“TIQXMMI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI HUZURIDAGI FUNDAMENTAL VA AMALIY TADQIQOTLAR INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

AKRAMOV MASHRAB ERGASHALI O‘G‘LI

OPTIK TOLALI TARMOQLARDA SOLITONLARNI GENERATSIYA QILISH VA BOSHQARILADIGAN DINAMIKASINI MODELLASHTIRISH

01.04.02 – Nazariy fizika
05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

УДК: 530.182.1, 519.635.2

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa (PhD) doktori dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi
Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам
Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical – mathematical sciences

“TIQXMMI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI HUZURIDAGI FUNDAMENTAL VA AMALIY TADQIQOTLAR INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

AKRAMOV MASHRAB ERGASHALI O‘G‘LI

OPTIK TOLALI TARMOQLARDA SOLITONLARNI GENERATSIYA QILISH VA BOSHQARILADIGAN DINAMIKASINI MODELLASHTIRISH

01.04.02 – Nazariy fizika
05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

Falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.2.PhD/FM860 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Falsafa doktori dissertatsiyasi Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (xulosa)) Ilmiy kengashning internet sahifasida (www.ifar.uz) va “Ziyonet” axborot-ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Matrasulov Davron Urinovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Ganjaboy Boltayev** fizika-matematika fanlari doktori **Boris Malomed** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	**Samarqand Davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti huzurida Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti huzuridagi ilmiy darajalar beruvchi DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 raqamli ilmiy kengashning 2023-yil «1» iyul soat 16^{00} dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 100000, Toshkent shahri, Qori Niyoziy ko‘chasi 39-uy, Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti, 108-katta majlislar zali; Tel.: +99871 237-09-61.; e-mail: info@ifar.uz).

Dissertatsiya bilan “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti huzuridagi fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100000, Toshkent shahri, Qori Niyoziy ko'chasi, 39-uy, Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti, 108-katta majlislar zali; tel.: +99871 237-09-61.

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil “____”____________kuni tarqatildi.
(2023-yil «17» iyundagi 8 raqamli reestr bayonnomasi.)

B.J. Ahmedov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, fizika-matematika fanlari doktori, professor

E.X. Karimbayev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD)

B.M. Narzilloyev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi Ilmiy seminar raisi, fizika-matematika fanlari doktori, yetakchi ilmiy xodim

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Tadqiqot ishining dolzarbligi va zarurati. Kichik oʻlchamli materiallarda nochiziqli optik hodisalarni oʻrganish fundamental va amaliy nuqtayi nazardan muhim vazifadir. Muammoning asosiy jihati shundaki, bunday tizimlarda oʻlchamlarni kamaytirish va fazoviy chegaralanish nochiziqli optik toʻlqinlarning harakatiga sezilarli cheklovlar qoʻyadi, bu baʻzan yangi effektlarning paydo boʻlishiga olib keladi. Amaliy nuqtayi nazardan tarmoqlarning topologiyasi, shuningdek, chegaralar geometriyasi toʻlqinlar va zarrachalarning harakatlarini boshqarish uchun samarali vositaga aylanishi mumkin, bu oldindan belgilangan xususiyatlarga ega funksional materiallar va optoelektron qurilmalarni modellashtirish hamda loyihalash muammosini hal qilishga imkon beradi. Ushbu dissertatsiya ishida solitonlar, jumladan, PT-simmetrik solitonlar, shuningdek, funksional xossalari yaxshilangan optoelektron materiallarni modellashtirish muammosi bilan bevosita bogʻliq boʻlgan bir qator masalalar yechilgan.

Hozirgi kunda jahonda nochiziqli toʻlqin tenglamalari orqali ifodalangan toʻlqinlarning xossalarini aniqlash va ularning sonli yechish usullarini tadqiq qilish koʻplab fizik hodisalarning dolzarb masalalaridan biri hisoblanadi. Bunda sodda graflarda nochiziqli Shredinger tenglamasi tipidagi tenglamalarni yechish va soliton transportini modellashtirish optika, nanofizika va nazariy fizika masalalarini yechishda muhim ahamiyatga ega. Shu sababli graflarda nochiziqli toʻlqin tenglamalarining soliton yechimlarini topish va soliton dinamikasini modellashtirish hamda axborotni samarali uzatish jarayonlarini matematik modellashtirish, samarali sonli hisoblash algoritmlari va dasturlarini yaratish maqsadli tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega boʻlgan nazariy fizika va amaliy matematikaning dolzarb yoʻnalishlariga eʻtibor kuchaytirildi. Jumladan, kvant fizikasi, kondensirlangan muhitlar fizikasi va polimerlar fizikasi masalalarini modellashtirish va hisoblash matematikasi usullaridan foydalangan holda nazariy tadqiqotlar olib borish hamda amaliy ishlanmalarni yaratishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Tarmoqlangan tuzilmalarda nochiziqli tenglamalarning soliton yechimini topish, soliton transportini matematik modellashtirish muammolarini tadqiq qilish va dolzarb nazariy hamda amaliy masalalarni yechishda salmoqli natijalarga erishildi. Elektronika, nanomateriallar fizikasi va amaliy matematika fanlarining ustuvor yoʻnalishlari boʻyicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish asosiy vazifalar va faoliyat yoʻnalishlari etib belgilandi[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda differensial tenglamalarni graflarda yechish nazariyasini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2008-yil 15-iyuldagi PQ-916-son «Innovatsion loyihalar va texnologiyalarni ishlab chiqarishga tatbiq etishni

[1] Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish toʻgʻrisida"gi 292-sonli qarori

rag‘batlantirish borasidagi qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida»gi, 2017-yil 17-fevraldagi PQ-2789-son «Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi Qarori va 2017-yil 8-fevraldagi PF-4947-son «O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida»gi farmoni hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot ishi O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Graflarda evolutsion tenglamalar yordamida to‘lqin dinamikasini modellashtirishni o‘rganish ilk bor 1989-yil Exner va Seba ishida keltirilgan. Keyinroq esa Kostrykin va Schrader metrik graflarda Shredinger operatori uchun umumiy ko‘rinishdagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirib, aniq matematik masalani va tarmoqlangan tizimlarda zarra va to‘lqin dinamikasining aniq matematik modelini taklif qilgan. Mazkur modelning nochiziqli umumlashmasi, ya’ni metrik graflarda nochiziqli Shredinger tenglamasi orqali ifodalanuvchi tarmoqlangan tuzilmalarda soliton dinamikasi modeli ilk bor K.Nakamura, S.Sawada, D.Matrasulov va ularning hammualliflari tomonidan ishlab chiqilgan. Xususan, ularning ishlarida fundamental saqlanish qonunlaridan kelib chiqib, grafning tarmoqlanish nuqtalarida umumiy chegaraviy shart olingan.

Grafning tarmoqlanish nuqtasidagi chegaraviy shartlar R.Adami, D.Noja, D.Pelinovsky kabi olimlar tomonidan olingan va bu shartlar graflarda turg‘un va yuguruvchi solitonlarni, jumladan, tarmoqlangan tuzilmalarda relativistik solitonlarni modellashtirish uchun ham qo‘llangan.

Optik tolalarda nochiziqli Shredinger tenglamasi orqali berilgan boshlang‘ich shartlar asosida generatsiya qilingan solitonlar sonini topish masalasi ilk bor 1988-yilda J.Burzlaff va 1989-yilda Y.Kivsharlarning ishlarida keltirilgan. Keyinchalik 1999-yilda N.C.Panoiu, I.V.Mel’nikov, D.Mihalache va ularning hammualliflari tomonidan simmetrik va antisimmetrik boshlang‘ich shartlar asosida generatsiya qilingan solitonlarni analitik va sonli usullardan foydalanib o‘rganilgan.

Respublikamizda nochiziqli Shredinger, Kortega de Friz, reaksion-diffuzion tenglamalarining analitik va sonli usulda olingan yechimlari va ularning xossalari F.Abdullaev, A.Abdumalikov, A.Xasanov, G.Urazbaev, M.Aripov, Z.Raxmonov, A.Matyakubov kabi olimlar tomonidan yetarli darajada o‘rganilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Milliy universiteti ilmiy tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq, OT-F4-30 «Ikki marta nochiziqli kross sistemaning konvektiv ko‘chish, o‘zgaruvchan zichlik, manba yoki yutish ta’siridagi sifat xossalarini tadqiq qilish» mavzusidagi ilmiy tadqiqot loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqot ishining maqsadi. Ushbu dissertatsiyaning maqsadi graflarda nochiziqli evolyutsion to‘lqin tenglamalari yordamida solitonlar dinamikasini modellashtirish yo‘li bilan optik tolali tarmoqlarda solitonlarning generatsiya bo‘lishi va tarqalishini o‘rganishdan iborat. Shuningdek, optik to‘lqin o‘tkazgich tarmoqlarida solitonlarning boshqariladigan generatsiyasi va ularni tashish usullarini ishlab chiqish ushbu dissertatsiya ishining alohida maqsadidir.

Tadqiqot ishining vazifalari:

1) Nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun Koshi masalasini graflarda yechish;

2) Optik tolali tarmoqlarda solitonlarning tarqalish jarayonidagi nurlanishini modellashtirish;

3) Berilgan boshlang‘ich impuls profillari uchun generatsiya qilingan solitonlar sonini hisoblash;

4) Graflarda PT-simmetrik nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun Koshi masalasini yechish;

5) Berilgan boshlang‘ich impuls profillari uchun generatsiya qilingan PT-simmetrik solitonlar sonini hisoblash;

6) Diskret PT-simmetrik nochiziqli Shredinger tenglamasini graflarda yechish va ularning soliton yechimlarini topish;

7) PT-simmetrik solitonlarning graf tuguni orqali aks etishsiz o‘tish shartlarini keltirib chiqarish.

Tadqiqot ishining obyekti: Optik tolali tarmoqlarda generatsiya qilingan solitonlar, PT-simmetrik solitonlar, diskret tarmoqlangan strukturalardagi solitonlar.

Tadqiqot ishining predmeti: Optik tolali tarmoqlarda solitonlarning boshqariladigan generatsiyasi va tashilishi, tarmoqqa o‘xshash strukturalarda PT-simmetrik solitonlarning dinamikasi, diskret kichik o‘lchamli tarmoqlangan strukturalarda nolokal solitonlarning dinamikasi.

Tadqiqot ishining usullari: Nochiziqli Shredinger tenglamasi, PT-simmetrik nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasi va diskret nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasining analitik hamda sonli yechish usullari.

Tadqiqot ishining ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ilk bor tarmoqqa o‘xshash strukturalarda solitonlarni generatsiya qilish muammosi yechilgan;

birinchi marta berilgan boshlang‘ich impuls profiliga ko‘ra, generatsiya qilingan solitonlar sonini hisoblash uchun analitik formula olingan;

ilk bor PT-simmetrik nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasining metrik graflarda soliton yechimlari, diskret nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasining diskret graflarda soliton yechimlari topilgan.

Tadqiqot ishining amaliy natijalari. Tadqiqot ishining natijalari optik tolali va to‘lqin uzatgichli tarmoqlarda solitonlarning generatsiya bo‘lishi hamda tarqalishini modellashtirish, kerakli funksional xususiyatlarga ega optik tolali tarmoqlarni yaratish, shuningdek, kichik oʻlchamli tarmoqlangan tuzilishga ega ferromagnit materiallarni modellashtirish va loyihalash uchun bevosita qoʻllaniladi.

Tadqiqot ishi natijalarining ishonchliligi. Tadqiqot natijalarining ishonchliligi shundan iboratki, generatsiya qilingan solitonlar sonini topish uchun olingan formulaning toʻgʻriligi graflarda nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasining sonli yechimi bilan tasdiqlangan. Bundan tashqari nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasining analitik yechimi asosida koʻrsatilgan PT-simmetrik solitonlarning graf tugunlari orqali aks etishsiz oʻtishi sonli modellashtirish orqali tasdiqlangan.

Tadqiqot ishining asosiy natijalari:

1) Optik tolali tarmoqlarda generatsiya qilingan solitonlar sonini (ma’lum bir boshlangʻich impuls profili uchun) hisoblash uchun analitik formula olingan;

2) Graflardagi PT-simmetrik nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasining soliton yechimlari topilgan;

3) PT-simmetrik nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasining graflardagi integrallanuvchanlik xossasi, tenglamaning nochiziqlilik koeffitsiyentlari bilan ma’lum shartlar bajarilgan holda isbotlangan;

4) Integrallanuvchanlik xossasiga ega PT-simmetrik solitonlarning graf tugunlari orqali aks etishsiz oʻtishi koʻrsatilgan;

5) Graflardagi PT-simmetrik diskret nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasining soliton yechimlari olingan;

6) Graflarda nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasining yechimi boʻlgan PT-simmetrik solitonlar sonini (ma’lum bir boshlangʻich impuls profili uchun) hisoblash uchun analitik formula isbotlangan;

7) PT-simmetrik diskret solitonlarning graf tugunlari orqali aks etishsiz oʻtish sharti uchun analitik formula olingan.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Optik tolali tarmoqlarda soliton generatsiyasi boʻyicha olingan ilmiy natijalar asosida:

optik tolali tarmoqlarda nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun generatsiya qilingan solitonlar soni xorijiy ilmiy maqolalarda (Results in Physics, Volume 31, 104889, December 2021; Optik, Volume 224, 165237, December 2020; Optik, Volume 272, 170206, February 2023; Heliyon, Volume 9, Issue 3, E14235, March 2023; Computational Mathematics and Modeling, Volume 33, pp. 375-387, July 2022; Applied Mathematics Letters, Volume 143, 108684, September 2023) berilgan boshlangʻich shartlar asosida hisoblashda foydalanilgan. Ilmiy natijaning qoʻllanilishi tarmoqlangan strukturalarda nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun boshlangʻich qiymatlar masalasini yechishga imkon bergan;

Dissertatsiya natijalari qoʻshma grant hisoblangan “Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology” (HORIZON2020, European Union Funding for Research and Innovation) kabi bir qancha xalqaro va mahalliy, jumladan, Oʻzbekiston Respublikasi Innovatsion rivojlanish vazirligi va TUBITAK

(Ref. Nr MRT-2130213155 & 221N123), O‘zbekiston Respublikasi Innovatsion rivojlanish vazirligining “Kichik o‘lchamli nanostrukturalarda boshqariladigan kvant tashish: tarmoqli kvant-funksional materiallarni modellashtirish va loyihalash” (Nr/ FZ-5821512021) ilmiy grantlar doirasida amalga oshirilgan.

Tadqiqot natijalarini aprobatsiya qilish: Tadqiqot ishining natijalari 5 ta xalqaro konferensiyalarda, shuningdek, Ilmenau Texnika universitetining (Germaniya) matematika fakulteti va Praga Texnika universiteti (Chexiya) Doppler instituti ilmiy seminarlarida sinovdan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining chop etilganligi: Tadqiqot natijalari bo‘yicha 4 ta maqola (shulardan, 3 tasi xalqaro, Scopus va Web of Science, 1 tasi OAK tarkibiga kiruvchi jurnallarda) va 6 ta konferensiya tezislari chop etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi: Dissertatsiyaning tuzilishi kirish, to‘rtta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 129 betni tashkil qiladi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY QISMI

Birinchi bobda muammoning hozirgi holatining tavsifi, shuningdek, nochiziqli va nolokal nochiziqli Shredinger tenglamalari uchun solitonlar generatsiyasi jarayoni to‘g‘ri chiziqda berilgan boshlang‘ich shartlar uchun keltirilgan. Xususan, berilgan simmetrik boshlang‘ich impuls uchun solitonlar generatsiyasining modellari keltirilgan.

“Optik tolali tarmoqlarda solitonlar generatsiyasini modellashtirish” deb nomlangan ikkinchi bobda metrik graflarda nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun boshlang‘ich qiymat masalasi orqali tasvirlangan optik tolalar yoki optik tolali tarmoqlarda solitonlarni generatsiya qilish muammosi ko‘rib chiqilgan. Turli xil boshlang‘ich shartlar uchun turli xil tarmoq topologiyalari asosida generatsiya qilingan solitonlar soni olingan. Optik tolalardagi impulslarning paydo bo‘lishi va evolyutsiyasi uchun asosiy tenglama quyidagi nochiziqli Shredinger tenglamasi hisoblanadi:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+|\psi|^2\psi=0, \tag{1}$$

bu yerda $\psi -$ pulsning normallashtirilgan kompleks amplitudasi. Optik tolalarda solitonlar generatsiyasi muammosini (1) tenglama uchun Koshi masalasiga keltiriladi. Bunday masalalarni, masalan, berilgan boshlang'ich shartlar uchun teskari sochilish masalasi yordamida hal qilish mumkin. Agar $\psi(x,0)=-iq(x)$ deb olsak,

$$q(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } |x|>\frac{1}{2}a\\ b, & \text{agar } |\mathrm{x}|\le\frac{1}{2}a\end{cases}\quad b>0. \tag{2}$$

Ushbu yondashuv bilan solitonlarni generatsiya qilish paytida to‘lqin funksiyasining evolyutsiyasini quyidagi xos qiymatlar masalasini hal qilish orqali olish mumkin.

$$Au=\lambda u, \tag{3}$$

bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} i\dfrac{d}{dx} & \psi(x,0) \\ -\psi^*(x,0) & -i\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Har bir diskret xos qiymat $\lambda = \xi + i\eta$ с L^2 $-$integrallanuvchi xos funksiya 2ξ tezlikda harakatlanuvchi amplitudasi 2η ga teng generatsiya qilingan solitonga mos keladi.

Ilgari generatsiya qilingan solitonlar sonini topish ifodasi quyidagi munosabat bilan berilishi ko‘rsatilgan:

$$N = \langle \frac{1}{2} + \frac{F}{\pi} \rangle, \tag{5}$$

bu yerda $F = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)| dx$ va $<\ldots>$ argumentdan kichik butun sonni bildiradi.

Quyidagi ifoda bilan berilgan boshlang‘ich shart uchun generatsiya qilingan solitonlar sonini topishimiz mumkin:

$$q(x) = \beta \exp(-\alpha|x|), \quad \alpha, \beta > 0. \tag{6}$$

Yulduz grafning berilgan uchta e_j tarmog’i uchun koordinatani x_j ko‘rinishida belgilaymiz. Koordinata boshini 0 tarmoqlanish nuqtasiga, birinchi tarmoq e_1 uchun $x_1 \in (-\infty, 0]$ va ikkinchi, uchinchi tarmoqlar $e_{2,3}$ uchun $x_{2,3} \in [0, +\infty)$ belgilaymiz. $\psi_j(x_j)$ uchun $\psi_j(x)$ ko‘rinishida qisqartma ishlatamiz. Bunday grafning har bir e_j tarmog‘i uchun nochiziqli Shredinger tenglamasi quyidagicha yozilishi mumkin

$$i\frac{\partial \psi_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} + \beta_j |\psi_j|^2 \psi_j = 0, \tag{7}$$

bu yerda nochiziqlilik parametri β_j optik tolali tarmoqning har bir tarmog‘i uchun materialning nochiziqli sindirish ko‘rsatkichi orqali aniqlanadi. (7) tenglamani yechish uchun tarmoqlanish nuqtasiga chegaraviy shartlarni qo‘yish kerak. Bunday shartlar norma va energiyaning saqlanishi kabi asosiy saqlanuvchi qonunlardan keltirib chiqarilishi mumkin

$$\frac{dN}{dt} = 0, \qquad \frac{dE}{dt} = 0, \tag{8}$$

bu yerda

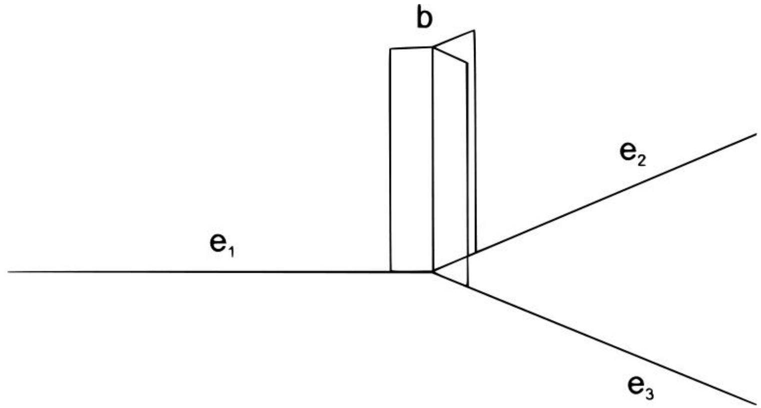
$$N(t) = \int_{-\infty}^{0} |\psi_1|^2 dx + \int_{0}^{\infty} |\psi_2|^2 dx + \int_{0}^{\infty} |\psi_3|^2 dx \tag{9}$$

va

$$E = E_1 + E_2 + E_3, \tag{10}$$

$$E_k = \int_{e_k} \left[\left| \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right|^2 - \frac{\beta_k}{2} |\psi_k|^4 \right] dx. \tag{11}$$

Saqlanish qonunlari (8) tugundagi quyidagi chegaraviy shartlariga olib kelishini ko‘rsatish mumkin:



1-rasm. Yulduz ko‘rinishida tarmoqlangan tolada boshlang’ich impuls profili.

$$\beta_1\psi_1(0,t) = \beta_2\psi_2(0,t) = \beta_3\psi_3(0,t), \tag{12}$$

va umumlashtirilgan Kirxgof qonuni

$$\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{\beta_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\bigg|_{x=0} + \frac{1}{\beta_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial t}\bigg|_{x=0}, \tag{13}$$

bu yerda $\beta_j -$ nolga teng bo‘lmagan haqiqiy doimiy. (1) tenglama uchun asimptotik shartlar quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\psi_j = 0. \tag{14}$$

(12) va (13) tugundagi chegaraviy shartlarni hamda asimptotik shartni (14) qanoatlantiruvchi (1) tenglamaning bir solitonli yechimi quyidagicha yozilishi mumkin

$$\psi_j(x,t) = a\sqrt{\frac{2}{\beta_j}}\frac{\exp\left[i\frac{vx}{2} - i\left(\frac{v^2}{4} - a^2\right)t\right]}{\cosh[a(x-l-vt)]}, \tag{15}$$

bu yerda β_j parametr quyidagi yig‘indi qoidasini qanoatlantiradi:

$$\frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3}. \tag{16}$$

Bu yerda, v, l va $a -$ mos ravishda solitonning tezligini, boshlang‘ich massa markazini va amplitudasini tavsiflovchi mustaqil parametrlar. Tajribada (16) tenglamadagi yig‘indi qoidasini optik tolali tarmoqning har bir tarmog‘i uchun sindirish ko‘rsatkichini to‘g‘ri sozlash orqali qanoatlantirilishi mumkin.

$Y -$ ko‘rinishidagi tarmoqlanishga ega bo‘lgan tarmoqlangan optik tolani ko‘rib chiqamiz. Bunday sistemani 1-rasmda ko‘rsatilgan yulduz grafi sifatida ko‘rib chiqish mumkin. Keyin solitonlar generatsiyasi va tarmoqlanish masalasini yulduz grafida nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun Koshi masalasi orqali modellashtirish mumkin. Bu tenglama (7) bilan berilgan, buning uchun quyidagi boshlang‘ich shartni beramiz:

$$\psi_j(x,0) = -i\sqrt{\frac{2}{\beta_j}}q_j(x). \tag{17}$$

Bu tenglamani yechish uchun grafning tarmoqlanish nuqtasiga chegaraviy shartlarni qo‘yish va tarmoqlarda to‘lqin funksiyasining asimptotikasini aniqlash kerak. Ular (12), (13) va (14) tenglamalar shaklida yozilishi mumkin.

Bu yerda biz boshlang‘ich impuls profiliga ega bo‘lgan tolaning $Y-$ko‘rinishidagi tarmoq uchun solitonlarni generatsiya qilish muammosini ko‘rib chiqamiz (1-rasmga qarang)

$$q_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2}a \\ b, & -\frac{1}{2}a \leq x \leq 0 \end{cases} \tag{18}$$

$$q_{2,3}(x) = \begin{cases} 0, & x > \frac{1}{2}a \\ b, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}a \end{cases} \tag{19}$$

Bunday boshlang‘ich profil uchun solitonlar har bir tarmoqdagi tarmoqlanish nuqtasi atrofida generatsiya bo‘lishi nazarda tutiladi. Teskari sochilish masalasi usulidan foydalanib, bunday profil uchun generatsiya qilingan N solitonlar sonini hisoblash mumkin:

$$N = \langle \frac{3}{2} + \frac{F}{\pi} \rangle, \tag{20}$$

bu yerda

$$F = \sum_{j=1}^{3} \int_{e_j} |\psi_j(x,0)| dx = \frac{ab}{2} \left[\sqrt{\frac{2}{\beta_1}} + \sqrt{\frac{2}{\beta_2}} + \sqrt{\frac{2}{\beta_3}} \right]. \tag{21}$$

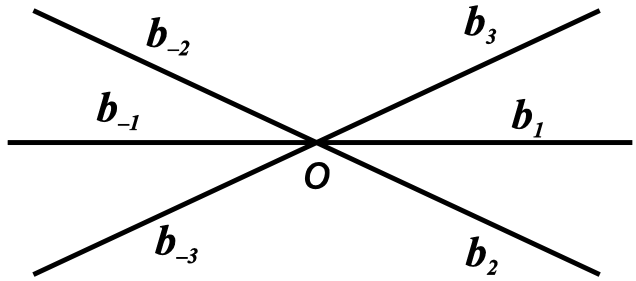
Biz bu yerda yig‘indi qoidasi (16) bajarilgan deb faraz qilamiz, ya’ni masala integrallanuchanlik xossasiga ega. (3) va (20) tenglamalar orasidagi farq doimiy ko‘paytuvchiga bog‘liq:

$$\left(\sqrt{2\beta_1^{-1}} + \sqrt{2\beta_2^{-1}} + \sqrt{2\beta_3^{-1}} \right). \tag{22}$$

$\beta_j, (j = 1,2,3)$ parametrning turli xil tanlanishi generatsiya qilingan solitonlar sonini boshqarishga imkon beradi. Bundan tashqari soddalik uchun yuqoridagi boshlang‘ich impulslar (18) va (19) tarmoqlanish nuqtalarida berilgan hamda ularning balandligi va eni har bir tarmoq uchun bir xil. Umuman olganda, turli xil tarmoqlar uchun turli xil kenglik va balandliklarni tanlashingiz mumkin. Shuningdek, bular solitonlar soni va dinamikasini sozlash uchun qo‘shimcha vositani taqdim etadi.

$Y-$ ko‘rinishidagi tarmoqda solitonlar soni va yechimlarni aniqlash mumkin bo‘lgan yana bir boshlang‘ich impuls profilini keltiramiz:

$$\psi_j(x,0) = \sqrt{\frac{2}{\beta_j}} \operatorname{sech}\left[e^{i(\omega x + \theta/2)} + e^{i(\omega x + \theta/2)}\right], \tag{23}$$



2-rasm. Oltita tarmoqdan iborat yulduz grafi.

bu yerda 2ω va $\theta -$ chastota va mos ravishda ikkita soliton orasidagi fazalar farqi. (7), (12) va (13) tenglamalar bilan berilgan masalaning ikkita soliton yechimi quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\psi_j(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\beta_j}}\xi\eta e^{\phi\left(\frac{t}{2}\right)} \times \frac{e^{i\xi x}\cosh[\eta(x+\xi t)+i\varphi] + e^{-i\xi x}\cosh[\eta(x-\xi t)-i\varphi]}{\xi^2\cosh\eta(x+\xi t)\cosh\eta(x-\xi t)+\eta^2\sin\xi(x+i\eta t)\sin\xi(x-i\eta t)}. \tag{24}$$

Bu yechim quyidagi shart bajarilganda o‘rinli:

$$\frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3}. \tag{25}$$

Generatsiya qilingan solitonlar soniga mos keladigan ifoda quyidagicha yozilishi mumkin:

$$F = 2\pi\left(\sqrt{\frac{2}{\beta_1}} + \sqrt{\frac{2}{\beta_2}} + \sqrt{\frac{2}{\beta_3}}\right)\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{26}$$

Uchinchi bobda Ablowitz-Muslimani tenglamasi deb ataladigan nolokal nochiziqli Shredinger (NNSh) tenglamasi orqali tasvirlangan graflarda $\mathcal{PT}$-simmetrik solitonlar modeli keltirilgan. To‘g‘ri chiziqdagi NNSh tenglamasi quyidagicha yozilishi mumkin:

$$i\frac{\partial}{\partial t}q(x,t) = -i\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x,t) + iV(x,t)q(x,t), \tag{27}$$

bu yerda $V(x,t) = -2q(x,t)q^*(-x,t) -$ o‘z-o‘zidan paydo bo‘ladigan $\mathcal{PT}$-simmetrik potensial. (27) tenglama “kuchayish va yo‘qotish” strukturasiga ega bo‘lgan optik to‘lqin o‘tkazgichda tarqaladigan $\mathcal{PT}$-simmetrik optik solitonlarni tavsiflaydi. (27) tenglamaning bir solitonli yechimini teskari sochilish masalasi yordamida olish mumkin va quyidagi ko‘rinishga ega:

$$q(x,t) = -\frac{2(\eta_1+\bar{\eta}_1)e^{i\bar{\theta}_1}e^{-4i\bar{\eta}_1^2 t}e^{-2\bar{\eta}_1 x}}{1+e^{i(\theta_1+\bar{\theta}_1)}}. \tag{28}$$

NNSh tenglamasi cheksiz ko‘p saqlanuvchi kattaliklarga ega, ular orasida norma:

$$C_0=\int_{-\infty}^{\infty} q(x,t)q^*(-x,t)\,dx, \tag{29}$$

va energiya:

$$C_2=\int_{-\infty}^{\infty}[q_x(x,t)q_x^*(-x,t)-\sigma q^2(x,t)q^{*2}(-x,t)]dx. \tag{30}$$

Bizning asosiy vazifamiz to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi boshlang‘ich impuls profili uchun solitonlar generatsiyasini modellashtirishdir:

$$q(x,0)=\begin{cases}0, & \text{agar} \quad |x|>\frac{1}{2}a \\ b, & \text{agar} \quad |x|\le\frac{1}{2}a\end{cases}, \qquad b>0.$$

Yuqoridagi yondashuvdan foydalanib, teskari sochilish masalasiga asoslanib, generatsiya qilingan solitonlar soni uchun quyidagi formulani olish mumkin:

$$F=\int_{-\infty}^{+\infty}|q(x,0)|dx=ab, \quad N=<\frac{1}{2}+\frac{ab}{\pi}>.$$

Ushbu formula $\mathcal{PT}$-simmetrik nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasi (27) orqali tasvirlangan boshlang‘ich impuls profili va generatsiya qilingan solitonlar soni o‘rtasidagi bog‘liqlikni ifodalaydi.

Ushbu modelni metrik graflar yordamida tarmoqlangan strukturalar holatiga umumlashtirish mumkin. Quyidagi nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasini ko‘rib chiqaylik, u yulduz grafining oltita $b_{\pm j}$ tarmoqlarining har bir tarmog‘ida yoziladi (2-rasmga qarang). Buning uchun har bir $b_{\pm j}$ tarmoq uchun $x_{\pm j}$ koordinatasi tayinlanadi. Koordinata boshini tarmoqlanish nuqtasiga joylashtiramiz, b_{-j} tarmoqlar uchun $x_{-j}\in(-\infty,0]$, b_j tarmoqlar uchun $x_j\in[0;\,+\infty)$ deb belgilaymiz:

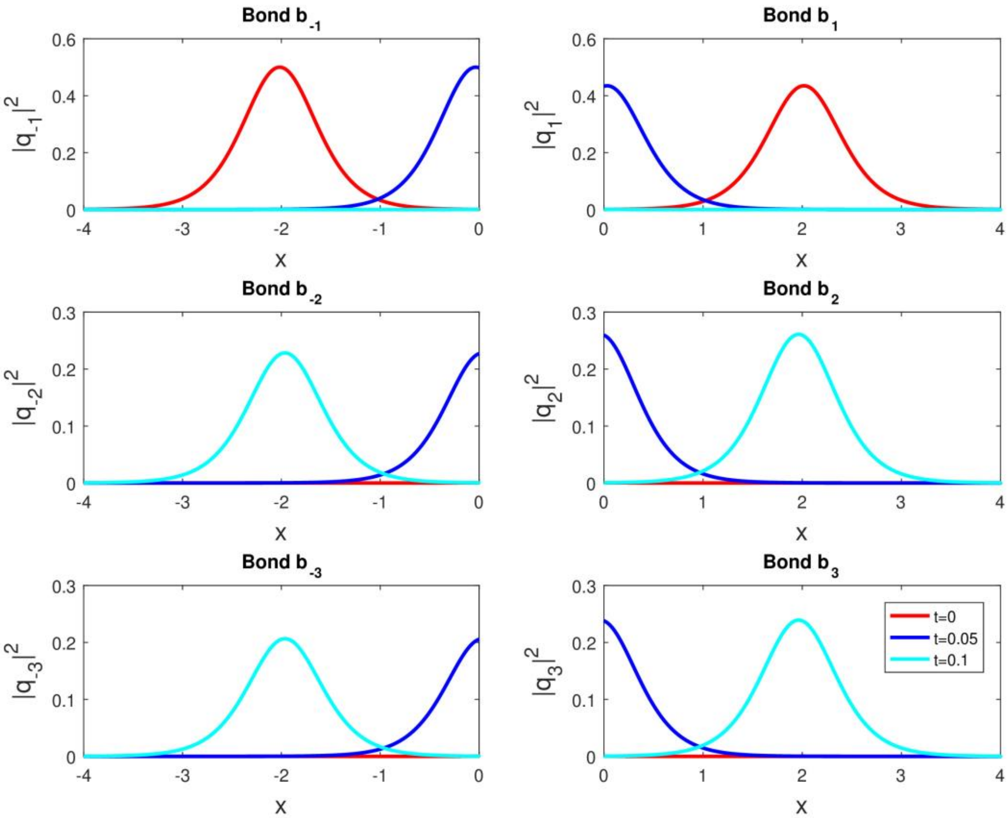
$$i\frac{\partial}{\partial t}q_{\pm j}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}q_{\pm j}(x,t)+\sqrt{\beta_j\beta_{-j}}q_{\pm j}^2(x,t)q_{\mp j}^*(-x,t), \tag{31}$$

bu yerda $q_{\pm j}(x,t)$ funksiya $x\in b_{\pm j}$ va $j=1,2,3$ uchun yozilgan.

Ushbu tenglamaning juda muhim xususiyati shundaki, u nochiziqli Shredinger tenglamalari tizimi bo‘lib, unda $q_{\pm j}$ komponentlar nochiziqli holda aralashgan. Graflarda nochiziqli Shredinger tenglamasidan farqli o‘laroq, tenglama komponentlari bir-biriga tarmoqlanish nuqtasidagi chegaraviy shartlar orqali bog‘langan bo‘lsa, tenglamadagi qarama-qarshi belgilarga ega bo‘lgan komponentlar nochiziqli hadlar orqali aralashgan va boshqa komponentlar har biriga bog‘langan.

Tugundagi chegaraviy shartlar asosiy saqlanish qonunlaridan keltirib chiqarilishi mumkin. Bu yerda energiya va normaning saqlanish qonunlaridan foydalanamiz. Grafdagi NNSh tenglamasi uchun norma quyidagi ko‘rinishga ega:

$$C_0=\sum_{j}^{3}\left[\int_{b_j}q_j(x,t)q_{-j}^*(-x,t)\,dx+\int_{b_{-j}}q_{-j}(x,t)q_j^*(-x,t)\,dx\right]. \tag{32}$$



3-rasm. Quyidagi qiymatlar uchun NNSh tenglamasini sonli yechish orqali olingan metrik yulduz grafidagi soliton profili: ($\beta_{-1} = 1,\ \beta_1 = 1.15,\ \beta_{-2} = 2.19,\ \beta_2 = 1.91,\ \beta_{-3} = 2.42,\ \beta_3 = 2.09$). Boshlang‘ich shartlar b_{-1} va b_1 tarmoqlarida berilgan.

$\dot{C}_1 = 0$ normaning saqlanishidan biz quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\sum_{j=1}^{3} \mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial x} q_j(x,t) \cdot q_{-j}^*(-x,t)\right]\Bigg|_{x\to+0} = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial x} q_{-j}(x,t) \cdot q_j^*(-x,t)\right]\Bigg|_{x\to-0}. \tag{33}$$

Boshqa saqlanuvchi kattalik – energiya quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$C_2=\sum_j^3\left[\begin{array}{l}\int_{b_j}\left[\partial_x q_j(x,t)\partial_x q_{-j}^*(-x,t)-\frac{\sqrt{\beta_j\beta_{-j}}}{2}q_j^2(x,t)q_{-j}^{*2}(-x,t)\right]dx\\+\int_{b_{-j}}\left[\partial_x q_{-j}(x,t)\partial_x q_j^*(-x,t)-\frac{\sqrt{\beta_j\beta_{-j}}}{2}q_{-j}^2(x,t)q_j^{*2}(-x,t)\right]dx\end{array}\right]. \quad (34)$$

$\dot{C}_2=0$ energiyaning saqlanishidan

$$\sum_{j=1}^3 \mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x}q_j(x,t)\cdot\partial_t q_{-j}^*(-x,t)\right]\Bigg|_{x\to+0} = \sum_{j=1}^3 \mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x}q_{-j}(x,t)\cdot\partial_t q_j^*(-x,t)\right]\Bigg|_{x\to-0}. \quad (35)$$

Ushbu ifodalar tugundagi quyidagi chegaraviy shartlarga olib keladi:

$$\alpha_1 q_1(x,t)|_{x=0}=\alpha_{-1}q_{-1}(x,t)|_{x=0}=\alpha_2 q_2(x,t)|_{x=0}=\alpha_{-2}q_{-2}(x,t)|_{x=0}=\alpha_3 q_3(x,t)|_{x=0}=\alpha_{-3}q_{-3}(x,t)|_{x=0},$$

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial x}q_1(x,t)|_{x=0}+\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial x}q_2(x,t)|_{x=0}+\frac{1}{\alpha_3}\frac{\partial}{\partial x}q_3(x,t)|_{x=0}=\frac{1}{\alpha_{-1}}\frac{\partial}{\partial x}q_{-1}(x,t)|_{x=0}+\frac{1}{\alpha_{-2}}\frac{\partial}{\partial x}q_{-2}(x,t)|_{x=0}+\frac{1}{\alpha_{-3}}\frac{\partial}{\partial x}q_{-3}(x,t)|_{x=0}$$

Nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasining $q(x,t)$ −yechimi quyidagi ifoda bilan berilgan bo‘lsin:

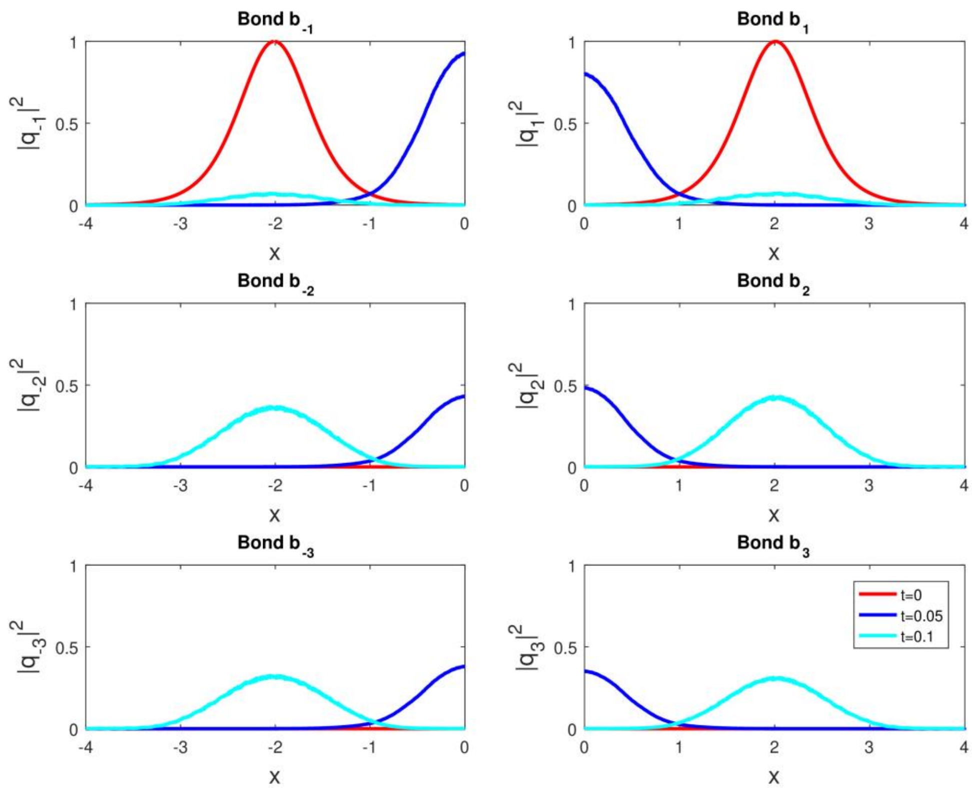
$$i\frac{\partial}{\partial t}q(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x,t)+2q^2(x,t)q^*(-x,t). \quad (36)$$

U holda tenglamalar yechimini $q(x,t)$ orqali ifodalash mumkin: $q_{\pm j}(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\beta_{\pm j}}}q(x,t)$ va bu yechim quyidagi chegaraviy shartlarni yig‘indi qoidasi bajarilganda qanotlantiradi:

$$\frac{\alpha_{\pm j}}{\alpha_1}=\sqrt{\frac{\beta_{\pm j}}{\beta_1}},\quad \frac{1}{\beta_{-1}}+\frac{1}{\beta_{-2}}+\frac{1}{\beta_{-3}}=\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\beta_3}. \quad (37)$$

Tugundagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan NNSh tenglamasining bitta soliton yechimlaridan biri quyidagicha yozilishi mumkin:

$$q_{\pm j}(x,t)=-\sqrt{\frac{2}{\beta_{\pm j}}}\frac{4\eta e^{i\bar{\varphi}}e^{-4i\eta^2 t}e^{-2\eta x}}{1+e^{i(\varphi+\bar{\varphi})}e^{-4\eta x}}, \quad (38)$$



4-rasm. Quyidagi qiymatlar uchun NNSh tenglamasini sonli yechish orqali olingan metrik yulduz grafidagi soliton profili: ($\beta_{-1} = 0.65,\ \beta_1 = 0.79,\ \beta_{-2} = 2.7,\ \beta_2 = 2.09,\ \beta_{-3} = 3.06,\ \beta_3 = 2.87$). Boshlang‘ich shartlar b_{-1} va b_1 tarmoqlarida berilgan.

bu yerda $\varphi,\ \bar{\varphi}$ va η o‘zgarmas kattaliklar.

3-rasmda yig‘indi qoidasiga mos keladigan $\beta_{\pm j}$ qiymatlari uchun turli vaqt momentlarida $t = 0;\ 0{,}05; 0.1$ grafdagi NNSh tenglamasini sonli yechish natijasida olingan $\left|q_{\pm j}(x,t)\right|^2$ soliton yechimlarining profillari ko‘rsatilgan. Yuguruvchi solitonlarning ajoyib xususiyati ularning graf tugunidan aks etishsiz o‘tishidir. 4-rasmda yig‘indi qoidasiga mos kelmaydigan $\beta_{\pm j}$ qiymatlari uchun yuqoridagiga o‘xshash grafiklar ko‘rsatilgan. 3-rasmda ko‘rsatilgan solitonlardan farqli o‘laroq, bu grafik tugunda solitonlarning aks etishini ko‘rsatadi. Shunday qilib, biz integrallanuvchanlik xususiyatiga ega grafning tarmoqlanish nuqtasi orqali solitonlarning aks ettirilmasdan o‘tishini ta’minladik, degan xulosaga kelishimiz mumkin. Ilgari bunday xususiyat nochiziqli Shredinger, sinus-Gordon tenglamasi va nochiziqli Dirak tenglamalari kabi graflardagi boshqa evolyutsion tenglamalar uchun ko‘rsatilgan.

Ushbu dissertatsiya ishida ko‘rib chiqilgan yana bir muammo NNSh orqali metrik graflarda tasvirlangan tarmoqlangan optik tolalarda PT-simmetrik solitonlarni generatsiya qilish muammosidir. Xususan, generatsiya qilingan solitonlar soni uchun quyidagi formula olingan:

$$F_{\pm j} = \sqrt{\frac{\beta_{\pm j}}{2}} \int_{b_{\pm j}} \left|q_{\pm j}(x,0)\right| dx = \frac{ab}{2},$$

$$N = 6\left\langle \frac{1}{2} + \frac{ab}{2\pi} \right\rangle.$$

Dissertatsiyaning to‘rtinchi bobi diskret nolokal nochiziqli Shredinger (DNNSh) tenglamasi orqali tasvirlangan tarmoqlangan PT-simmetrik diskret strukturalar modelini ishlab chiqishga bag‘ishlangan. Bunday masalani ko‘rib chiqish mumkin bo‘lgan eng oddiy graf bitta tugunga ulangan oltita diskret tarmoqlar, bunday graf yulduz grafi deb ataladi. Bu oltita taqmoqqa ega bo‘lgan tarmoqlangan struktura bir o‘lchovli panjaradir. Grafdagi alohida panjara tugunlari $(\pm j, n)$ shaklida ko‘rsatilgan, bu yerda $j = 1{,}2{,}3$ taqmoqning tartib raqami, n esa har bir tarmoqdagi panjara tuguniga mos keladi. Chap $(-j)$ tarmoqlar uchun $n \in b_{-j} = \{0, -1, -2, \dots\}$, bu yerda $(-j, 0)$ tarmoqlanish nuqtasini bildiradi. O'ng (j) taqmoqlar uchun $n \in b_j = \{1{,}2{,}3, \dots\}$, bu yerda $(j, 1)$ tarmoqlanish nuqtasiga eng yaqin nuqtalarni bildiradi.

Bu yerda yulduz grafining har bir tarmog‘i uchun quyidagi DNNSh tenglamasini ko‘rib chiqamiz:

$$i\frac{dQ_{\pm j,n}}{dt} = Q_{\pm j,n+1} - 2Q_{\pm j,n} + Q_{\pm j,n-1} + \sqrt{\beta_j \beta_{-j}} Q_{\pm j,n} Q^*_{\mp j,-n}(Q_{\pm j,n+1} + Q_{\pm j,n-1}), \quad (39)$$

bu yerda $\beta_{\pm j}$ – nochiziqlilik koeffitsiyentlari va $(\pm j, n) \notin \{(-j, 0), (j, 1)\}$. Tugundagi chegaraviy shartlarni yozamiz:

$$Q_{-j,1} = \alpha_1^{(-j)} Q_{1,1} + \alpha_2^{(-j)} Q_{2,1} + \alpha_3^{(-j)} Q_{3,1}, \quad (40)$$
$$Q_{j,0} = \alpha_{-1}^{(j)} Q_{-1,0} + \alpha_{-2}^{(j)} Q_{-2,0} + \alpha_{-3}^{(j)} Q_{-3,0}$$

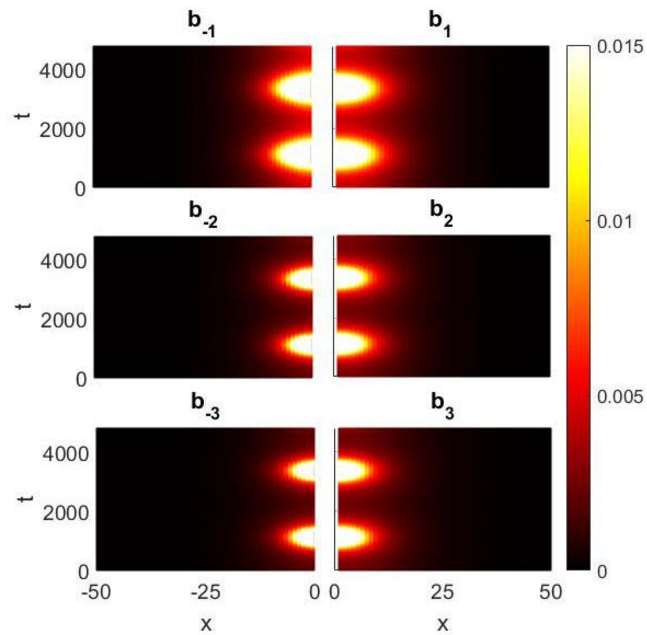
mos keladigan koeffitsiyentlar, $\alpha_{\pm j}^{(\pm j)}$.

5-rasmda ko‘rsatilgan yulduz shaklidagi grafdagi DNNSh tenglamasining soliton yechimi:

$$Q_{\pm j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta_{\pm j}}} Q_n(t), \quad (41)$$

bu yerda $Q_n(t)$ – diskret chiziqda (ya’ni cheksiz zanjirda) DNNSh tenglamasining soliton yechimi. DNNSh tenglamasining soliton yechimi nochiziqlilik koeffitsiyentlari $\beta_{\pm j}$ quyidagi shartni qanoatlantirsa o‘rinli hisoblanadi:

$$\frac{1}{\beta_{-1}} + \frac{1}{\beta_{-2}} + \frac{1}{\beta_{-3}} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3}. \quad (42)$$



5-rasm. Metrik yulduz grafi uchun (41) tenglama bilan berilgan DNNSh tenglamasi yechimining ikki oʻlchovli kontur grafigi. Nochiziqlilik koeffitsiyentlarining qiymatlari quyidagicha tanlangan: $\beta_{-1} = 1,\ \beta_1 = 1.15,$ $\beta_{-2} = 2.19,\ \beta_2 = 1.92,\ \beta_{-3} = 2.42,\ \beta_3 = 2.09.$

(41) tenglama bilan berilgan yechim (39) tenglamaning soliton yechimi boʻlib, (42) tenglamada berilgan shart oʻrinli boʻlsa, tugundagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Boshqacha qilib aytganda, masalaning aniq soliton yechimi faqat (42) tenglamadagi yigʻindi qoidasini qanoatlantiradigan $\beta_{\pm j}$ qiymatlari uchun yozilishi mumkin. Umumiy holatda yigʻindi qoidasi bajarilmasa, (39) tenglamani sonli usullar bilan yechish kerak boʻladi. 5-rasmda (39) tenglamaning (nafas oluvchi) soliton yechimining kontur grafigi keltirilgan. Grafik yigʻindi qoidasi bajarilgan holda, ya'ni $\beta_{-1} = 1,\ \beta_1 = 1.15,\quad \beta_{-2} = 2.19,\ \beta_2 = 1.92,\quad \beta_{-3} = 2.42,\quad \beta_3 = 2.09$ qiymatlar uchun (41) analitik formula boʻyicha olingan.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishi metrik graflarda solitonlarning transporti va ularning generatsiyasi muammosini hal qilishga bagʻishlangan. Dissertatsiya ishida olib borilgan tadqiqotlar asosida quyidagi xulosalar keltirilgan:

1) Optik tolali tarmoqlarda generatsiya qilingan optik solitonlar soni impulsning boshlangʻich profiliga bogʻliq;

2) Graflardagi PT-simmetrik nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasi integrallanuvchanlik xossasiga ega va soliton yechimlari olingan;

3) Integrallashuvchanlik holatida PT-simmetrik solitonlarning graf tugunlari orqali aks etishsiz oʻtadi;

4) Graflardagi PT-simmetrik diskret nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasi integralluvchanlik xossasiga ega va soliton yechimlari olingan;

5) Graflarda nolokal nochiziqli Shredinger tenglamasi bilan tasvirlangan PT-simmetrik solitonlar solitonlarini generatsiyasi uchun ikkita optik impulsning mavjudligi zarur.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ ИНСТИТУТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА «ТИИИМСХ»

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

АКРАМОВ МАШРАБ ЭРГАШАЛИ УГЛИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ И УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИКИ СОЛИТОНОВ В СЕТЯХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

01.04.02 – Теоретическая физика
05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплекс программирования

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физикоьматематическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за номером № B2023.2.PhD/FM860.

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ifar.uz) и Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Матрасулов Даврон Урунович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ганжабой Болтаев** доктор физико-математических наук **Борис Маломед** доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «1» июля 2023 года в 16^{00} часов на заседании Научного совета DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 при институт Фундаментальных и прикладных исследований Национального исследовательского университета «ТИИИМСХ» (Адрес: 100000, г.Ташкент, улица Кори Ниязова 39, Тел.: +998 71 237-09-61; e-mail: info@ifar.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального исследовательского университета «ТИИИМСХ» за № __ (Адрес: 100000, г.Ташкент, ул. Кори Ниязов, дом 39. Тел.: (+998971) 237-19-36, Факс: (+998971) 237-09-75, e-mail: info@ifar.uz).

Автореферат диссертации разослан «__» _________ 2023 года.

(протокола реестра № 8 от «17» июня 2023 года.)

Б.Ж. Ахмедов
Председатель научного совета по присуждению учёной степени, доктор физико-математических наук, профессор.

Э.Х. Каримбаев
Учёный секретарь научного совета по присуждению ученой степени, PhD.

Б.М. Нарзиллоев
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученой степени, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность работы: Изучение нелинейных оптических явлений в материалах низкой размерности представляет собой актуальную как с фундаментальной, так и с практической точки зрения задачу. Фундаментальный аспект проблемы заключается в том, что уменьшение размерности и пространственный конфайнмент в таких системах накладывают существенные ограничения на поведение нелинейных оптических волн, что иногда обуславливает возникновения новых эффектов. С практической же точки зрения, топология разветвления сетей, а также геометрия границ могут стать эффективным инструментом для манипулирования поведением волн и частиц, что позволяет решать проблему о моделировании и дизайне функциональных материалов и оптоэлектронных устройств с заранее заданными свойствами. В данной диссертационной работе решено ряд задач, непосредственно связанных с проблемой управляемого транспорта солитонов, включая PT-симметричных солитонов, а также с задачей моделирования оптоэлектронных материалов улучшенными функциональными свойствами.

В настоящее время в мире изучение линейных волн, описываемых нелинейными волновыми уравнениями, и исследование численного решения нелинейных волновых уравнений являются одной из актуальных проблем современной оптики и квантовой физики. При этом решение типа нелинейного уравнения Шредингера, заданного на простых графах, и моделирование транспорта солитонов в разветвленных системах играют важную роль в оптике, нанофизике и теоретической физике. В связи с этим нахождение солитонных решений нелинейных волновых уравнений на графах и моделирование динамики солитонов, а также математическое моделирование процессов эффективной передачи информации, создание эффективных алгоритмов численного вычисления и программного обеспечения представляют собой важный этап современных исследований.

В нашей стране особое внимание уделяется теоретической физике и прикладной математике, имеющим научное и практическое значение фундаментальных науках. В том числе, особое внимание уделяется теоретическим исследованиям, и практическим разработкам с использованием математического моделирования и вычислительно- математических методов при решении задач квантовой физики, конденсированных сред и физики полимеров. Значительные результаты достигнуты в солитонных решениях нелинейных уравнений в разветвленных структурах, изучении задач математического моделирования транспорта солитонов и решении актуальных теоретических и практических задач. Определены основные задачи и направления деятельности научных исследований на уровне международных стандартов в приоритетных прикладная областях в «Электроника, физика наноматериалов и математика»[1]. При обеспечении исполнения постановления важно развывать теорию решения дифференциальных уравнений на графах.

Настоящая диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и Указа Президента №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в Республике. Данная диссертационная работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Впервые Экснер и Себа в 1989 году провели исследование по моделированию динамики линейных волн с помощью эволюционных уравнений на графах. Позже Кострыкин и Шрейдер предложили конкретные математические задачи и математическую модель динамики частиц и волн в разветвленных системах, удовлетворяющую граничным условиям общего вида для оператора Шредингера на метрических графах. Нелинейное обобщение этой модели, т.е. модель динамики солитонов в разветвленных структурах, описываемая нелинейными уравнениями Шредингера на метрических графах, впервые представлена К. Накамурой, С. Савадой, Д. Матрасуловым и их соавторами. В частности, в их работах общие граничные условия в точке разветвления графа выводятся из фундаментальных законов сохранения.

За последние 10 лет граничные условия на узлах были получены такими учеными, как Р. Адами, Д. Ноджа, Д. Пеленовский и др. В настоящее время эти условия используются для моделирования стоячих и бегущих солитонов на графах, включая моделирование релятивистских солитонов в разветвленных структурах.

Задача нахождения числа генерируемых солитонов для заданных начальных условий на основе нелинейного уравнения Шредингера в оптических волокнах была впервые представлена в 1988 году Ж. Бурзлаффом и в 1989 году

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года No292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академия Наук Республики Узбекистан»

Ю. Кившаром. Позже, в 1999 году, Н.К.Паноиу, И.В. Мельников, Д. Михалаче и их соавторы исследовали солитоны, генерируемые на основе симметричных и антисимметричных начальных условий, используя аналитические и численные методы.

В нашей республике свойства аналитических и численных решений нелинейного уравнения Шрёдингера, уранения Кортега-де-Фриза, а также реакционно-диффузионного уравунения были в достаточной мере изучены такими отечественными учеными как Ф.Абдуллаев, А.Абдумаликов, А.Хасанов, Г.Уразбаев, М.Арипов, З.Рахмонов, А.Матякубов.

Связь темы диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование проводилось в рамках научно-исследовательского проекта ОТ-Ф4-30 « Исследование качественных свойств двойной нелинейной кросс системы под влиянием конвективного смещения, переменной плотности, источника или поглощения», согласно плана научно-исследовательских работ Национального университета Узбекистана.

Цель исследования: Целью данной диссертационной работы является изучение генерации и распространения солитонов в сетях оптических волокон, путем моделирования динамики солитонов нелинейными эволюционными уравнениями на графах. Также, отдельной целью является разработка способов управляемой генерации и транспорта солитонов в сетях оптических волноводов.

Задачи исследования:

1) Решение задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера на графах;

2) Моделирование излучения солитонов при их распространении в сети оптических волокон;

3) Вычисление числа генерированных солитонов для заданных профилей начальных пульсов;

4) Решение задачи Коши для PT-симметричного нелокального нелинейного уравнения Шредингера на графах;

5) Вычисление числа генерированных PT-симметричных солитонов для заданных профилей начальных пульсов;

6) Решение дискретного PT-симметричного нелинейного уравнения Шредингера на графах и нахождение их солитонных решений;

7) Выявление условий безотражательного переходы PT-симметричных солитонов через узла графа.

Объект исследования: Солитоны, генерированные в сетях оптических волокон, PT-симметричные солитоны, солитоны в дискретных разветвленных структурах.

Предмет исследования: Управляемая генерация и транспорт солитонов в сетях оптических волокон, динамика PT-симметричных солитонов в сетеподобных структурах, динамики нелокальных солитонов в дискретных разветвленных структурах низкой размерности.

Методы исследования: Методы аналитического и численного решения нелинейного уравнения Шредингера, PT-симметричного нелокального и нелинейного уравнения Шредингера, а также дискретного нелокального уравнения Шредингера.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

впервые решено задача о генерации солитонов в сетеподобных структурах, получена аналитическая формула для вычисления количества генерированных солитонов по заданному профилю начального пульса;

впервые получены солитонные решения PT-симметричного нелокального нелинейного уравнения Шредингера на метрических графах;

впервые получены солитонные решения дискретного нелокального нелинейного уравнения Шредингера.

Практические результаты исследования: Результаты диссертации имеют непосредственное применение для моделирования генерации и распространения солитонов в сетях оптических волокон и волноводов, создания оптоволоконных сетей с заданными функциональными свойствами, а также для моделирования и дизайна ферромагнитных материалов, имеющих разветвленную структуру низкой размерности.

Достоверность результатов исследований: Достоверность результатов исследований заключается в том, что правильность формулы для количества генерированных солитонов подтверждается численным решением нелинейного уравнения Шредингера на графах. Кроме того, наличие безотражательного перехода PT-симметричных солитонов через узлы графа, показое на основе аналитического решения нелокального нелинейного уравнения Шредингера, подтверждается сичленным моделированием.

Основные результаты:

1) Получена аналитическая формула для вычисления количества солитонов (по заданному начальному профилю оптического импульса), генерируемых в сети оптических волокон.

2) Получены солитонные решения PT-симметричного нелокального нелинейного уравнения Шредингера на графах.

3) Доказано интегрируемость PT-симметричного нелокального нелинейного уравнения Шредингера на графах, при выполнении определенных условий коэффициентами нелинейности уравнения.

4) Показано, что для в интегрируемом случае, переход PT-симметричных солитонов через узлы графа является безотражательным.

5) Получены солитонные решения PT-симметричного дискретного нелокального нелинейного уравнения Шредингера на графах.

6) Получена аналитическая формула для вычисления количества PT-симметричных солитонов (по заданному начальному профилю оптического импульса), описываемых нелокальным нелинейным уравнение Шредингера на графах.
7) Выведено аналитическая формула для условия безотражательного перехода PT-симметричных дискретных солитонов через узлы графа.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов генерации солитонов в оптоволоконных сетях:

количество генерируемых солитонов для нелинейного уравнения Шредингера в оптоволоконных сетях использовано в зарубежных научных статьях (Results in Physics, Volume 31, 104889, December 2021; Optik, Volume 224, 165237, December 2020; Optik, Volume 272, 170206, February 2023; Heliyon, Volume 9, Issue 3, E14235, March 2023; Computational Mathematics and Modeling, Volume 33, pp. 375-387, July 2022; Applied Mathematics Letters, Volume 143, 108684, September 2023) для того, чтобы вычислить для заданных начальных условий. Применение научного результата позволило решить проблему начального значения для нелинейного уравнения Шредингера в разветвленных структурах;

Результаты диссертации внедрены в рамках нескольких международных и отечественных научных грантов, таких как "Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology"(HORIZON2020, European Union Funding for Research and Innovation), совместный грант Министерства Инновационного Развития РУз и TUBITAK (Ref. Nr. MRT-2130213155 & 221N123), а также фундаментального гранта Министерства Инновационного Развития РУз “Kichik o'lchamli nanostrukturalarda boshqariladigan kvant tashish: tarmoqli kvant-funksional materiallarni modellashtirish va loyihalash” (Nr/ FZ-5821512021).

Апробация результатов исследования: Результаты работы апробированы на 5 международных конференциях, а также научных семинарах математического факультета Технического университета Ильменау (Германия) и Института Доплера Технического Университета Праги (Чехия).

Публикация результатов исследования: По теме диссертации опубликована 4 статей и 6 тезисов конференций.

Структура и объем диссертации: Структура диссертации состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы, и приложений. Объем диссертации составляет 129 страниц, из них 10 страниц занимает список использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТИЦИИ

Первая глава содержит описание текущего состояния проблемы, а также описание основ теории нелокальных нелинейных уравнений Шредингера и процесса генерации солитонов в классическом, не PT-симметричном нелинейном уравнении Шредингера при заданных начальных условиях на на прямой. В частности, представлены модели генерации солитонов из симметричного начального импульса.

Во второй главе под названием “Моделирование генерации солитонов в сетях оптических волокон”, рассматривается проблема генерации солитонов в разветвленных оптических волокнах или оптоволоконных сетях, описываемая в терминах задач начального значения для нелинейного уравнения Шрёдингера на метрических графах. Для различных заданных начальных условий мы выводим количество солитоны, генерируемые с учетом различных топологий сети. Основное уравнение для генерации и эволюции импульсов в оптических волокнах - это следующее нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+|\psi|^2\psi=0, \qquad (1)$$

где ψ −нормированная комплексная амплитуда огибающей импульса. Проблема генерации солитонов в оптических волокнах сводится к задаче Коши для уравнения (1). Такие задачи могут быть решены, например, с помощью метода обратной задачи рассеяния для начальных условий, заданных формулой $\psi(x,0)=-iq(x)$, с

$$q(x)=\begin{cases}0, & \text{для } |x|>\frac{1}{2}a\\ b, & \text{для } |\mathrm{x}|\le\frac{1}{2}a\end{cases} \quad b>0. \qquad (2)$$

При таком подходе, эволюцию волновой функции при генерации солитона можно получить, решив следующую задачу на собственные значения

$$Au=\lambda u, \qquad (3)$$

где

$$A=\begin{pmatrix} i\frac{d}{dx} & \psi(x,0)\\ -\psi^*(x,0) & -i\frac{d}{dx}\end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Каждому дискретному собственному значению $\lambda=\xi+i\eta$ с L^2 −интегрируемой собственной функцией соответствует сгенерированный солитон с амплитудой 2η, движущийся со скоростью 2ξ.

Ранее было показано, что количество генерируемых солитонов задается выражением

$$N=\langle\frac{1}{2}+\frac{F}{\pi}\rangle, \qquad (5)$$

где $F = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)|dx$ и $<\ldots>$ обозначает целое число, меньшее аргумента. Аналогичный результат для числа солитонов может быть получен в для начального условия, заданного формулой

$$q(x) = \beta \exp(-\alpha|x|)\,, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{6}$$

Рассмотрим звездообразный граф с тремя связями e_j, которым назначена координата x_j. Выбирая начало координат в вершине 0, для связки e_1 положим $x_1 \in (-\infty, 0]$ и для $e_{2,3}$ зафиксируем $x_{2,3} \in [0, +\infty)$. В дальнейшем мы будем использовать сокращенное обозначение $\psi_j(x)$ для $\psi_j(x_j)$, где $x -$ координата связи j, к которой относится компонента ψ_j. Нелинейное уравнение Шрёдингера на каждой связи e_j такого графа можно записать как

$$i\frac{\partial \psi_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} + \beta_j |\psi_j|^2 \psi_j = 0, \tag{7}$$

где параметр нелинейности β_j определяется через нелинейный показатель преломления материала для каждой ветви оптоволоконной сети. Чтобы решить уравнение (7), необходимо наложить граничные условия в точке ветвления. Такие условия можно вывести из фундаментальных физических законов, таких как сохранение нормы и энергии, которые задаются как

$$\frac{dN}{dt} = 0, \qquad \frac{dE}{dt} = 0, \tag{8}$$

где

$$N(t) = \int_{-\infty}^{0} |\psi_1|^2 dx + \int_{0}^{\infty} |\psi_2|^2 dx + \int_{0}^{\infty} |\psi_3|^2 dx \tag{9}$$

и

$$E = E_1 + E_2 + E_3, \tag{10}$$

с

$$E_k = \int_{e_k} \left[\left| \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right|^2 - \frac{\beta_k}{2} |\psi_k|^4 \right] dx. \tag{11}$$

Можно показать, что законы сохранения (8) приводят к следующим граничным условиям на узле:

$$\beta_1 \psi_1(0,t) = \beta_2 \psi_2(0,t) = \beta_3 \psi_3(0,t), \tag{12}$$

и обобщенным правилам Кирхгофа

$$\frac{1}{\beta_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial t}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial t}\bigg|_{x=0} + \frac{1}{\beta_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial t}\bigg|_{x=0}, \tag{13}$$

где $\beta_j -$ ненулевые действительные константы. Асимптотические условия для уравнения (1) накладываются следующим образом:

$$\lim_{|x| \to +\infty} \psi_j = 0. \tag{14}$$

Односолитонные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям на узле (12), (13) и асимптотическому условию (14), могут быть записаны как

$$\psi_j(x,t) = a\sqrt{\frac{2}{\beta_j}}\frac{\exp\left[i\frac{vx}{2} - i\left(\frac{v^2}{4} - a^2\right)t\right]}{\cosh[a(x - l - vt)]}, \tag{15}$$

где параметры β_j удовлетворяют следующему правилу сумм:

$$\frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3}. \tag{16}$$

Здесь v, l и $a-$ не зависящие от связи параметры, характеризующие скорость, начальный центр масс и амплитуду солитона соответственно. В эксперименте правило сумм в уравнении (16) может быть выполнено путем правильной настройки показателя преломления для каждой ветви волоконно-оптической сети.

Рассмотрим разветвленное оптическое волокно, имеющее форму Y-перехода. Такую систему можно рассматривать как базовый звездный граф. Тогда задача генерации солитона и его распространения может быть смоделирована в терминах задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера на базовом звездном графе, которая задается уравнением (7), для которого задано следующее начальное условие:

$$\psi_j(x,0) = -i\sqrt{\frac{2}{\beta_j}}q_j(x). \tag{17}$$

Здесь $\psi_j -$ нормализованная комплексная амплитуда огибающей импульса на j −й связи (ветви) графа, а $q_j(x) -$ начальный профиль амплитуды. Для решения этого уравнения необходимо наложить граничные условия в точке ветвления (вершине) графа и определить асимптотику волновой функции на концах ветвления. Их можно записать в виде уравнений (12), (13) и (14).

Здесь мы рассматриваем задачу генерации солитонов для Y-перехода световода при начальном профиле импульса, заданном как (см. Рис. 1)

$$q_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2}a \\ b, & -\frac{1}{2}a \le x \le 0 \end{cases} \tag{18}$$

$$q_{2,3}(x) = \begin{cases} 0, & x > \frac{1}{2}a \\ b, & 0 \le x \le \frac{1}{2}a \end{cases} \tag{19}$$

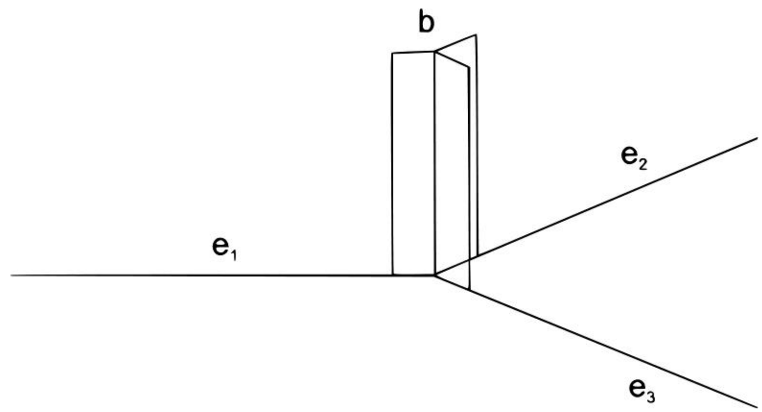


Рис. 1. Начальный профиль импульса в световоде с разветвленной звездой.

Такой начальный профиль подразумевает, что солитон генерируется вокруг точки ветвления на каждой ветви. Используя метод обратной задачи рассеяния, можно вычислить количество сгенерированных солитонов N для такого профиля:

$$N = \langle \frac{3}{2} + \frac{F}{\pi} \rangle, \tag{20}$$

где

$$F = \sum_{j=1}^{3} \int_{e_j} |\psi_j(x,0)| dx = \frac{ab}{2} \left[\sqrt{\frac{2}{\beta_1}} + \sqrt{\frac{2}{\beta_2}} + \sqrt{\frac{2}{\beta_3}} \right]. \tag{21}$$

Мы предполагаем, что выполняется правило сумм (16), т.е. задача интегрируема. Разница между уравнениями (3) и (20) обусловлена постоянным множителем

$$\left(\sqrt{2\beta_1^{-1}} + \sqrt{2\beta_2^{-1}} + \sqrt{2\beta_3^{-1}} \right). \tag{22}$$

Это позволяет настраивать количество генерируемых солитонов, используя различные варианты набора $\beta_j, (j = 1,2,3)$. Кроме того, для простоты указанные выше начальные профили импульсов в уравнениях. (18) и (19) даны в вершине и имеют одинаковую ширину a и высоту b. Однако в общем случае можно выбрать разную ширину и высоту для разных связей. Это также дает дополнительный инструмент для настройки числа солитонов и динамики.

Другой начальный профиль импульса, для которого можно явно получить число солитонов и решения в волокне с Y-переходом, имеет вид

$$\psi_j(x,0) = \sqrt{\frac{2}{\beta_j}} \operatorname{sech}\left[e^{i(\omega x + \theta/2)} + e^{i(\omega x + \theta/2)} \right], \tag{23}$$

где 2ω и $\theta -$ отстройка частоты и разность фаз между двумя солитонами соответственно. Двухсолитонное решение задачи, задаваемое уравнениями, (7), (12) и (13) можно записать как

$$\psi_j(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\beta_j}}\xi\eta e^{\phi\left(\frac{t}{2}\right)} \times \tag{24}$$
$$\frac{e^{i\xi x}\cosh[\eta(x+\xi t)+i\varphi] + e^{-i\xi x}\cosh[\eta(x-\xi t)-i\varphi]}{\xi^2\cosh\eta(x+\xi t)\cosh\eta(x-\xi t)+\eta^2\sin\xi(x+i\eta t)\sin\xi(x-i\eta t)},$$

которое действительно при ограничении:

$$\frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3}. \tag{25}$$

Соответствующее выражение ля количества генерированных солитонов может быть записана как

$$F = 2\pi\left(\sqrt{\frac{2}{\beta_1}} + \sqrt{\frac{2}{\beta_2}} + \sqrt{\frac{2}{\beta_3}}\right)\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{26}$$

Третья глава представляет модель $\mathcal{PT}$-симметричных солитонов на графах, описываемых нелокальным нелинейным уравнением Шредингера (ННУШ), часто называмой уранением Абловица-Муслимани. ННУШ на прямой можно записать как

$$i\frac{\partial}{\partial t}q(x,t) = -i\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x,t) + iV(x,t)q(x,t), \tag{27}$$

где $V(x,t) = -2q(x,t)q^*(-x,t) -$ $\mathcal{PT}$-симметричный самоиндуцированный потенциал. Уравнение (27) описывает $\mathcal{PT}$-симметричные оптические солитоны, распространяющиеся в оптическом волноводе, имеющем структуру типа «усиления и потери». Односолитонное решение уравнения (27) может быть получено с помощью метода обратной задачи рассеяния и имеет вид

$$q(x,t) = -\frac{2(\eta_1+\bar{\eta}_1)e^{i\bar{\theta}_1}e^{-4i\bar{\eta}_1^2 t}e^{-2\bar{\eta}_1 x}}{1+e^{i(\theta_1+\bar{\theta}_1)}}. \tag{28}$$

ННУШ допускает бесконечно много законов сохранения, среди которых норма:

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} q(x,t)q^*(-x,t)\,dx, \tag{29}$$

и энергия:

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty}[q_x(x,t)q_x^*(-x,t) - \sigma q^2(x,t)q^{*2}(-x,t)]dx. \tag{30}$$

Нашей основной задачей является моделирование генерации солитонов для прямоугольного начального профиля импульса:

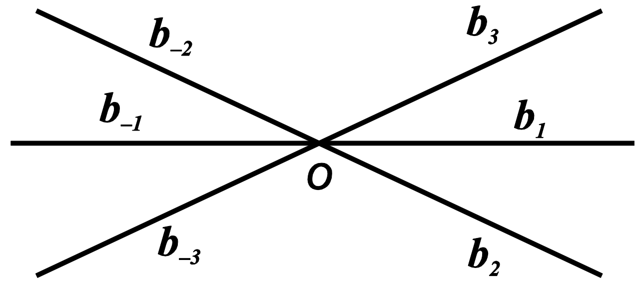


Рис. 2. Звездный граф с шестью ветвями.

$$q(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{для} \quad |x| > \dfrac{1}{2}a \\ b, & \text{для} \quad |x| \le \dfrac{1}{2}a \end{cases}, \qquad b > 0.$$

Использовуя вышуизлоденный подход, основанный на методе обратной задачи, можно получить следующую формулу для количества генерированных солитонов:

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} |q(x,0)| dx = ab, \quad N =< \frac{1}{2} + \frac{ab}{\pi} >.$$

Эта формула представляет собой связь между начальным профилем импульса и числом генерируемых солитонов, описываемых $\mathcal{PT}$-симметричным нелокальным нелинейным уравнением Шредингера (27).

Данная модель может быть обобщена на случай разветвленных структур, моделируемых с помощью метрических графов. Рассмотрим следующее нелокальное нелинейное уравнение Шредингера, которое записано на каждой связи звездообразного графа с шестью связями b_j (см. Рис. 2), для которых назначена координата x_j. Выбирая начало координат в вершине 0, для связи b_{-j} положим $x_{-j} \in (-\infty, 0]$, а для b_j положим $x_j \in [0;\ +\infty)$.

$$i\frac{\partial}{\partial t} q_{\pm j}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} q_{\pm j}(x,t) + \sqrt{\beta_j \beta_{-j}} q_{\pm j}^2(x,t) q_{\mp j}^*(-x,t), \tag{31}$$

где $q_{\pm j}(x,t)$ в $x \in b_{\pm j}$ и $j = 1,2,3$.

Очень важной особенностью данного уравнения является тот факт, что это система уравнений ННУШ, в которой компоненты $q_{\pm j}$ смешаны в нелинейных членах. В отличие от классического ННУШ на графах, где компоненты решения связаны друг с другом через граничные условия в узле, в уравнении компоненты с противоположными знаками смешиваются через нелинейный член, а другие компоненты связаны друг с другом через вершинные граничные условия. Граничные условия на узле можно вывести из фундаментальных законов сохранения. Здесь мы используем норму и закон сохранения энергии. Для ННУШ на графе, норма имеет вид

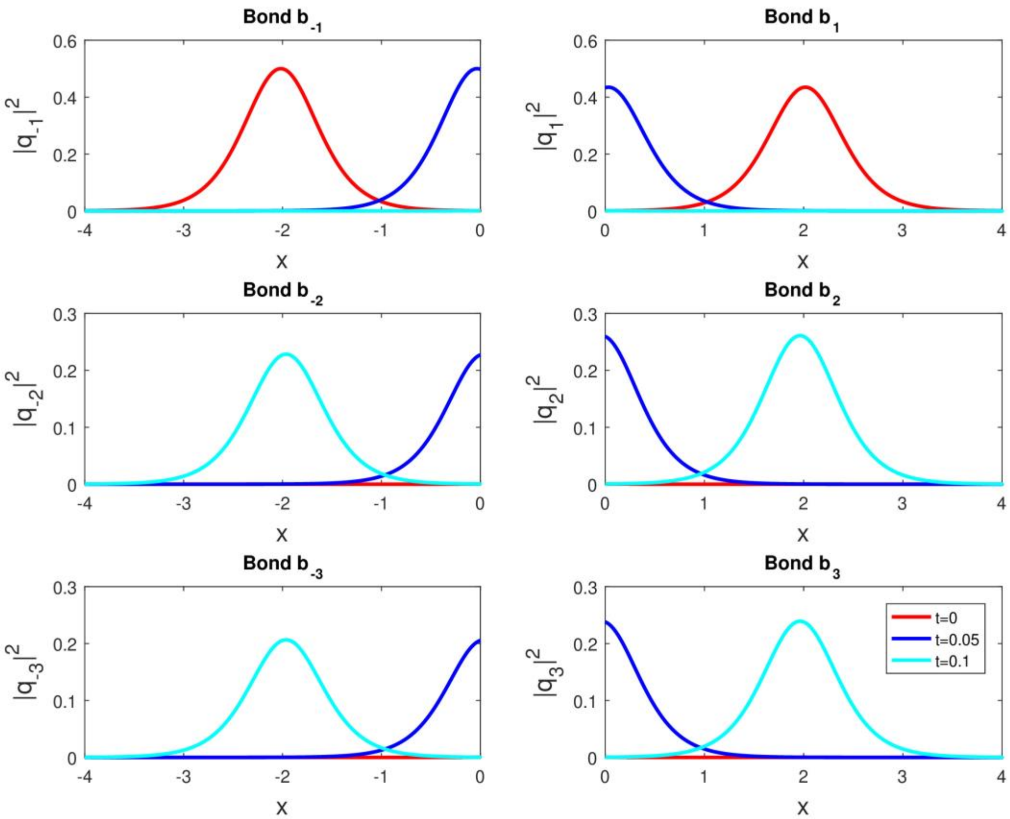


Рис. 3. Профиль солитона на метрическом звездообразном графе, полученный численным решением ННУШ для значений, ($\beta_{-1} = 1,\ \beta_1 = 1.15,\ \beta_{-2} = 2.19,\ \beta_2 = 1.91,\ \beta_{-3} = 2.42,\ \beta_3 = 2.09$). Начальные условия заданы на ветвях b_{-1} и b_1.

$$C_0 = \sum_j^3 \left[\int_{b_j} q_j(x,t) q_{-j}^*(-x,t)\, dx + \int_{b_{-j}} q_{-j}(x,t) q_j^*(-x,t)\, dx \right]. \qquad (32)$$

Из сохранения нормы $\dot{C}_1 = 0$ имеем

$$\sum_{j=1}^3 \operatorname{Im}\left[\frac{\partial}{\partial x} q_j(x,t) \cdot q_{-j}^*(-x,t)\right]\Bigg|_{x\to+0} = \sum_{j=1}^3 \operatorname{Im}\left[\frac{\partial}{\partial x} q_{-j}(x,t) \cdot q_j^*(-x,t)\right]\Bigg|_{x\to-0}. \qquad (33)$$

Еще одна сохраняющаяся величина - энергия - определяется выражением

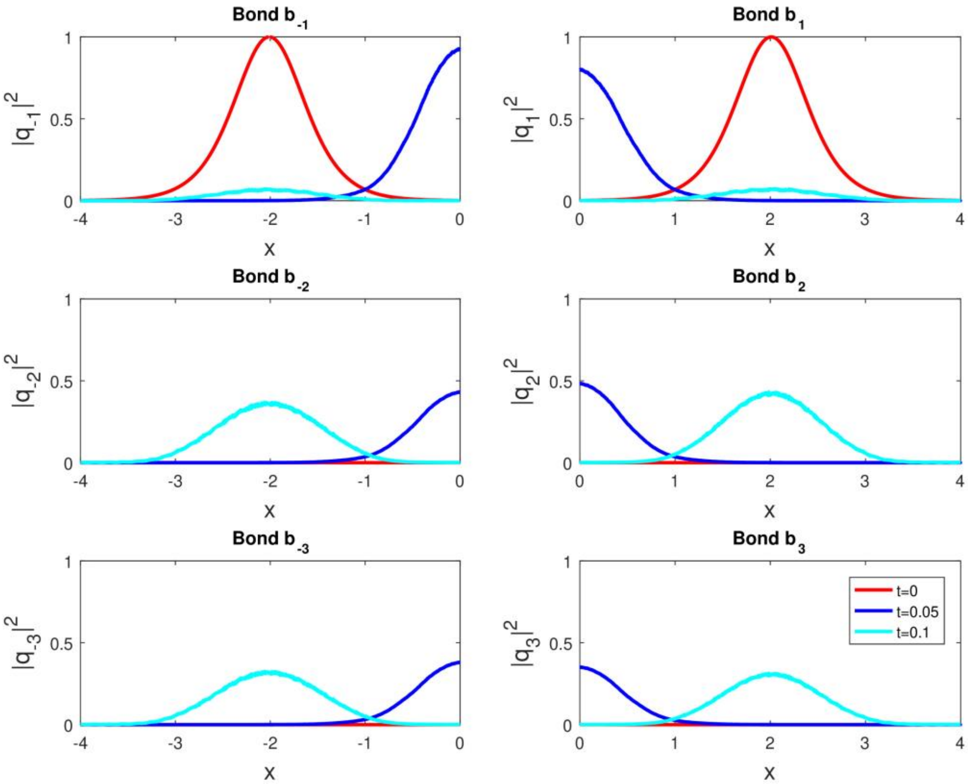


Рис. 4. Профиль солитона на метрическом звездном графе, полученный численным решением ННУШ для значений параметров нелинейности ($\beta_{-1} = 0.65,\ \beta_1 = 0.79,\ \beta_{-2} = 2.7,\ \beta_2 = 2.09,\ \beta_{-3} = 3.06,\ \beta_3 = 2.87$). Начальные условия заданы на ветвях b_{-1} и b_1.

$$C_2 = \sum_j^3 \left[\begin{array}{l} \int_{b_j} \left[\partial_x q_j(x,t) \partial_x q_{-j}^*(-x,t) - \frac{\sqrt{\beta_j \beta_{-j}}}{2} q_j^2(x,t) q_{-j}^{*2}(-x,t) \right] dx \\ + \int_{b_{-j}} \left[\partial_x q_{-j}(x,t) \partial_x q_j^*(-x,t) - \frac{\sqrt{\beta_j \beta_{-j}}}{2} q_{-j}^2(x,t) q_j^{*2}(-x,t) \right] dx \end{array} \right] \tag{34}$$

Сохранение энергии, $\dot{C}_2 = 0$ приводит к

$$\sum_{j=1}^3 \mathrm{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} q_j(x,t) \cdot \partial_t q_{-j}^*(-x,t) \right] \Bigg|_{x \to +0} = \sum_{j=1}^3 \mathrm{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} q_{-j}(x,t) \cdot \partial_t q_j^*(-x,t) \right] \Bigg|_{x \to -0}. \tag{35}$$

Данные выражения приводят к следующим граничным условиям на узле::

$$\alpha_1 q_1(x,t)|_{x=0} = \alpha_{-1} q_{-1}(x,t)|_{x=0} = \alpha_2 q_2(x,t)|_{x=0} =$$

$$\alpha_{-2}q_{-2}(x,t)|_{x=0} = \alpha_3 q_3(x,t)|_{x=0} = \alpha_{-3}q_{-3}(x,t)|_{x=0},$$
$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial x}q_1(x,t)|_{x=0} + \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial x}q_2(x,t)|_{x=0} + \frac{1}{\alpha_3}\frac{\partial}{\partial x}q_3(x,t)|_{x=0} =$$
$$\frac{1}{\alpha_{-1}}\frac{\partial}{\partial x}q_{-1}(x,t)|_{x=0} + \frac{1}{\alpha_{-2}}\frac{\partial}{\partial x}q_{-2}(x,t)|_{x=0} + \frac{1}{\alpha_{-3}}\frac{\partial}{\partial x}q_{-3}(x,t)|_{x=0}$$

Пусть $q(x,t)$ −решение нелокального нелинейного уравнения Шредингера, заданное формулой

$$i\frac{\partial}{\partial t}q(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x,t) + 2q^2(x,t)q^*(-x,t). \tag{36}$$

Тогда решение уравнений может быть выражено через $q(x,t)$ как $q_{\pm j}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\beta_{\pm j}}}q(x,t)$ и удовлетворяет граничным условиям, если выполняются следующее правило сумм:

$$\frac{\alpha_{\pm j}}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{\beta_{\pm j}}{\beta_1}}, \quad \frac{1}{\beta_{-1}} + \frac{1}{\beta_{-2}} + \frac{1}{\beta_{-3}} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3}. \tag{37}$$

Одно из солитонных решений ННУШ на графе, удовлетворяющих граничным условиям а узле может быть записано как

$$q_{\pm j}(x,t) = -\sqrt{\frac{2}{\beta_{\pm j}}}\frac{4\eta e^{i\bar{\varphi}}e^{-4i\eta^2 t}e^{-2\eta x}}{1 + e^{i(\varphi+\bar{\varphi})}e^{-4\eta x}}, \tag{38}$$

где $\varphi,\ \bar{\varphi}$ и η.

На Рис. 3 представлены профили солитонных решений $\left|q_{\pm j}(x,t)\right|^2$, полученные путем численного решения ННУШ на графе для различных моментов времени $t = 0$; 0.05; 0.1 при значениях $\beta_{\pm j}$, удовлетворяющих правилу сумм в уравнении. Замечательной особенностью бегущих солитонов является безотражательное прохождение через вершину. На Рис. 4 представлены аналогичные графики для тех значений $\beta_{\pm j}$, которые не удовлетворяют правилу сумм. В отличие от солитонов, представленных на Рис. 3, на этом графике можно наблюдать отражение в вершине. Таким образом, можно сделать вывод, что интегрируемый случай обеспечивает безотражательное прохождение солитонов через точку ветвления графа. Ранее такая особенность наблюдалась для других эволюционных уравнений на графах, таких как НУШ, уравнение синус-Гордона и нелинейное уравнение Дирака.

Другой задачей, рассмотренной на занной главе, является задача о генерации PT-симметричных солитонов на разветвленных оптических волокнах, описываемых ННУШ на метрических графах. В частности, для количества генерируемых солитонов получена следующая формула:

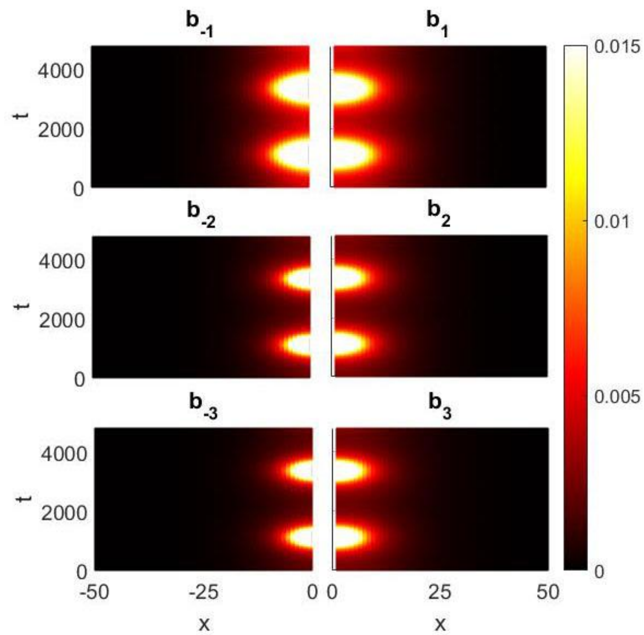


Рис. 5. Двухмерный контурный график решения ДННУШ на метрическом звездном графе, заданном уравнением (41). Значения коэффициентов нелинейности выбраны как $\beta_{-1} = 1,\ \beta_1 = 1.15,\ \beta_{-2} = 2.19,\ \beta_2 = 1.92,$ $\beta_{-3} = 2.42,\ \beta_3 = 2.09.$

$$F_{\pm j} = \sqrt{\frac{\beta_{\pm j}}{2}} \int_{b_{\pm j}} \left|q_{\pm j}(x,0)\right| dx = \frac{ab}{2},$$

$$N = 6\left\langle \frac{1}{2} + \frac{ab}{2\pi} \right\rangle.$$

Четвертая глава диссертации посвящена разработке модели разсетвленных PT-симметричных дискретных структур, описываемых в терминах дискретного нелокального нелинейного уравнения Шредингера (ДННУШ). Простейший граф, на котором может быть рассмотрена такая задача, имеет шесть дискретных связей, соединенных в один узел и называемый звездным графом. Он представляет собой разветвленную одномерную решетку с шестью рукавами. Отдельные узлы решетки на графике обозначены как $(\pm j, n)$, где $j = 1,2,3$ — номер связи, а n соответствует узлу решетки на каждой связи. Для левых $(-j)$ связей $n \in b_{-j} = \{0, -1, -2, \dots\}$, где $(-j, 0)$ означает точку ветвления. Для правых (j) связей $n \in b_j = \{1,2,3, \dots\}$, где $(j, 1)$ обозначают ближайшие к вершине точки.

Здесь мы рассматриваем следующее ДННУШ для каждой ветви звездообразного графа:

$$i\frac{dQ_{\pm j,n}}{dt} = Q_{\pm j,n+1} - 2Q_{\pm j,n} + Q_{\pm j,n-1} + \sqrt{\beta_j\beta_{-j}}Q_{\pm j,n}Q^*_{\mp j,-n}(Q_{\pm j,n+1} + Q_{\pm j,n-1}), \tag{39}$$

где $\beta_{\pm j}$ — коэффициенты нелинейности и $(\pm j, n) \notin \{(-j,0),(j,1)\}$. Накладываем граничные условия на узлах могут быть записаны как

$$Q_{-j,1} = \alpha_1^{(-j)}Q_{1,1} + \alpha_2^{(-j)}Q_{2,1} + \alpha_3^{(-j)}Q_{3,1}, \quad Q_{j,0} = \alpha_{-1}^{(j)}Q_{-1,0} + \alpha_{-2}^{(j)}Q_{-2,0} + \alpha_{-3}^{(j)}Q_{-3,0} \tag{40}$$

соответствующими коэффициентами, $\alpha_{\pm j}^{(\pm j)}$.

Солитонное решение ДННУШ на звездобразном графе, представленном на Рис. 5, имеет вид

$$Q_{\pm j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta_{\pm j}}}Q_n(t), \tag{41}$$

где $Q_n(t)$ — солитонное решение ДННУШ на дискретной прямой (т. е., на бесконечной цепи). Оно является решением ДННУШ на графе при условии, что коэффициенты нелинейности $\beta_{\pm j}$, удовлетворяют условию:

в (40), можно получить следующие «квазиграничные» условия в вершине:

Этим квазиграничным условиям удовлетворяют решения (41) при условии, что коэффициенты нелинейности $\beta_{\pm j}$ удовлетворяют соотношением

$$\frac{1}{\beta_{-1}} + \frac{1}{\beta_{-2}} + \frac{1}{\beta_{-3}} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3}. \tag{42}$$

Решение, заданное уравнением (41), представляет собой солитонное решение уравнения (39), которое удовлетворяет вершинным граничным условиям при условии, что ограничения, заданные уравнением (42), действительны. Другими словами, явное солитонное решение задачи может быть записано только для тех значений $\beta_{\pm j}$, которые удовлетворяют правилу сумм в уравнении (42). В общем случае, когда правило сумм не выполняется, необходимо решить уравнение (39) численно. На Рис. 5 представлен контур (дышащего) солитонного решения уравнения (39) для квазиграничных условий. График получен по аналитической формуле (41) для значений параметров $\beta_{-1} = 1$, $\beta_1 = 1.15$, $\beta_{-2} = 2.19$, $\beta_2 = 1.92$, $\beta_{-3} = 2.42$, $\beta_3 = 2.09$, которые удовлетворяют правилу сумм (42).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертация посвящена решению задачи транспортировки солитонов и их генерации в метрических графах. На основе проведенных в диссертационной работе исследований представлены следующие выводы:

1) Количество солитонов генерируемых оптическим импульсом на сети оптических волокон зависит от начального профиля импульса;

2) PT-симметричное нелокальное нелинейное уравнение Шредингера на графах является интегрируемой и допускает солитонные решения;
3) В интегрируемом случае, переход PT-симметричных солитонов через узлы графа является безотражательным;
4) PT-симметричное дискретное нелокальное нелинейное уравнение Шредингера на графах является интегрируемой и допускает солитонные решения;
5) Для генерации солитонов PT-симметричных солитонов, описываемых нелокальным нелинейным уравнение Шредингера на графах, необходимо наличие начального двух оптических импульсов.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/31.03.2022 T/FM.10.04 AT INSTITUTE OF FUNDAMENTAL AND APPLIES RESEARCH UNDER “TIAMEE” NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

AKRAMOV MASHRAB ERGASHALI UGLI

MODELING THE GENERATION AND TUNABLE DYNAMICS OF SOLITONS IN OPTICAL WAVEGUIDE NETWORKS

01.04.02 – Theoretical physics
05.01.07 – Mathematical modeling. Numerical methods and complex programming

DOCTOR OF PHILOSOPHY IN PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES (PhD)
ABSTRACT OF THE DISSERTATION

Tashkent – 2023

The theme of dissertation of the doctor of philosophy (PhD) on technical sciences was registered by Supreme Attestation Commission of the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under B2023.2.PhD/FM860.

The doctoral (PhD) dissertation was carried out at the National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation was posted in three (Uzbek, Russian, English (resume)) languages on the website of the Scientific Council (www.ifar.uz) and on the information and education portal at "Ziyonet" (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Matrasulov Davron Urunovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Ganjaboy Boltaev** Doctor of physical and mathematical sciences **Boris Malomed** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Leading organization:	**Samarkand State University**

The defense of the dissertation will be held on July 1, 2023 at 4 p.m. in the meeting of the Scientific Council No. DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 at the Institute of Fundamental and Applied Research under the National Research University "TIIAME" (Address: 100000, Tashkent city, Qori Niyazov Street 39, Institute of Fundamental and Applied Research, Hall 108; tel.: 71 237-09-61.; e-mail: info@ifar.uz

The doctoral (PhD) dissertation can be looked through at the Information Resource Center of the Institute of Fundamental and Applied Research under the National Research University "TIIAME" (registered under No. __). (Address: 100000, Tashkent city, 39 Qori Niyazov str., Institute of Fundamental and Applied Research, Hall 108; Ph.: 71 237-09-61

The Abstract of the dissertation was distributed on _______________, 2023.

(Registry record No. 8 dated of July 1, 2023)

B.J. Ahmedov.
Chairman of the Scientific Council on Awarding of Scientific Degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

E.Kh. Karimbaev
Scientific Secretary of the Scientific Council on Award Scientific Degrees, Doctor of Philosophy in Physical and Mathematical Sciences.

B.M. Narzilloev
Chairman of the Scientific Seminar of the Scientific Council on Award Scientific Degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher.

INTRODUCTION (abstract of a PhD dissertation)

Purpose of research. The purpose of this dissertation work is to study the generation and propagation of solitons in optical fiber networks by modeling the soliton dynamics by nonlinear evolution equations on graphs. Also, a separate goal is to develop methods of tunable generation and transport of solitons in networks of optical waveguides.

Object of research. Solitons generated in optical fiber networks, PT-symmetric solitons, solitons in discrete branched structures.

Scientific novelty of the research. Scientific novelty of the research is provided by the fact that for the first time the problem of soliton generation in network-like structures was solved, the analytical formula for calculating the number of generated solitons for a given initial pulse profile was obtained, soliton solutions of PT-symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger equation on metric graphs were obtained, soliton solutions of discrete nonlocal nonlinear Schrödinger equation were obtained.

Implementation of the research results. The results of the thesis were implemented within the framework of several international and domestic scientific grants, such as "Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology" (HORIZON2020, European Union Funding for Research and Innovation), a joint grant of the Ministry of Innovative Development of Republic of Uzbekistan and TUBITAK (Ref. Nr. MRT-2130213155 & 221N123), as well as the fundamental grant of the Ministry of Innovative Development of Uzbekistan "Kichik o'lchamli nanostrukturalarda boshqariladigan kvant tashish: tarmoqli kvant-funksional materiallarni modellashtirish va loyihalash" (Nr/ FZ-5821512021).

Structure and volume of the dissertation. The structure of the dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion, a list of references, and appendices. The volume of the thesis is 129 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
I bo‘lim (Part I; Часть I)

1. Akramov M., Khashimova F., Matrasulov D. Discrete nonlocal nonlinear Schrödinger equation on graphs: Dynamics of PT-symmetric solitons in discrete networks // Physics Letters A, **457**, 128555, 2023 (Web of Science, Scopus, IF=2.7). – P. 8.
2. Akramov M., Sabirov K., Matrasulov D., Susanto H., Usanov S., Karpova O. Nonlocal nonlinear Schrödinger equation on metric graphs: A model for generation and transport of parity-time-symmetric nonlocal solitons in networks // Physical Review E, **105,** 054205, 2022 (Web of Science, Scopus, IF=2.7). – P. 10.
3. Sabirov K.K., Akramov M.E., Otajonov R.Sh., Matrasulov D.U. Soliton generation in branched optical fiber networks // Chaos, Solitons and Fractals, **133**, 109636, 2020 (Web of Science, Scopus, IF=9.9). – P. 6.
4. Akramov M.E., Sabirov K.K. and Karpova O.V. Second Harmonic Generation in branched waveguides // Scientific Bulletin of NamSU **3**, 2022. – P. 24-29.

II bo‘lim (Part II; Часть II)

5. Akramov M., Matrasulov D. Dynamics of PT-symmetric solitons in discrete networks // “Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muammolari” mavzusidagi konferensiya meteriallari to‘plami. Buxoro Davlat Universiteti. – Buxoro, 2022. 11-12-may. – B. 139.
6. Akramov M.E. Reflectionless propagation of nonlocal solitons // “Fizikaning rivojida iste’dodli yoshlarning o‘rni (RIAK XV) konferensiya materiallari to‘plami. O‘zbekiston Milliy Universiteti. – Toshkent, 2022. – B. 6-7.
7. Akramov M.E., Usanov S.M., Sabirov K.K., Karpova O.V. Optical Second-Harmonic generation in branched waveguides // Proceedings of the symposium of Physicists of Tajikistan. – Tajikistan, 2021. – P. 186-192.
8. Akramov M.E. Tarmoqlangan metamateriallarda magnit solitonlar // “Fizikaning rivojida fundamental-innovatsion tadqiqotlar va uning istiqbollari” nomli konferensiya materiallari to‘plami. O‘zbekiston Milliy universiteti. – Toshkent, 2021. – B. 20-21.
9. Sabirov K., Matrasulov D., Akramov M., Susanto H. Dynamics of nonlocal solitons on graphs // “Fizikaning rivojida fundamental-innovatsion tadqiqotlar va uning istiqbollari” nomli konferensiya materiallari to‘plami. O‘zbekiston Milliy universiteti. – Toshkent, 2021. – B. 22-24.

10. Sabirov K.K., Akramov M.E., Otajonov R.Sh., Matrasulov D.U. Soliton generation in branched optical waveguides // Actual problems of applied mathematics and information technologies. – Tashkent, 2019. November 14-15. – P. 50-51.