MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

OTABOYEV TOLIB O‘ROLOVICH

A-ANALITIK FUNKSIYALARNING FUNKSIONAL XOSSALARI

01.01.01 – Matematik analiz

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

UDK: 517.54

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

OTABOYEV TOLIB O‘ROLOVICH

A-ANALITIK FUNKSIYALARNING FUNKSIONAL XOSSALARI

01.01.01 – Matematik analiz

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B2022.3.PhD/FM745 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz) va “ZiyoNet” ta’lim axborot tarmog‘iga (http://www.ziyonet.uz/) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Sadullayev Azimbay** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Imomqulov Sevdiyor Akramovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Imomnazarov Xolmatjon Xudoynazarovich fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	**Xolon texnologiya instituti (Isroil)**

Dissertatsiya himoyasi Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023-yil 15-iyun soat 10:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (__-raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24.

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil “__” ___________ kuni tarqatildi.
(2023-yil “__” __________dagi __-raqamli reyestr bayonnomasi).

B. A. Shoimqulov
ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi o‘rinbosari,
f.-m.f.d., professor

N. K. Mamadaliyev
ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.f.d. (PhD)

R. N. Ganixodjayev
ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida kompleks analiz, mexanika va fizika sohasida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda A-analitik funksiyalar nazariyasi masalalariga keltiriladi. Kvazikonform akslantirishlar va A-analitik funksiyalar nazariyasidagi masalalar tibbiyot fizikasi, biotexnologiya, aerodinamika hamda ishlab chiqarish kabi ko‘plab sohalarning tadqiqot obyektidir. A-analitik funksiyalar nazariyasi kompleks tekislik va ko‘p o‘lchovli kompleks fazoda qurilib, kompleks dinamik sistemalar, funksiyalar nazariyasi, mexanika va matematik fizika masalalarini hal qilishda muhim rol o‘ynaydi. Bu nazariyaning asosiy tushunchalari A-analitik funksiya, A-garmonik funksiya, A-logarifmik chegirma, Koshi integrali, Beltrami tenglamalar sistemasi kabilar mos ravishda, klassik analitik funksiyalar, garmonik funksiyalar nazariyasidagi kabi aniqlanadi, ammo ularning umumlashmasi bo‘lganligi va ko‘p o‘lchovli kompleks fazoning murakkab tuzilishi tufayli ulardan tubdan farq qiladi hamda zamonaviy matematikada dolzarb masalalarni hal qilishda muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Jahonda kopmleks tekislik hamda ko‘p o‘lchamli kompleks fazoda A-analitik funksiyalar bilan bog‘liq masalalarni yechish va ularni amaliyotga tadbiq qilish bo‘yicha ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. Ushbu masalalar A-analitik funksiyalar nazariyasi usullari orqali o‘z yechimini topib, ularning amaliy muammolarini hal qilishga qaratilgan keng qamrovli ilmiy tadqiqot ishlari olib borilmoqda. A-analitik funksiyalardan kompleks dinamik sistemalar, funksiyalar nazariyasi, mexanika va matematik fizikaning dolzarb masalalarini hal qilishda keng foydalaniladi. Bunda bir va ko‘p o‘zgaruvchili A-analitik funksiyalar hamda ularning xossalari yordamida yangi ilmiy natijalar olish hamda ularni funksiyalar nazariyasining dolzarb masalalarini yechishga tadbiq qilishga alohida e’tibor qaratilmoqda.

Mamlakatimizda, ayniqsa, oxirgi yillarda fundamental fanlar, xususan, matematika va fizika, ular bilan bir qatorda tibbiy va geologik tomografiya masalalarida ilmiy ahamiyatga ega bo‘lgan dolzarb yo‘nalishlarga e’tibor kuchaydi. Jumladan, so‘nggi yillarda funksiyalar nazariyasi, ko‘p o‘lchovli kompleks analiz, plyuripotensiallar nazariyasi, approksimatsiyalar nazariyasi va kompleks dinamik sistemalar nazariyasiga alohida e’tibor qaratilmoqda. Bularning barchasi qaralayotgan masalalarning naqadar dolzarbligi va zarurligini ko‘rsatadi. Bugungi kunda A-analitik funksiyalarni tadqiq qilishda salmoqli ilmiy natijalarga erishildi. “Haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi” fanlarining ustivor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalar va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi.[1] A-analitik funksiyalar nazariyasi bo‘yicha ilmiy tadqiqotlar olib borish mazkur qaror ijrosini ta’minlashda muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi 292-sonli qarori.

Ushbu dissertatsiya ishida olib borilgan tadqiqotlar O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947 sonli Farmoni, 2017-yil 17-fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2789 sonli va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarorlarida, shuningdek, mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan masalalarni hal etishga muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ma’lumki, G. Gryoch, M. A. Lavrent’yev va L. Alforslar tomonidan qurilgan yassi kvazikonform akslantirishlar nazariyasi matematik fizika va mexanikada o‘zining muhim tadbiqlarini topgan va matematikaning Kleyn gruppalari nazariyasi, funksional fazolar va differensial operatorlar kabi sohalari bilan samarali aloqalar o‘rnatgan. 1950-yilda L. Alfors va A. Beringlar tomonidan kiritilgan va B. Fyuglede hamda B. V. Shabatlar tomonidan n-o‘lchamli fazolarga o‘tkazilgan modullar usulining roli oshib bormoqda. Fazoviy kvazikonform akslantirishlar nazariyasi 1938-yilda M. A. Lavrent’yev tomonidan kiritilgan. Tekislikda kvazikonform akslantirishlar nazariyasining rivojlanishi Beltrami tenglamasining yechimi bilan uzviy bog‘liqdir. Kvazikonform akslantirishlar va Beltrami tenglamasi nazariyasining rivojlanishi XX asrning o‘rtalarida amerikalik matematiklar L. Alfors, L. Bers, A. Bering, F. B. Geringlar, rossiyalik matematiklar M. A. Lavrent’yev, I. N. Vekua, P. P. Belinskiy, Yu. G. Reshetnyak, V. I. Miklyukov, V. A. Zorich, P. M. Tamrazov, S. L. Krujkal, A. B. Sichyov, I. P. Mityukov, G. D. Suvorov, V. V. Aseyev, polshalik matematik B. V. Boyarskiylar bilan bevosita bo‘liq.

Mamlakatimizda esa ushbu nazariya L. I. Volkoviskiy, M. Zaxirov, A. Axmedov, G. M. Lyan, A. K. Varisov va boshqalar tufayli rivojlandi. A-analitik funksiyalarning funksional xossalarini tadqiq qilish o‘tgan asrning 90-yillaridan boshlab rivojlana boshlagan va dastlabki natijalar Yu. Srebro, E. X. Yakubov (Isroil), V. I. Ryazanov, V. Gutlyanskiy, D. A. Kovtonyuk, I. V. Petkov, R. R. Salimov (Ukraina), A. N. Kondrashov, A. L. Buxgeym, S. G. Kazansev (Rossiya) va boshqa mashxur olimlarning ishlarida uchraydi. Bu esa kvazikonform akslantirishlar gomeomorfizmlarning geometrik xossalari bilan bog‘liq bo‘lsa, A-analitik funksiyalar uchun esa funksional xossalar, silliqlik, maxsus nuqtalar, qatlamalar va boshqalar muhim ekanligi bilan chambarchas bog‘liq. Bu xossalar tibbiy va geologik tomografiyada qo‘llanilishi bilan ahamiyatlidir.

O‘zbekistonda 2010-yildan boshlab O‘zbekiston Milliy universiteti “Matematik analiz” kafedrasida akademik A. Sadullayev rahbarligi ostida uning shogirdlari N. M. Jabborov, T. O‘. Otaboyev, Sh. Ya. Xursanov va boshqalar A-

analitik funksiyalarning funksional xossalarini tadqiq qilishni boshlashgan: A-analitik va A-garmonik funksiyalar uchun Koshi yadrosi analogi, Shvarts va Puasson formulalari, A-subgarmonik funksiyalar uchun Riss ifodalanishi olingan. Kafedrada tadqiq qilingan yana bir masala bu ko‘p o‘zgaruvchili A-analitik funksiyalarning funksional xossalarini isbotlashdir. Xususan, ko‘p o‘zgaruvchili A-analitik funksiyalar uchun Xartogs teoremasining analogini isbotlash masalasi qo‘yilgan edi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Tadqiqot O‘zbekiston Milliy universitetining OT-F4-(37+29) raqamli “A-analitik funksiyalarning funksional xossalari va ularning qo‘llanilishi. Matritsaviy sohalarda kompleks analizning ba’zi masalalari” nomli ilmiy loyihasi doirasida amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi kompleks tekislikda va ko‘p o‘lchovli kompleks fazoda A-analitik funksiyalarning funksional xossalarini tadqiq qilish, ko‘p o‘zgaruvchili A-analitik funksiyalar uchun Xartogs teoremasini isbotlashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

A-analitik funksiyalar uchun Koshi teoremasini isbotlash;

A-analitik funksiyalar uchun argument prinsipini va Shvarts lemmasini isbotlash;

ko‘p o‘zgaruvchili A-analitik va separat A-analitik funksiya tushunchalarini aniqlash, ko‘p o‘zgaruvchili A-analitik funksiyalar uchun Koshining integral formulasini isbotlash, ularni karrali qatorga yoyish;

ko‘p o‘zgaruvchili A-analitik funksiyalar uchun Xartogs teoremasi analogini isbotlash.

Tadqiqotning obyekti. A-analitik funksiyalar, Beltrami tenglamasi, $\mathbb{C}^n$ fazoda Beltrami tenglamalar sistemasi, integral formulalar.

Tadqiqotning predmeti. Beltrami tenglamasi, A-analitik funksiyalar, A-analitik funksiyalar uchun chegirmalar, A-analitik funksiyalar uchun argument prinsipi, Shvarts tengsizligi, ko‘p o‘zgaruvchili A-analitik funksiyalar, Xartogs teoremasi.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida funksiyalar nazariyasi, analitik funksiyalar nazariyasi, klassik potensiallar nazariyasi, plyuripotensiallar nazariyasi, kvazikonform akslantirishlar va A-analitik funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Analitik funksiyalar uchun ma’lum bo‘lgan Koshi teoremasining A-analitik funksiyalar uchun umumlashmasi, shuningdek, ko‘p bog‘lamli sohalar uchun Koshi teoremasi isbotlangan;

A-analitik funksiyalar uchun chegirma tushunchasi kiritilgan, A-analitik funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasidagi chegirmasi va uning shu yakkalangan maxsus nuqta atrofidagi Loran qatoriga yoyilmasi orasidagi bog‘lnishni ifodalovchi teoremalar isbotlangan, chegirmalarni hisoblash uchun formulalar topilgan. A-analitik funksiyalar uchun logarifmik chegirma tushunchasi aniqlanib, A-analitik funksiyalar uchun argument prinsipi isbotlangan;

A-analitik funksiyalar uchun Rushe teoremasi va barcha oʻzgaruvchilari boʻyicha uzluksiz boʻlgan koʻp oʻzgaruvchili A-analitik funksiyalarning barcha oʻzgaruvchilari boʻyicha birgalikda uzluksiz boʻlishini isbotlashda muhim oʻrin tutuvchi Shvarts lemmasi umumlashmasi isbotlangan;

Beltrami tenglamasining koʻp oʻlchamli kompleks fazodagi umumlashmasi boʻlgan Beltrami tenglamalar sistemasining yechimi sifatida koʻp oʻzgaruvchili A-analitik va separat A-analitik funksiya tushunchalari kiritilgan, Beltrami tenglamalar sistemasining yechimi mavjud boʻlish sharti topilgan;

koʻp oʻzgaruvchili A-analitik funksiyalar uchun karrali Koshi integral formulasi hamda koʻp oʻzgaruvchili A-analitik funksiyalarni karrali qatorga yoyish haqidagi teoremalar, klassik Xartogs toeremasining koʻp oʻzgaruvchili A-analitik funksiyalar uchun umumlashmasi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

Dissertatsiya ishida olingan A-analitik funksiyalar uchun Koshining integral formulasi, Shvarts lemmasi va Xartogs teoremasi kabi natijalar elliptik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish hamda matematik fizikaning boshqa boʻlimlarida qoʻllanilishi mumkin. Bundan tashqari, olingan natijalar va qoʻllanilgan usullar oliy oʻquv yurtlarida magistratura talabalari hamda doktorantlar uchun oʻquv kursi sifatida oʻqitilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi kompleks oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasi, koʻp oʻlchovli kompleks analiz, A-analitik funksiyalar nazariyasi, algebraning maʼlum usullaridan foydalanilgani va olingan natijalarning qatʼiy matematik isboti bilan berilgani bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati olingan natijalarning A-analitik davom ettirish masalalarida, kvazikonform akslantirishlar nazariyasi va koʻp oʻzgaruvchili A-analitik funksiyalarni Teylor qatoriga yoyishda qoʻllanilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati kompyuter tomografiyasi, suyuqlikning ishqalanishi hisobi, mexanika va matematik fizikaning turli xil masalalarini yechishda tadbiq qilishda asos boʻlib xizmat qiladi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. A-analitik funksiyalar nazariyasi boʻyicha olingan natijalar asosida:

A-analitik funksiyalar uchun kiritilgan chegirma tushunchasi, shuningdek, isbotlangan argument prinsipi va Rushe teoremasidan OT-F4-03 raqamli “Uzluksiz hamda diskret vaqtli aniq dinamik sistemalar, qismiy integral operatorlar spektrlari” mavzusidagi fundamental loyihada ikkinchi tur klassik sohadagi meromorf funksiyalarni va maxsus analitik poliedrlarni tadqiq qilishda foydalanilgan (Qarshi Davlat universitetining 2023-yil 17-martdagi 04/1022-sonli maʼlumotnomasi). Ilmiy natijalarning qoʻllanilishi maxsus analitik poliedrlar uchun Veyl formulasini va matritsaviy poliedrlar uchun Rushe teoremasi analogini isbotlash imkonini bergan;

kiritilgan A-analitik funksiya tushunchasi MRU-OT-9/2017 raqamli “Koʻp oʻlchovli kompleks analiz” mavzusidagil ilmiy loyihada A-garmonik va A-

subgarmonik funksiya tushunchalarini aniqlashda foydalanilgan (O‘zbekiston Milliy universitetining 2023-yil 17-martdagi 04/11-1411-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi A-analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari klassik holdagi Laplas tenglamasining umumlashmasini qanoatlantirishini isbotlash, A-garmonik funksiyalar uchun Puasson va Shvarts formulalarini qurishga yordam bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 12 ta ilmiy anjumanlarda, jumladan, 3 ta xalqaro va 9 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 19 ta ilmiy ishlar chop etilgan bo‘lib, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktorlik dissertatsiyalarining asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 4 ta maqola, jumladan, 2 tasi horijiy va 2 tasi respublika jurnallarida chop etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, 11 ta paragrafga bo‘lingan uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 76 betni tashkil qiladi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning “**Dastlabki ma’lumotlar**” deb nomlangan birinchi bobida A-analitik funksiyalar nazariyasining zarur tushunchalari va yordamchi natijalar keltirilgan. Ushbu dastlabki bobda A-analitik funksiya tushunchasini va bunday funksiyalarning sodda algebraik xossalari keltiriladi. Bundan tashqari, A-analitik funksiyalar uchun klassik Koshi teoremasi analogi isbotlanadi. Birinchi bobning to‘rtinchi paragrafida A-analitik funksiyalarni tadqiq qilishda muhim rol o‘ynovchi Koshi formulasi keltiriladi. Birinchi bobning oxirgi, beshinchi paragrafida esa A-analitik funksiyalarni Teylor va Loran qatorlariga yoyish keltirilgan.

Aytaylik, D — kompleks tekislik $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ dagi soha bo‘lsin. Agar $z = x + iy$ deyilsa, unda odatdagidek

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ va } \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

D sohada berilgan $A(z)$ funksiya uchun

$$\mathcal{D}_A = \frac{\partial}{\partial z} - A(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}},\ \overline{\mathcal{D}}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \overline{A(z)}\frac{\partial}{\partial z}$$

deb olamiz.

1-ta'rif. $f(z) \in C^1(D)$ *funksiya berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy* $z \in D$ *uchun*

$$\overline{\mathcal{D}}_A f(z) = 0. \tag{1}$$

bo'lsa, u holda $f(z)$ *funksiya* D *sohada A-analitik funksiya deyiladi.*

2-ta'rif. $f(z) \in C^1(D)$ *funksiya berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy* $z \in D$ *uchun*

$$\mathcal{D}_A f(z) = 0. \tag{2}$$

bo'lsa, u holda $f(z)$ *funksiya* D *sohada A-antianalitik funksiya deyiladi.*

Ta'kidlash kerakki, $A(z) \equiv 0$ bo'lganda biz mos ravishda, analitik va antianalitik funksiyalar ta'riflarini hosil qilamiz.

D sohada A-analitik bo'lgan funksiyalar sinfini $\mathcal{O}_A(D)$ orqali belgilaymiz.

A-analitik funksiyalarning quyidagi algebraik xossalarini qayd etib o'tish lozim: chekli sondagi A-analitik funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi, ikkita A-analitik funksiyaning ko'paytmasi va nisbati (maxraj noldan farqli bo'lgan joylarda) yana A-analitik funksiya bo'ladi. Shuningdek, A-analitik funksiyaning kompleks qo'shmasi A-antianalitik funksiya bo'ladi.

A-analitik funksiyalar va (1) tenglama Beltrami tenglamasi

$$f_{\bar{z}}(z) = A(z) f_z(z) \tag{3}$$

va kvazikonform akslantirishlar bilan bevosita aloqador. Kvazikonform akslantirishlar nazariyasida $A(z)$ funksiya o'lchovli bo'lsin va qaralayotgan $D \subset \mathbb{C}$ sohada deyarli hamma joyda $|A(z)| \le C < 1$ shartni qanoatlantirsin deb faraz qilinadi. Beltrami tenglamasi va kvazikonform akslantirishlar nazariyasi bo'yicha fundamental ishlardan biri V. Gutlyanskiy, V. Ryazanov, Yu. Srebro va E. Yakubovlarning monografiyasi bo'lib, unda Beltrami tenglamasini tadqiq qilishga geometrik yondashuv qaraladi.

A-analitik funksiyalarning dissertatsiya ishida sezilarli darajada foydalaniladigan, ma'lum funksional xossalarini keltirib o'tamiz.

1-teorema. $\mathbb{C}$ *da o'lchovli bo'lgan ixtiyoriy* $A(z) : \|A\|_\infty < 1$ *funksiya uchun* (3) *tenglamaning* $0, 1, \infty.$ *nuqtalarni qo'zg'almas qoldiruvchi yagona gomeomorf yechimi* $\chi(z)$ *mavjud.*

2-teorema. (3) *tenglamaning barcha umumlashgan yechimlari to'plami* $f(z) = \Phi[\chi(z)]$ *formula bilan ifodalanadi, bu yerda* $\chi(z)$ *— 1-teoremadagi gomeomorf yechim, ,* $\Phi(\xi)$ *esa* ξ *o'zgaruvchining* $\chi(D)$ *da golomorf funksiyasi.*

3-teorema. *Agar* $A(z)$ *funksiya* m *marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar sinfiga tegishli bo'lsa:* $A(z) \in C^m(D)$, *unda* (3) *tenglamaning ixtiyoriy yechimi* f *kamida shu sinfga tegishli bo'ladi, ya'ni* $f \in C^m(D)$.

A-analitik funksiyalarning funksional xossalarini yanada chuqurroq o'rganish uchun biz $A(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada antianalitik funksiya, ya'ni $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ va $\forall z \in D$ uchun $|A(z)| \le C < 1$ bo'lgan holni qaraymiz.

4-teorema (Koshi teoremasining analogi). *Agar* $f(z)$ *funksiya bir bog'lamli* D *sohada A-analitik bo'lsa, u holda* D *sohada yotuvchi har qanday yopiq silliq* γ *egri chiziq bo'yicha olingan* $\int_\gamma f(z)\left(dz + A(z)d\bar{z}\right)$ *integral nolga teng bo'ladi.*

Bu teorema A-analitik funksiyalar nazariyasining eng muhim teoremalaridan biri hisoblanadi. Ushbu teorema muallifning N. M. Jabborov bilan birga hammualliflikdagi ishida qo'shimcha shart bilan isbotlangan va quyidagicha keltirilgan:

5-teorema. *Aytaylik* $f(z) \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ *— chegaralangan bir bog'lamli* D *sohada A-analitik funksiya bo'lsin. U holda quyidagi tenglik o'rinli*

$$\int_{\partial D} f(z)\left(dz + A(z)d\bar{z}\right) = 0.$$

Xuddi klassik holdagi kabi, ko'p bog'lamli sohalar uchun ham Koshi teoremasi isbotlanadi.

6-teorema. *Aytaylik* $f(z)$ *— chegaralangan chekli bog'lamli* D *sohada A-analitik va uning chagarasi* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_n$ *da uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda*

$$\int_\Gamma f(z)\left(dz + A(z)d\bar{z}\right) = 0$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{C}$ — qavariq soha va $\zeta \in D$ uning tayin nuqtasi bo'lsin. Bu sohada

$$\psi(z,\zeta) = z - \zeta + \overline{\int_{\gamma(\zeta,z)} \overline{A}(\tau)d\tau} \text{ va } K(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\psi(z,\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z - \zeta + \overline{\int_{\gamma(\zeta,z)} \overline{A}(\tau)d\tau}}$$

funksiyalarni qaraymiz, bu yerda $\gamma(\zeta, z)$ — $\zeta, z \in D$ nuqtalarni tutashtiruvchi silliq egri chiziq.

7-teorema. *Aytaylik,* $D \subset \mathbb{C}$ *— qavariq soha va* $\zeta \in D$ *uning tayin nuqtasi bo'lsin. U holda* $K(z,\zeta)$ *funksiya* $z = \zeta$ *nuqtadan tashqarida A-analitik bo'ladi,* *ya'ni* $K(z,\zeta)\in\mathcal{O}_A\left(D\setminus\{\zeta\}\right)$. *Bundan tashqari,* $z=\zeta$ *nuqta u uchun yagona oddiy qutb maxsus nuqta bo'ladi.*

1-izoh. *Agar* D *soha qavariq bo'lmasdan faqatgina bir bog'lamli bo'lsa, unda* $\psi(z,\zeta)$ *funksiya* D *sohada aniqlangan va bir qiymatli bo'lishiga qaramasdan, u* ζ *dan boshqa yakkalangan nollarga ega bo'lishi mumkin:* $\psi(z,\zeta)=0$, $\zeta\in P=\{\zeta_1,\zeta_2,...\}$. *Binobarin,* $\psi\in\mathcal{O}_A(D)$, *agar* $\zeta\notin P$ *bo'lsa* $\psi(z,\zeta)\neq 0$ *va* $K(z,\zeta)$ *faqatgina* $D\setminus P$ *da* A*-analitik funksiya bo'ladi va u* P *to'plamning nuqtalarida qutblarga ega bo'ladi. Shu fakt asosida biz qavariq sohalarda* A*-analitik bo'lgan funksiyalar sinfini qaraymiz.*

2-teoremaga ko'ra, $\psi(z,\zeta)\in\mathcal{O}_A(D)$ funksiya ichki akslantirishni amalga oshiradi. Xususan, ushbu

$$\left\{z\in D:\left|\psi(z,\zeta)\right|=\left|z-\zeta+\overline{\int\limits_{\gamma(\zeta,z)}\overline{A}(\tau)d\tau}\right|<r\right\} \tag{4}$$

to'plam D da ochiq bo'ladi. Yetarlicha kichik $r>0$ lar uchun u D da kompakt yotadi va ζ nuqtani o'z ichiga oladi.

3-ta'rif. (4) *ko'rinishdagi to'plamni "markazi"* ζ *nuqtada bo'lgan A-lemniskata deb ataymiz va* $L(\zeta,r)$ *orqali belgilaymiz.*

1-lemma. *Ixtiyoriy* $\varepsilon>0$ *soni uchun* $L(\zeta,\varepsilon)\Subset D$ *A-lemniskataning chegarasi bo'yicha olingan quyidagi integral 1 ga teng:*

$$\int\limits_{\partial L(\zeta,\varepsilon)}K(z,\zeta)(dz+A(z)d\overline{z})=1.$$

Quyidagi teoremada *A*-analitik fuksiyalar uchun Koshining integral formulasi analogi keltiriladi.

8-teorema. *Aytaylik* $f(z)$ — D *sohada A-analitik funksiya va* $G\Subset D$ *chekli sondagi silliq chiziqlar bilan chegaralangan soha bo'lsin. U holda ixtiyoriy* $z\in G$ *nuqtada* $f(z)$ *funksiya quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi:*

$$f(z)=\int\limits_{\partial G}f(\zeta)K(z,\zeta)(d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}),$$

bu yerda ∂G — G *sohaning yo'naltirilgan chegarasi*.

Ta'kidlash lozimki, *A*-analitik funksiyalar uchun darajali qatorlaning analogi ushbu

$$\sum_{j=0}^{\infty}c_j\psi^j\left(z,a\right),\ a\in D,\ c_j\text{ — o'zgarmas,} \tag{5}$$

ko'rinishdagi qatordan iborat bo'ladi.

(5) qatorning yaqinlashish sohasi $L\left(a,r\right)=\left\{\left|\psi\left(z,a\right)\right|<r\right\}$ *A*-lemniskatadan iborat bo'lib, yaqinlashish radiusi r quyidagi Koshi—Adamar formulasi orqali topiladi:

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|c_j|}.$$

8-teoremaga teskari teorema ham o‘rinli.

9-teorema. *Agar* $f(z) \in \mathcal{O}_A\left(L(a,r)\right) \cap C\left(\overline{L}(a,r)\right)$ *bo‘lsa, bu yerda* $L(a,r) = \left\{z \in D : \left|\psi(z,a)\right| < r\right\} \Subset D$ *— A-lemniskata, unda* $L(a,r)$ *da* $f(z)$ *funksiya Teylor qatoriga yoyiladi:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi^k(z,a),$$

bu yerda $c_k = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\left[\psi(\zeta,a)\right]^{k+1}} \left(d\zeta + A(\zeta)d\overline{\zeta}\right), 0 < \rho < r, k = 0,1,\dots .$

Bundan tashqari, *A*-analitik funksiyalarni Loran qatoriga yoyish haqidagi quyidagi teorema ham o‘rinli:

10-teorema. *Aytaylik* $f(z)$ *— lemniskataviy halqada A-analitik funksiya bo‘lsin:* $f \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R) \setminus L(a,r)\right)$, $0 < r < R$. *U holda* $f(z)$ *funksiya shu halqada Loran qatoriga yoyiladi:*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \psi^k(z,a), \tag{6}$$

bu yerda Teylor—Loran koeffitsiyentlari quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\left[\psi(\zeta,a)\right]^{k+1}} \left(d\zeta + A(\zeta)d\overline{\zeta}\right), r < \rho < R, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

(6) qator ushbu

$$L(a,R) \setminus \overline{L(a,r)} = \left\{z \in D : r < \left|\psi(z,a)\right| < R\right\}$$

halqaning ichida tekis yaqinlashadi.

Koshi tengsizliklari. Teylor—Loran koeffitsiyentlari uchun quyidagi tengsizliklar o‘rinli:

$$\left|c_k\right| \le \frac{\max\left\{\left|f(z)\right| : z \in \partial L(a,\rho)\right\}}{\rho^k}, r < \rho < R, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Loran qatori *A*-analitik funksiyalarning yakkalangan maxsusliklarini tadqiq qilish uchun qulay usul hisoblanadi. Agar a nuqta f funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi, ya’ni $f \in \mathcal{O}_A\left(0 < \left|\psi(z,a)\right| < R\right), 0 < R$ bo‘lib, f — a nuqtaning biror o‘yilgan atrofida chegaralangan bo‘lsa, unda (6) tenglikda qatorning manfiy darajali hadlari qatnashmaydi: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi^k(z,a)$ va a nuqta f ning bartaraf qilish mumkin bo‘lgan maxsus nuqtasi bo‘ladi, agar $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ bo‘lsa, unda (6) tenglikdagi qatorda chekli sondagi manfiy darajali hadlar bo‘ladi:

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty} c_k \psi^k(z,a), m>0, c_{-m}\neq 0 .$$

Bu holda a nuqta m tartibli qutb deyiladi. Birgina $\lim_{z\to a} f(z)$ mavjud bo‘lmaydigan holat qolmoqda. Bu holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning o‘ta muhim maxsus nuqtasi deyiladi.

Dissertatsiya ishining “**Tekislikda *A*-analitik funksiyalarning geometrik xossalari”** deb nomlanuvchi ikkinchi bobi uchta paragrafdan iborat, *A*-analitik funksiyalar uchun chegirma tushunchasi kiritilgan va chegirmalarning xossalari o‘rganilgan, *A*-analitik funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari tadqiq qilingan, *A*-analitik funksiyalar uchun argument prinsipi va Rushe teoremasi analogi isbotlangan.

4-ta’rif. *A-analitik $f(z)$ funksiyaning a nuqtadagi chegirmasi deb $f(z)$ funksiyadan yetarlicha kichik A-lemniskata $L(a,r)$ ning chegarasi bo‘yicha olingan integralni $2\pi i$ ga bo‘linganiga aytamiz:*

$$\operatorname*{res}_{z=a}{}_A f(z):=\frac{1}{2\pi i}\cdot \oint_{\partial L(a,r)} f(\zeta)\left(d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta}\right). \tag{7}$$

Qayd etish kerakki, ko‘p bog‘lamli sohalar uchun Koshi teoremasiga ko‘ra, (7) tenglikdagi integral r ga bog‘liq emas. Ushbu chegirmalar haqidagi Koshi teoremasining analogi o‘rinli:

11-teorema. *Aytaylik $f(z)$ — D sohada yakkalangan maxsus nuqtalar to‘plamidan tashqari hamma yerda A-analitik funksiya bo‘lsin, $G\Subset D$ soha, uning chegarasi ∂G bo‘lakli silliq va $f(z)$ ning maxsus nuqtalarini o‘zida saqlamasin. U holda*

$$\oint_{\partial G} f(\zeta)\left(d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta}\right)=2\pi i\sum_{(G)}\operatorname*{res}_{z=a_\nu}{}_A f(z),$$

bu yerda yig’indi $f(z)$ funksiyaning G sohada yotuvchi barcha a_ν maxsus nuqtalari bo‘yicha olinadi.

Aytaylik $f(z)$ funksiya $z=a$ nuqtada yakkalangan maxsus nuqtaga ega va

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\left(z-a+\overline{\int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\psi^k(z,a) \tag{8}$$

uning Loran qatoriga yoyilmasi bo‘lsin.

12-teorema. *$f(z)$ A-analitik funksiyaning $a\in\mathbb{C}$ yakkalangan maxsus nuqtadagi chegirmasi uning* (8) *Loran qatoriga yoyilmasidagi $\psi(z,a)$ ning minus birinchi darajasi oldidagi koeffitsiyentga teng:*

$$\operatorname*{res}_{z=a}{}_A f(z)=c_{-1}.$$

5-ta’rif. *Agar $f(z)$ A-analitik funksiyani*

$$f(z)=\left(z-a+\overline{\int_{\gamma(a,z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right)^n\cdot g(z)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, bu yerda $g(a)\neq 0$ *va* $g(z)\in\mathcal{O}_A(D)$*, u holda* $z=a$ *nuqta* $f(z)$ *funksiyaning* $n\geq 0$ *tartibli noli deyiladi.*

6-ta'rif. *Agar* $z=a$ *nuqta* $\dfrac{1}{f(z)}$ *funksiyaning* n *tartibli noli bo'lsa, unda u* $f(z)$ *A-analitik funksiyaning* n *tartibli qutbi deyiladi.*

13-teorema. $f(z)$ *A-analitik funksiyaning* $a\in\mathbb{C}$ *yakkalangan maxsus nuqtasi* n *tartibli qutb maxsus nuqta bo'lishi uchun* a *nuqtaning* $L(a,r)$ *lemniskatik atrofidagi Loran qatoriga yoyilmasining bosh qismi chekli sondagi noldan farqli hadlarni o'z ichida saqlashi, ya'ni*

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}c_k\left(z-a+\overline{\int_{\gamma(a,z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right)^k,\ n\geq 1.$$

bo'lishi zarur va yetarli.

14-teorema. *Aytaylik,* $z=a$ *nuqta A-analitik* $f(z)$ *funksiyaning* n *tartibli noli bo'lsin. U holda quyidagi formula o'rinli:*

$$\underset{z=a}{res_A}\,f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left[f(z)\left(z-a+\overline{\int_{\gamma(a,z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right)^n\right].$$

Endi A-meromorf funksiya, A-analitik funksiyalar uchun A-logarifmik chegirma tushunchalari kiritiladi, A-analitik funksiyalar uchun argument prinsipi va Rushe teoremasining analogi isbotlanadi.

7-ta'rif. *D sohada qutb maxsus nuqtalardan boshqa maxsusliklarga ega bo'lmagan* $f(z)$ *A-analitik funksiyaga shu sohada A-meromorf funksiya deyiladi. A-meromorf funksiyalar sinfini* $\mathcal{M}_A(D)$ *orqali belgilaymiz.*

Aytaylik, $f\in\mathcal{O}_A\left(0<|\psi(z,a)|<R\right),\ 0<R$ va $f(z)$ funksiya a nuqtaning o'yilgan atrofida nolga aylanmasin. $f(z)$ A-analitik funksiyaning quyidagi

$$\frac{\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz+A(z)d\bar{z}\right)=dLnf(z)$$

logarifmik hosilasining chegirmasini uning a nuqtadagi A-logarifmik chegirmasi deb ataymiz. Quyidagi munosabat o'rinli:

$$d\left(Lnf(z)\right)=\frac{1}{f(z)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}d\bar{z}\right)=\frac{1}{f(z)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz+A\frac{\partial f}{\partial z}d\bar{z}\right)=$$

$$=\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz+A(z)d\bar{z}\right).$$

Aytaylik, $a\in\mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ A-analitik funksiyaning n tartibli noli bo‘lsin. U holda a nuqtaning biror A-lemniskatik atrofi $L(a,r)$ da $f(z)=\psi(z,a)^n h(z)$ tenglik o‘rinli, bu yerda $h(z)\in\mathcal{O}_A(D), h(a)\neq 0$. Shuning uchun $L(a,r)$ A-lemniskatada

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}=\frac{n}{\psi(z,a)}+\frac{\frac{\partial h(z)}{\partial z}}{h(z)}$$

tenglik o‘rinli. Agar $b\in\mathbb{C}$ — $f(z)$ funksiyaning m tartibli noli bo‘lsa, u holda $f(z)=\frac{g(z)}{\psi^n(z,b)}$ bo‘lib, bu yerda $g(z)\in\mathcal{O}_A(D), g(b)\neq 0$. Shuning uchun $L(b,r)$ A-lemniskatada quyidagi tenglik o‘rinli:

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}=\frac{\frac{\partial g(z)}{\partial z}}{g(z)}-\frac{m}{\psi(z,b)}.$$

15-teorema. *Aytaylik, $f(z)$ funksiya $D\subset\mathbb{C}$ sohada A-meromorf, $G\Subset D$ esa chegarasi ∂G silliq egri chiziq bo‘lgan va ∂G $f(z)$ funksiyaning nollarini ham qutblarini ham saqlamaydigan soha bo‘lsin. U holda quyidagi tenglik o‘rinli:*

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G}\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz+A(z)d\bar{z}\right),$$

bu yerda N va P lar mos ravishda $f(z)$ funksiyaning G sohadagi nollari va qutblari soni, ∂G — yo‘naltirilgan chegara.

16-teorema (argument prinsipi). *Aytaylik, $f(z)$ funksiya $D\subset\mathbb{C}$ sohada A-analitik bo‘lib, $G\Subset D$ — chegarasi ∂G silliq chiziq bo‘lgan, $f(z)$ funksiyaning nollarini ham, qutb maxsus nuqtalarini ham o‘zida saqlamaydigan soha bo‘lsin. U holda*

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\arg f(z),$$

bo‘ladi, bu yerda N va P lar mos ravishda $f(z)$ funksiyaning nollari va qutblari soni, ∂G — yo‘naltirilgan chegara.

Ushbu argument prinsipidan foydalanib, xuddi klassik holdagi kabi quyidagi tasdiqni hosil qilamiz.

17-teorema (Rushe teoremasi analogi). *Aytaylik,* $f(z)$ *va* $g(z)$ *funksiyalar silliq chegarali yopiq* $\overline{G}$ *sohaning biror atrofida A-analitik funksiyalar bo'lsin va barcha* $z \in \partial G$ *lar uchun ushbu*

$$|f(z)| > |g(z)|$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda $f(z)$ *va* $f(z)+g(z)$ *funksiyalar* G *da bir xil sondagi nollarga ega bo'ladi.*

Ma'lumki, Shvarts tengsizligi analitik funksiyalar geometrik nazariyasi, konform izomorfizmlar nazariyasi, approksimatsiyalar nazariyasi, uzluksizlik modullarini baholashda, variatsion masalalar kabi masalalarda ko'p sonli tadbiqlarga ega. Dissertatsiya ishida *A*-analitik funksiyalar uchun Shvarts lemmasi hamda undan kelib chiqadigan natijalar isbotlangan bo'lib, ushbu natijalardan uchinchi bobning asosiy natijasini isbotlash uchun foydalaniladi.

2-lemma (Shvarts lemmasi analogi). *Faraz qilaylik,* $f \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right)$, $|f(z)| \le M$ *va* $f(a)=0$ *bo'lsin. U holda barcha* $z \in L(a,R)$ *lar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$|f(z)| \le \frac{M}{R}|\psi(z,a)|.$$

1-natija. *Aytaylik,* $f \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right)$, $|f(z)| \le M$ *va*

$$f(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) = ... = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial z^{n-1}}(a) = 0$$

bo'lsin. U holda barcha $z \in L(a,R)$ *lar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^n}|\psi(z,a)|^n.$$

2-natija. *Aytaylik,* $f \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right)$, $|f(z)| \le M$ *va* $b \in L(a,R)$ *uchun* $f(b)=0$ *bo'lsin. U holda barcha* $z \in L(a,R)$ *lar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$|f(z)| \le MR\left|\frac{\psi(z,a)-\psi(b,a)}{R^2-\overline{\psi}(b,a)\psi(z,a)}\right|.$$

Dissertatsiyaning **"Separat *A*-analitik funksiyalar"** deb nomlangan uchinchi bobida $\mathbb{C}^n$ fazodagi Beltrami tenglamalar sistemasining yechimi sifatida ko'p o'zgaruvchili *A*-analitik va separat *A*-analitik funksiyalar ta'riflanadi. Beltrami tenglamalar sistemasi har doim yechimga ega bo'ladigan shart keltirilgan. Ko'p o'zgaruvchili *A*-analitik funksiyalar uchun Koshining integral formulasi analogi, ko'p o'zgaruvchili *A*-analitik funksiyalarni karrali qatorga yoyish haqidagi teorema isbotlangan. Ko'p o'zgaruvchili *A*-analitik funksiyalar uchun Xartogs teoremasi analogi isbotlangan.

Ko'p o'lchovli kompleks fazodagi biror $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada Beltrami tenglamasining analogi quyidagi tenglamalar sistemasi bo'ladi

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z}, \ z \in D, \tag{9}$$

bu yerda

$$z=\left(z_1,z_2,...,z_n\right),\ A(z)=\left(A_{jk}(z)\right)_{j,k=\overline{1,n}},$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}_1}\\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}_n}\end{pmatrix},\ \frac{\partial f(z)}{\partial z}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_1}\\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial z_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial z_n}\end{pmatrix}.$$

Umumiy holda (9) tenglamalar sistemasining yechimini topish va uni tadqiq qilish juda murakkab masala hisoblanadi. Yana shuni ham qayd etish kerakki, umumiy holda, (9) tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lmasligi mumkin. (9) tenglamalar sistemasining yechimi mavjud bo‘lishi uchun bir qator shartlar bajarilishi talab etiladi.

Biz ixtiyoriy $n\geq 2$ uchun ko‘p o‘lchovli holda ham $A(z)$ ni antianalitik deb faraz qilamiz, $\overline{A}(z)\in\mathcal{O}(D)$, $\|A(z)\|\leq C<1$, $z\in D$, bu yerda $\|A(z)\|=\max\limits_{j,k}\left|A_{jk}(z)\right|$ — norma. Xususiy holda $A(z)=\left(A_{jk}(z)\right)_{j,k=\overline{1,n}}$ matritsa diagonal ko‘rinishga ega bo‘lganda (9) sistemani, aynan ushbu

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_1}=A_1(z)\dfrac{\partial f}{\partial z_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_2}=A_2(z)\dfrac{\partial f}{\partial z_2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_n}=A_n(z)\dfrac{\partial f}{\partial z_n}\end{cases}\tag{10}$$

ko‘rinishdagi sistemani o‘rganish yanada qiziqarliroq hisoblanadi. Bu yerda $A_j(z)$ funksiyalar $D\subset\mathbb{C}^n$ sohada antianalitik funksiyalar bo‘lib, $\|A\|_D\leq C<1$. Bu holda (10) tenglamalarning $D\subset\mathbb{C}^n$ sohada haqiqiy analitik bo‘lgan yetarlicha keng sinfi mavjud bo‘ladi.

18-teorema. *Aytaylik* $D\subset\mathbb{C}^n$ *sohada aniqlangan* $A_1(z),\ A_2(z),...,A_n(z)$ *funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:* $\overline{A}(z)\in\mathcal{O}(D)$, $\|A(z)\|\leq C<1$, $z\in D$ *va*

$$\frac{\partial \overline{A}_k}{\partial z_j}=\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial z_k}\left(yoki\ \frac{\partial A_k}{\partial \overline{z}_j}=\frac{\partial A_j}{\partial \overline{z}_k}\right),\ j,k=1,2,...,n.$$

u holda (10) sistema yechimga ega bo‘ladi.

8-ta'rif. *Agar $D\subset\mathbb{C}^n$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgan ko'p o'zgaruvchili $f(z)$ funksiya shu sohada (10) tenglamalar sistemasini qanoatlantirsa, unda u D sohada A-analitik funksiya deyiladi.*

9-ta'rif. *Agar ko'p o'zgaruvchili $f(z)$ funksiya fiksirlangan $\left(z_1^0,...,z_{j-1}^0,z_{j+1}^0,...,z_n^0\right)$ o'zgaruvchilarda z_j $(j=\overline{1,n})$ o'zgaruvchi bo'yicha $D\bigcap\left\{z_1=z_1^0,...,z_{j-1}=z_{j-1}^0,z_{j+1}=z_{j+1}^0,...,z_n=z_n^0\right\}$ to'plamda ushbu*

$$\frac{\partial f\left(z_1^0,...,z_{j-1}^0,z_j,z_{j+1}^0,...,z_n^0\right)}{\partial\overline{z}_j}=$$

$$=A_j\left(z_1^0,...,z_{j-1}^0,z_j,z_{j+1}^0,...,z_n^0\right)\frac{\partial f\left(z_1^0,...,z_{j-1}^0,z_j,z_{j+1}^0,...,z_n^0\right)}{\partial z_j}$$

tenglamani qanoatlantirsa, unda u z_j o'zgaruvchi bo'yicha separat A-analitik funksiya deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, agar $f(z)$ funksiya A-analitik bo'lsa, unda u har bir o'zgaruvchisi bo'yicha alohida separat A-analitik bo'ladi. Separat analitik funksiyalar uchun ($A\equiv 0$ bo'lgan hol) bizga yaxshi ma'lum bo'lgan Xartogs teoremasi o'rinli: separat analitik $f(z_1,...,z_n)$ funksiya barcha o'zgaruvchilari bo'yicha birvarakayiga analitik bo'ladi. Tabiiy savol tug'iladi: A-analitik funksiyalar uchun ham Xartogs teoremasi o'rinlimi, ya'ni funksiyaning separat A-analitik ekanligidan uning barcha o'zgaruvchilari bo'yicha birgalikda A-analitik bo'lishi kelib chiqadimi? Qo'yilgan savolga uchinchi bobning uchinchi paragrafida A-analitik funksiyalar uchun Xartogs teoremasi analogi ko'rinishida javob beriladi.

Aytaylik $D\subset\mathbb{C}^n$ soha bo'lsin. Umumiylikka zarar yetkazmasdan, $0\in D$ deb hisoblash mumkin. $U=\left\{z\in\mathbb{C}^n:\left|z_j\right|<r_j, j=1,2,...,n\right\}\Subset D$ orqali markazi koordinatalar boshida bo'lgan $r=\left(r_1,r_2,...,r_n\right)$ vektor radiusli polikrugni belgilab olamiz.

19-teorema. *U da A-analitik va $\overline{U}$ da uzluksiz bo'lgan har qanday $f(z)=f\left(z_1,z_2,\ldots,z_n\right)$ funksiya $z=\left(z_1,z_2,\ldots,z_n\right)\in U$ nuqtada Koshining karrali integrali ko'rinishida tasvirlanadi:*

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{f\left(\zeta_1,...,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)\left(d\zeta_1+A_1\left(\zeta_1,...,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_1\right)\wedge...\wedge}{\left(\zeta_1-z_1+\overline{\int\limits_{\gamma\left(z_1,\zeta_1\right)}\overline{A}_1\left(\tau_1,\zeta_2,...,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_1}\right)\times...\times}$$

$$\frac{\wedge\left(d\zeta_{n-1}+A_{n-1}\left(z_1,\dots,z_{n-2},\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_{n-1}\right)\wedge}{\times\left(\zeta_{n-1}-z_{n-1}+\overline{\int\limits_{\gamma\left(z_{n-1},\zeta_{n-1}\right)}\overline{A}_{n-1}\left(z_1,\dots,z_{n-2},\tau_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_{n-1}}\right)\times}$$

$$\frac{\wedge\left(d\zeta_n+A_n\left(z,\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_n\right)}{\times\left(\zeta_n-z_n+\overline{\int\limits_{\gamma\left(z_n,\zeta_n\right)}\overline{A}_n\left(z,\tau_n\right)d\tau_n}\right)},$$

bu yerda $\gamma\left(z_j,\zeta_j\right)$ *—* z_j *va* ζ_j *nuqtalarni tutashtiruvchi ixtiyoriy silliq yoki bo'lakli-silliq yassi egri chiziq,* Γ *—* U *polikrugning ostovi, ya'ni* $\gamma_j=\left\{\left|z_j\right|=r_j\right\}$, $j=\overline{1,n}$ *chegaraviy aylanalarning ko'paytmasi.*

2-izoh. *19-teoremaning isbotidan ko'rinadiki,* $f\left(z\right)$ *funksiyani Koshining karrali integrali ko'rinishida ifodalash uchun* $f\left(z\right)$ *ning har bir o'zgaruvchisi bo'yicha separat A-analitikligi va barcha o'zgaruvchilari bo'yicha birgalikda uzluksizligi yetarli bo'ladi (*f *ning barcha o'zgaruvchilari bo'yicha birgalikda differensiallanuvchiligi talab etilmaydi).*

20-teorema. *Agar* $f(z)$ *funksiya* U *da separat A-analitik va* $\overline{U}$ *da uzliksiz bo'lsa, unda u har bir* $z\in U$ *nuqtada quyidagi karrali qator ko'rinishida ifodalanadi:*

$$f\left(z\right)=\sum_{|k|=0}^{\infty}c_k\left(z_1+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,z_1\right)}\overline{A}_1\left(\tau_1,\zeta_2,\dots,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_1}\right)^{k_1}\times\dots\times$$

$$\left(z_{n-1}+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,z_{n-1}\right)}\overline{A}_{n-1}\left(z_1,\dots,z_{n-2},\tau_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_{n-1}}\right)^{k_{n-1}}\times$$

$$\times\left(z_n+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,z_n\right)}\overline{A}_n\left(z,\tau_n\right)d\tau_n}\right)^{k_n},$$

qatorning c_k *koeffitsiyentlari quyidagicha bo'ladi:*

$$c_k=\frac{1}{\left(2\pi i\right)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{f\left(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)\left(d\zeta_1+A_1\left(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_1\right)\wedge}{\left(\zeta_1+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,\zeta_1\right)}\overline{A}_1\left(\tau_1,\zeta_2,\dots,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_1}\right)^{k_1+1}}\times$$

$$\times\ldots\times\frac{\wedge\left(d\zeta_{n-1}+A_{n-1}\left(z_1,\ldots,z_{n-2},\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_{n-1}\right)\wedge}{\left(\zeta_{n-1}+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,\zeta_{n-1}\right)}\overline{A}_{n-1}\left(z_1,\ldots,z_{n-2},\tau_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_{n-1}}\right)^{k_{n-1}+1}}\times$$

$$\times\frac{\wedge\left(d\zeta_n+A_n\left(z,\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_n\right)}{\left(\zeta_n+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,\zeta_n\right)}\overline{A}_n\left(z,\tau_n\right)d\tau_n}\right)^{k_n+1}}.$$

Demak, $f\left(z\right)=f\left(z_1,z_2,\ldots,z_n\right)$ A-analitik funksiyani karrali integral ko‘rinishida ifodalash va uni karrali qatorga yoyish uchun uning chegaralangan bo‘lishi yetarli ekan.

3-lemma. *Agar* $f\left(z\right)=f\left(z_1,z_2,...,z_n\right)$ *funksiya* $U=U\left(a,r\right)$ *polikrugda barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha separat A-analitik va* U *da chegaralangan bo‘lsa, unda u shu polikrugning har bir nuqtasida barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha birgalikda uzluksiz bo’ladi.*

Aytib o‘tilganlar asosida biz ko‘p o‘zgaruvchili A-analitik funksiyalar uchun Xartogs teoremasi isbotini hosil qilamiz.

21-teorema (Xartogs teoremasi analogi). *Agar* $f\left(z\right)$ *funksiya* $D\subset\mathbb{C}^n$ *sohada barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha separat A-analitik va chegaralangan bo‘lsa, unda u barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha birgalikda A-analitik, ya’ni u uzluksiz differensiallanuvchi va A-analitik bo‘ladi.*

3-izoh. *21-teoremadagi funksiyaning chegaralanganlik sharti ortiqcha bo‘lishi mumkin. Ammo dissertatsiyada keltirilgan isbotlash usulida bu shartdan foydalaniladi.*

XULOSA

Umuman olganda, dissertatsiyada olingan natijalar dissertatsiya ishining maqsadiga erishilganligi haqida gapirish imkonini beradi. Barcha asosiy natijalar yangi va birgalikda A-analitik funksiyalar nazariyasi rivojiga ma'lum bir hissa qo'shadi. Dissertatsiya ishi kompleks tekislikda A-analitik funksiyalarning funksional xossalarini o'rganish, $\mathbb{C}^n$ fazoda ko'p o'zgaruvchili A-analitik funksiya tushunchasini kiritish va bunday funksiyalarni tadqiq qilishga bag'ishlangan.

Tadqiqot ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Antianalitik $A(z)$ funksiyalar uchun Koshi teoremasi C^1-silliqlikni talab qilmasdan isbotlandi.

2. A-analitik funksiyalar uchun chegirma tushunchasi kiritildi, chegirmalarni hisoblash formulalari topildi. A-analitik funksiyalar chegirmasi uchun Koshi teoremasining analogi isbotlandi.

3. A-analitik funksiyalar chegirmasi va ularning yakkalangan maxsus nuqta atrofidagi Loran qatoriga yoyilmasi o'rtasida munosabat o'rnatildi. A-meromorf funksiya, A-analitik funksiyalar uchun A-logarifmik chegirma tushunchalari kiritilib, ularning xossalari tadqiq qilindi.

4. A-analitik funksiyalar uchun argument prinsipi, Rushe teoremasi analogi va Shvarts lemmasi isbotlandi.

5. Ko'p o'zgaruvchili A-analitik va separat A-analitik funksiya tushunchalari kiritildi. Beltrami tenglamalar sistemasi har doim yechimga ega bo'ladigan shart topildi. Ko'p o'zgaruvchili A-analitik funksiyalar uchun karrali Koshi integral formulasi isbotlandi. Ko'p o'zgaruvchili A-analitik funksiyalarni qatorga yoyish haqidagi teorema isbotlandi. Ko'p o'zgaruvchili A-analitik funksiyalar uchun funksiya chegaralangan bo'lgan holda Xartogs teoremasi o'rinli bo'lishi isbotlandi.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ОТАБОЕВ ТОЛИБ УРОЛОВИЧ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА *A*-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Ташкент – 2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.3.PhD/FM745.

Диссертация выполнена в национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://ik-fizmat.nuu.uz и на информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Садуллаев Азимбай** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Имомкулов Севдиер Акрамович** доктор физико-математических наук, профессор
	Имомназаров Холматжон Худойназарович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Холонский технологический институт (Израиль)**

Защита диссертации состоится «15» июня 2023 года в 10:00 на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21 e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (зарегистрирована за №__). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «__» __________ 2023 года.
(протокол рассылки №__ от «__» __________ 2023 года).

Б. А. Шоимкулов
Заместитель председателя Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Н. К. Мамадалиев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р. Н. Ганиходжаев
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-практические исследования в области комплексного анализа, механики и физики, проводимые во всем мире, приводятся к задачам теории *A*-аналитических функций. Задачи теории квазиконформных отображений и теории *A*-аналитических функций являются объектами исследований в таких сферах, как медицинская физика, биотехнология, аэродинамика и др. Теория *A*-аналитических функций, построенная как на комплексной плоскости, так и в многомерном комплексном пространстве, играет важную роль при решении актуальных задач комплексных динамических систем, теории функций, механики и математической физики. Основные понятия этой теории – *A*-аналитическая функция, *A*-гармоническая функция, интеграл Коши, система уравнений Бельтрами и др. вводятся также как понятия классической теории аналитических и гармонических функций, однако они отличаются друг от друга в связи с тем, что они являются обобщениями классических понятий и со сложной структурой многомерного комплексного пространство.

В настоящее время во всем мире проводятся научные исследования, связанных с решением задачи теории *A*-аналитических функций и внедрении полученные результаты в практике. Данные задачи разрешены с помощью теории *A*-аналитических функций и проводятся актуальные исследования для внедрения этих результатов на практических задач. *A*-аналитические функции широко используются при решении актуальных задач комплексных динамических систем, теории функций, механики и математической физики. В связи с этим уделяется особое внимание получению новых научных результатов при помощи *A*-аналитических функций одного и многих переменных и их свойств, а также применению полученных результатов к решению актуальных задач теории функций.

В нашей стране, особенно в последние годы, повышено внимание к фундаментальным наукам, в частности математике и физике, и в ряду с ним к актуальным направлениям, имеющие научное значение в задачах медицинской и геологической томографии. В последние годы уделяется особое внимание развитию теории функций, теории потенциалов, теории аппроксимаций и теории комплексных динамических систем. Все эти факторы показывают, что рассматриваемые задачи являются насколько актуальным. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоретитным направлением «Теория функций действительного переменного, теория функций комплексного переменного»[1] определены как основные задачи и направления деятельности предмета математики. Проведение научных исследований по теории *A*-аналитических функций имеет важное значение при исполнении постановления.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 от 18 мая 2017 года «Об организации вновь созданных научно-исследовательских институтов Академии наук Республики Узбекистан».

Исследования данной диссертации в определенной степени служат также решению задач, поставленных в Указах и Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», и ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также других нормативно-правовых актов, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Как известно, теория плоских квазиконформных отображений, построенная Г. Гречем, М. А. Лаврентьевым и Л. Альфорсом нашла важные применения в задачах математической физики и механики, установила плодотворные связи с такими областями как теория клейновых групп, функциональные пространства и дифференциальные операторы. Сильно возрастает роль метода модулей, введенного в 1950 году Л. Альфорсом и А. Берингом и распространенного на n-мерные пространства Б. Фюгледе и Б. В. Шабатом. Теория пространственных квазиконформных отображений была введена в 1938 году М. А. Лаврентьевым. Теория квазиконформных отображений на плоскости тесно связана с решениями уравнения Бельтрами, она бурно развивалась в середине XX века, благодаря американским математикам Л. Альфорса, А. Беринга, Л. Берса, Ф. В. Геринга, российским математикам М. А. Лаврентьева, И. Н. Векуа, П. П. Белинского, Ю. Г. Решетняка, В. И. Миклюкова, В. А. Зорича, П. М. Тамразова, С. Л. Кружкаля, А. В. Сычева, И. П. Митюкова, Г. Д. Суворова, В. В. Асеева, польского математика Б. В. Боярского.

В нашей стране эта теория развивалась благодаря усилиям Л. И. Волковыского, М. Захирова, А. Ахмедова, Г. М. Лян, А. К. Варисова и др. Изучение функциональных свойств решений уравнения Бельтрами, т.е. A-аналитических функций получило развитие в 90-х годах прошлого века, в работах таких известных ученых как: Ю. Сребро и Э. Х. Якубова (Израиль), В. И. Рязанова, В. Гутлянского, Д. А. Ковтонюка, И. В. Петкова, Р. Р. Салимова (Украина), А. Н. Кондрашова, А. Л. Бухгейма, С. Г. Казанцева (Россия) и др. Это связано с тем, для A-аналитических функций стали изучаться их функциональные свойства, такие как гладкость, особые точки, складки и др. Эти свойства важны в применениях медицинской и геологической томографии.

В Узбекистане с 2010 года на кафедре математического анализа Национального университета Узбекистана под руководством академика А. Садуллаева и его учеников Н. М. Жабборова, Т. У. Отабоева, Ш. Я. Хурсанова и др. начали изучать функциональные свойства A-аналитических функций; получены аналоги ядра Коши, формул Шварца и Пуассона, аналог представления Рисса для A-аналитических, A-гармонических и A-субгармонических функций. Еще одна проблема, изучаемая на кафедре это исследование функциональных свойств A-аналитических функций многих переменных. В частности, была поставлена задача: доказать аналог теоремы Хартогса для A-аналитических функций многих переменных.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в рамках гранта «Функциональные свойства A-аналитических функций и их применения. Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях» Национального университета Узбекистана.

Целью исследования является изучение функциональных свойств A-аналитических функций на комплексной плоскости, доказательство теоремы Хартогса для A-аналитических функций многих переменных.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

доказательство теоремы Коши для A-аналитических функций;

доказательство принципа аргумента и леммы Шварца для A-аналитических функций;

определение понятия A-аналитических и сепаратно A-аналитических функций многих переменных, получение интегральную формулу Коши для A-аналитических функций многих переменных, разожение их в ряды;

доказательство аналога теоремы Хартогса для A-аналитических функций многих переменных.

Объектом исследования являются A-аналитические функции, уравнение Бельтрами, система уравнений Бельтрами в пространстве $\mathbb{C}^n$, интегральные формулы.

Предметом исследования являются уравнение Бельтрами, A-аналитические функции, вычеты для A-аналитических функций, принцип аргумента для A-аналитических функций, неравенство Шварца, A-аналитические функции многих переменных, теорема Хартогса.

Методика исследования. В диссертационной работе используются методы теории функций, теория аналитических функций, классическая теория потенциала, теория плюрипотенциала, теория квазиконформных отображений и A-аналитических функций.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Доказано обобщение известной теоремы Коши для A-аналитических функций, а также доказана теорема Коши для многосвязных областей;

введено понятие вычета для A-аналитических функций, доказаны теоремы, устанавливающие взаимосвязь между вычетами и лорановскими разложениями в окрестности изолированных особых точек A-аналитических функций, найдены формулы для вычисления вычетов. Определено понятие логарифмического вычета для A-аналитических функций, доказан принцип аргумента для A-аналитических функций;

доказаны теорема Руше для A-аналитических функций и лемма Шварца, которая играет существенную роль при доказательстве непрерывности по совокупности переменных A-аналитической функции, которая является непрерывной по каждому из переменных отдельно;

введены понятия сепаратно A-аналитической и A-аналитической функции многих переменных, как решение систем уравнения Бельтрами в многомерном комплексном пространстве, найдено условие, при выполнении которого система уравнений Бельтрами всегда имеет решение;

доказаны кратная интегральная формула Коши для A-аналитических функций многих переменных и теорема о разложении A-аналитических функций многих переменных в кратный ряд, доказано обобщение классической теоремы Хартогса для A-аналитических функций многих переменных.

Практические результаты исследования заключаются в возможности применения полученной в диссертации интегральной формулы Коши, леммы Шварца и аналога теоремы Хартогса в решениях краевых задач эллиптических уравнений и в других разделах математической физики. Кроме того, полученные результаты и методы, использованные в диссертации, могут быть использованы в качестве учебного курса для магистрантов и докторантов высших учебных заведений.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием известных методов теории функций комплексного переменного, многомерного комплексного анализа, теории A-аналитических функций, алгебры, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что что полученные результаты могут быть использованы в вопросах A-аналитического продолжения, в теории квазиконформных отображений и в разложениях A-аналитических функций многих переменных в ряд Тейлора.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что она позволяет восстанавливать значения A-гармонических функций, внутри области по данным на границе, используемых в компьютерной томографии и расчета трения жидкости, задач механики и других задач математической физики.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по теории A-аналитических функций внедрены в практику по следующим направлениям:

понятие вычета, определенное для A-аналитических функций одного переменного, а также, доказанный принцип аргумента и аналог теоремы Руше использованы при исследовании мероморфных функций в классических областях второго типа и в специальных аналитических полиэдрах: в гранте ОТ-Ф4-03 «Конкретные динамические системы с непрерывными и дискретными временами, спектры частично интегральных операторов. (Справка № 04/1022 от 17 марта 2023 года, Каршинский государственный университет). Результаты диссертации позволили доказать формул Вейля для специальных аналитических полиэдров и аналог теоремы Руше для матричных полиэдров;

введенное понятие *A*-аналитической функции, как решение уравнения Бельтрами, позволило определить *A*-гармонические и *A*-субгармонические функции; исследовать функциональные свойства таких функций в проекте MRU-OT-9/2017 «Многомерный комплексный анализ» (Справка № 04/11-1411 от 17 марта 2023 года, Национальный Университет Узбекистана). Использование научного результата диссертации позволило им доказать формулы Пуассона и Шварца для *A*-гармонических функций.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на трех международных и девяти республиканских научных и научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 19 научных работ, из них 4 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе, 2 из них опубликованы в зарубежном журнале.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на одиннадцать параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 76 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Предварительные сведения»**, приведены необходимые понятия и вспомогательные результаты по теории *A*-аналитических функций. В этой предварительной главе мы приводим понятие *A*-аналитической функции одного переменного и простейшие алгебраические свойства таких функций. Кроме того, мы доказываем аналог классической теоремы Коши для *A*-аналитических функций. В четвертом параграфе главы I приведена формула Коши для *A*-аналитических функций, которая играет немаловажную роль при дальнейшем исследовании A-аналитических функций. В последнем, пятом параграфе главы I приведены разложения A-аналитических функций в ряд Тейлора и Лорана.

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Если $z = x + iy$, то как обычно

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ и } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Для заданной в D функции $A(z)$ мы положим

$$\mathcal{D}_A = \frac{\partial}{\partial z} - A(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}},\ \overline{\mathcal{D}}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \overline{A(z)}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Определение 1. *Функция $f(z) \in C^1(D)$ называется A-аналитической функцией в области D, если для любого $z \in D$ выполняется равенство*

$$\overline{\mathcal{D}}_A f(z) = 0. \tag{1}$$

Определение 2. *Функция $f(z) \in C^1(D)$ называется A-антианалитической функцией в области D, если для любого $z \in D$ выполняется равенство*

$$\mathcal{D}_A f(z) = 0. \tag{2}$$

Отметим, что при $A(z) \equiv 0$ мы получим определения аналитической и антианалитической функции, соответственно.

Класс A-аналитических функций в области D обозначим через $\mathcal{O}_A(D)$.

Надо заметить следующие алгебраические свойства A-аналитических функций: линейная комбинация конечного числа A-аналитических функций, произведение двух A-аналитических функций и отношение двух A-аналитических функций (там, где знаменатель не обрашается в нуль) также является A-аналитической функцией. А также, комплексное сопряжение A-аналитической функции является A-антианалитической функцией.

A-аналитические функции и уравнение (1) имеют непосредственные отношение к уравнениям Бельтрами

$$f_{\bar{z}}(z) = A(z) f_z(z) \tag{3}$$

и к квазиконформным отображениям. Относительно функции $A(z)$, в теории квазиконформных отображений предполагается, что она измерима и $|A(z)| \le C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. Одной из фундаментальных работ по теории уравнений Бельтрами и квазиконформных отображений является монография В. Гутлянского, В. Рязанова, Ю. Сребро и Э. Якубова, в которой рассматривается геометрический подход к исследованию уравнения Бельтрами со складками.

Приведем ряд известных функциональных свойств A-аналитических функций, которые существенно использованы в диссертационной работе.

Теорема 1. *Для любой измеримой на плоскости* $\mathbb{C}$ *функции* $A(z):\|A\|_\infty<1$ *существует единственное гомеоморфное решение* $\chi(z)$ *уравнения* (3) *такое, что* χ *оставляет неподвижными точки* $0, 1, \infty$.

Теорема 2. *Множество всех обобщенных решений уравнения* (3) *исчерпывается формулой* $f(z)=\Phi\left[\chi(z)\right]$, *где* $\chi(z)$ *— гомеоморфное решение из теоремы 1, а* $\Phi(\xi)$ *— голоморфная функция от* ξ *в* $\chi(D)$.

Теорема 3. *Если функция* $A(z)$ *принадлежит классу m раз непрерывно дифференцируемых функций:* $A(z)\in C^m(D)$, *то всякое решение* f *уравнения (3) тоже принадлежит, как минимум, этому же классу, т.е.* $f\in C^m(D)$.

Для глубокого изучения функциональных свойств *A*-аналитических функций, мы рассматриваем случай, когда $A(z)$ — *антианалитическая функция* в области D, т.е. $\dfrac{\partial A}{\partial z}=0$ и $|A(z)|\le C<1, \forall z\in D$.

Теорема 4 (Аналог теоремы Коши). *Если* $f(z)$ *является A-аналитической функцией в односвязной области* D, *то интеграл* $\int\limits_\gamma f(z)\left(dz+A(z)d\bar{z}\right)$, *взятый вдоль любой замкнутой гладкой кривой* γ, *лежащей в области* D *равен нулю.*

Эта теорема является одной из важнейших теорем теории *A*-аналитических функций. В совместной с Н. М. Жабборовым работе автора эта теорема доказана при дополнительных условиях и сформулирована следующим образом:

Теорема 5. *Пусть* $f(z)\in C^1(D)\cap C\left(\overline{D}\right)$ *— A-аналитическая функция в ограниченной односвязной области* D. *Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\left(dz+A(z)d\bar{z}\right)=0.$$

Как и в классическом случае, доказывается теорема Коши для многосвязных областей.

Теорема 6. *Пусть* $f(z)$ *— A-аналитическая функция в ограниченной конечносвязной области* D *и непрерывна вплоть до ее границы* $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\ldots\cup\Gamma_n$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\left(dz+A(z)d\bar{z}\right)=0.$$

Пусть область $D\subset\mathbb{C}$ — выпуклая и $\zeta\in D$ фиксированная точка. Рассмотрим функции

$$\psi(z,\zeta)=z-\zeta+\overline{\int\limits_{\gamma(\zeta,z)}\overline{A}(\tau)d\tau} \text{ и } K(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\psi(z,\zeta)}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-\zeta+\overline{\int\limits_{\gamma(\zeta,z)}\overline{A}(\tau)d\tau}},$$

где $\gamma(\zeta,z)$ — гладкая кривая, соединяющая точки $\zeta, z \in D$.

Теорема 7. *Пусть* $D \subset \mathbb{C}$ *— выпуклая область и* $\zeta \in D$ *фиксированная ее точка. Тогда* $K(z,\zeta)$ *является А-аналитической функцией вне точки* $z=\zeta$*, т.е.* $K(z,\zeta) \in \mathcal{O}_A\left(D\setminus\{\zeta\}\right)$*, Более того, в точке* $z=\zeta$ *она имеет единственный простой полюс.*

Замечание 1. *Если область* D *не выпуклая, а только односвязная, то несмотря на то, что функция* $\psi(z,\zeta)$ *определена и однозначна в* D*, она может иметь другие изолированные нули, кроме* $\zeta : \psi(z,\zeta)=0$, $\zeta \in P=\{\zeta_1,\zeta_2,...\}$. *Следовательно,* $\psi \in \mathcal{O}_A(D)$, $\psi(z,\zeta)\neq 0$ *если* $\zeta \notin P$ *и* $K(z,\zeta)$ *является* A*-аналитической функцией только в* $D\setminus P$*, она имеет полюсы в точках* P*. В силу этого факта, желая использовать ядро* $K(z,\zeta)$*, мы рассматриваем класс* A*-аналитических функций в выпуклых областях.*

В силу теоремы 2, функция $\psi(z,\zeta)\in\mathcal{O}_A(D)$ осуществляет внутреннее отображение. В частности, множество

$$\left\{ z\in D : |\psi(z,\zeta)| = \left| z-\zeta + \overline{\int\limits_{\gamma(\zeta,z)} \overline{A}(\tau)d\tau} \right| < r \right\} \tag{4}$$

открыто в D. Для достаточно маленьких $r>0$ оно компактно лежит в D и содержит точку ζ.

Определение 3. *Множество вида* (4) *называем А-лемнискатой с "центром" в точке* ζ *и обозначим через* $L(\zeta,r)$.

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon>0$*, следующий интеграл по границе А-лемнискаты* $L(\zeta,\varepsilon)\Subset D$ *равен 1:*

$$\int\limits_{\partial L(\zeta,\varepsilon)} K(z,\zeta)(dz + A(z)d\bar{z}) = 1.$$

В следующей теореме приводится аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций.

Теорема 8. *Пусть* $f(z)$ *— А-аналитическая функция в области* D *и* $G\Subset D$ *область, ограниченная конечным числом гладких кривых. Тогда в любой точке* $z\in G$ *функция* $f(z)$ *представима в виде*

$$f(z)=\int\limits_{\partial G} f(\zeta)K(z,\zeta)(d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}),$$

где ∂G *— ориентированная граница* G.

Заметим, что аналогом степенных рядов для A-аналитических функций будут ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j\psi^j(z,a),\ a\in D,\ c_j \text{ – константы.} \tag{5}$$

Областью сходимости ряда (5) будет A-лемниската $L(a,r)=\{|\psi(z,a)|<r\}$, где радиус сходимости r находится по формуле Коши—Адамара:

$$\frac{1}{r}=\overline{\lim_{j\to\infty}}\sqrt[j]{|c_j|}.$$

Имеет место и обратная

Теорема 9. *Если* $f(z)\in\mathcal{O}_A(L(a,r))\cap C(\overline{L}(a,r))$, *где* $L(a,r)=\{z\in D:|\psi(z,a)|<r\}\Subset D$ *— A-лемниската, то в* $L(a,r)$ *функция* $f(z)$ *разлагается в ряд Тейлора:*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\psi^k(z,a),$$

где $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial L(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{[\psi(\zeta,a)]^{k+1}}\left(d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\right), 0<\rho<r, k=0,1,\ldots.$

Имеет место также разложение A-аналитической функции в ряд Лорана:

Теорема 10. *Пусть функция* $f(z)$ *— A-аналитична в кольце из лемнискат:* $f\in\mathcal{O}_A(L(a,R)\setminus L(a,r)), 0<r<R$. *Тогда* $f(z)$ *разлагается в этом кольце в ряд Лорана:*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\psi^k(z,a), \tag{6}$$

где коэффициенты Тейлора—Лорана определяются по формуле

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{[\psi(\zeta,a)]^{k+1}}\left(d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\right), r<\rho<R, k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Ряд (6) сходится равномерно внутри кольца

$$L(a,R)\setminus\overline{L(a,r)}=\{z\in D:r<|\psi(z,a)|<R\}.$$

Неравенства Коши. Для коэффициентов Тейлора—Лорана справедливы неравенства

$$|c_k|\le\frac{\max\{|f(z)|:z\in\partial L(a,\rho)\}}{\rho^k}, r<\rho<R, k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Ряд Лорана является удобным аппаратом исследования изолированных особенностей A-аналитической функции. Если точка a является изолированной особой точкой функции f, т.е. если $f\in\mathcal{O}_A(0<|\psi(z,a)|<R)$, $0<R$, и f — ограничена в некоторой проколотой окрестности a, то в (6) члены рядя с отрицательными степенями отсутствует: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\psi^k(z,a)$ и точка a является устранимой особой точкой f; если

$\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, то в (6) имеется только конечное число членов ряда с отрицательными степенями:

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty} c_k \psi^k(z,a),\ m>0,\ c_{-m}\neq 0.$$

В этом случае точка a называется полюсом порядка m. Остается случай, когда $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует. В этом случае точка a называется существенно особой точкой функции $f(z)$.

Во второй главе диссертации, которая называется «**Геометрические свойства *A*-аналитических функций на плоскости**» состоит из трех параграфов, ведено понятие вычета для *A*-аналитических функций и изучены свойства вычетов, исследованы изолированные особые точки *A*-аналитических функций, доказаны принцип аргумента и аналог теоремы Руше для *A*-аналитических функций.

Определение 4. *Вычетом A-аналитической функции* $f(z)$ *в точке* a *называется значение интеграла от функции* $f(z)$ *по границе достаточно малой* A*-лемнискаты* $L(a,r)$*, деленной на* $2\pi i$ *:*

$$\underset{z=a}{res_A} f(z):=\frac{1}{2\pi i}\cdot \oint\limits_{\partial L(a,r)} f(\zeta)\left(d\zeta + A(\zeta)d\overline{\zeta}\right). \tag{7}$$

Отметим, что по теореме Коши для двухсвязных областей интеграл в (7) не зависит от r. Имеет место следующий аналог теоремы Коши о вычетах.

Теорема 11. *Пусть функция* $f(z)$ *является A-аналитической всюду, за исключением изолированного множества особых точек в области* D, *а* $G\Subset D-$ *область с кусочно гладкой границей* ∂G *не содержащей особых точек* $f(z)$. *Тогда*

$$\oint\limits_{\partial G} f(\zeta)\omega(\zeta)=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=a_k}{res_A} f(z),$$

где $a_k,\ k=1,2,...,n,$ *особые точки* $f(z)$, *принадлежащие в* G.

Пусть функция $f(z)$, имеет изолированную особую точку в точке $z=a$ и

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(a,z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right)^k \tag{8}$$

ее разлажение в ряд Лорана.

Теорема 12. *Вычет A-аналитической функции* $f(z)$ *в изолированной особой точке* $a\in\mathbb{C}$ *равен коэффициенту при минус первой степени* $\psi(z,a)$ *в ее лорановском разложении* (8),

$$\underset{z=a}{res_A} f(z)=c_{-1}.$$

Определение 5. *Точка* $z=a$ *называется нулем A-аналитической функции* $f(z)$ *порядка* $n\geq 0$*, если*

$$f(z)=\left(z-a+\overline{\int_{\gamma(a,z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right)^{n}\cdot g(z),$$

где $g(a)\neq 0$ и $g(z)\in\mathcal{O}_A(D)$.

Определение 6. *Точка* $z=a$ *называется полюсом A-аналитической функции* $f(z)$ *порядка* n*, если точка* a *является нулем функции* $\dfrac{1}{f(z)}$ *порядка* n.

Теорема 13. *Изолированная особая точка* $a\in\mathbb{C}$ *для A-аналитической функции* $f(z)$ *является полюсом порядка* n *в том и только том случае, если главная часть лорановского разложения* $f(z)$ *в окрестности A-лемнискаты* $L(a,r)$ *в точке* a *содержит лишь конечное число отличных от нуля членов, причем*

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}c_k\left(z-a+\overline{\int_{\gamma(a,z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right)^{k},\ n\geq 1,\ c_{-n}\neq 0.$$

Теорема 14. *Пусть точка* $z=a$ *является полюсом порядка* n *для A-аналитической функции* $f(z)$*, тогда справедлива следующая формула*

$$\underset{z=a}{res_A}\, f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left[f(z)\left(z-a+\overline{\int_{\gamma(a,z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right)^{n}\right].$$

Далее определяются понятия A-мероморфной функции и A-логарифмического вычета для A-аналитических функций, доказываются принцип аргумента и аналог теоремы Руше для A-аналитических функций.

Определение 7. *A-аналитическая функция* $f(z)$*, не имеющая в области* D *других особенности, кроме полюсов, называется A-мероморфной в области* D*. Класс A-мероморфных в* D *функций обозначаем как* $\mathcal{M}_A(D)$.

Пусть функция $f\in\mathcal{O}_A\left(0<\left|\psi(z,a)\right|<R\right),0<R,$ и не обращается нуль в проколотой окрестности a. Мы назовем A-логарифмическим вычетом в точке a A-аналитической функции $f(z)$ вычет логарифмической производной

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz+A(z)d\overline{z}\right)=d\left(Lnf(z)\right)$$

в точке a. Можно показать, что верно следующее соотношение

$$d\left(Lnf(z)\right)=\frac{1}{f(z)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}d\overline{z}\right)=\frac{1}{f(z)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz+A\frac{\partial f}{\partial z}d\overline{z}\right)=$$

$$=\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz+A(z)d\bar{z}\right).$$

Пусть $a\in\mathbb{C}$ является нулем порядка n для A-аналитической функции $f(z)$. Тогда в некоторой A-лемнискатической окрестности $L(a,r)$ имеем равенство $f(z)=\psi(z,a)^n h(z)$, где $h(z)\in\mathcal{O}_A(D), h(a)\neq 0$. Поэтому в A-лемнискате $L(a,r)$ имеет место равенство

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}=\frac{n}{\psi(z,a)}+\frac{\frac{\partial h(z)}{\partial z}}{h(z)}.$$

Если $b\in\mathbb{C}$ — полюс функции $f(z)$ порядка m, то $f(z)=\dfrac{g(z)}{\psi^n(z,b)}$, где $g(z)\in\mathcal{O}_A(D), g(b)\neq 0$. Поэтому в A-лемнискате $L(b,r)$ имеет место равенство

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}=\frac{\frac{\partial g(z)}{\partial z}}{g(z)}-\frac{m}{\psi(z,b)}.$$

Теорема 15. *Пусть функция $f(z)$ является А-мероморфной в области $D\subset\mathbb{C}$, а $G\Subset D$ — область, граница ∂G которой является гладкой кривой и ∂G не содержит ни нулей, ни полюсов А-мероморфной функции $f(z)$. Тогда имеет место следующее равенство*

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial G}\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz+A(z)d\bar{z}\right),$$

где N и P соответственно число нулей и число полюсов функции $f(z)$ в области G и ∂G — ориентированная граница.

Теорема 16 (принцип аргумента). *Пусть функция $f(z)$ является А-мероморфной в области $D\subset\mathbb{C}$, а $G\Subset D$ — область, граница ∂G которой является гладкой кривой, не содержащей ни нулей, ни полюсов функции $f(z)$. Тогда*

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}argf(z),$$

где ∂G — ориентированная граница.

Используя доказанный принцип аргумента, аналогично классическому случаю, получаем следующее утверждение.

Теорема 17 (аналог теоремы Руше). *Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ являются А-аналитическими функциями в некоторой окрестности* *замкнутой области* $\bar{G}$ *с гладкой границей* ∂G*, и для всех* $z \in \partial G$ *выполняется неравенство*

$$\left|f(z)\right| > \left|g(z)\right|.$$

Тогда функции $f(z)$ *и* $f(z)+g(z)$ *имеют в* G *одинаковое число нулей.*

Известно, что лемма Шварца имеет многочисленные приложения в геометрической теории аналитических функций: в теории конформных изоморфизмов, в оценках модулей непрерывности, в вариационных задачах, в теории аппроксимаций и др. В диссертационной работе доказывается Лемма Шварца для *A*-аналитических функций и ее следствия, которые существенно используются при доказательстве основного результата третьей главы.

Лемма 2 (аналог леммы Шварца). *Пусть* $f \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right)$*,* $\left|f(z)\right| \le M$ *и* $f(a)=0$. *Тогда для всех* $z \in L(a,R)$ *имеет место неравенство*

$$\left|f(z)\right| \le \frac{M}{R}\left|\psi(z,a)\right|.$$

Следствие 1. *Пусть* $f \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right)$*,* $\left|f(z)\right| \le M$ *и*

$$f(a)=\frac{\partial f}{\partial z}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)=...=\frac{\partial^{n-1} f}{\partial z^{n-1}}(a)=0.$$

Тогда для всех $z \in L(a,R)$ *справедливо неравенство*

$$\left|f(z)\right| \le \frac{M}{R^n}\left|\psi(z,a)\right|^n.$$

Следствие 2. *Пусть* $f \in \mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right)$*,* $\left|f(z)\right| \le M$ *и* $f(b)=0$ *для* $b \in L(a,R)$. *Тогда для всех* $z \in L(a,R)$ *имеет место неравенство*

$$\left|f(z)\right| \le MR\left|\frac{\psi(z,a)-\psi(b,a)}{R^2-\bar{\psi}(b,a)\psi(z,a)}\right|.$$

В третьей главе диссертации, названной «**Сепаратно *A*-аналитические функции**» определены *A*-аналитические и сепаратно *A*-аналитические функции многих переменных, как решение систем уравнения Бельтрами в пространстве $\mathbb{C}^n$. Приведено условие, при выполнении которого система уравнений Бельтрами всегда имеет решение. Доказан аналог интегральной формулы Коши для *A*-аналитической функции многих переменных, доказана теорема о разложения *A*-аналитической функции многих переменных в кратный ряд. Доказан аналог теоремы Хартогса для *A*-аналитических функций многих переменных

Аналогом уравнения Бельтрами в области $D \subset \mathbb{C}^n$ многомерного комплексного пространства будет система уравнений

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z},\ z \in D, \tag{9}$$

где

$$z=(z_1,z_2,\dots,z_n),\ A(z)=\left(A_{jk}(z)\right)_{j,k=\overline{1,n}},$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial\bar z}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f(z)}{\partial\bar z_1}\\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial\bar z_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial\bar z_n}\end{pmatrix},\ \frac{\partial f(z)}{\partial z}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_1}\\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial z_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial z_n}\end{pmatrix}.$$

В общем случае, решение системы уравнения (9) и исследование его решения является сложной задачей. Надо также отметить, что решение системы (9) в общем случае может не существовать. Для существования решения системы (9) нужно выполнение ряда других соотношений.

В многомерном случае произвольного $n\geq 2$ мы также предполагаем $A(z)$ антианалитической, $\bar A(z)\in\mathcal{O}(D)$, $\|A(z)\|\leq C<1, z\in D$, где $\|A(z)\|=\max\limits_{j,k}|A_{jk}(z)|$ — норма. Более простым является частный случай системы (9), когда матрица $A(z)=\left(A_{jk}(z)\right)_{j,k=\overline{1,n}}$ имеет диагональный вид, а именно, рассмотрение системы следующего вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial\bar z_1}=A_1(z)\dfrac{\partial f}{\partial z_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial\bar z_2}=A_2(z)\dfrac{\partial f}{\partial z_2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial f}{\partial\bar z_n}=A_n(z)\dfrac{\partial f}{\partial z_n}\end{cases}\tag{10}$$

где $A_j(z)$ — антианалитические в $D\subset\mathbb{C}^n$ функции, причем $\|A\|_D\leq C<1$. В этом случае имеется достаточно широкий класс уравнений (10), имеющих вещественно аналитические решения в области $D\subset\mathbb{C}^n$.

Теорема 18. *Пусть антианалитические функции* $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_n(z)$ *определенные в области* $D\subset\mathbb{C}^n$ *удовлетворяют условиям* $\bar A(z)\in\mathcal{O}(D), \|A(z)\|\leq C<1,\ z\in D$ *и*

$$\frac{\partial\bar A_k}{\partial z_j}=\frac{\partial\bar A_j}{\partial z_k}\left(\text{или}\ \frac{\partial A_k}{\partial\bar z_j}=\frac{\partial A_j}{\partial\bar z_k}\right),\ j,k=1,2,\dots,n.$$

тогда система (10) имеет решение.

Определение 8. *Непрерывно дифференцируемая функция* $f(z)$ *называется A-аналитической функцией многих переменных в области* $D \subset \mathbb{C}^n$*, если она удовлетворяет системе уравнений* (10) *всюду в* D.

Определение 9. *Функция* $f(z)$ *называется сепаратно A-аналитической функцией по переменным* z_j, $(j=\overline{1,n})$, *если она при фиксированных переменных* $\left(z_1^0,...,z_{j-1}^0,z_{j+1}^0,...,z_n^0\right)$ *по* z_j *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial f\left(z_1^0,...,z_{j-1}^0,z_j,z_{j+1}^0,...,z_n^0\right)}{\partial \overline{z}_j} =$$

$$= A_j\left(z_1^0,...,z_{j-1}^0,z_j,z_{j+1}^0,...,z_n^0\right)\frac{\partial f\left(z_1^0,...,z_{j-1}^0,z_j,z_{j+1}^0,...,z_n^0\right)}{\partial z_j}$$

всюду в $D \bigcap \left\{z_1 = z_1^0,...,z_{j-1} = z_{j-1}^0, z_{j+1} = z_{j+1}^0,...,z_n = z_n^0\right\}$.

Ясно, что если $f(z)$ является A-аналитической функцией, то она будет сепаратно A-аналитической функцией по каждому переменному отдельно. Для сепаратно аналитических функций (случай $A \equiv 0$) имеет место хорошо известная теорема Хартогса, что сепаратно аналитическая функция $f(z_1,...,z_n)$ является аналитической по совокупности переменных. Естественно, возникает вопрос: верен ли аналог теоремы Хартогса для A-аналитических функций, т.е. из сепаратно A-аналитичности функции следует ли ее A-аналитичность по совокупности переменных? На поставленный вопрос дается ответ в третьем параграфе третьей главы, в виде аналога теоремы Хартогса для A-аналитических функций.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область. Не нарушая общности, можно считать, что $0 \in D$. Будем обозначать через $U = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \left|z_j\right| < r_j, j = 1,2,...,n\right\} \Subset D$ — поликруг с центром в начале координат и векторным радиусом $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$.

Теорема 19. *Любая A-аналитическая в* U *и непрерывная в* $\overline{U}$ *функция* $f(z) = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *в точке* $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in U$ *представляется в виде кратного интеграла Коши:*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma}\frac{f\left(\zeta_1,...,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)\left(d\zeta_1 + A_1\left(\zeta_1,...,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_1\right)\wedge...\wedge}{\left(\zeta_1 - z_1 + \overline{\int\limits_{\gamma(z_1,\zeta_1)} \overline{A}_1\left(\tau_1,\zeta_2,...,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_1}\right)\times...\times}$$

$$\frac{\wedge\left(d\zeta_{n-1}+A_{n-1}\left(z_1,...,z_{n-2},\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_{n-1}\right)\wedge}{\times\left(\zeta_{n-1}-z_{n-1}+\overline{\int\limits_{\gamma\left(z_{n-1},\zeta_{n-1}\right)}\overline{A}_{n-1}\left(z_1,...,z_{n-2},\tau_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_{n-1}}\right)}\times$$

$$\frac{\wedge\left(d\zeta_n+A_n\left(z,\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_n\right)}{\times\left(\zeta_n-z_n+\overline{\int\limits_{\gamma\left(z_n,\zeta_n\right)}\overline{A}_n\left(z,\tau_n\right)d\tau_n}\right)},$$

Замечание 2. *Будет видно из доказательство теоремы 19, для того, чтобы представить функции $f(z)$ кратным интегралом Коши достаточна сепаратно A-аналитичность $f(z)$ по каждому переменному и лишь непрерывность по совокупности переменных (не требуется дифференцируемость f по совокупности переменных).*

Теорема 20. *Если $f(z)$ является сепаратно A-аналитической в U и непрерывной в $\overline{U}$ функцией, то в каждой точке $z\in U$ она представляется кратным рядом:*

$$f(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty}c_k\left(z_1+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,z_1\right)}\overline{A}_1\left(\tau_1,\zeta_2,...,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_1}\right)^{k_1}\times...\times$$

$$\left(z_{n-1}+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,z_{n-1}\right)}\overline{A}_{n-1}\left(z_1,...,z_{n-2},\tau_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_{n-1}}\right)^{k_{n-1}}\times$$

$$\times\left(z_n+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,z_n\right)}\overline{A}_n\left(z,\tau_n\right)d\tau_n}\right)^{k_n},$$

где коэффициенты c_k определяются как

$$c_k=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{f\left(\zeta_1,...,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)\left(d\zeta_1+A_1\left(\zeta_1,...,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_1\right)\wedge}{\left(\zeta_1+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,\zeta_1\right)}\overline{A}_1\left(\tau_1,\zeta_2,...,\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_1}\right)^{k_1+1}}\times$$

$$\times...\times\frac{\wedge\left(d\zeta_{n-1}+A_{n-1}\left(z_1,...,z_{n-2},\zeta_{n-1},\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_{n-1}\right)\wedge}{\left(\zeta_{n-1}+\overline{\int\limits_{\gamma\left(0,\zeta_{n-1}\right)}\overline{A}_{n-1}\left(z_1,...,z_{n-2},\tau_{n-1},\zeta_n\right)d\tau_{n-1}}\right)^{k_{n-1}+1}}\times$$

$$\times \frac{\wedge\left(d\zeta_n + A_n\left(z,\zeta_n\right)d\overline{\zeta}_n\right)}{\left(\zeta_n + \overline{\int\limits_{\gamma\left(0,\zeta_n\right)} \overline{A}_n\left(z,\tau_n\right)d\tau_n}\right)^{k_n+1}}.$$

Оказывается, для представления *A*-аналитической функции $f(z) = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ кратным интегралом и разложения ее в кратный ряд достаточно, чтобы она была ограниченной.

Лемма 3. *Если* $f(z) = f(z_1, z_2, ..., z_n)$ *является сепаратно A-аналитической по всем переменным в поликруге* $U = U(a, r)$ *и ограниченной в* U*, тогда она непрерывна в каждой точке* U *по совокупности переменных.*

Из вышесказанного мы получаем доказательство теоремы Хартогса для *A*-аналитических функций многих переменных.

Теорема 21 (Аналог теоремы Хартогса). *Если функция* $f(z)$ *является сепаратно A-аналитической функцией по всем переменным и ограничена в области* $D \subset \mathbb{C}^n$*, то она будет A-аналитической по совокупности переменных в* D*, т.е. она будет непрерывно дифференцируемой и A-аналитической функцией.*

Замечание 3. *Условие ограниченности в теореме (21) может быт излишним. Но в приведенном в диссертации методе доказательства, ограниченность функции существенно используется.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению функциональных свойств A-аналитических функций на комплексной плоскости, определению A-аналитических функций многих переменных в пространстве $\mathbb{C}^n$ и исследованию таких функций.

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Для антианалитической функции $A(z)$ доказана теорема Коши для A-аналитических функций, без условии C^1-гладкости рассматриваемой функции.

2. Определено понятие вычета для A-аналитических функций. Найдены формулы для вычисления вычеты A-аналитических функций. Доказан аналог теоремы Коши о вычетах для A-аналитических функций.

3. Установлена взаимосвязь между вычетом и лорановским разложением A-аналитической функции в окрестности изолированной особой точки. Введены понятия A-мероморфной функции и A-логарифмического вычета для A-аналитических функций, изучены их некоторые свойства.

4. Доказаны принцип аргумента и аналог теоремы Руше для A-аналитических функций. Доказан аналог леммы Шварца для A-аналитических функций.

5. Определены понятия сепаратно A-аналитической функции многих переменных и A-аналитической функции по совокупности переменных. Найдено условие, при выполнении которых система уравнений Бельтрами всегда имеет решение. Доказана кратная интегральная формула Коши для A-аналитических функций многих переменных. Доказана теорема о разложении A-аналитических функций многих переменных в ряд. Доказана теорема Хартогса для A-аналитических функций многих переменных при условии ограниченности функций.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

OTABOEV TOLIB UROLOVICH

FUNCTIONAL PROPERTIES OF *A*-ANALYTIC FUNCTIONS

01.01.01 – Mathematical Analysis

ABSTRACT
of dissertation of the doctor of philosophy (PhD)
on physical and mathematical sciences

TASHKENT – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2022.3.PhD/FM745.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" of information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Sadullaev Azimbay** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor
Official opponents:	**Imomkulov Sevdiyor Akramovich** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor
	Imomnazarov Xolmatjon Xudoynazarovich Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, professor
Leading organization:	**Holon institute of Technology (Israil)**

Defense will take place on June 15, 2023 at 10:00 am at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+99871) 227-12-24, Fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (registered for No.___) (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "__" _________ 2023.
(Mailing report No.__ on "__" __________ 2023.)

B.A. Shoimkulov
Deputy chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

N.K. Mamadaliev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Phisics

R.N. Ganixodjaev
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is the study of the functional properties of *A*-analytic functions on the complex plane, the proof of the Hartogs' theorem for *A*-analytic functions of several variables.

The objects of research are *A*-analytic functions, the Beltrami equation, the system of Beltrami equations in space, integral formulas.

Scientific novelty of the research work is as follows:

it is proved Cauchy's theorem for *A*-analytic functions;

it is introduced the notion of residue for *A*-analytic functions;

it is proved the argument principle for *A*-analytic functions;

there are proved Rouche's theorem and Schwarz's lemma for *A*-analytic functions;

there are defined the concepts of *A*-analytic and separately *A*-analytic functions of several variables;

there are proved some properties of *A*-analytic functions of several variables and an analogue of Hartog's theorem for *A*-analytic functions of several variables.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis were used in the following research projects:

the residue defined for *A*-analytic functions of one variable, as well as the proved argument principle and an analogue of the Rouche theorem were used in the framework No OT-Ф4-03 "Concrete dynamical systems with continuous and discrete time, spectra of partially integral operators", to study of meromorphic functions in the classical domain of the second type and special analytic polyhedra (Reference from Karshi State University No 04/1022, March 17, 2023). The results of the dissertation made it possible to prove the Weil formula for special analytic polyhedra and an analogue of the Rouche theorem for matrix polyhedra;

the introduced concept of an *A*-analytical function, as a solution to the Beltrami equation was used in the project No MRU-OT-9/2017 "Multidimensional complex analysis", made it possible to determine the *A*-harmonic and *A*-subharmonic functions and explore the functional properties of such functions under the project (Reference from National University of Uzbekistan No 04/11-1411 March 17, 2023). Using the scientific result allowed them to prove the Poisson and Schwartz formulas for *A*-harmonic functions.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters divided into eleven paragraphs, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 76 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (1 часть; part 1)

1. Жабборов Н. М., Отабоев Т. У., Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций. // Узбекский математический журнал, 2016. – №4. – С. 50-59 (01.00.00 №6).

2. Tishabaev Zh. K., Otaboev T. U. and Khursanov Sh. Ya. Residues and Argument Principle for $A(z)$-analytic functions // Journal of Mathematical Sciences, 2020. – Vol. 245. No. 3. – P. 350-358 (3. Scopus IF=0.6).

3. Zhabborov N. M., Otaboev T. U. and Khursanov Sh. Ya. The Schwartz inequality and the Schwartz formula for A-analytic functions // Journal of Mathematical Sciences, 2022. – Vol. 264. No. 6. P. 703-714 (3. Scopus IF=0.6).

4. Otaboev T. U. On the Hartogs' theorem for A-analytic functions in $\mathbb{C}^n$ // Bulletin of NUUz: Mathematics and Natural Sciences, 2022. – No. 5(1). P. 27-38 (01.00.00 №8).

II bo‘lim (2 часть; part 2)

1. Тишабаев Ж. К., Отабоев Т. У., Хурсанов Ш. Я., Вычет и принцип аргумента для $A(z)$-аналитических функций // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2018. – Том. 144. – С. 56-64.

2. Жабборов Н. М., Отабоев Т. У., Хурсанов Ш. Я., Неравенство Шварца и формула Шварца для A-аналитических функций // Современная математика. Фундаментальные направления, 2018. – Том. 64. Выпуск 4. С. 637–649.

3. Отабоев Т. У., Жабборов Н. М. Некоторые свойства $A(z)$-аналитических функций / Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные вопросы комплексного анализа». – Ташкент, 19–21 сентября 2013 г. – С. 59-60.

4. Отабоев Т. У., Болтаев М. Аналог теоремы Коши для $A(z)$-аналитических функций / Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Неклассические уравнения математической физики». – Ташкент, 23–25 октября 2014 г. – С. 239-241.

5. Отабоев Т. У., Жабборов Н. М. Интегральная формула Коши для $A(z)$-аналитических функций / Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения». – Ташкент, 19–21 ноября 2015 г. Том 2. – С. 33-34.

6. Отабоев Т. У., Жабборов Н. М., Ахралов Х. З. $A(z)$-лемниската / Материалы Республиканской научно-практической конференции «Статистика и ее применения». – Ташкент, 16–17 октября 2015 г. – С. 289-

290.
7. Отабоев Т. У., Жабборов Н. М., Исмоилов Э. О. Аналог ряд Тейлора для $A(z)$-аналитических функций / Материалы Республиканской научно-практической конференции «Статистика и ее применения». – Ташкент, 16-17 октября 2015 г. – С. 282-283.
8. Отабоев Т. У., Жабборов Н. М. Разложении $A(z)$-аналитических функций в степенной ряд / Материалы научной конференции «Актуальные вопросы анализа». – Карши, 22-23 апреля 2016 г. – С. 38-41.
9. Отабоев Т. У., Жабборов Н. М., Кутлимуратов А. Р. Интеграл типа Коши для $A(z)$-аналитических функций / Материалы научной конференции «Актуальные вопросы анализа». Карши, 22-23 апреля 2016 г. – С. 19-21.
10. Отабоев Т. У., Жабборов Н. М. Свойство единственности для A-аналитических функций / Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых «Проблемы современной топологии и её приложени». – Ташкент, 5-6 мая 2016 г. – С. 175-177.
11. Отабоев Т. У., Инатова З. Теорема Руше для A-аналитических функций / Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные вопросы динамических систем и их приложения». – Ташкент, 1–3 мая 2017 г. – С. 37-38.
12. Otaboev T. U., Tishabaev J. K., Khursanov Sh. Ya. Principle of the argument for $A(z)$-analytic functions / The abstract book of the Second USA–Uzbekistan conference on Analysis and Mathematical Physics. – Urgench, August 8–12, 2017. – P. 115-115.
13. Otaboev T. U., Jabborov N. M. Morer's theorem and functional series in the class of A-analytic functions / Abstracts of The Second USA–Uzbekistan Conference on Analysis and Mathematical Physics. – Urgench, August 8–12, 2017. – P. 18–19.
14. Otaboev T. U., Jabborov N. M. Analogue of the Weierstrass theorem for $A(z)$-analytic functions / Abstracts of the Uzbek–Israel International Conference “Contemporary Problems in Mathematics and Physics”. – Tashkent, October 6–10, 2017. – P. 71-73.
15. Отабоев Т. У., Жабборов Н. М., Хурсанов Ш. Я. Формулы Шварца и Пуассона для A-аналитических функций / Материалы республиканской научной конференции «Новые результаты математики и их приложения». – Самарканд, 14–15 мая 2018 г. – С. 24-26.

Avtoreferat “O‘zMU habarlari” jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. "Times New Roman" garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog'i: 3,25. Adadi 100 dona. Buyurtma № 40/23.

Guvohnoma № 851684.
"Tipograff" MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko'chasi, 83-uy.