouville and Dirac isospectral boundary value problems using the Gelfand-Levitan method using spectral givens.

Scientific novelty of the research work is as follows:

using the method of the inverse spectral problem, a family of isospectral Sturm-Liouville boundary value problems is constructed under general boundary conditions, and with the help of this boundary value problem, solutions of mixed problems posed to differential equations with partial derivatives of hyperbolic and parabolic types with variable coefficients are obtained;

using the inverse spectral problem method, a family of isospectral Sturm-Liouville boundary value problems is constructed under special boundary conditions, and with the help of this boundary value problem solutions of mixed problems posed to partial differential equations of hyperbolic and parabolic types with variable coefficients are determined;

using the method of the inverse spectral problem, a family of isospectral Sturm-Liouville boundary value problems is constructed under the Dirichlet boundary condition, and with the help of this boundary value problem, solutions of mixed problems posed to differential equations with partial derivatives of hyperbolic and parabolic types with variable coefficients are obtained;

using the method of the inverse spectral problem, a family of isospectral Dirac operators is constructed under the Dirichlet boundary condition, and using this boundary value problem, solutions of mixed problems posed for a system of hyperbolic partial differential equations with variable coefficients are determined.

Implementation of the research results. Based on scientific results obtained on isospectral boundary value problems for Sturm-Liouville and Dirac operators:

In the fundamental project No. OT-F4-64 (2017-2020) of the algorithm for the restoration of the isospectral Sturm-Liouville boundary value family of problems on the topic "Development and numerical study of hydrodynamic models of fluid leakage and mass migration in inhomogeneous porous media" in porous media used to solve the inverse spectral problems of determining the coefficients of the improved kinetics equations of the leakage of suspensions forming a precipitate (reference of Samarkand State University named after Sharof Rashidov dated November 1, 2022). The application of scientific results made it possible to determine the value of the parameters characterizing the multi-stage phenomena of sediment formation in the process of seepage of suspensions in underground layers by solving the inverse problem;

From the algorithm for restoring the family of isospectral Dirac operators restored by spectral data and from the method used to find the solution of complex problems put into a system of hyperbolic type equations with some variable coefficients, OT-F4-30 (2017-2020) "Convective migration of a doubly nonlinear cross system , researching the quality properties under the influence of variable density, source or absorption" was used in the research of the quality properties of the filtration processes represented by the double nonlinear parabolic equation (Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, May 15, 2022 reference number 04/11-8173 of December). The use of scientific results made it possible to find the equations of movement of groundwater and to study their solutions.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of introduction, three chapters, conclusion and references. The volume of the dissertation is 111 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (I часть; I part)

1. О.Э.Мирзаев, А.Б.Хасанов. О семействах изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля.// Уфимский математический журнал. – Россия, 2020. – Том 12. – №2. – с. 28-34. (Scopus, IF=0.9).
2. О.Э.Мирзаев, А.Б.Хасанов. Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.// ДАН РУз. – Ташкент, 2020. – №3, – с.3-9. (01.00.00; №07).
3. О.Э.Мирзаев. Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.// Научный вестник СамГУ. – Самарканд, 2020. – №5, – с.60-64. (01.00.00; №02).
4. О.Э.Мирзаев. О изоспектралном операторе Дирака на конечном отрезке.// Научный вестник СамГУ. – Самарканд, 2021. – №1, – с. 16-21. (01.00.00; №02).
5. О.Э.Мирзаев, Ф.Муродов. Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.// Научный вестник СамГУ. – Самарканд, 2020. – №3, – с.50-55. (01.00.00; №02).
6. O.Mirzayev, G‘.Mannonov, H.Normurodov. Izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalar oilasi haqida.// SamDU ilmiy axborotnomasi. – Samarqand, 2019. №5, 23-28. (01.00.00; №02).

II bo‘lim (II часть; II part)

7. Хасанов А.Б., Мирзаев О.Э., Эгамберганова О.Й. Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики. – Фергана, 12-13 март, 2020 г. – с.262-266.
8. Hasanov A.B., Mirzayev O., Xasanov T.G. Fazoviy o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan ozod hadli Korteveg-de Friz tenglamasini davriy funksiyalar sinfida integrallash. Amaliy matematika va informatsion texnologiyalarning dolzarb muammolari. – Toshkent, 14-15 noyabr, 2019. – 21-23 b.
9. Hasanov A.B., Mirzayev O., Mannonov G‘. Izospektral Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari oilasi haqida. Amaliy matematika va informatsion texnologiyalarning dolzarb muammolari. – Toshkent, 14-15 noyabr, 2019. – 23-26 b.
10. О.Э.Мирзаев. Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2020». – Уфа, 11 – 14 ноября 2020 г. – с.127-133.
11. О.Э.Мирзаев. Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар мавзусидаги республика миқёсидаги илмий онлайн конференция материаллари тўплами. – Термиз, 21-23 октябр, 2020 йил. – 134-136 b.

12. О.Э.Мирзаев. Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. «Современные методы математической физики и их приложения». – Тошкент, 17-18 ноября 2020 г. – с.81-86.

13. О.Э.Мирзаев. О изоспектралном операторе Дирака на конечном отрезке. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2021». Уфа, 6 – 9 октября 2021 г. – с.56 – 63.

Avtoreferat Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universitetining
“SamDU ilmiy axborotnomasi” jurnali tahririyatida tahrir qilindi. (15.01.2023 yil).

15.01.2023 yilda bosishga ruxsat etildi.
Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$. “Times New Roman” garniturasi.
Ofset qog‘ozi. Shartli bosma tabog‘i 2,5.
Nashriyot hisob tabog‘i 2,5. Adadi 70 nusxa.7 /1-buyurtma.

“Sardor poligraf” OK bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Samarqand viloyati, Samarqand tumani, “Xishrov” MFY.