O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

MIRZAKABILOV RAVSHAN NARKUZIYEVICH

SOBOLEV FAZOSIDA OPTIMAL AYIRMALI FORMULALAR

01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent-2023

UDK: 519.62

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

MIRZAKABILOV RAVSHAN NARKUZIYEVICH

SOBOLEV FAZOSIDA OPTIMAL AYIRMALI FORMULALAR

01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent-2023

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2019.2.PhD/FM342 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz/) va «Ziyonet» ta’lim axborot tarmog‘ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Shadimetov Xolmatvay Maxkambayevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Hayotov Abdullo Raxmonovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Xudoyberganov Mirzoali Urazaliyevich fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Termiz davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning «___»_________ 2023 yil soat____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil «____» _______________kuni tarqatildi.
(2023 yil «____» ___________ dagi _______ raqamli reestr bayonnomasi).

M.M. Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z.R. Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.

R.D. Aloyev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash huzuridagi ilmiy seminar
raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiya annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida hozirgi vaqtda matematik fizika tenglamalari bilan tafsiflangan fizika va texnikaning koʻpgina masalalarini sonli yechishda chekli ayirmalar usulidan foydalaniladi. Ayirmali usullarning asosiy tushunchalari, bular approksimatsiya, turgʻunlik, yaqinlashish boʻlib, oddiy differensial tenglamalar uchun ayirmali sxemalar misollarida namoyish etiladi. Katta sonli hisoblashlarda oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish jarayonini optimallashtirish foydali boʻladi, agar hisoblashlar ayirmali formulalar yordamida bajarilsa, u holda formulalarni oʻzi ham optimallashtiriladi. Bugungi zamonaviy qarashda ayirmali formulalarni optimallashtirish muammosi bu ayirmali formulalarning xatolik funksionali normasi minimumini izlash muammosi kabi qaraladi. Shu sababli, Sobolev fazolarida optimal ayirmali formulalarni qurish va optimal ayirmali formulalarning xatolik funksionalining normasini topish hisoblash matematikasining dolzarb masalalari boʻlib hisoblanadi.

Hozirgi kunda dunyoda diskret usullar amaliy masalalarda keng qoʻllanilmoqda. Koshi masalasini yechishda diskret usullarining oʻziga xos xususiyati shundaki, izlanayotgan yechimni topish uchun avvaldan hisoblangan taqribiy yechim qiymatlarini yechish jarayoniga qoʻllagan holda algoritmni takrorlashdan iborat boʻladi. Bunung uchun ushbu masalani hal qilishning eng samarali sonli usulini tanlash talab qilinadi. Fazolarda berilgan aniq masalalar sinfi doirasida mumkin boʻlgan xatoliklarni minimallashtiradigan sonli usul - optimal sonli usul deb ataladi. Shuning uchun, Sobolev fazosida Adams tipidagi oshkor va oshkormas optimal ayirmali formulalarni qurish, hamda qurilgan optimal ayirmali formulalar xatolik funksionallarining normalari kvadratlarini hisoblash ustuvor ilmiy tadqiqotlardan biri hisoblanadi.

Mamlakatimizda amaliy masalalarni yechishning optimal sonli usullarini ishlab chiqish va ularning funksional fazolardagi xatoliklarini baholash, xususan, Sobolev fazosida optimal ayirmali, kubatur, interpolyatsion formulalar nazariyalari, hamda differensial operatorlarning diskret analoglarini qurish kabi muhim ilmiy yoʻnalishlarga katta eʼtibor qaratilmoqda. “Matematik va funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, matemtik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika” kabi ustuvor yoʻnalishlar boʻyicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish OʻzR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi[1]. Qaror ijrosini taʼminlash maqsadida funksional fazolarda optimal ayirmali formulalar qurish muhim ahamiyatga ega.

[1] O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to’g’risida”gi PQ-4708-son qarori.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral PF-4947-sonli «Oʻzbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish boʻyicha harakatlar strategiyasi toʻgʻrisida»gi, 2022 yil 28 yanvar PF-60 sonli «2022-2026 yillarga moʻljallangan Yangi Oʻzbekistonning taraqqiyot strategiyasi toʻgʻrisida»gi farmonlari, 2017 yil 17 fevral PQ-2789-sonli «Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida»gi, 2017 yil 20 aprel PQ-2909-sonli «Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida»gi, 2018 yil 27 aprel PQ-3682-sonli «Innovatsion gʻoyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida»gi, 2020 yil 7 may PQ-4708-sonli «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida»gi qarorlari, hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yoʻnalishlariga bogʻliqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yoʻnalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning oʻrganilganlik darajasi. Oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishda ayirmali formulalarni qurish va tuzilgan formulalarning xatoligini baholashni oʻrganish boʻyicha olib borilgan ilmiy izlanishlar natijasida dunyoda bir qator dolzarb muammolar hal qilingan, shu jumladan quyidagi ilmiy natijalarga erishilgan. Oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini sonli yechishda hisoblash usullari bu masalalar yechimini ifodalovchi funksiyalarni taqribiy aniqlashga xizmat qiladi. Funksiya uchun eng qulay sonli ifodalarni topish masalasi va uning bunday yaqinlashuvchanligini takomillashtirish usullari bilan bogʻlanishi amaliy hisob-kitoblarda muhim oʻrin tutadi. Muayyan masalaning oʻziga xos xususiyatlarini hisobga olgan holda, jarayonni sezilarli darajada tezlashtirish mumkin.

Ma’lumki, bir qator ishlar oddiy differensial tenglamalarni sonli yechishga bagʻishlangan. Marko Berardi, Luciano Lopez ishida k-qadamli Adams-Bashfort usulidagi interpolyatsiyali koʻphad toʻrdan tashqari nuqtalarda sonli yechimni hisoblashda foydalanish mumkinligi isbotlangan. N.G.Chikurov oddiy differensial tenglamalar sistemalarini Shennon shakliga keltirishga asoslangan sonli yechish usulini koʻrib chiqqan. Yogita Sukale, Varsha Daftardar-Gejji oʻz ishlarida yangi iteratsion usul bilan improvizatsiya qilish yordamida Adams-Multon usullarini ishlab chiqdilar. Shirley Abelman, Kailash C. Patidarlar yonish tenglamasini qattiq oddiy differentsial tenglamalar sinfi nomzodlaridan biri sifatida koʻrib chiqishgan. Yechim $\delta > 0$ ga teskari proporsional vaqt oraligʻida qidirilgan (bu yerda $\delta > 0$ yonishdan oldingi holatning kichik gʻalayonlanishi). Adekoya Odunayo M. va Z.O. Ogunwobi ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamada Adams-Bashfort-Moulton usullarini va Miln-Simpson usullarini solishtiradi. Sajal K. Karning ishida Adams-Bashfort sxemasidan foydalangan holda vaqt boʻyicha yangi prediktor-korrektor ayirmali sxemasi kiritiilgan. Beuken L., Cheffert O., Tutueva A., Butusov D., Legat V. ishlarida yarim oshkor va yarim oshkormas hollari uchun prediktor-korrektor usullarning sonli turg‘unligi va samaradorligi isbotlangan. Tutueva A., Butusov D. prediktor-korrektorning odatdagi algoritmlariga qaraganda, yarim oshkor usullari yuqori sonli turg‘unlikka egaligini oshkor ko‘rsatishgan. G. Singh, V. Kanvar va Saurabx Bhatiya o‘z ishida oddiy differensial tenglamalarni sonli integrallash uchun ikki qadamli Adams-Bashfort usulining va bir qadamli Adams-Multon usulining yangi variantlarini taklif qildilar.

Shuni ta’kidlash joizki, S.L.Sobolev, V.L.Vaskevich, I.Babushka, G.Dahlkvist, G.N.Salixov, M.I.Isroilov, M.D.Ramazanov, V.I.Polovinkin, B.G.Gabdulxayev, I.V.Boykov, X.M.Shadimetov, A.R.Hayotov, F.A.Nuraliyev, D.M.Axmedov, S.S.Azamov, A.K. Boltayevlarning ilmiy ishlarida funksional fazolarda kubatur, kvadratur, interpolyatsion va ayirmali formulalarni optimallashtirish masalalari o‘rganilgan va rivojlantirilgan. M.M.Aripov va shogirdlarining ishlarida esa chiziqli bo‘lmagan parabolik tenglamalar yechimlarining asimptotik avtomodel ko‘rinishlari qurilgan. Giperbolik tenglamalar sistemalarini taqribiy yechish uchun turli xil ayirmali sxemalarining turg‘unligi R.D.Aloyev va boshqalar tomonidan o‘rganilgan.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining ilmiy-tadqiqot rejalarining OT-F4-86 “Gilbert fazolarida differensial va integral tenglamalarni taqribiy yechishning optimal metodlarini ishlab chiqish” va YOFA-Ftex-2018-13 “Singulyar tenglamalarni taqribiy-analitik yechishning optimal algoritmlarini ishlab chiqish” mavzularidagi loyihalari doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish uchun oshkor va oshkormas optimal ayirmali formulalarni qurish va differensiallanuvchi funksiyalar sinflarida ularning xatolik funksionali normalarini hisoblashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida har qanday $m \geq 2$ uchun ayirmali formulaning ℓ xatolik funksionali normasi kvadratining ko‘rinishini topish;

optimal ayirmali formulaning koeffisientlari uchun Viner – Xopf tipidagi tenglamalar sistemasini olish, hamda ushbu sistema yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash;

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida har qanday $m \geq 2$ uchun optimal ayirmali formulalarni qurish algoritmini ishlab chiqish;

$L_2^{(2)}(0,1)$ va $L_2^{(3)}(0,1)$ fazolarida ishlab chiqilgan algoritmni qo‘llab, Adams tipidagi optimal ayirmali formulaning koeffitsientlarini topish.

Tadqiqotning ob’ekti Oddiy differensial tenglamalar, oshkor va oshkormas optimal ayirmali formulalari, oshkor va oshkormas ayirmali formulalar uchun xatolikni baholash.

Tadqiqotning predmeti. Ekstremal funksiyalar, oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish uchun oshkor va oshkormas optimal ayirmali formulalar.

Tadqiqot usullari. Tadqiqot ishida hisoblash matematikasi va funksional analiz, hamda differensial tenglamalar nazariyasi, umumlashgan funksiyalar, diskret argumentli funksiyalar usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida har qanday $m \geq 2$ uchun ayirmali formula ℓ xatolik funksionali normasi kvadratining koʻrinishini ushbu funksionalning ekstremal funksiyasidan foydalanib topilgan;

optimal ayirmali formulaning koeffisientlari uchun Viner – Xopf tipidagi tenglamalar sistemasi olingan, hamda ushbu sistema yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan;

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida har qanday $m \geq 2$ uchun optimal ayirmali formulalarni qurish algoritmi differensial operatorning diskret analogidan foydalaninb ishlab chiqilgan;

$L_2^{(2)}(0,1)$ va $L_2^{(3)}(0,1)$ fazolarida Adams tipidagi optimal ayirmali formulalar qurilgan hamda ushbu ayirmali formulalarning koeffisiyentlari yordamida xatolik funksionali normalarining kvadratlari hisoblangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

olingan ilmiy natijalardan foydalanish geologiya va geofizika masalalarini yechish uchun yangi optimal algoritmlarni yaratish imkonini berdi;

amalda qoʻllaniladigan oldindan mavjud usul rezonans sohasida dissipativ mexanik tizimlar uchun qoʻllanilmasligini hisobga olgan holda dissertatsiyada olingan ilmiy natijalar elastik va yuqori elastik uch qatlamli qobiq elementlaridan tashkil topgan quvurning tebranish nazariyasini yangilash va rivojlantirishga xizmat qiladi.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi ayirmali formulalar nazariyasi, hisoblash matematikasi, funksional analiz va diskret argumentli funksiyalar nazariyasi usullari qoʻllanilganligi, hamda matematik mulohazalarning qat’iyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati dissertatsiya ishida Sobolev fazosida oddiy differensial tenglamalarni taqribiy hisoblash uchun oshkor va oshkormas koʻrinishdagi optimal ayirmali formulalarni qurish ishlab chiqilganlgi bilan izohlanadi.

Ushbu ishda olingan optimal oshkor va oshkormas koʻrinishdagi ayirmali formulalar fizika, mexanika, elastiklik nazariyasi va boshqa fanlarning koʻplab masalalarini, oddiy differensial tenglamalar ko`rinishiga keltirilgan holda, sonli yechish uchun qoʻllaniladi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Sobolev fazosida oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish uchun optimal ayirmali formulalarni qurish bo‘yicha olingan ilmiy natijalar asosida:

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida har qanday $m \geq 2$ uchun ayirmali formula ℓ xatolik funksionali normasi yordamida olingan bahodan OT-F4-01 – “Qovushqoq suyuqlik oquvchi ko‘p qatlamli kompozit quvurlar egri chiziqli bo‘laklarining harorat va dinamik yuklanishlar ta‘sirida chiziqli bo‘lmagan dinamik kuchlanish-deformatsiya holatini o‘rganish usullarini ishlab chiqish va nazariyasini rivojlantirish” fundamental loyihasida uch qavatli qoplama quvurlarining atrof-muhit bilan o‘zaro ta’sirini ko‘rib chiqish bilan bog‘liq muammolarni hal qilish uchun foydalanilgan (Toshkent kimyo-texnologiya institutining 2022 yil 17 yanvardagi 1/01-86-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, elastik va qovushqoq elastik uch qatlamli qobiqsimon elementlardan tashkil topgan quvurning tebranishlari rezonans sohasida oldingi mavjud bo‘lgan, amaliyotda qo‘llanilayotgan metodikani dissipativ mexanik sistemalar uchun o‘rinli bo‘lmasligini hisobga olib, uni yangilashga va nazariyani rivojlantirishga imkon bergan;

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida optimal ayirmali formulalar koeffisiyentlari uchun olingan Viner – Xopf tipidagi tenglamalar sistemasining analitik yechimidan OT-Atex-2018-340-“Ikki tezlikli muhit dinamikasining amaliy geofizik masalalarini nazariy va sonli tadqiq qilish” amaliy loyihasida nazariy va amaliy geofizik masalalarga kiritilgan differensial tenglamalar yechimini ikki tezlikli dinamik muhitda taqribiy hisoblashda foydalanilgan. (Qarshi davlat universitetining 2022-yil 19 dekabrdagi 04/5168-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo’llanilishi geologiya va geofizika masalalarini yechish uchun yangi optimal algoritmlar qurish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 8 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 6 ta xalqaro va 2 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinishi.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 13 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashirlarda 5 ta maqola, shu jumladan, 2 tasi xorijiy va 3 tasi respublika jurnallarida chop etilgan hamda elektron hisoblash mashinalari uchun dasturni rasmiy ro‘yxatdan o‘tkazish to‘g‘risidagi bitta guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 93 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’yekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning « $L_2^{(m)}(0,1)$ **Sobolev fazosida ayirmali usullarini optimallashtirish**» deb nomlangan birinchi bobida Sobolev fazosida optimal ayirmali formulalarni o‘rganishga bag‘ishlangan. Dissertatsiyaning ushbu bobida ayirmali formulalarni qurish masalalari, ya’ni, algebraik va funksional tarzda masalaning qo‘yilishi keltirilgan.

Qaralayotgan masalaning funksional qo‘yilishida $\varphi(x)$ funksiyalar Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosiga tegishli bo‘lib, bu yerda $L_2^{(m)}$ gilbert fazosi $m-1$ darajali ko‘phad bilan bir-biridan farq qiluvchi hamda $m-$ tartibli hosilalari $[0,1]$ oraliqda kavdarati bilan integrallanuvchi haqiqiy funksiyalar sinfidir.

Ayirmali fomrulaning ℓ xatolik funksionali normasining aniq ko‘rinishini topish uchun ushbu funksionalning ekstremal funksiyasidan foydalanamiz. Keyinchalik esa har qanday $m \geq 2$ uchun $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida ekstremal funksiyani topamiz.

Ayirmali formulaning ℓ xatolik funksionali normasining kvadratini $C^{(1)}[\beta]$ koeffisientlar orqali minimallashtirish natijasida ayirmali formulaning $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta]$ optimal koeffisientlarini topish uchun Viner-Xopf tipidagi sistema olinadi va $\overset{\circ}{P}_{m-2}[\beta]$ diskret argumentli optimal ko‘phad topiladi. Bu yerda Viner-Xopf tipidagi sistema yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Shu bilan birga, ushbu bobda har qanday $m \geq 2$ uchun $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida optimal ayirmali formula qurishning algoritmi ishlab chiqilgan, hamda uning yordamida Adams tipidagi optimal ayirmali formulaning koeffisientlari ko‘rinishlari olingan.

Aytaylik $y(0) = y_0$ boshlang‘ich shart bilan berilgan

$$y' = f(x, y)$$

differensial tenglamaning yechimini [0,1] kesmada topish talab qilinsin. Biz bu kesmani $h = \frac{1}{N}$ uzunlikdagi N ta bo‘laklarga bo‘lamiz va izlanayotgan $y(x)$ yechimning taqribiy y_n yechimini $x_n = nh$, $n = 0,1,...,N$ nuqtalarda izlaymiz. Buning uchun quyidagi umumiy ko‘rinishdagi ayirmali formulani qaraymiz

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta] \cong 0, \tag{1}$$

xatolik funksionali

$$\ell=\sum_{\beta=0}^{k}C[\beta]\delta(x-h\beta)+h\sum_{\beta=0}^{k}C^{(1)}[\beta]\delta'(x-h\beta). \qquad (2)$$

Bu yerda $[\beta]=h\beta,\ h\beta\in[0,1],\ h=\frac{1}{N},\ N=2,3,...,\ \beta=0,1,...,k,\ k=1,2,3...,\ C[\beta]$ va $C^{(1)}[\beta]$ ayirmali formulaning koeffisientlari va $C[k]\neq 0,\ \delta(x)$ - Dirakning delta-funksiyasi, φ esa $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosining elementi. (1) ayirmali formula k – tartibli deb ataladi. k – tartibli ayirmali formula oshkormas deyiladi agar $C^{(1)}[k]\neq 0$ bo‘lsa, agar $C^{(1)}[k]=0$ bo‘lsa, u holda oshkor bo‘ladi. Quyidagi ayirma

$$(\ell,\varphi)=\sum_{\beta=0}^{k}C[\beta]\varphi[\beta]-h\sum_{\beta=0}^{k}C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta]. \qquad (3)$$

(1) ayirmali formulaning xatoligi deyiladi.

Koshi-Shvars tengsizligiga asosan

$$|(\ell,\varphi)|\leq\|\varphi\,|\,L_2^{(m)}\|\cdot\|\ell\,|\,L_2^{(m)*}\|,$$

ya’ni, (3) ayirmaning absolyut xatoligi ℓ xatolik funksionali normasi yordamida baholanadi:

$$\left\|\ell\,|\,L_2^{(m)*}\right\|=\sup_{\varphi,\left\|\varphi|L_2^{(m)}\right\|=1}|(\ell,\varphi)|.$$

Shunday qilib, (1) ayirmali formula (3) ayirmaning yuqori bahosi $L_2^{(m)}$ fazosidagi funksiyalarga mos keluvchi $L_2^{(m)*}$ qo‘shma fazosiga tegishli ℓ xatolik funksionali normasini topish bilan ifodalanadi.

(1) ko‘rinishdagi ayirmali formulalarni qurishning asosiy masalalaridan biri bu $L_2^{(m)}(0,1)$ fazoda optimal ayirmali formulalarni olishdir.

Birinichi bobining 1.1-paragrafi yordamchi bo‘lib, ta‘riflardan, ba‘zi bir formulalardan va natijalardan foydalanib, ushbu ishning asosiy natijalarini isbotlashda qo‘llanilgan. 1.2-paragrafda ayirmali formulaning ekstremal funksiyasi topilgan.

Quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi $\psi_\ell(x)\in L_2^{(m)}(0,1)$ funksiyaga

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell\,|\,L_2^{(m)*}\right\|\cdot\left\|\psi_\ell\,|\,L_2^{(m)}\right\|$$

ℓ xatolik funksionalining ekstremal funksiyasi deyiladi.

Quyidagi o‘rinli

Teorema 1. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida ℓ xatolik funksionalining ekstremal funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+P_{m-2}(x), \qquad (4)$$

bu yerda $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ operatorning $G_m(x)-$ Grin funksiyasi va

$$G_m(x)=\frac{x^{2m-1}signx}{2(2m-1)!}, \tag{5}$$

$P_{m-2}(x)$ esa $m-2$ darajali ko‘phad.

1.3-paragrafda (1) ayirmali formulaning xatolik funksionali normasining kvadrati uchun aniq ifoda topilgan. Quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 2. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida (1) ayirmali formulaning xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagi

$$\left\|\ell\,|\,L_2^{(m)*}\right\|^2=(-1)^m\left[\sum_{\gamma=0}^{k}C[\gamma]\sum_{\beta=0}^{k}C[\beta]G_m(h\gamma-h\beta)-\right.$$
$$\left.-2h\sum_{\gamma=0}^{k}C^{(1)}[\gamma]\sum_{\beta=0}^{k}C[\beta]G_m^{'}(h\gamma-h\beta)-h^2\sum_{\gamma=0}^{k}C^{(1)}[\gamma]\sum_{\beta=0}^{k}C^{(1)}[\beta]G_m^{''}(h\gamma-h\beta)\right].$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda

$$G_m^{'}(x)=\frac{x^{2m-2}signx}{2(2m-2)!}\text{va }G_m^{''}(x)=\frac{x^{2m-3}signx}{2\cdot(2m-3)!}.$$

$L_2^{(m)}(0,1)$ fazoda (2) xatolik funksionali bilan berilgan (1) ko‘rinishdagi optimal ayirmali formulani qurish masalasi

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\middle|L_2^{(m)*}(0,1)\right\|^2=\inf_{C^{(1)}[\beta]}\left|(\ell,\psi_\ell)\right| \tag{6}$$

kattalikning qiymatini topishdan iborat.

1.4-paragrafda, ℓ xatolik funksionali normasining kvadratini

$$\left(\ell,x^\alpha\right)=0,\quad \alpha=0,1,...,m-1, \tag{7}$$

shartlarda minimumga erishtiradigan $C^{(1)}[\beta]$ koeffitsientlari uchun

$$h\sum_{\gamma=0}^{k}C^{(1)}[\gamma]G_m^{''}[\beta-\gamma]+P_{m-2}[\beta]=-\sum_{\gamma=0}^{k}C[\gamma]G_m^{'}[\beta-\gamma].\ \beta=0,1,...,k. \tag{8}$$

$$h\alpha\sum_{\gamma=0}^{k}C^{(1)}[\gamma][\gamma]^{\alpha-1}=\sum_{\gamma=0}^{k}C[\gamma][\beta]^\alpha,\alpha=1,...,m-1. \tag{9}$$

Viner-Xopf tipidagi sistema olingan.

Bu yerda $C[\beta]$ koeffisientlar ayirmali formulaning Dalkivist ma‘nosida turg‘unligi va $\sum_{\gamma=0}^{k}C[\gamma]=0$ shartlardan aniqlanadi. (8) va (9) tenglamalar sistemasi yechiming yagonaligi tadqiq qilingan. Shu bilan birga, bu sistemaning yechimi (7) sistemaning yechimlari to‘plami bo‘yicha $\|\ell\|^2$ ga lokal minimum berishi isbotlangan.

1.5-paragrafda, $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida optimal ayirmali formula qurishning algoritmi keltirilgan. 1.6-paragrafda esa Adams tipidagi ayirmali formula qaraladi.

Quyidagi ko‘rinishdagi

$$\varphi[k]-\varphi[k-1]-h\sum_{\beta=0}^{k}C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta]\cong 0$$

ayirmali formulaga Adams tipidagi ayirmali formula deyiladi. Bu formula (1) formuladan

$$C[\beta]=\begin{cases}1 & \beta=k,\\ -1 & \beta=k-1,\\ 0 & 0\le\beta\le k-2.\end{cases}$$

shart bajarilganda olingan. Bu yerda quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 3. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida $m\ge 3$ bo‘lganda Adams tipidagi ayirmali formulaning $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta],\ \beta=0,1,2,\dots,k-1$ optimal koeffisienlarining ko‘rinishi quyidagicha

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[0]=-\frac{1}{2(k-1)}+\sum_{j=1}^{m-2}\left[\frac{(a_j-b_j)(\lambda_j-\lambda_j^k)}{(k-1)(1-\lambda_j)^2}-\frac{a_j\lambda_j-b_j\lambda_j^{k-1}}{1-\lambda_j}\right]$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta]=\sum_{j=1}^{m-2}\left(a_j\cdot\lambda_j^{\beta}+b_j\lambda_j^{k-1-\beta}\right),\qquad \beta=1,2,\dots,k-2,$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[k-1]=\frac{2k-1}{2(k-1)}-\sum_{j=1}^{m-2}\left[\frac{(a_j-b_j)(\lambda_j-\lambda_j^k)}{(k-1)(1-\lambda_j)^2}-\frac{a_j\lambda_j^{k-1}-b_j\lambda_j}{1-\lambda_j}\right].$$

Bu yerda λ_j lar $2m-4$ darajali $E_{2m-4}(\lambda)$ Eyler ko‘phadining modul jihatdan 1 dan kichik ildizlari, ya’ni, $|\lambda_j|<1$, a_j va b_j noma’lum elementlar.

Dissertatsiyaning «$L_2^{(2)}(0,1)$ **fazosida optimal ayirmali formulalar**» deb nomlangan ikkinchi bobi $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida oshkor va oshkormas optimal ayirmali formulalarni qurishga bag‘ishlangan. Dissertatsiyaning ushbu bobida $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida har qanday natural k lar uchun oshkor va oshkormas optimal ayirmali formulalar qurilgan. Undan tashqari, $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida oshkor va oshkormas optimal ayirmali formulalarning xatolik funksionali normasining kvadrati hisoblangan, ya’ni, xatoliklarning baholari olingan.

Shuni ta’kidlash joizki, $L_2^{(2)}(0,1)$ Sobolev fazosida qurilgan oshkor optimal ayirmali formula ma’lum Eyler ayirmali formulasi bo‘lib chiqdi.

Ushbu bobning asosiy natijalari quyidagilardan iborat.

Teorema 4. $L_2^{(2)}(0,1)$ Sobolev fazosida Adams tipidagi oshkor optimal ayirmali formula yagona mavjudki,

$$\varphi[k]-\varphi[k-1]-h\sum_{\beta=0}^{k-1}C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta]\cong 0\,, \tag{10}$$

uning koeffisientlari quyidagi

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta]=\begin{cases}1, & \beta=k-1,\\ 0, & 0\le\beta\le k-2\end{cases}$$

formula orqali aniqlanadi.

Teorema 5. $L_2^{(2)}(0,1)$ Sobolev fazosida Adams tipidagi oshkormas optimal ayirmali formula yogana mavjudki

$$\varphi[k]-\varphi[k-1]-h\sum_{\beta=0}^{k}C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta]\cong 0 \qquad (11)$$

uning koeffisientlari quyidagi

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta]=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \beta=k,\\ \frac{1}{2}, & \beta=k-1,\\ 0, & \beta=1,2,...,k-2.\end{cases}$$

formula orqali aniqlanadi.

Teorema 6. $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida (10) ko‘rinishidagi oshkor optimal ayirmali formula xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagi

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}{}_N^{ya}\left|L_2^{(2)*}\right.\right\|^2=\frac{h^3}{3}$$

formula orqali aniqlanadi.

Teorema 7. $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida (11) ko‘rinishidagi oshkormas ko‘rinishidagi barcha ayirmali formulalar orasida shunday optimal ayirmali formula mavjudki, uning xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagi

$$\left\|\ell_N^{n.ya}\left|L_2^{(2)*}\right.\right\|^2=\frac{h^3}{12}$$

formula orqali aniqlanadi.

Dissertatsiyaning «$L_2^{(3)}(0,1)$ **fazosida optimal ayirmali formulalar**» deb nomlangan uchinchi bobi $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida oshkor optimal ayirmali formulalarni qurishga bag‘ishlangan.

Ushbu bobda $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida har qanday natural k lar uchun oshkor optimal ayirmali formulalar qurilgan. Bu yerda oshkor optimal ayirmali formulaning xatolik funksionali normasining kvadratini topishda muhim bo‘lgan optimal ko‘phad topilgan. $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida oshkor optimal ayirmali formulalarning xatolik funksionali normasi hisoblangan, ya’ni, xatoliklarning baholari olingan.

Undan tashqari, $m-2$ darajali diskret argumentli optimal ko‘phad yordamida $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida oshkor optimal ayirmali formulaning xatolik funksionali normasi uchun yangi formula olingan. Keyinchalik qurilgan oshkor optimal ayirmali formula yordamida Koshi masalalari sonli yechilgan.

Ushbu bobning assosiy natijalari quyidagilardan iborat.

Teorema 8. $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida (10) Adams tipidagi yogana oshkor optimal ayirmali formula mavjud bo‘lib, uning koeffisientlari quyidagi

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[0] = -\frac{1}{k-1} - \frac{\lambda^{k-1}(\lambda+2)}{\lambda^{2k-2}-1},$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta] = \frac{3\lambda^{k-1}\left(\lambda^{\beta}-\lambda^{-\beta}\right)}{\lambda^{2k-2}-1},\ \beta = 1,2,\ldots,k-2,$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[k-1] = 1 + \frac{3}{1-\lambda} + \frac{\lambda+2}{\lambda^{2k-2}-1},$$

formulalar orqali aniqlanadi. Bu yerda $\lambda = \sqrt{3}-2.$

Teorema 9. $\overset{\circ}{P}_1[\beta] = b_0[\beta] + b_1$ optimal ko‘phad quyidagi formula orqali aniqlanadi, ya’ni

$$\overset{\circ}{P}_1[\beta] = -\frac{h^3}{6}\left(\frac{\lambda(\lambda^{k-3}+1)}{4(\lambda^{k-1}+1)}+1\right)[\beta] + \frac{h^4}{48}\left(8k-7+\frac{2(k-1)\lambda(\lambda^{2k-4}-1)}{\lambda^{2k-2}-1}\right),$$

bu yerda $\lambda = \sqrt{3}-2.$

Teorema 10. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida (10) Adams tipidagi oshkor optimal ayirmali formula xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagi

$$\left\|\ell \left| L_2^{(m)*}\right.\right\|^2 = (-1)^m\left(-\frac{h^{2m-1}}{(2m-1)!} + h\sum_{\gamma=0}^{k-1}\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\gamma]\left(\overset{\circ}{P}_{m-2}[\gamma] + f_m[\gamma]\right)\right)$$

formula orqali aniqlanadi. Bu yerda $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\gamma]$ lar oshkor ayirmali formulaning optimal koeffisientlari, $\overset{\circ}{P}_{m-2}[\gamma]$ esa $[\gamma] = h\gamma$ diskret argumentli $m-2$ darajali ko‘phad.

Teorema 11. $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida (10) Adams tipidagi oshkor optimal ayirmali formula xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagi

$$\left\|\overset{\circ}{\ell} \mid L_2^{(3)*}\right\|^2 = \frac{h^5}{24}\left(2k+1{,}2+\frac{(4k-2)(\lambda^k-\lambda^{k-2})+\lambda^{2k-3}-\lambda}{2(\lambda^{2k-2}-1)}\right)$$

formula orqali aniqlanadi. Bu yerda $\lambda = \sqrt{3}-2.$

3.4-paragraf “Sonli natijalar” da $L_2^{(3)}(0,1)$ Sobolev fazosida qurilgan k qadamli oshkor optimal ayirmali formulalar yordamida Koshi masalasi sonli yechilgan. Olingan natijalar Eyler va takomillashtirilgan Eyler usullarida olingan sonli natijalar bilan taqqoslangan.

XULOSA

Dissertatsiya ishi oddiy differensial tenglamalarga qo‘yilgan Koshi masalasini taqribiy yechish uchun oshkor va oshkormas optimal ayirmali formulalarini qurish va ularning Sobolev fazosida xatolik funksionali normalarini hisoblashga bag‘ishlangan.

Xulosa qilib aytganda, tadqiqot natijalariga ko‘ra quyidagi xulosalar chiqarish mumkin:

1. $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida ayirmali formulalarning ekstremal funksiyasi topilgan;
2. $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida ayirmali formulalarning xatolik funksionali normasining ko‘rinishi olingan;
3. Har qanday $m \geq 2$ uchun $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida optimal ayirmali formulaning koeffisientlari uchun Viner-Xopf tipidagi sistema olingan. Olingan sistema yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan;
4. $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida k qadamli oshkor va oshkormas optimal ayirmali formulalar qurilgan;
5. $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida oshkor va oshkormas optimal ayirmali formulalarning xatolik funksionali normasi hisoblangan, ya’ni, xatoliklarning baholari olingan;
6. $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida k qadamli oshkor optimal ayirmali formulalar qurilgan va ularning xatoliklari baholari olingan;
7. $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida oshkor optimal ayirmali formulalarning xatolik funksionali normasining kvadratini topishda muhim bo‘lgan $m-2$ darajali diskret argumentli optimal ko‘phad topilgan;
8. $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida oshkor optimal ayirmali formulalarning xatolik funksionali normasi uchun formula olingan;
9. Qurilgan oshkor optimal ayirmali formulalar yordamida Koshi masalasi sonli yechilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

МИРЗАКАБИЛОВ РАВШАН НАРКУЗИЕВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2023

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрированна в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.2.PhD/FM342.

Диссертация выполнена в Институте Математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Хаётов Абдулло Рахмонович** доктор физико-математических наук, профессор
	Худойберганов Мирзоали Уразалиевич доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Термезский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2023 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2023 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2023 года).

М.М. Арипов
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире в настоящее время при численном решении многих задач физики и техники, описываемых уравнениями математической физики, используется метод конечных разностей. Основные понятия разностных методов - это аппроксимация, устойчивость, сходимость, которые иллюстрируются на примерах разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений. При больших численных расчетах становится полезным оптимизировать процесс приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а если вычисления производятся с помощью разностных формул, то оптимизируются и сами формулы. Проблема оптимизации разностных формул в современном понимании выглядит как проблема отыскания минимума нормы функционала погрешности разностной формулы. Поэтому построение оптимальных разностных формул в пространствах Соболева и нахождение нормы функционала погрешности оптимальных разностных формул являются актуальными задачами вычислительной математики.

В настоящее время в мире дискретные методы находят наиболее широкое применение в прикладных задачах. Характерная особенность дискретных методов для решения задачи Коши заключается в том, что процесс решения состоит в повторении алгоритма для получения искомого решения с использованием известных, ранее вычисленных значений приближенных решений. Для этого требуется выбрать наилучший численный метод решения данной задачи. Численный метод называться оптимальным, если он минимизирует максимум возможных ошибок в пределах заданного четко определенного класса задач в пространствах. Поэтому построение оптимальных явных и неявных разностных формул типа Адамса и вычисления квадрата нормы этих оптимальных разностных формул в пространстве Соболева является одним из приоритетных научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется такому важному направлению, как разработка оптимальных численных методов решения прикладных задач и их оценки погрешностей в функциональных пространствах, в частности, теории оптимальных разностных, кубатурных, интерполяционных формул в пространстве Соболева и в построении дискретных аналогов дифференциальных операторов. В деятельности Института математики имени В.И. Романовского АН РУз проводятся научные исследования на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям как «Математический и функциональный анализ, алгебра, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, математической физики, математического моделирования, вычислительной и дискретной математики»[2]. Для обеспечения выполнения постановления важно создать оптимальные разностные формулы в функциональных пространствах.

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, поставленных в Указе Президента Республики Узбекистан УП –№ 4947 от 07 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-№60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», в постановлениях ПП – № 2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», ПП – № 2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», ПП –№ 3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», ПП – № 4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно–правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В результате научных исследований проведенных по построению разностных формул для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и по изучению оценки погрешностей построенных формул в мире решены целый ряд актуальных задач. При численном решении задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений вычислительные методы служат для приближенного определения функций, представляющих решение этих задач. Задача поиска наиболее удобных численных выражений функции и ее связь с методами улучшения таких приближений играют важную роль в практических расчетах. Учитывая специфику конкретной задачи, можно значительно ускорить процесс.

Известно, что численному решению обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены ряд работ. В работе Marco Berardi, Luciano Lopez доказано, что интерполяционный полином в методе Адамса-Башфорта с k-шагом может использоваться для вычисления численного решения в точках вне сетки. N.G.Chikurov рассмотрел численный метод решения, основанный на приведении систем обыкновенных дифференциальных уравнений к форме Шеннона. Yogita Sukale, Varsha Daftardar-Gejji разработали методы Адамса-Мултона которые импровизируются с использованием нового итеративного метода. Shirley Abelman, Kailash C. Patidar рассмотрели уравнение горения как одно из кандидатов из класса жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Ищется решение в течении времени, обратно пропорционального $\delta > 0$ (где $\delta > 0$ - небольшое возмущение состояния перед зажиганием). Adekoya Odunayo M. и Z.O. Ogunwobi сравнивали методы Адамса-Башфорта-Мултона и методы Милна-Симпсона для дифференциального уравнений второго порядка. В работе Sajal K. Kar вводится новая схема разности времени предиктор-корректор, использующая схему Адамса-Башфорта. В работе Beuken L., Cheffert O., Tutueva A., Butusov D., Legat V. доказаны численная устойчивость и производительность полуявных и полунеявных методов предиктора-корректора. Tutueva A., Butusov D. явно показывают, что полуявные методы обладают более высокой численной устойчивостью, чем обычные алгоритмы предиктора-корректора. В своей работе G. Singh, V. Kanwar, Saurabh Bhatia предлагают новые варианты двухшагового метода Адамса-Башфорта и одношагового метода Адамса-Мултона.

Следует отметить, что в работах С.Л.Соболева, В.Л.Васкевича, И.Бабушки, Г.Дальквиста, Г.Н.Салихова, М.И.Исраилова, М.Д.Рамазанова, В.И.Половинкина, Б.Г.Габдулхаева, И.В.Бойкова, Х.М.Шадиметова, А.Р.Хаётова, Ф.А.Нуралиева, Д.М.Ахмедова, С.С.Азамова, А.К.Болтаева были рассмотрены задачи оптимизации кубатурных, квадратурных, интерполяционных и разностных формул в функциональных пространствах. А в работах М.М.Арипова и его учеников построены асимптотические представления автомодельных решений нелинейных параболических уравнений. Устойчивость различных разностных схем для приближенного решения систем гиперболических уравнений исследован Р.Д.Алоевым и др.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательской организации, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ОТ-Ф4-86 «Разработка оптимальных методов приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений в пространствах гильберта» и ЁФА-Фтех-2018-13 «Оптимальные алгоритмы приближенно– аналитического решения сингулярных уравнений» Института математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Целью исследования является построение явных и неявных оптимальных разностных формул для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и вычисление норм их функционалов погрешностей на классах дифференцируемых функций.

Задачи исследования.

найти выражение квадрата нормы функционала погрешности ℓ разностной формулы в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$;

получить систему типа Винера – Хопфа для коэффициентов оптимальной разностной формулы и доказать существование и единственность решения этой системы;

разрабатывать алгоритм для построения оптимальных разностных формул в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$;

найти коэффициенты оптимальной разностной формулы типа Адамса в пространствах $L_2^{(2)}(0,1)$ и $L_2^{(3)}(0,1)$ применяя разработаный алгоритм.

Объект исследования. Обыкновенные дифференциальные уравнения, явные и неявные разностные формулы, оценка погрешности явных и неявных разносных формул.

Предмет исследования. Экстремальные функции, оптимальные явные и неявные разностные формулы для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Методы исследования. В исследовательской работе использованы методы вычислительной математики и функционального анализа, а также теории дифференциальных уравнений, обобщенных функций, функций дискретного аргумента.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найден явный вид квадрата нормы функционала погрешности ℓ разностной формулы с помощью экстремальной функции этого функционала в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$;

получена система типа Винера – Хопфа для коэффициентов оптимальной разностной формулы и доказаны существование и единственность решения этой системы;

разработан алгоритм для построения оптимальных разностных формул используя дискретный аналог дифференциального оператора в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$;

построены оптимальные разностные формулы типа Адамса в пространствах $L_2^{(2)}$ и $L_2^{(3)}$, а также с помощью коэффициентов этих разностных формул вычислены квадраты норм функционала погрешности.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

использование полученных научных результатов позволило построить новые оптимальные алгоритмы решения задач геологии и геофизики;

научные результаты, полученные в диссертации, с учетом того, что ранее существовавшая методика, использовавшаяся на практике, не находит применения для диссипативных механических систем в области резонанса, служат актуализации и развитию теории колебания трубы, состоящей из упругих и вязкоупругих трехслойных оболочечных элементов.

Достоверность результатов исследования основана на применении теории разностных формул, вычислительной математики, функционального анализа, теории функций с дискретного аргумента и строгости математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость полученных результатов диссертационной работы заключается в том, что построены оптимальные явные и неявные разностные формулы для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве Соболева.

Полученные в данной работе оптимальные явные и неявные разностные формулы применяются для численного решения задач физики, механики, теории упругости и других наук, которые естественным образом сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов по построению оптимальных разностных формул приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве Соболева:

оценка полученная с помощью нормы функционала погрешности ℓ разностной формулы в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$, использована для решения вопросов, связанных с рассмотрением взаимодействия трехслойных оболочечных труб с окружающей средой в фундаментальном проекте ОТ-Ф4-01 - «Разработка и теоретическое развитие методов исследования нелинейных динамических напряженно-деформированных состояний криволинейных участков многослойных композитных труб с течением вязкой жидкости под действием температурных и динамических нагрузок» (Ташкентский химико-технологический институт, справка от 17 января 2022 года). В результате это дало актуализировать и развить ранее известные теоретические и прикладные методы исследования нелинейных динамических напряженно-деформированных состояний криволинейных участков многослойных композитных труб с течением вязкой жидкости под действием температурных и динамических нагрузок.

аналитическое решение системы уравнений типа Винера-Хопфа, полученного для коэффициентов оптимальных разностных формул в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$, использовано для приближенного решения дифференциальных уравнений внедренных в теоретические и численные прикладные геофизические задачи в динамических двухскоростных средах в прикладном проекте ОТ-Atex-2018-340-«Теоретическое и численное исследование прикладных геофизических задач динамики двухскоростной среды». (справка № 04/5168 Каршинского государственного университета от 19 декабря 2022 года). Применение научных результатов позволило построить новые оптимальные алгоритмы решения задач геологии и геофизики.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 8 научно-практических конференциях, в том числе, на 6 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 13 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 2 опубликованы в зарубежном журнале и 3 в республиканских научных изданиях, а также получено одно свидетельство об официальной регистрации программы для вычислительных систем.

Объём и структура диссертации. Диссертация содержит 93 страниц и состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и указана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации **«Оптимизация разностных методов в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$»** посвящена исследованию оптимальных разностных формул в пространстве Соболева. В этой главе диссертации приводятся задачи построения разностных формул, т.е. алгебраическая и функциональная постановка задачи.

Функциональной постановке рассматривается функции $\varphi(x)$, принадлежащие в пространству Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$, где $L_2^{(m)}$ - гильбертово пространство элементы которых являются классами вещественных функций отличающихся на полином степени $(m-1)$ и квадратично интегрируемые с производным порядка m на интервале $[0,1]$.

Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности ℓ разностных формул мы пользуемся экстремальной функцией данного функционала. Далее, найдем экстремальную функцию в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$.

Минимизируя квадрат нормы функционала погрешности ℓ по коэффициентам $C^{(1)}[\beta]$ разностных формул получаем систему типа Винера–Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta]$ разностных формул и оптимальной полином дискретного аргумента $\overset{\circ}{P}_{m-2}[\beta]$. Здесь доказаны существование и единственность решения системы типа Винера–Хопфа. Вместе с этим в этой главе разработан алгоритм построения оптимальных разностных формул в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$, с помощью которого получены представления коэффициентов оптимальных разностных формул типа Адамса.

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием $y(0) = y_0$ на отрезке $[0,1]$. Разделим этот отрезок на N частей длины $h = \frac{1}{N}$ и будем искать приближенное значения y_n искомого решения $y(x)$ в точках $x_n = nh$, $n = 0,1,...,N$. Для этого рассмотрим общую разностную формулу вида

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta] \cong 0, \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\delta(x-h\beta) + h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\delta'(x-h\beta). \tag{2}$$

Здесь $[\beta] = h\beta,\ h\beta \in [0,1],\ h = \dfrac{1}{N},\ N = 2,3,...,\ \beta = 0,1,...,k,\ k = 1,2,3...,C[\beta]$ и $C^{(1)}[\beta]$ - коэффициенты разностной формулы и $C[k] \neq 0$, $\delta(x)$ – дельта–функция Дирака, φ–элемент пространства $L_2^{(m)}(0,1)$. Разностная формула (1) называется формулой k –го порядка. Разностная формула k –го порядка называется неявной если $C^{(1)}[k] \neq 0$, а если $C^{(1)}[k] = 0$, то явной. Следующая разность

$$(\ell,\varphi) = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta] \tag{3}$$

называется погрешностью разностной формулы (1).

По неравенству Коши-Шварца, имеем

$$|(\ell,\varphi)| \le \|\varphi \,|\, L_2^{(m)}\| \cdot \|\ell \,|\, L_2^{(m)*}\|,$$

т.е. абсолютное значение разности (3) оценивается с помощью нормы функционала погрешности ℓ:

$$\left\|\ell \,|\, L_2^{(m)*}\right\| = \sup_{\varphi,\left\|\varphi | L_2^{(m)}\right\|=1} |(\ell,\varphi)|$$

Таким образом, верхняя оценка погрешности (3) разностной формулы (1) на функциях пространства $L_2^{(m)}$ соответствует нахождению нормы функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}$.

Одной из основных проблем построения разностных формул вида (1) является получение оптимальных разностных формул в пространстве $L_2^{(m)}$.

В первой главе работы параграф 1.1 является вспомогательным, включающим в себя определения, некоторые известные формулы и результаты, которые используются в доказательствах основных результатов. В параграфе 1.2 найдена экстремальная функция разностной формулы.

Функция $\psi_\ell(x) \in L_2^{(m)}(0,1)$ называется экстремальной функцией для функционала ℓ если имеет место следующее равенство

$$(\ell,\psi_\ell) = \left\|\ell \,|\, L_2^{(m)*}\right\| \cdot \left\|\psi_\ell \,|\, L_2^{(m)}\right\|.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Экстремальная функция функционала погрешности ℓ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ имеет вид

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-2}(x), \tag{4}$$

где $G_m(x)$ – функция Грина оператора $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1} signx}{2(2m-1)!}, \tag{5}$$

$P_{m-2}(x)$ – некоторый многочлен степени $m-2$.

В параграфе 1.3 найдено явное выражение для квадрата нормы функционала погрешности разностной формулы (1). Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Квадрат нормы функционала погрешности разностной формулы вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется формулой

$$\left\| \ell \mid L_2^{(m)*} \right\|^2 = (-1)^m \Bigg[\sum_{\gamma=0}^{k} C[\gamma] \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta] G_m(h\gamma - h\beta) -$$

$$-2h \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma] \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta] G_m^{'}(h\gamma - h\beta) - h^2 \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma] \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta] G_m^{''}(h\gamma - h\beta) \Bigg].$$

Здесь

$$G_m^{'}(x) = \frac{x^{2m-2} signx}{2(2m-2)!} \text{ и } G_m^{''}(x) = \frac{x^{2m-3} signx}{2 \cdot (2m-3)!}.$$

Задача построения оптимальной разностной формулы вида (1) с функционалом погрешности (2) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ заключается в нахождении величины

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \Big| L_2^{(m)*}(0,1) \right\|^2 = \inf_{C^{(1)}[\beta]} \left| (\ell, \psi_\ell) \right|. \tag{6}$$

В параграфе 1.4 для коэффициентов $C^{(1)}[\beta]$, которые достигают минимума квадрата нормы функционала погрешности ℓ при условиях

$$(\ell, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0,1,...,m-1, \tag{7}$$

получена система типа Винера – Хопфа

$$h \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma] G_m^{''}[\beta-\gamma] + P_{m-2}[\beta] = -\sum_{\gamma=0}^{k} C[\gamma] G_m^{'}[\beta-\gamma]. \ \beta = 0,1,...,k. \tag{8}$$

$$h\alpha \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma][\gamma]^{\alpha-1} = \sum_{\gamma=0}^{k} C[\gamma][\beta]^\alpha, \ \alpha = 1,...,m-1. \tag{9}$$

Здесь $C[\beta]$ – определяются из условий устойчивости разностной формулы в смысле Дальквиста и из равенства $\sum_{\gamma=0}^{k} C[\gamma] = 0$. Исследована единственность решения системы (8) и (9). При этом доказано, что решение этой системы доставляет локальный минимум $\|\ell\|^2$ на множестве решений системы (7).

В параграфе 1.5 приводится алгоритм построения оптимальных разностных формул в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. А в параграфе 1.6 рассматриваются разностные формулы типа Адамса.

Разностная формула вида

$$\varphi[k]-\varphi[k-1]-h\sum_{\beta=0}^{k}C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta]\cong 0$$

называется разностной формулы типа Адамса. Эта формула получается из формулы (1) при

$$C[\beta]=\begin{cases}1 & \beta=k,\\ -1 & \beta=k-1,\\ 0 & 0\le\beta\le k-2.\end{cases}$$

Здесь доказана следующая теорема.

Теорема 3. Оптимальные коэффициенты $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta],\ \beta=0,1,2,\dots,k-1$ разностной формулы типа Адамса в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ при $m\ge 3$ выражаются следующим образом

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[0]=-\frac{1}{2(k-1)}+\sum_{j=1}^{m-2}\left[\frac{(a_j-b_j)(\lambda_j-\lambda_j^k)}{(k-1)(1-\lambda_j)^2}-\frac{a_j\lambda_j-b_j\lambda_j^{k-1}}{1-\lambda_j}\right],$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta]=\sum_{j=1}^{m-2}\left(a_j\cdot\lambda_j^{\beta}+b_j\lambda_j^{k-1-\beta}\right)\ \text{при}\ \beta=1,2,\dots,k-2,$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[k-1]=\frac{2k-1}{2(k-1)}-\sum_{j=1}^{m-2}\left[\frac{(a_j-b_j)(\lambda_j-\lambda_j^k)}{(k-1)(1-\lambda_j)^2}-\frac{a_j\lambda_j^{k-1}-b_j\lambda_j}{1-\lambda_j}\right].$$

Здесь λ_j –корни многочлена Эйлера $E_{2m-4}(\lambda)$ степени $2m-4$, по модулю меньшие единицы, т.е. $|\lambda_j|<1,$ a_j и b_j неизвестные элементы.

Вторая глава диссертации **«Оптимальные разностные формулы в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ »**, посвящена построению оптимальных явных и неявных разностных формул в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$. В этой главе диссертации построены оптимальные явные и неявные разностные формулы в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ для любого целого k. Кроме того, вычислены нормы функционалов погрешностей оптимальных явных и неявных разностных формул в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$, т.е. получены оценки их погрешностей.

Следует отметить, что в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0,1)$ построенная оптимальная явная разностная формула оказалась известной разностной формулой Эйлера.

Основные результаты этой главы заключаются в следующем.

Теорема 4. В пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0,1)$ существует единственная оптимальная явная разностная формула типа Адамса

$$\varphi[k]-\varphi[k-1]-h\sum_{\beta=0}^{k-1}C^{(1)}\left[\beta\right]\varphi'\left[\beta\right]\cong 0 \tag{10}$$

коэффициенты которой определяются формулой

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}\left[\beta\right]=\begin{cases}1, & \beta=k-1,\\ 0, & 0\le\beta\le k-2.\end{cases}$$

Теорема 5. В пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0,1)$ существует единственная оптимальная неявная разностная формула типа Адамса

$$\varphi[k]-\varphi[k-1]-h\sum_{\beta=0}^{k}C^{(1)}\left[\beta\right]\varphi'\left[\beta\right]\cong 0 \tag{11}$$

коэффициенты которой определяются формулой

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta]=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \beta=k,\\ \frac{1}{2}, & \beta=k-1,\\ 0, & \beta=1,2,...,k-2.\end{cases}$$

Теорема 6. Квадрат нормы функционала погрешности оптимальной явной разностной формулы вида (10) в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ выражается формулой

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}{}_N^{\,яв}\left|L_2^{(2)*}\right.\right\|^2=\frac{h^3}{3}.$$

Теорема 7. Среди всех неявных разностных формул вида (11) в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0,1)$ существует единственная неявная оптимальная разностная формула, у которой квадрат нормы функционала погрешности определяется равенством

$$\left\|\ell_N^{н.яв}\left|L_2^{(2)*}\right.\right\|^2=\frac{h^3}{12}.$$

Третья глава диссертации **«Оптимальные разностные формулы в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ »,** посвящена построению оптимальных явных разностных формул в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$.

В этой главе диссертации для любого натурального k построены оптимальные явные разностные формулы в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$. Здесь найден оптимальный полином, который играет важную роль при нахождении квадрата нормы функционала погрешности явных оптимальных разностных формул. Вычислены нормы функционалов погрешностей оптимальных явных разностных формул в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$, т.е. получена оценка погрешности оптимальной явной разностной формулы.

Кроме того, с помощью оптимального полинома дискретного аргумента степени $m-2$ получена формула для квадрата нормы функционала погрешности явной оптимальной разностной формулы в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Далее, с помощью построенных явных оптимальных разностных формул решены конкретные задачи Коши.

Основными результатами этой главы являются следующие.

Теорема 8. В пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ существует единственная оптимальная явная разностная формула типа Адамса (10), коэффициенты которой определяются равенствами

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[0]=-\frac{1}{k-1}-\frac{\lambda^{k-1}(\lambda+2)}{\lambda^{2k-2}-1},$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta]=\frac{3\lambda^{k-1}\left(\lambda^{\beta}-\lambda^{-\beta}\right)}{\lambda^{2k-2}-1},\ \beta=1,2,\ldots,k-2,$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[k-1]=1+\frac{3}{1-\lambda}+\frac{\lambda+2}{\lambda^{2k-2}-1},$$

где $\lambda=\sqrt{3}-2$.

Теорема 9. Оптимальный полином $\overset{\circ}{P}_1[\beta]=b_0[\beta]+b_1$ определяется формулой

$$\overset{\circ}{P}_1[\beta]=-\frac{h^3}{6}\left(\frac{\lambda(\lambda^{k-3}+1)}{4(\lambda^{k-1}+1)}+1\right)[\beta]+\frac{h^4}{48}\left(8k-7+\frac{2(k-1)\lambda(\lambda^{2k-4}-1)}{\lambda^{2k-2}-1}\right),$$

где $\lambda=\sqrt{3}-2$.

Теорема 10. Квадрат нормы функционала погрешности оптимальной явной разностной формулы типа Адамса (10) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется формулой

$$\left\|\ell\left|L_2^{(m)*}\right\|^2=(-1)^m\left(-\frac{h^{2m-1}}{(2m-1)!}+h\sum_{\gamma=0}^{k-1}\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\gamma]\left(\overset{\circ}{P}_{m-2}[\gamma]+f_m[\gamma]\right)\right).$$

Здесь $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\gamma]-$ оптимальные коэффициенты явной разностной формулы, $\overset{\circ}{P}_{m-2}[\gamma]-$ оптимальный полином дискретного аргумента $[\gamma]=h\gamma$ степени $m-2$,

$$f_m[\gamma]=\sum_{i=1}^{2m-2}\frac{(-1)^i[\gamma]^{2m-2-i}\left([k]^i-[k-1]^i\right)}{2\cdot i!\cdot(2m-2-i)!}.$$

Теорема 11. Квадрат нормы функционала погрешности оптимальной явной разностной формулы типа Адамса (10) в пространстве Соболева $L_2^{(3)}(0,1)$ выражается формулой

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\,|\,L_2^{(3)*}\right\|^2=\frac{h^5}{24}\left(2k+1{,}2+\frac{(4k-2)(\lambda^k-\lambda^{k-2})+\lambda^{2k-3}-\lambda}{2(\lambda^{2k-2}-1)}\right),$$

где $\lambda = \sqrt{3} - 2$.

В параграфе 3.4 «Численные эксперименты» с помощью построенных k – шаговых явных оптимальных разностных формул в пространстве Соболева $L_2^{(3)}(0,1)$ численно решены конкретные задачи Коши. Полученные решения сравнены с приближёнными решениями, полученными методом Эйлера и модифицированным методом Эйлера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению явных и неявных оптимальных разностных формул для приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и вычислению норм их функционалов погрешностей в пространстве Соболева.

В заключении, по результатам исследования, можно сделать следующие выводы:

1. Найдена экстремальная функция разностных формул в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;
2. Получено выражение нормы функционала погрешности разностных формул в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;
3. Получена система типа Винера-Хопфа для коэффициентов оптимальных разностных формул в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$. Доказаны существование и единственность решения этой системы;
4. Построены оптимальные явные и неявные k шаговые разностные формулы в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$;
5. Вычислены нормы оптимальных функционалов погрешностей для явных и неявных разностных формул в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$, т.е. получены оценки их погрешностей;
6. Построены оптимальные явные k шаговые разностные формулы в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ и получены оценки их погрешностей;
7. Найден оптимальный полином дискретного аргумента степени $m-2$, который играет важную роль при нахождении квадрата нормы функционала погрешности явных оптимальных разностных формул в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;
8. Получена формула для нормы функционала погрешности явной оптимальной разностной формулы в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;
9. Численно решены конкретные задачи Коши с помощью построенных явных оптимальных разностных формул.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

MIRZAKABILOV RAVSHAN NARKUZIEVICH

OPTIMAL DIFFERENCE FORMULAS IN SOBOLEV SPACE

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2019.2.PhD/FM342.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific superviser:	**Shadimetov Kholmat Makhkambaevich** **Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor**
Official opponents:	**Hayotov Abdullo Rakhmanovich** **Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor**
	Khudoyberganov Mirzoali Urazalievich **Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent**
Leading organization:	**Termez State University**

Defense will take place «____» ____________2023 at ____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №___) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24)

Abstract of dissertation sent out on «____» ______________2023 year.
(Mailing report №________ от «____» ______________2023 year).

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council on award
of scientific degrees, D.F.M.S., Professor

Z.R. Rakhmanov
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.M.S., Professor

R.D. Aloev
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The aim of the study is to construct explicit and implicit optimal difference formulas for the approximate solution of ordinary differential equations and to calculate the norms of their error functionals on classes of differentiable functions.

The object of the research is ordinary differential equations, explicit and implicit difference formulas, error estimate for explicit and implicit difference formulas.

The scientific novelty of the research work is as follows:

an explicit form of the square of the norm of the error functional ℓ of the difference formula is found using the extremal function of this functional in the Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ for any $m \geq 2$;

a system of the Wiener-Hopf type for the coefficients of the optimal difference formula is obtained, the existence and uniqueness of solution this system are proved;

an algorithm was developed for constructing optimal difference formulas using a discrete analogue of differential operator in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ for any $m \geq 2$;

optimal difference formulas Adams-type in spaces $L_2^{(2)}$ and $L_2^{(3)}$ are constructed, and using the coefficients of these difference formulas the squared norms of the error functional are calculated.

Implementation of the research results. Based on the obtained scientific results on the construction of optimal difference formulas for the approximate solution of ordinary differential equations in the Sobolev space:

the estimate obtained using the norm of the error functional of the difference formula in the Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ for any $m \geq 2$, is used to solve issues related to the consideration of the interaction of three-layer shell pipes with the environment in the fundamental project OT-F4-01 - “Development and theoretical development of methods for studying nonlinear dynamic stress- of the deformed states of curved sections of multilayer composite pipes with the flow of a viscous liquid under the influence of temperature and dynamic loads” (Tashkent Institute of Chemical Technology, certificate dated January 17, 2022). As a result, this made it possible to update and develop previously known theoretical and applied methods for studying nonlinear dynamic stress-strain states of curved sections of multilayer composite pipes with a viscous fluid flow under the action of temperature and dynamic loads;

the analytical solution of the system of equations of the Wiener-Hopf type, obtained for the coefficients of optimal difference formulas in the Sobolev space, is used for the approximate solution of differential equations embedded in theoretical and numerical applied geophysical problems in dynamic two-velocity media in the applied project OT-Atex-2018-340-“Theoretical and Numerical Study of Applied Geophysical Problems of Two-Velocity Dynamics”. (Reference No. 04/5168 of Karshi State University dated December 19, 2022). The application of scientific results made it possible to build new optimal algorithms for solving problems of geology and geophysics.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 93 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I bo’lim (Часть I; Part I)

1. Шадиметов Х.М., Мирзакабилов Р.Н. Задача о построении разностных формул. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. №5(17) 2018, - С. 95-101. (01.00.00; №9).
2. Шадиметов Х.М., Мирзакабилов Р.Н. Оптимизация разностных формул в фактор-пространстве Соболева. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. №5(35) 2021, - С. 137-151. (01.00.00; №9).
3. Shadimetov K. M., Mirzakabilov R.N. On a Construction Method of Optimal Difference Formulas. // AIP Conference Proceedings 2365, 020032-1-10 (2021), 16 July. (**3. Scopus**, IF:=0,40).
4. Шадиметов Х.М., Мирзакабилов Р.Н. Оптимальные разностные формулы в пространстве Соболева. // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, №1 (2022). - С. 167-177. (**3. Scopus**, IF:=0,60).
5. Шадиметов Х.М., Мирзакабилов Р.Н. Представление оптимальных коэффициентов разностных формул. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. №5/1(44). 2022. - С. 160-170. (01.00.00; №9).

II bo‘lim (Часть II; Part II)

6. Shadimetov Kh.M., Mirzakabilov R.N. The extremal function of the difference formula in the Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$. // International scientific conference on September 13-15, 2018, National University of Uzbekistan “Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2018”, - pp. 142.
7. Мирзакабилов Р.Н. Существование и единственность оптимальной разностной формулы в фактор-пространстве Соболева. // Международная конференция. “Обратные и некорректные задачи”, Самарканд, Узбекистан, 2-4 октября 2019. - С. 101.
8. Мирзакабилов Р.Н. Существование и единственность оптимальной разностной формулы в фактор-пространстве Соболева. // Узбекско-Российская научная конференция. “Неклассические уравнения математической физики и их приложения” Ташкент, Узбекистан, 24-26 октября 2019. - С. 288.
9. Мирзакабилов Р.Н. Квадрат нормы функционала погрешности разностных формул. // Международная научная конференция “Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики” Фергана, Узбекистан, 12-13 март, 2020. - С. 209-211.

10. Мирзакабилов Р.Н. О представлении оптимальных коэффициентов разностных формул. // Научная конференция “Актуальные проблемы стохастического анализа”, посвященной 80 летию академика Ш.К.Форманова. Ташкент, 20-21 февраля, 2021. - С. 531-532.
11. Мирзакабилов Р.Н. Оптимизация разностных формул. // Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий» Бухара, Узбекистан, 15 апреля 2021. - С. 204-205.
12. Shadimetov Kh., Mirzakabilov R.N. Optimal explicit difference formulas in the Sobolov factor space $L_2^{(m)}(0,1)$ // Of the VII international scientific conference on November 15-17, 2021 in Ferghana city of Ferghana State University of Uzbekistan “Modern problems of applied mathematics and information technologies-Al-Khwarizmi 2021”. - pp. 278.
13. Шадиметов Х.М., Мирзакабилов Р.Н., Муминов Ш.Б. Представление оптимальных коэффициентов разностных формул. // “Актуальные вопросы алгебры и анализа. Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции”. Часть 1. Термез. 18-19 ноября, 2022. -С. 297-298.
14. Shadimetov X.M., Mirzakabilov R.N., Karimov R.S. Sobolev fazosida koʻp qadamli optimal ayirmali formulaning dasturi. Kompyuter dasturlari uchun mualliflik guvohnomasi. **№ BGU 00835,** 09.12.2022

Avtoreferat «O‘zbekiston matematika jurnali» tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bichimi 60x84 1/16. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,5. Adadi 100. Buyurtma № 40/23.

Guvohnoma № 851684
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.