O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SAYFULLAYEVA MAFTUXA ZAFRULLAYEVNA

BIOLOGIK POPULYATSIYA MASALASINI NODIVERGENT NOCHIZIQLI PARABOLIK TENGLAMA ORQALI SONLI MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2023

UDK: 519.957

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SAYFULLAYEVA MAFTUXA ZAFRULLAYEVNA

BIOLOGIK POPULYATSIYA MASALASINI NODIVERGENT NOCHIZIQLI PARABOLIK TENGLAMA ORQALI SONLI MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2018.1.PhD/T589.

The dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz.)

Scintific superviser:	**Aripov Mersaid Mirsiddiqovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Ganixujayev Rasul Nabiyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Muhamediyeva Dildora Kabilovna Doctor of Technical Sciences
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place "12" 07 2023 at 15 30 at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.T.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resourse centre at National University of Uzbekistan (is registered №98). (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "21" 06 2023 year
(Mailing report № 1 on "05" 06 2023 year)

R.D.Aloyev
Deputy chairman of Scientific Council awarding scientific degrees, d.ph.-m.s., professor

Z. R. Rakhmonov
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, d.ph.-m.s.

B.F.Abduraximov
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award scientific degrees, d.ph.-m.s., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar natijasida vujudga keladigan muammolar turli jarayonlarning nochiziqli matematik modellarini tadqiq qilishga olib kelinadi. Bunday modellarning asosini parabolik tipidagi nochiziqli nodivergent holidagi differensial tenglamalar tashkil etadi. Biologik populyatsiya jarayonlarini tadqiq qilishda sonli parametrlarning keng diapazonida jarayonning kechishini tasvirlovchi nochiziqli modellarni ishlab chiqish amaliy matematika va matematik modellashtirish kabi sohalardagi tadqiqotlarning obyektidir. Nochiziqli matematik modellarning sifat xossalarini tadqiq etish, sonli yechish sxemalari, yechish usullari, algoritmlar va dasturiy ta’minotini yaratish ilmiy tadqiqotlarning muhim vazifalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda nochiziqli nodivergent parabolik tenglamalar bilan tasvirlangan matematik modellarning turli yangi xususiyatlarini manba, yutilish, o‘zgaruvchan zichlik va tezligi vaqtga bog‘liq bo‘lgan konvektiv ko‘chish ta’sirida populyatsiya tarqalish tezligining chekliligi, fazoviy lokallashishi, populyatsiyaning yo‘qolishi va boshqa yangi sifat xossalarini o‘rganish dolzarbdir. Nochiziqli biologik populyatsiya masalalarida ularni ifodalovchi parabolik tenglamalarning buziluvchanligi sababli, sonli yechishga alohida yondashuvni talab qiladi va yechimlarning dinamik o‘zgarishini aniqlovchi kompyuterlashtirilgan tizimini ishlab chiqish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy hamda amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan matematik fizika va mexanika sohalaridagi masalalarning sonli hamda analitik yechish usullarini ishlab chiqish kabi dolzarb yo‘nalishlarga katta e’tibor qaratilmoqda. Xususan, nodivergent parabolik tenglamalar bilan tasvirlangan nochiziqli biologik populyatsiya masalalarini matematik modellashtirish va samarali taqribiy yechish usullarini ishlab chiqishda muayyan natijalarga erishildi. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kabi ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish O‘zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda respublikamizdagi ilmiy tadqiqotlarning, xususan, texnologik jarayonlarni avtomatlashtirish va sonli usullardan foydalanish sohasidagi olib borilayotgan tadqiqotlar muhim ahamiyatga ega.

Ushbu dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Respublikasidagi oliy ta’lim tizimini isloh qilishning ustuvor yo‘nalishlarini belgilash, mustaqil fikrlovchi, zamonaviy bilimlar va yuksak ma’naviy-axloqiy sifatlarga ega yuqori malakali kadrlarni tayyorlash jarayonini sifat jihatidan yangi darajaga ko‘tarish, oliy ta’limni modernizatsiya qilish, ilg‘or ta’lim texnologiyalari asosida ijtimoiy sohani va iqtisodiyot tarmoqlarini rivojlantirish maqsadiga ega bo‘lgan O‘zbekiston Respublikasi

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli qarori.

Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PQ-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi, 2017-yil 17-fevraldagi PQ-2789-sonli “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2019-yil 8-oktabrdagi PQ-5847-sonli “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi qarorlari belgilangan masalalarni, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning ta’lim va fan sohalari vakillari bilan 2019-yil 24-may kuni O‘zbekiston Milliy universitetida bo‘lib o‘tgan uchrashuvida bergan ko‘rsatmalari hamda mazkur faoliyat bilan bog‘liq boshqa huquqiy-me’yoriy hujjatlarda belgilangan vazifalarni bajarishda muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Dissertatsiya O‘zbekiston Respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Nochiziqli nodivergent parabolik tenglama bilan tasvirlanuvchi jarayonlarning matematik modelini o‘rganish natijasida populyatsiya tarqalishining rivojlanish dinamikasi ilk bor N.V.Belotelov tomonidan ko‘rib chiqilgan. Keyinchalik O.A.Oleynik, A.S.Kalashnikovlarning ishlarida, shuningdek, A.A.Samarskiy, B.Knerr va boshqalarning ilmiy ishlarida tadqiq qilingan. Nochiziqli chegaraviy masalalarni hal qilish doimo katta qiyinchiliklar bilan birga kechadi, chunki ularni tahliliy jihatdan faqat kamdan-kam holatlarda hal qilish mumkin, yechimlarning yangi xossalarini belgilash uchun esa o‘ta chuqur tadqiqotlar zarur. Shuning uchun yechim xossalarini o‘rganish uchun turli aniq va taqribiy usullarga murojaat qilishga to‘g‘ri keladi. A.A.Samarskiy, S.P.Kurdyumov, V.A.Galaktionov, A.S.Kalashnikov, L.K.Martinson, R.Kershner, G.I.Barenblatt, B.F.Knerr, Chen Sinfu, Yu.V.Si, Chon-Shengo, Kombe Ismail, Kusano Takasi, Tomoyuki Tanigava, S.N.Dimova, M.Aripov, A.T.Xaydarov, Sh.A.Sa’dullayeva, F.A.Kabiljanova, Z.R.Rahmonov va boshqalarning ishlarida parametrlarning muayyan qiymatlariga mos keluvchi avtomodel yechimlar muhim rol o‘ynashini ko‘rsatildi.

O‘zbekistonda turli jarayonlarni tasvirlovchi parabolik turdagi nochiziqli chegaraviy masalalarni avtomodel yoki taqribiy avtomodel yondoshuv asosida sonli analitik tadqiq qilish M.Aripov, A.Xaydarov, Sh.Sadullayeva, A.Matyakubov, J.Muxammadiyev, D.Muxamediyeva, F.Kabiljanova, Z.Rahmonov va boshqa olimlarning ishlarida keltirilgan avtomodel yondashuvlar muhim rol o‘ynashi asoslangan.

Nochiziqli masalalar yechimini tadqiq qilishning keng tarqalgan usullaridan biri, nochiziqli parabolik tenglamalar yechimlarining xossalarini o‘rganish imkoniyatini kengaytiradigan, yechimlarni taqqoslash usulidir. Chunki biologiya, kimyo, fizika, mexanika, sotsiologiyadagi nochiziqli jarayonlarni tasvirlovchi parabolik tenglamaning aniq yechimini topishga nisbatan unga mos keluvchi differensial tengsizlikning yechimini topish osonroq kechadi. Tadqiqotning samarali usullaridan biri nochiziqli parchalash usuli va etalon tenglamalar usuli bilan avtomodel yechimlarni topishdir.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Milliy universiteti ilmiy tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq № OT-F4-30 “Konvektiv ko‘chishga, o‘zgaruvchan zichlikka, manba yoki yutilishga ega ikki karra nochiziqli kross-sistema yechimlarining xususiyatlarini o‘rganish” ilmiy tadqiqot loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi o‘zgaruvchan zichlik, tezligi vaqtga bog‘liq bo‘lgan konvektiv ko‘chish, manba va yutilish ta’sirida nodivergent ko‘rinishdagi ikki karra nochiziqli parabolik tipdagi tenglamalar bilan ifodalanuvchi nochiziqli muhitda biologik populyatsiya jarayonlarining matematik modellarini ishlab chiqish, sonli-analitik tadqiq qilish usullari, algoritmlari va dasturlar majmuini ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

ikki karra nochiziqli divergent holidagi parabolik tenglama bilan tasvirlangan biologik populyatsiya jarayonlarining konvektiv ko‘chish, nochiziqli manba yoki yutilish ta’sirida nochiziqli muhitda yangi effektlarni aniqlash;

ikki karra nochiziqli nodivergent holidagi parabolik tenglamalar bilan tasvirlangan biologik populyatsiya jarayonlarining konvektiv ko‘chish, nochiziqli manba yoki yutilish ta’sirida matematik modellarining sifat xossalarini o‘rnatish va asoslash;

o‘zgaruvchan zichlikka ega bo‘lgan muhitda ikki karra nochiziqli parabolik tenglama bilan tasvirlangan biologik populyatsiya jarayonlarining matematik modelini sonli yechimlarini qurish;

nodivergent buziluvchan parabolik tenglamalar bilan ifodalangan kuchli yutilish va zichlik ta’siri ostida biologik populyatsiya, virus tarqalishi jarayonlarida aniq yechim topish, yangi nochiziqli effektlarni aniqlash va yechim baholarini olish;

konvektiv ko‘chish, o‘zgaruvchan zichlik, nochiziqli manba yoki yutilish ta’sirini hisobga olgan holda ikki karra nochiziqli divergent va nodivergent parabolik tenglamalar bilan tasvirlangan nochiziqli masalalarni sonli yechish uchun sonli sxemalar, yechish usullari va algoritmlarini ishlab chiqish.

Tadqiqotning obyekti sifatida konvektiv ko‘chish va o‘zgaruvchan zichlik ta’siri ostida ikki karra nochiziqli divergent hamda nodivergent holidagi parabolik tenglamalar bilan tasvirlangan biologik populyatsiya va virus tarqalishi jarayonlari olingan.

Tadqiqotning predmeti. Konvektiv ko‘chish va o‘zgaruvchan zichlikni hisobga olgan holda divergent hamda nodivergent parabolik tenglamalar bilan tasvirlangan nochiziqli matematik modellarning yangi sifat xossalarini o‘rganish; ba’zi aniq yechimlarni qurish, yechim va front baholarini olish; sonli sxemalar, yechish usullari, algoritmlarini va boshlang‘ich yaqinlashishni topish usullarini ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqotning usullari. Mazkur ishda nochiziqli parchalash algoritmi, etalon tenglamalar usullari, iteratsiya va haydash usullari, yechimlarni taqqoslash usuli, avtomodel yoki taqribiy avtomodel va asimptotik usullardan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

konvektiv ko‘chish, nochiziqli kuchli yutilishga ega ikki karra nochiziqli divergent turdagi biologik populyatsiya tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimlari taqqoslash prinsipi asosida topilgan va front baholari olingan;

o‘zgaruvchan zichlikka ega biologik populyatsiya masalasi uchun Fujita tipidagi global yechimga ega bo‘lish shartlari, to‘lqin tarqalish ko‘rinishidagi yechim tezligini baholash, umumlashgan yechimlar va front baholari kabi nochiziqli matematik modelning sifat xossalari asoslangan;

biologik populyatsiya tarqalishi tezligining chekliligi, fazoviy lokallashishi va populyatsiyaning cheklangan vaqt ichida yo‘q bo‘lishi kabi nochiziqli effektlari taqqoslash prinsipi hamda chiziqsiz ajratish usullari yordamida aniqlangan;

biologik populyatsiya jarayonida kritik va ikki karrali kritik holatlarda o‘zgaruvchan zichlikka ega masalalar uchun aniq umumlashgan yechimlar topilgan, virus tarqalishi masalasining yechimi bahosi olingan va sonli tadqiq etish uchun algoritm, hisoblash sxemasi va yechish usuli taklif etilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari:

biologik populyatsiya nochiziqli parabolik tenglamalarini sonli yechish uchun iteratsion jarayon ishlab chiqilgan;

nochiziqli parabolik tenglamalar bilan tavsiflangan nochiziqli jarayonlar evolyutsiyasini vizual ravishda kuzatishga imkon beradigan dasturiy kompleks yaratilgan;

biologik populyatsiya jarayonining nochiziqli matematik modellari bilan bog‘liq, cheklangan vaqt ichida virus tarqalishi chekli tezligining yangi nochiziqli ta’siri o‘rnatilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Tadqiqot natijalarining ishonchliligi qat’iy isbotlangan teoremalar bilan izohlanadi. Topilgan yechimlar va erkin chegaralar hamda asimptotik formulalarda keltirilgan baholardan foydalanib, sonli tahlil qilindi. Bu tahlil natijalari ilmiy ishda qo‘llanilgan differensial tenglamalarni yechish usullari va chiziqsiz effektlarni saqlagan holda avtomodel tahlilni qo‘llash uslubining ishonchliligi hamda samaradorligini tasdiqlaydi. Dissertatsiyada olingan ilmiy natijalarning ishonchliligi hisoblash tajribasi texnologiyasi yordamida asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Mazkur tadqiqotda qo‘llanilgan yondashuv yetarli darajada universal hisoblanadi va biologik populyatsiya masalasida konvektiv ko‘chish tezligi vaqtga bog‘liq bo‘lgan, ikki karra nochiziqli parabolik tenglamalar bilan ifodalangan jarayonlarni matematik modellashtirishda va matematik fizika tenglamalari nazariyasini rivojlantirishga o‘z hissasini qo‘shadi.

Olingan natijalarning amaliy ahamiyati shundan iboratki, ularni nochiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik, filtratsiya va diffuziya, biologik populyatsiya va viruslarning tarqalishi jarayonlarining matematik modellashtirilishiga nisbatan qo‘llash mumkinligidir hamda ulardan matematik modellashtirishning boshqa nochiziqli masalalarini hal qilishda qo‘llanilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan muhitda ishlab chiqilgan sonli sxemalar va tadqiqot usullari asosida:

nodivergent ko‘rinishdagi parabolik tenglama bilan ifodalanuvchi nochiziqli

Koshi masalasini yechish uchun nochiziqli parchalash algoritmi asosida olingan avtomodel va taqribiy avtomodel yechimlari, bunday masalalarni global yechimi uchun olingan baho, o‘zgaruvchan zichlikka ega biologik populyatsiya masalasi uchun global yechimga ega bo‘lish shartlari, to‘lqin tarqalish tezligini baholash, umumlashgan yechimlar va front baholari kabi nochiziqli nodivergent parabolik tenglamalarini yechish uchun ishlab chiqilgan dasturiy mahsulotidan BV-M-F4-004 “Funksional jadvallar algebrasi asosida murakkab tizimlar boshqarishini algoritmlashtirish prinsiplarini ishlab chiqish” mavzusidagi fundamental loyiha doirasida parabolik tipdagi nochiziqli tenglamalarni sonli yechishda foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020-yil 15-dekabrdagi 89-03-5280-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, nodivergent ko‘rinishdagi parabolik tenglama bilan ifodalanuvchi nochiziqli Koshi masalasini yechishda taklif etilgan hisoblash sxemasi samarali ekanligini asoslash imkonini bergan;

kuchli yutilish ta’sirida nodivergent ko‘rinishdagi parabolik tenglama bilan ifodalanuvchi nochiziqli Koshi masalasini yechishda taklif etilgan hisoblash sxemasi BV-Atex-2018(399+487) “Ikki komponentli muhitda diffuzion jarayonlarni sonli modellashtirish uchun amaliy dasturlar paketini yaratish” mavzusidagi fundamental loyiha doirasida parabolik tipidagi nochiziqli nodivergent masalalarning yechimlari dinamikasini vizuallashtirishda foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2021-yil 5-fevraldagi 89-03-681-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarni qo‘llash turli xil muhitlarda nodivergent ko‘rinishdagi parabolik tenglama bilan ifodalanuvchi nochiziqli Koshi masalasining umumlashgan yechimlarni sonli yechish va tahlil qilishga xizmat qilgan.

Tadqiqot natijalarining aprobasiyasi. Mazkur tadqiqot ishi natijalari 13 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 10 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Tadqiqot mavzusi bo‘yicha jami 20 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestasiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta maqola, jumladan, 4 tasi xorijiy (3 ta Scopus) va 3 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan. Shuningdek, EHM uchun yaratilgan dasturning rasmiy ro‘yxatdan o‘tkazilganligi to‘g‘risida 2 ta mualliflik guvohnomasi olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 101 betdan tashkil topgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, respublika ilm va texnikasi rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlari kartografik tadqiqoti keltirilgan, muammoning o‘rganilganlik darjasi berilgan, tadqiqotning maqsadi, masalalari, obyekti va predmeti tasvirlangan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy etilganligi hamda nashr etilgan maqolalar va dissertasiyaning tuzilishi to‘g‘risidagi ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Nochiziqli biologik populyatsiya jarayonlarining matematik modeli”** deb nomlangan birinchi bobida masalaning qo‘yilishi tahlil qilingan, shuningdek, dissertatsiya mavzusiga tegishli tadqiqotning qisqacha sharhi, shuningdek, natijalarni kelgusida bayon qilish uchun zarur bo‘lgan ayrim yordamchi tasdiqlar va ta’riflar keltirilgan.

Mazkur bobda quyidagi nodivergent ko‘rinishdagi kvazichiziqli parabolik tenglama Koshi masalasi

$$Lu = -u_t + u^n \nabla\left(u^{m-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right) + div(v(t)u) + \gamma(t)u + \varepsilon b(t)u^q = 0 \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \ge 0, \quad x \in R^N \qquad (2)$$

umumlashgan yechimlarining xossalari ko‘rib chiqilgan. Bu yerda n, m, k, p – nochiziqli muhitdagi musbat haqiqiy sonlar, $u = u(t,x) \ge 0$, $t > 0$ vaqtdagi $x \in R^N$ nuqtada populyatsiya zichligi, $v(t)$ – konvektiv ko‘chish tezligi, $\gamma(t)$ – populyatsiyaning chiziqli o‘sish koeffitsiyenti, $b(t)u^q$ – populyatsiyaning o‘sish quvvati $(\varepsilon = +1)$ yoki yo‘qolib ketish holati $(\varepsilon = -1)$; $u_0(x)$ – boshlang‘ich vaqtdagi populyatsiya zichligi.

(1) tenglama uchun $Q = \{(t,x) : t > 0, x \in R^N\}$ sohada Koshi masalasi ko‘rilgan.

1.1-paragrafda kuchli yutilishga ega bo‘lgan biologic populyatsiya tenglamasi tadqiqotining ayrim natijalari keltirilgan.

1.2-paragrafda ishda qo‘llanilgan yordamchi tasdiqlar, ta’riflar va yechimlarining solishtirish teoremasi berilgan.

1.3-paragrafda quyidagi Kolmogorov Fisher tipidagi biologik populyatsiya nochiziqli modelining

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = u^n \nabla\left(u^{m-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right) + \gamma u\left(1 - u^\beta\right), \\ u\big|_{t=0} = u_0(x) \ge 0, \; x \in R\end{gathered} \qquad (3)$$

xossalari o‘rganilgan. Bu yerda $n, m, k \ge 1, p > 2, \beta > 0$ – berilgan sonli parametrlar, $u = u(t,x) \ge 0$ – izlanayotgan yechim, bu yerda $u(t,x)$, $t > 0$ vaqtda $x \in R$ nuqtadagi muhitning populyatsiya zichligi.

(3) masala yechimlarining turli sifat xossalarini tadqiq qilish $m = 1,\ p = 2,\ \beta = 1,\ n = 0$ holida diploid populyatsiyadagi maqbul genning tarqalishi stoxastik modelining deterministik versiyasi sifatida Fisher tomonidan taklif etilgan edi, bundan oldinroq boshqa mualliflar tomonidan $\gamma(t) = 1,\ p=2$ yoki $m = 1, n = 0$ bo‘lgandagi tenglamaning sonli yechimi ham taklif etilgan.

Dissertatsiyaning **“Konvektiv ko‘chish ta’siri ostida biologik populyatsiya jarayonini matematik modellashtirish”** deb nomlangan ikkinchi bobida $q > 1$ holida va kuchli yutilish holi $(0 < q < 1)$ uchun yechim mavjudligining global shartlari, fizik ma’noga ega umumlashgan yechimlar va erkin chegara uchun baholar olingan. Bunda $q = 1$ bo‘lganda, vaqtga bog‘liq bo‘lgan konvektiv ko‘chish tezligi, fazoviy lokalizatsiya nochiziqli effektlariga va erkin chegara uchun “devor” hodisasiga olib kelishi ko‘rsatib berilgan.

Nochiziqli muhitning sonli parametrlari qiymatiga qarab populyatsiya taqsimotining fazoviy lokalizatsiyasi masalasi ko‘rib chiqilgan.

2.1. paragrafda nochizqli nodivergent ko‘rinishdagi Koshi masalasining global hal qilinishi masalalari hamda masala yechimining sifat xossalari tadqiq qilingan, aniq yechim topilgan, yechimning chekli tezlikka ega bo‘lishi va lokallashish sharti olingan. Tenglama parametrlarining turli qiymatlari uchun vizualizatsiyaga ega bo‘lgan sonli eksperimentlar o‘tkazilgan. Jarayonlarni tasvirlovchi matematik modelni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^n \nabla\left(u^{m-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right) + div(v(t)u) - b(t)u^q, \qquad (4)$$
$$u(0,x) = u_0(x),\ (t>0, x\in R^N)$$

bu yerda n,m,k,p – musbat xaqiqiy sonlar, $u = u(t,x) \ge 0$ – izlanayotgan yechim, bu yerda $u(t,x) - x\in R^N$ nuqtada $t>0$ vaqtdagi populyatsiya zichligi.

$$q = \frac{p-[k(p-2)+n+m-1]}{p-1} \qquad (5)$$

bo‘lganda, (4) masalani radial-simmetrik ko‘rininishga keltirish yo‘li bilan, aniq yechim topilgan. Buning uchun quyidagi almashtirish

$$u(t,x) = e^{\int_0^t v(y)dy} w(t,|\xi| = r),\ \xi = \int_0^t v(y)dy - x,\ |\xi| = \sum\nolimits_1^N\left(\int_0^t v(y)dy - x_i\right)^{1/2},\ x\in R^N$$

orqali (4) tenglama radial-simmetrik ko‘rinishga keltiriladi:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w^n \xi^{1-s}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^{s-1}w^{m-1}\left|\frac{\partial w^k}{\partial \xi}\right|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right) - b(t)w^q, (t>0, x\in R^N), s = \frac{pN}{p-1} \qquad (6)$$
$$u(0,x) = w(0,\varphi|x|) = u_0(x) \ge 0, x\in R^N$$

Bu masalaning aniq yechimi quyidagi ko‘rinishda topilgan:

$$w(t,\xi) = a(t)(f(t) - \xi^{\gamma})_+^{\gamma_1} \qquad (7)$$

bu yerda $\gamma = p/(p-1),\ \gamma_1 = (p-1)/(k(p-2)+m+n-1), n_+ = \max(0,n)$

$$a(t) = \left[c + (k(p-2)+n+m-1)(\gamma\gamma_1)^{p\text{-}1}(\gamma\gamma_1+N)t\right]^{-\frac{1}{k(p-2)+m+n-1}} =$$

$$= \left[c + \left(\frac{p}{k(p-2)+n+m-1}\right)^{p-1}\left(p + (k(p-2)+n+m-1)Nt\right)\right]^{-\frac{1}{k(p-2)+m+n-1}}$$

$$f(t) = \left[c + \left(\frac{p}{k(p-2)+n+m-1}\right)^{p\text{-}1}\left(p + (k(p-2)+m+n-1)\right)Nt\right]^{\left(\frac{p}{k(p-2)+m+n-1}\right)^{p-1}\left(p+(k(p-2)+m+n-1)\right)N} [f_0 +$$
$$+ \int_0^t b_2(y)e^{\int b_1(y)dy}dy]$$

Yechimlarni taqqoslash teoremasi asosida quyidagi teorema isbotlangan.

1 teorema. (6) masalada $p-1>0,\ k(p-2)+n+m-1>0$ $q=\dfrac{p-[k(p-2)+n+m-1]}{p-1}, u_0(x)\le w(0,x), x\in R^N$ shartlar bajarilsin, u holda (6) masala uchun $Q=\{(t,x): t>0, x\in R^N\}$ sohada quyidagi baho

$$u(t,x)\le w(t,\xi)$$

va populyatsiya tarqalish tezligining chekliligi hodisasi o‘rinli bo‘ladi.
Bu yerda
$w(t,\xi)=a(t)(f(t)-\xi^{\gamma})_+^{\gamma_1}, \gamma=p/(p-1),\ \gamma_1=(p-1)/(k(p-2)+m+n-1)$
$n_+=\max(0,n)$ va $a(t),\ f(t)$ funksiyalar yuqorida aniqlangan.

2 teorema. (6) masalada $p-1>0,\ k(p-2)+n+m-1>0$ $q=\dfrac{p-[k(p-2)+n+m-1]}{p-1}$, $u_0(x)\le w(0,\xi), \xi\in R_+,\ 0<f(t)<\infty, t>0$ shartlar bajarilsin, u holda (6) masalaning yechimi uchun $Q=\{(t,x): t>0, x\in R^N\}$ sohada quyidagi baho o‘rinli bo‘ladi:

$$u(t,x)\le w(t,\xi).$$

Unda (6) masala uchun fazoviy lokallashish hodisasi o‘rinli.
Bu yerda
$w(t,\xi)=a(t)(f(t)-\xi^{\gamma})_+^{\gamma_1},\ \gamma=p/(p-1),\ \gamma_1=(p-1)/(\mathrm{k}(p-2)+n+m-1),$
$a(t),\ f(t)$ funksiyalar yuqorida aniqlangan.

Tez diffuziya holi: $k(p-2)+m+n-1<0$.

3 teorema. (6) masalada $q=\dfrac{p-[k(p-2)+n+m-1]}{p-1},\ u_0(x)\le w(0,x),\ x\in R^N$ bo‘lsin, unda masalaning yechimi uchun

$$u(t,x)\le w(t,\xi),\ \xi\in R,\ t>0$$

baholash o‘rinli bo‘ladi.
Bu yerda
$w(t,\xi)=a(t)(f(t)+\xi^{\gamma})^{\gamma_1},\ \gamma=p/(p-1),\ \gamma_1=(p-1)/(\mathrm{k}(p-2)+n+m-1)$
$a(t),\ f(t)$ funksiyalar yuqorida aniqlangan.

2.2-paragrafda $w=v^{\frac{1}{1-n}},\ 0<n<1$ almashtirish yordamida nodivivergent (1) tenglama divergent holiga keltirilgan va (6) masala yechimining xossalari tadqiq qilingan. Quyidagi teoremalar isbotlangan.

4 teorema. (6)-masalada $k_1(p-2)+m_1+m_2-1>0, p>1$ $u_0(x)\le v(0,x),\ x\in R^N,\ q_1=\dfrac{p-[k_1(p-2)+m_1+m_2-1]}{p-1}$ shartlar bajarilsin, u holda ko‘rilayotgan masala uchun populyatsiya tarqalish tezligining chekliligi hodisasi o‘rinli bo‘ladi.
Bu yerda
$v(\tau,r)=a_1(\tau)(f_1(\tau)-r^{\gamma})_+^{\gamma_1},\ \gamma=p/(p-1),\ \gamma_1=(p-1)/(\mathrm{k}_1(p-2)+m_1+m_2-1)$
va

$$a_1(\tau)=\left[c+(k_1(p-2)+m_1+m_2-1)(\gamma\gamma_1)^{p\text{-}1}(\gamma\gamma_1+N)\tau\right]^{-\frac{1}{k_1(p-2)+m_1+m_2-1}}=$$

$$=\left[c+\left(\frac{p}{k_1(p-2)+m_1+m_2-1}\right)^{p-1}\left(p+(k_1(p-2)+m_1+m_2-1)N\tau\right)\right]^{-\frac{1}{k_1(p-2)+m_1+m_2-1}}$$

$$f_1(\tau)=\left[c+\left(\frac{p}{k_1(p-2)+m_1+m_2-1}\right)^{p\text{-}1}\left(p+(k_1(p-2)+m_1+m_2-1)\right)Nt\right]^{\left(\frac{p}{k_1(p-2)+m_1+m_2-1}\right)^{p-1}\left(p+(k_1(p-2)+m_1+m_2-1)\right)N}[f_0+$$

$$+\int_0^t b_2(y)e^{\int b_1(y)dy}dy]$$

2.3-paragrafda diffuziya koeffitsiyenti vaqtga bog‘liq bo‘lgan nochiziqli muhitdagi biologik populyatsiya tenglamasi uchun quyidagi Koshi masalasi ko‘rib chiqilgan. Konvektiv ko‘chish tezligi vaqtga va populyatsiyaning yo‘qolib ketishiga yoki populyatsiya o‘sishiga bog‘liq bo‘lib, uning quvvati populyatsiya zichligi qiymatlariga va vaqtga bog‘liqdir:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla\left(u^{m-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right)+div(v(t)u)+\gamma(t)u+\varepsilon b(t)u^q \qquad (8)$$
$$u(0,x)=u_0(x),\ x\in R^N$$

Quyidagi teoremalar isbotlangan:

5 teorema. Agar $q>1,\ k(p-2)+m-1>0,\ u_0(x)\le z_1(0,r)$ shartlar o‘rinli bo‘lsa, unda (8) masalaning umumlashgan yechimi uchun $Q=\{(t,x):t>0,x\in R^N\}$ sohada $u(\tau,x)\le z_1(\tau,r)$ baho o‘rinli bo‘ladi.

Bunda

$$z_1(\tau,r)=a_2(\tau)(f_2(\tau)-r^{p/(p-1)})_+^{(p-1)/(k(p-2)+m-1)}$$
$$\frac{da_2}{d\tau}+\gamma\gamma_1[(\gamma\gamma_1+N)]a^{k(p-2)+m-1}\le 0,$$
$$\gamma\gamma_1a_2(\tau)\frac{df_2}{d\tau}+\varepsilon b_1(\tau)a^q-(\gamma\gamma_1)^2a^{k(p-2)+m-1}f_2(\tau)\le 0$$
$$\tau(t)=\int_0^t\left[\exp\left(k(p-2)+m-1\right)\int_0^\eta\gamma(y)dyd\eta\right]$$

6 teorema. Agar $0<q<1,\ u_0(x)\le w_0^{1-q},x\in R^N$ shartlar bajarilsa, u holda

$$u(t,x)\le\int_0^t e^{b(y)dy}\left(w_0^{1-q}-(1-q)\int_0^\tau f_1(y)dy\right)_+^{1/(1-q)}$$

populyatsiyaning yo‘q bo‘lish hodisasi ro‘y beradi.

Ya’ni $u(t,x)\equiv 0,\ x\in R^N,\ \tau\ge T_0<\infty$

Bu yerda $\tau(t)=\int_0^t e^{b(y)dy}$

2.4-paragrafda populyatsiya manbai va populyatsiya yutilishi holidagi nochiziqli muhitda biologik populyatsiyaning nochiziqli diffuziya jarayonini sonli modellashtirish tadqiq qilingan. Tajriba o‘tkazish uchun sonli sxema va algoritm ishlab chiqildi. Hisoblash sxemalari sifatida t va x bo‘yicha

$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\quad h>0,\quad i=0,1,...,n_1,\quad hn_1 = b\}$ ва $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\quad \tau>0,\quad j=0,1,...,m_1,\quad \tau m_1 = T\}$,

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau} = \dfrac{\left(y_{i+1,j}\right)^n}{h^2}\left[a_{i+1}\left(y^j\right)\left(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}\right)-a_i\left(y^j\right)\left(y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}\right)-\left(y_i^j\right)^q\right] \\ \qquad i=1,2,...,n-1;\qquad \mathrm{j}=0,1,...,m_1-1 \\ y_i^0 = u_0\left(x_i\right),\qquad i=0,1,...,n_1 \\ y_0^j = \phi_1\left(\tau_j\right),\qquad j=1,2,...,m_1 \\ y_n^j = \phi_2\left(\tau_j\right),\qquad j=1,2,...,m_1 \end{cases}$$

ifodadan foydalanildi, bu yerda a_{i+1} va a_i quyidagi tarzda tanlangan:

$$a_{i+1}(y^j) = \frac{1}{2}\left[\left(y_i^j\right)^{m-1}\left|\frac{(y_{i+1}^j)^k-(y_i^j)^k}{h}\right|^{p-2}+\left(y_{i+1}^j\right)^{m-1}\left|\frac{(y_i^j)^k-(y_{i-1}^j)^k}{h}\right|^{p-2}\right]$$

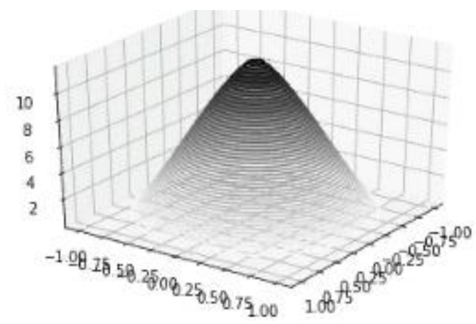
$$a_i(y^j) = \frac{1}{2}\left[\left(y_{i-1}^j\right)^{m-1}\left|\frac{(y_i^j)^k-(y_{i-1}^j)^k}{h}\right|^{p-2}+\left(y_i^j\right)^{m-1}\left|\frac{(y_{i-1}^j)^k-(y_{i-2}^j)^k}{h}\right|^{p-2}\right]$$

Uning yechimini topish uchun iteratsiya usulidan foydalaniladi. Iteratsion jarayon quyidagi tarzda quriladi:

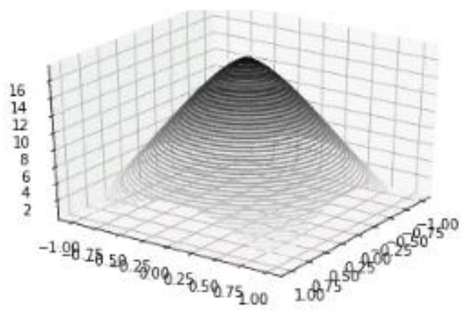
$$\frac{\overset{s+1}{y_i^{j+1}}-y_i^j}{\tau} = \frac{\left(y_{i+1,j}\right)^n}{h^2}\left[a_{i+1}\left(\overset{s}{y^j}\right)\left(\overset{s+1}{y_{i+1}^j}-\overset{s+1}{y_i^j}\right)-a_i\left(\overset{s}{y^j}\right)\left(\overset{s+1}{y_i^j}-\overset{s+1}{y_{i-1}^j}\right)\right]-\left(\overset{s}{y_i^j}\right)^q \qquad (9)$$

$\overset{(s+1)}{y}{}^{j+1}$ funksiyalarga nisbatan (9) ayirmali sxema chiziqli bo‘ladi. Boshlang‘ich iteratsiya sifatida vaqt bo‘yicha avvalgi qadamdagi y olinadi: $\overset{(0)}{y}{}^{j+1} = y^j$. Iteratsiya yaqinlashishi uchun $\max\limits_{0\le i\le n}\left|\overset{s+1}{y}_i-\overset{s}{y}_i\right|<\varepsilon$ shartning bajarilishi talab qilinadi.

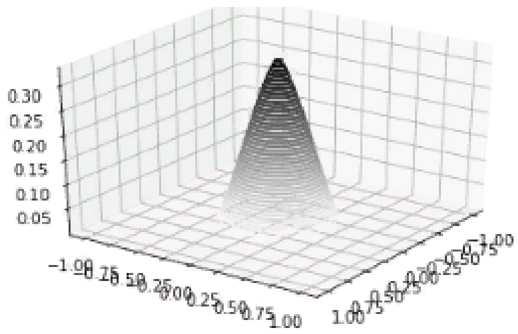
2.5-paragrafda Python 3 muhitida masalalarni hal qilish uchun sonli sxemalar, algoritmlar va dasturlar majmui ishlab chiqilgan, yechimlarning olingan baholari asosidagi natijalar tahlili amalga oshirilgan.



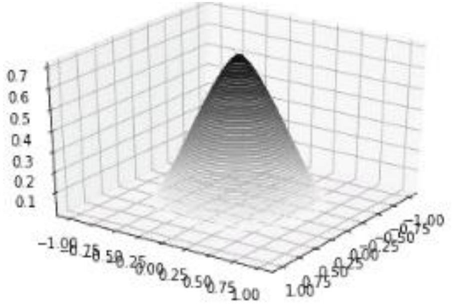
а) $t=0$



б) $t=0$



а) $t=2$



б) $t=2$

Quyidagi qiymatlar uchun sonli natijalar vizual shaklda keltirilgan:

а) $k = 1.1,\ p = 3.3,\ m = 1.1,\ n = 1.1,\ 0<q<1,\ \varepsilon=-1$

б) $k = 1.1,\ p = 3.3,\ m = 1.1,\ n = 1.1,\ 0<q<1,\ \varepsilon=+1$

Dissertatsiyaning uchinchi bobi **“O‘zgaruvchan zichlikka ega bo‘lgan biologik populyatsiyaning nochiziqli masalasini matematik modellashtirish”** deb nomlangan bo‘lib, unda ko‘rib chiqilayotgan (10) masalaning Fujita turidagi global yechimga ega bo‘lish sharti topilgan va $p>n+1$ holida erkin chegara hamda yechim baholangan.

$$Lu \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + u^n \nabla\left(|x|^l u^{m-1} \left|\nabla u^k\right|^{p-2} \nabla u\right) + \gamma(t)u - b(t)u^q = 0, \tag{10}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in R^N \tag{11}$$

Yechim lokalizatsiyasi, global yechimga ega bo‘lish shartlari, muhit parametrlarining qiymati va yutilish $b(t)u^q$ quvvatiga bog‘liq holda topilgan. Kritik holat $k(p-2)+m+n-1=0$ va ikki karra kritik holat $k(p-2)+m+n-1=0,\ p=l$ ko‘rib chiqilgan. Yechimlarning quyidagi xossalari aniqlangan: tarqalishning inersion chekli tezligi, populyatsiya tarqalishining fazoviy lokalizatsiyasi effekti, populyatsiya ko‘payishining chekli vaqtda mavjud bo‘lishi effekti. $\gamma(t), b(t)$ koeffitsiyentlarning keng toifasi uchun aniq yechim topilgan. Sonli sxemalar, sonli yechish usuli, algoritm va dasturiy kompleks ishlab chiqilgan.

Quyidagi teoremalar isbotlangan:

7 teorema. Agar $k(p-2)+m+n-1>0,\ p>l$

$b_0(\tau)[\tilde{u}(\tau)]^{q-(k(p-2)+m+n)}\tau_1(\tau) < s/p, T \ge 0, \tau > 0 \quad u_0(x) \le u_+(0,x),\ x \in R^N$ shartlar bajarilsa, unda (10)-(11) Koshi masalasining global yechimi mavjud, uning uchun $Q = \{(t,x): t > 0, x \in R^N\}$ sohada $u(t,x) \le u_+(t,x)$ tengsizlik va populyatsiya fronti uchun $|x| \le (\frac{a}{b})^{(p-1)/p} p_1 [\tau_1(t)]^{1/(p-l)},\ t > 0$ baho o‘rinli bo‘ladi.

Bu yerda $\tau_1(t) = \int_0^t \left[\exp(m + k(p-2) + n - 1) \int_0^\eta \gamma(y)dy \ d\eta \right], \quad \xi = \int_0^t v(y)dy - x$

Kritik holat.

$k(p-2) + m + n - 1 = 0,\ p > l$ holatni kritik holat deb ataymiz. Mazkur holatda (10) masala yechimining xatti-harakati o‘zgaradi, yanada aniqroq quyidagilarni aytish mumkin:

8 teorema. Agar quyidagi shartlar $k(p-2) + m + n - 1 = 0,\ p > l$

$b_0(\tau)[\tilde{u}(\tau)]^{q-1}(T + t) < N/(p-l), T \ge 0, t > 0 \qquad u_0(x) \le u_+(0,x),\ x \in R^N$

bajarilsa, (10)-(11) Koshi masalasi uchun global yechim mavjud va yechim uchun Q\{0} sohada quyidagi baho o‘rinli:

$$u(t,x) \le u_+(t,x) = \bar{u}(t)\tilde{u}(\tau)\, \bar{f}(\xi),\ \ \xi = \varphi(|x|) / (T + \tau_1(t))^{1/p}.$$

9 teorema. Faraz qilaylik, $k(p-2) + m + n > 1,\ p > l,\ q = 1,\ \tau_1(\infty) < +\infty$ $u_0(x) \le z_1(0,x),\ x \in R^N$ hartlar o‘rinli bo‘lsin, unda (10)-(11) masalaning yechimi fazoviy lokalizatsiya xossasiga ega. Erkin chegara uchun quyidagi baho o‘rinli:

$$|x| \le (a/b_1)^{(p-1)/p}[\tau_1(t)]^{1/(p+k(p-2)+m+n-1)s},\ x \in R^N, t > 0.$$

Bu yerda $z_1(t,x) = \bar{u}(t)\tilde{u}(\tau)[\tau_1(\tau)]^{-1/p}(a - b_1|\eta|^{p/(p-1)})_+^{(p-1)/(k(p-2)+m+n-1)}$

10 teorema. Agar

$k(p-2) + m + n - 1 = 0,\ p > l,\ b_0(\tau) = 1,\ u_0(x) \le z_+(0,x),\ x \in R^N \setminus \{0\}$,

$\beta \ge (k(p-2) + m + n) + (1-q)(p-l)/N,\ q < 1$ shartlar o‘rinli bo‘lsa, (10)-(11) Koshi masalasi uchun global yechim mavjud va Q\{0} sohada quyidagi baho o‘rinli:

$$u(t,x) \le z_+(t,x) = \bar{u}(t)\tilde{u}(\tau)\exp\left(-\frac{(p-1)\eta^{p/(p-1)}}{k^{(p-2)/(p-1)}p^{1/(q-1)}} \right), \eta = \varphi(|x|)/(T + t)^{1/p}$$

$\tilde{u}(\tau) = (T + (q-1)\tau)^{-1/p},\ \eta = \varphi[T + t]^{-1/p}$

Ikki karra kritik hol.

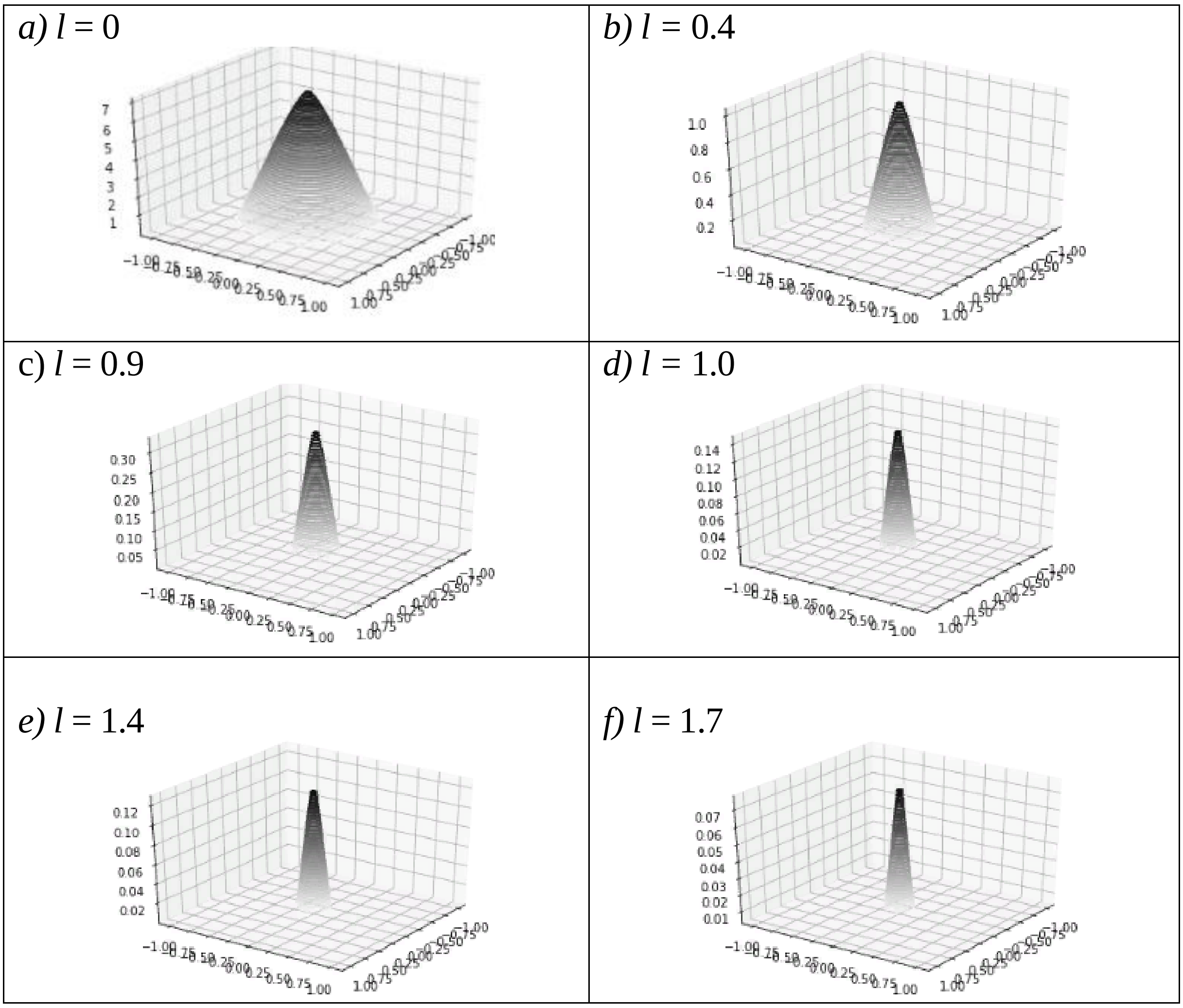
$k(p-2) + m + n - 1 = 0,\ p = l$ holatni ikki karra kritik hol va singulyar hol deb ataymiz.

11 teorema. Agar $k(p-2) + m + n - 1 = 0,\ p = l,\ b_0(\tau) = 1,$ $u_0(x) \le z_1(0,x),\ x \in R^N \setminus \{0\}, q \ge 1 + p$ shartlar o‘rinli bo‘lsa, (10)-(11) Koshi masalasi uchun global yechim mavjud va Q\{0} sohada quyidagi baho o‘rinli:

$$u(t,x) \le z_1(t,x) = \bar{u}(t)\tilde{u}(\tau)[\tau_1(\tau)]^{-1/p} \exp\left(-\frac{(p-1)\eta^{p/(p-1)}}{k^{(p-2)/(p-1)} p^{1/(p-1)}} \right),$$

$$\eta = \ln(|x|)/(T+t)^{1/p},\ \bar{u}(t) = \exp(\int_0^t b(y)dy),\ \tilde{u}(\tau) = (T + (\beta-1)\int_0^\tau (b_1(y)dy)^{-1/(\beta-1)},\ T \ge 0$$

3.4-paragrafda sonli sxemalar va yechish usullari hamda sonli eksperiment natijalarining tahlili keltirilgan. Differensial tenglamalar sistemasini yechish uchun iteratsion usuldan foydalanilgan. Barcha holatlarda iteratsiyalar soni birinchi yarim qatlamda ikkidan va ikkinchi yarim qatlamda birdan oshmadi, bu taklif etilgan usulning samaradolrligini tasdiqlamoqda. Grafiklardan ko‘rinib turganidek, muhitning bir jinsli emasligini xarakterlovchi *l* parametrining qiymati ortishi bilan ta’sir sohasi qisqaradi.



_l_ parametrning turli qiymatlari uchun bo‘lgan holatda populyatsiyaning yo‘qolib ketish jarayonining o‘zgarish grafigi: $n=1.1, m=1.1, k=1.1, p=3, eps=10^{-3}$ **.**

Hisoblash eksperimentining natijalari, barcha iteratsion usullar va yaratilgan sxemalar mos kelishini ko‘rsatmoqda. Taklif etilgan boshlang‘ich approksimatsiya tufayli sonli natijalarning tez mos kelishiga erishildi. Taklif etilgan yondashuvning barcha holatlarida iteratsiyalar soni aniqlikda o‘rtacha 3 dan oshmaydi. Sonli eksperiment natijalari yechimlarning yaxshi boshlang‘ich approksimatsiyasi hisobiga ko‘rib chiqilayotgan masalani yechish uchun oshkormas sxemalardan foydalanish samaraliligini ko‘rsatdi.

XULOSA

Dissertatsiya nochiziqli parchalash algoritmi va etalon tenglamalar usullari yordamida biologik populyatsiya masalalarini modellashtirishni tadqiq qilishdan iborat. Mazkur ishda koʻrib chiqilayotgan masalada quyidagi nochiziqli effektlar namoyon boʻlishi kuzatilishi koʻrsatib berilgan: populyastiya koʻpayishi chekli tezligining inersion effekti, populyatsion chaqnashning fazoviy lokalizatsiyasi effekti va kuchli yutilishga ega boʻlgan muhitda populyatsiya chaqnashning chekli vaqtda mavjudligi effekti. Shuningdek, fizik ma’noga ega boʻlgan umumlashgan yechim bahosi olingan.

1. Biologik populyatsiya jarayonini va populyatsiya tarqalishining tezligining chekliligi, kuchli yutilishi ta’sirida fazoviy lokallashishi aniqlangan, ikki karrali nochiziqli parabolik tenglama bilan tasvirlangan masala uchun Fujita turidagi global yechim mavjudligi isbotlangan.
2. Biologik populyatsiya jarayonining matematik modellarining sifat xossalari oʻrganilgan, umumlashgan aniq yechimlar, yechim va front uchun baholar olingan.
3. Nodivergent koʻrinishidagi biologik populyatsiya masalasi uchun Fujita turining global yechimi mavjudligi haqidagi teorema isbotlangan, avtomodel tahlil asosida masalani hal qilishning sifat xossalari oʻrganildi, umumlashgan xususiy yechim topilgan.
4. Biologik populyatsiya masalasi konvektiv koʻchish ta’sirida chiziqli manba va nochiziqli kuchli yutilish jarayonlarining matematik modellari tadqiq qilindi. Yechim baholariga asoslanib, yuqoridagi yangi effektlarning haqiqiyligi koʻrsatildi.
5. Ikki karra nochiziqli oʻzgaruvchan zichlikga ega nodivergent parabolik tenglama bilan tasvirlangan biologik populyatsiya jarayonining matematik modellarining sifat xossalari tadqiq qilingan.
6. Kuchli yutilish va zichlik ta’siri ostida buziladigan nodivergent parabolik tenglamalar bilan tasvirlangan biologik populyatsiya hamda viruslarning tarqalishi jarayonlari uchun yangi nochiziqli effektlar aniqlandi, masalaning aniq yechimlari va yechim baholari olindi.
7. Koʻrib chiqilayotgan nochiziqli biologik populyatsiya masalalarini sonli yechishda boshlangʻich iteratsiyani topish muammosi hal etilgan va taklif qilingan boshlangʻich iteratsiyalar iteratsion jarayonni tez yaqinlashishiga olib kelganligi hisoblash eksperimenti natijalari orqali oʻz tasdigʻini topgan.
8. Matematik modelda ishtirok etgan sonli parametrlarning qiymatlariga qarab, yechimlarning sifat xossalarini oʻrganishda sekin, tez, kritik va singulyar hollar uchun yechim turli xarakterga ega boʻlishi isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАТЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

НАТЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

САЙФУЛЛАЕВА МАФТУХА ЗАФРУЛЛАЕВНА

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ПОПУЛЯЦИИ ОПИСАННОЙ НЕЛИНЕЙНЫМ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ В НЕДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

**05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы
и комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ – 2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2018.1.PhD/T589.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирза Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале “ZiyoNet” (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Арипов Мерсаид Мирсиддикович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ганихўжаев Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Мухамедиева Дилдора Кабиловна доктор технических наук
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «___» _______ 2023 г. в ___ часов на заседании научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.:(+99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21; e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована №___). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «__» _________ 2023 года.
(протокол рассылки №_________ от «__» _________ 2023 года.)

Р.Д.Алоев
Зам. председателя научного совета по
присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь научного совета по присуждению
ученых степеней, д.ф.-м.н.

Б.Ф.Абдурахимов
Председатель научного семинара при научном совете
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (Аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире проблемы, возникающие в результате многочисленных научных и практических исследований, проводимых в глобальном масштабе, сводятся к исследованию нелинейных математических моделей различных процессов. Большинство таких моделей являются нелинейными дифференциальными уравнениями параболического типа недвиргентного вида. Разработка нелинейных моделей, описывающие процессы, в широком диапазоне значений числовых параметров, при исследовании процессов биологической популяции, является объектом исследований в таких областях, как прикладная математика и математическое моделирование. Исследование качественных свойств нелинейных математических моделей, создание схем численного решения, методов решения, алгоритмов и программного обеспечения остается одной из важных задач научных исследований.

В настоящее время актуально изучать различные новые свойства математических моделей, описываемых нелинейными недивергентными параболическими уравнениями, конечная скорость распространения популяции, пространственная локализация, вымирание популяции и другие новые качественные свойства, под влиянием конвективного переноса, скорость которого зависит от времени, источника, поглощения, переменной плотности. В нелинейных задачах биологической популяции, из-за вырождения параболических уравнений, представляющих их, разработка компьютеризированной системы, определяющей динамическое изменение решений, требует особого подхода к численному решению и является основной целью научных исследований.

В Республике Узбекистан наибольшее внимание уделяется современным направлениям, таких как разработка численных и аналитических методов решения задач в областях математической физики и механики, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, были достигнуты определенные результаты в математическом моделировании нелинейных процессов биологической популяции, описываемых параболическими уравнениями недивергентного вида и разработке эффективных методов приближенного решения. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика», является одной из основных задач Института математики им. В.И.Романовского при Академии наук Республики Узбекистан[2]. Для обеспечения ее реализации принятого решения важное значение имеют исследования, проводимые в области научных исследований

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан №ПП-4708 от 7 мая 2020 г. «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики».

в республике, в частности автоматизация технологических процессов и использование численных методов.

Настоящее диссертационное исследование направлено на определенной приоритетов реформирования системы высшего образования в Республике Узбекистан, поднятие процесса подготовки высококвалифицированных кадров с независимым мышлением, современными знаниями и высокими моральными качествами на качественно новый уровень, модернизацию высшего образования, развитие социальной сферы и экономических сетей на основе передовых образовательных технологий, определенных в Указах Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», №УП-60 от 28 января 2022 года «О Стратегии развития Нового Узбекистана на 2022–2026 годы», Постановлениях Президента Республики Узбекистан №ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП-5847 от 8 октября 2019 года "Об утверждении концепции развития системы высшего образования Республики Узбекистан до 2030 года" в определенной степени послужит реализации поставленных вопросов, а также поручений, данных президентом Республики Узбекистан Шавкатом Мирзиеевым на встреча с представителями сфер образования и науки 24 мая 2019 года в Национальном университете Узбекистана.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. "Математика, механика и информатика".

Степень изученности проблемы. В результате изучения математической модели процессов, описываемых нелинейным недивергентным параболическим уравнением, динамика развития распространения популяции была впервые описана Н.В. Белотеловым. Далее математические вопросы исследовались в работах О.А.Олейника, А.С.Калашникова, а также в работах А.А.Самарского, Б.Кнерра и др. Решение нелинейных краевых задач всегда сопровождается значительными трудностями, поскольку решить их аналитически возможно лишь в исключительных случаях, а для установления новых свойств решений требуются очень глубокие исследования. Поэтому для изучения свойств решения приходится прибегать к различным точным и приближенным методам. В работах А.А.Самарского, С.П.Курдюмова, В.А.Галактионова, А.С.Калашникова, Л.К.Мартинсона, Р.Кершнера, Г.И.Баренблатта, Б.Ф.Кнерра, Чэнь Синфу, Ю.В.Ци, Чон-Шэнго, Комбе Исмаил, Кусано Такаси, Томоюки Танигавы, С.Н.Димовой, М.Арипова, А.Т.Хайдарова, Ш.А.Садуллаевой, Ф.А.Кабилжановой, З.Р.Рахмонова и других авторов, показаны, что очень важную роль играют автомодельные решения, соответствующие определенным значениям параметров.

В Узбекистане, в работах М.Арипова, А.Хайдарова, Ш.Садуллаевой, А.Матякубова, Ж.Мухаммадиева, Д.Мухамедиевой, Ф.Кабилжановой и других ученых, обоснована важная роль численно-аналитического исследования нелинейных граничных задач параболического типа, описывающих различные процессы, на основе автомодельного или приближенно-автомодельного подхода.

Одним из распространенных методов исследования решения нелинейных задач является метод сравнения решений, который расширяет возможности изучения свойств решений нелинейных параболических уравнений. Потому что легче найти решение соответствующего ему дифференциального неравенства, чем найти точное решение параболического уравнения, описывающего нелинейные процессы в биологии, химии, физике, механике, социологии. Одним из эффективных методов исследования является нахождение автомодельных решений методом нелинейного расщепления и эталонных уравнений.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполнялась диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планами, научно-исследовательских работ Национального Университета имени Мирзо Улугбека в рамках грантов № ОТ-Ф4-30 “Исследование качественных свойств решений кросс систем с двумя нелинейностями, конвективным переносом, переменной плотностью, источником или поглощением”.

Целью исследования является установление качественных свойств математических моделей процессов биологической популяции в нелинейной среде, разработка вычислительных схем, методов решения и алгоритмов для численного исследования нелинейных задач биологической популяции, описываемых двумерными нелинейными параболическими уравнениями недивергентного вида с учетом конвективного переноса, скорость которого

Задачи исследования состоят в следующем:

определение новых эффектов в нелинейной среде под влиянием конвективного переноса, нелинейного источника или поглощения процессов биологической популяции, описываемых параболическим уравнением с двойной нелинейностью дивергентного вида;

установление и обоснование качественных свойств математических моделей процессов биологической популяции, под влиянием конвективного переноса, нелинейного источника или поглощения, которые описываются параболическим уравнением с двойной нелинейностью недивергентного вида;

построение численных решений математической модели процессов биологической популяции, которые выражаются параболическим уравнением с двойной нелинейностью, в среде с переменной плотностью;

нахождение точного решения при воздействии сильного поглощения и плотности, описывающих процессы биологической популяции и распространения вирусов, выражающихся параболическими уравнениями с вырождением недивергентного вида, выявление новых нелинейных эффектов и получить оценку решения;

разработка численных схем, методов решения и алгоритмов для численного решения нелинейных задач, описывающихся дивергентными и недивергентными параболическими уравнениями с двойной нелинейностью с учетом конвективного переноса, переменной плотности, нелинейного источника или поглощения.

Объектом исследования являются процессы биологической популяции и распространения вируса, описываемые нелинейными параболическими уравнениями с двойной нелинейностью дивергентного и недивергентного вида с конвективным переносом и переменной плотностью.

Предметом исследования. Исследование новых качественных свойств нелинейных математических моделей, описываемых нелинейными параболическими уравнениями дивергентного и недивергентного вида с учетом конвективного переноса и переменной плотностью. Построение некоторых точных решений, получение оценок решений и фронтов. Разработка численных схем, методов решения, алгоритмов и методов нахождения начального приближения.

Методы исследования. В данной работе использованы алгоритм нелинейного расщепления, методы эталонных уравнений, методы итерации и прогонки, методика сравнения решений, автомодельные и приближенно-автомодельные и асимптотические методы.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

с помощью принципа сравнения решений найдены оценка решения и фронта задачи Коши для уравнения биологической популяции дивергентного вида в среде с двойной нелинейностью, с конвективным переносом, нелинейным сильным поглощением;

получены качественные свойства нелинейной математической модели, такие как условия глобальной разрешимости типа Фужита для задачи биологической популяции с переменной плотностью, оценка скорости волновых решений, оценки обобщенных решений и фронта;

с помощью принципа сравнения решений определены нелинейные эффекты конечной скорости распространения биологической популяции, пространственной локализации и вымирания популяции за конечное время;

найдены оценка решения для задачи распространения вирусов и точные обобщенные решения задачи биологической популяции с переменной плотностью в критическом, двойном критическом случаях и предложены алгоритм, вычислительная схема и метод решения для численного исследования.

Практические результаты исследования:

разработан итерационный процесс применительно к численному решению нелинейных параболических уравнений биологической популяции;

разработан программный комплекс, дающий возможность визуально проследить за эволюцией нелинейных процессов, описываемых нелинейными параболическими уравнениями;

установлены новые нелинейные эффекты конечной скорости распространения вирусов за конечное время, связанные с нелинейными математическими моделями процесса биологической популяции.

Достоверность результатов исследования. Достоверность результатов исследования подтверждаются строго доказанными теоремами и утверждениями. Используя численный анализ был проведен численный анализ, с использованием оценок найденных решений и свободных границ, приведенных в асимптотических формулах. Результаты анализа подтверждают надежность и эффективность применения автомодельного анализа при сохранении методов решения дифференциальных уравнений и нелинейных эффектов, примененных в данном исследовании. Достоверность научных результатов, полученных в диссертации, основана на использовании технологии вычислительного эксперимента.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Использованный в работе подход является достаточно универсальным и способствует развитию теории уравнений математической физики и математическому моделированию процессов биологической популяции, где скорость конвективного переноса зависит от времени, выражаемой параболическими уравнениями с двойной нелинейностью.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что они могут быть применены к математическому моделированию процессов нелинейного теплопроводности, фильтрации и диффузии, биологической популяции, распространения вирусов, а также могут быть использованы для решения других нелинейных задач математического моделирования.

Внедрение результатов исследования. На основе численных схем и методах исследования, разработанных как в однородной и в неоднородной среде:

автомодельные и приближенные автомодельные решения, полученные на основе алгоритма нелинейного расщепления для решения нелинейной задачи Коши, представленной параболическим уравнением недивергентного вида, оценка глобального решения таких задач, условия наличия глобального решения для задачи биологической популяции с переменной плотностью, оценка скорости распространения волны, были использованы в рамках фундаментального гранта БВ-М-Ф4-004 “Разработка принципов алгоритмизации управления сложными системами на основе алгебры над таблицами функционирования” для численного решения нелинейных уравнений параболического типа (справка № 89-03-5280 от 15 декабря 2020 года, Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан). Результаты научного исследования показали эффективность предложенной вычислительной схемы для решения нелинейной задачи Коши для параболических уравнений недивергентного вида;

применение вычислительных схем и метода прогонки для решения нелинейных задач Коши для визуализации динамики решений нелинейных недивергентных задач параболического типа при сильном поглощении были использованы в рамках фундаментального гранта № БВ-Атех-2018(399+487) “Создание трехмерной модели гидрологических процессов и пакета преложений для численнного моделирования диффузионных процессов в двухкомпонентных средах” (справка № 89-03-681 от 5 февраля 2021 года, Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан). Применение научных результатов по предложенному критерию показало эффективность этих схем, для численного решения параболических уравнений связанных с нелокальными граничными условиями.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 13 научно-практических конференциях, в том числе, на 10 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 20 научных работ, 7 из них входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, 4 из них опубликованы в зарубежных журналах (3-в базе данных scopus) и 3 в республиканских научных изданиях. Получены также 2 свидетельства о регистрации программных средств, созданных для ЭВМ

Структура и объем диссертации. Структура диссертации состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 101 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАТЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и необходимость темы диссертации, дается картографическое исследование приоритетных направлений развития науки и техники Республики, дается степень изученности проблемы, описываются цель, задачи, объект и предмет исследования, описываются научные инновации и практические результаты исследования, раскрывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приводятся сведения о реализации результатов исследования, публикуются статьи и структура диссертации.

В первой главе под названием “**Математическое моделирование процесса нелинейных биологических популяций”** анализируется постановка задачи, краткий обзор исследований, относящихся к теме диссертации, а также некоторые вспомогательные утверждения и определения, необходимые для дальнейшего изложения результатов.

В этой главе рассматриваются свойства обобщенных решений квазилинейного параболического уравнения недивергентной формы:

$$Lu = -u_t + u^n \nabla\left(u^{m-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right) + div(v(t)u) + \gamma(t)u \pm \varepsilon b(t)u^q = 0 \qquad (1)$$

с начальным условием $u\big|_{t=0} = u_0(x) \ge 0, \quad x \in R^N$ (2)

Здесь n, m, k, p - положительные вещественные числа, характеризующие нелинейную среду, $u = u(t,x) \ge 0$ плотность популяции в момент $t > 0$ в точке $x \in R^N, v(t) -$ скорость конвективного переноса, $\gamma(t) -$ коэффициент линейного роста популяции, $b(t)u^q -$ мощность роста популяции ($\varepsilon = +1$) или мощность вымирания ($\varepsilon = -1$), $u_0(x)$ - плотность популяции в начальный момент времени.

Для уравнения (1) рассматривается задача Коши $Q = \{(t,x): t > 0, x \in R^N\}$ относительно начального распределения $u_0(x)$.

В параграфе 1.1 приводится краткий обзор некоторых результатов исследования уравнения теплопроводности с сильной нелинейностью.

В параграфе 1.2 содержит вспомогательные утверждения, определения и теоремы решений, используемые в работе.

В параграфе 1.3 в области исследуемых свойств нелинейной модели реакционно-диффузионного процесса описана задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^n \nabla\left(u^{m-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right) + \gamma u\left(1 - u^{\beta}\right),$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \ge 0,\ x \in R \qquad (3)$$

здесь $n, m, k \ge 1, p > 2, \beta > 0$ - заданные числовые параметры, $u = u(t,x) \ge 0$ - искомое решение, где $u(t,x)$ плотность популяции среды в момент $t > 0$ в точке $x \in R$.

Исследование различных качественных свойств решений уравнения (3) в случае $m = 1,\ p = 2,\ \beta = 1,\ n = 0$ было предложено Фишером в качестве детерминистической версии стохастической модели распространения благоприятного гена в диплоидной популяции, а так же численные решения уравнения при $\gamma(t) = 1,\ p=2$ или $m = 1,\ n = 0$ ранее другими авторами.

Вторая главе которая диссертации называется “М**атематическое моделирование процесса биологической популяции с конвективным переносом**”, были получены глобальные условия разрешимости в случае $q > 1$ и для случая сильного поглощения $(0 < q < 1)$, оценка из класса имеющие физический смысл слабых решений и свободной границы. При $q = 1$ показано, что действие скорости конвективного переноса, зависящей от времени, приводит к нелинейным эффектам пространственной локализации и явлению "стенки" для свободной границы.

Рассматривается задача пространственной локализации распространения популяции, в зависимости от значение числовых параметрах нелинейной среды.

В параграфе 2.1 исследованы вопросы глобальной разрешимости задачи Коши и качественные свойства решения задачи. Найдено точное решение, получено условие конечной скорости и локализации решения. Проведены численные эксперименты с визуализацией для различных значений числовых параметров уравнения. Математическую модель, описывающую процессы, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u^n\nabla\left(u^{m-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right)+div(v(t)u)-b(t)u^q, \qquad (4)$$
$$u(0,x)=u_0(x),\ (t>0, x\in R^N)$$

Здесь n,m,k,p - положительные вещественные числа, $u=u(t,x)\geq 0$ - искомое решение, $u(t,x)$ - плотность популяции среды в момент $t>0$ в точке $x\in R^N$.

Показаны, что при

$$q=\frac{p-[k(p-2)+n+m-1]}{p-1} \qquad (5)$$

задача (4) имеет точное аналитическое решение. Для этого рассмотрим радиально-симметричное решение задачи.

Тогда задача (4) приводится к следующему радиально-симметричному виду:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=w^n\xi^{1-s}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^{s-1}w^{m-1}\left|\frac{\partial w^k}{\partial\xi}\right|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)-b(t)w^q,(t>0,x\in R^N),s=\frac{pN}{p-1} \qquad (6)$$
$$u(0,x)=w(0,\varphi|x|)=u_0(x)\geq 0, x\in R^N$$

$$u(t,x)=e^{\int_0^t v(y)dy}w(t,|\xi|=r),\ \xi=\int_0^t v(y)dy-x,\ |\xi|=\sum_1^N\left(\int_0^t v(y)dy-x_i\right)^{1/2},\ x\in R^N$$

Точное решение этой задачи найдено в следующем представлении

$$w(t,\xi)=a(t)(f(t)-\xi^{\gamma})_+^{\gamma_1} \qquad (7)$$

здесь

$$\gamma=p/(p-1),\ \gamma_1=(p-1)/(k(p-2)+m+n-1), n_+=\max(0,n)$$

$$a(t)=\left[c+(k(p-2)+n+m-1)(\gamma\gamma_1)^{p-1}(\gamma\gamma_1+N)t\right]^{-\frac{1}{k(p-2)+m+n-1}}=$$

$$=\left[c+\left(\frac{p}{k(p-2)+n+m-1}\right)^{p-1}\left(p+(k(p-2)+n+m-1)Nt\right)\right]^{-\frac{1}{k(p-2)+m+n-1}}$$

$$f(t)=\left[c+\left(\frac{p}{k(p-2)+n+m-1}\right)^{p-1}\left(p+(k(p-2)+m+n-1)\right)Nt\right]^{\left(\frac{p}{k(p-2)+m+n-1}\right)^{p-1}\left(p+(k(p-2)+m+n-1)\right)N}[f_0+$$
$$+\int_0^t b_2(y)e^{\int b_1(y)dy}dy]$$

На основе принципа сравнения решений доказывается

Теорема 1. Пусть в задаче (6) $p-1>0,\ k(p-2)+n+m-1>0$

$$q=\frac{p-[k(p-2)+n+m-1]}{p-1},u_0(x)\le w(0,x),x\in R^N.$$

Тогда для решения задачи (6) в области $Q=\{(t,x):t>0,x\in R^N\}$ имеет место оценка

$$u(t,x)\le w(t,\xi)$$

и имеет место явление КСРП (Конечная скорость распространения популяции).

Здесь

$w(t,\xi)=a(t)(f(t)-\xi^{\gamma})_+^{\gamma_1},\gamma=p/(p-1),\ \gamma_1=(p-1)/(k(p-2)+m+n-1)$

$n_+=\max(0,n)$, здесь функции $a(t),\ f(t)$ определены выше.

Теорема 2. Если выполнено условие в задаче (6)

$$p-1>0,\ k(p-2)+n+m-1>0,\quad q=\frac{p-[k(p-2)+n+m-1]}{p-1},$$

$$u_0(x)\le w(0,\xi),\xi\in R_+,\ 0<f(t)<\infty,t>0$$

тогда для задачи (6) уместна следующая оценка в области $Q=\{(t,x):t>0,x\in R^N\}$

$$u(t,x)\le w(t,\xi).$$

и имеет место явление пространственная локализация решения.

Где

$w(t,\xi)=a(t)(f(t)-\xi^{\gamma})_+{}^{\gamma_1},\ \gamma=p/(p-1),\ \gamma_1=(p-1)/(\mathrm{k}(p-2)+n+m-1),$

здесь функции $a(t),\ f(t)$ определены выше.

Быстрая диффузия: $k(p-2)+m+n-1<0$

Теорема 3. Пусть в задаче (6)

$$q=\frac{p-[k(p-2)+n+m-1]}{p-1},\ u_0(x)\le w(0,x),\ x\in R^N$$

Тогда для решения задачи (6) имеет место оценка

$$u(t,x)\le w(t,\xi),\ \xi\in R,\ t>0$$

где

$w(t,\xi)=a(t)(f(t)+\xi^{\gamma})^{\gamma_1},\ \gamma=p/(p-1),\ \gamma_1=(p-1)/(\mathrm{k}(p-2)+n+m-1)$

а функции $a(t),\ f(t)$ определены выше

В параграфе 2.2 исследуется свойства решения задачи (6) путем введения замены $w=v^{\frac{1}{1-n}}$. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 4. Пусть в задаче (6) $k_1(p-2)+m_1+m_2-1>0,p>1$

$$u_0(x)\le v(0,x),\ x\in R^N,\ q_1=\frac{p-[k_1(p-2)+m_1+m_2-1]}{p-1}$$

тогда для задачи (6) существует явление КСРП.

Здесь $v(\tau,r)=a_1(\tau)(f_1(\tau)-r^{\gamma})_+^{\gamma_1},\ \gamma=p/(p-1),\ \gamma_1=(p-1)/(\mathrm{k}_1(p-2)+m_1+m_2-1),$

$$a_1(\tau) = \left[c + (k_1(p-2) + m_1 + m_2 - 1)(\gamma\gamma_1)^{p\text{-}1}(\gamma\gamma_1 + N)\tau \right]^{-\frac{1}{k_1(p-2)+m_1+m_2-1}} =$$

$$= \left[c + \left(\frac{p}{k_1(p-2) + m_1 + m_2 - 1} \right)^{p-1} \left(p + (k_1(p-2) + m_1 + m_2 - 1)N\tau \right) \right]^{-\frac{1}{k_1(p-2)+m_1+m_2-1}}$$

$$f_1(\tau) = \left[c + \left(\frac{p}{k_1(p-2) + m_1 + m_2 - 1} \right)^{p\text{-}1} \left(p + (k_1(p-2) + m_1 + m_2 - 1) \right) Nt \right]^{\left(\frac{p}{k_1(p-2)+m_1+m_2-1}\right)^{p-1} \left(p+(k_1(p-2)+m_1+m_2-1)\right)N} [f_0 +$$

$$+ \int_0^t b_2(y) e^{\int b_1(y)dy} dy]$$

В параграфе 2.3. рассмотрено следующую задачу Коши для уравнения биологической популяции в нелинейной среде с коэффициентом диффузии, зависящей от значений плотности популяции. Скорость конвективного переноса которая зависит от времени и мощности вымирания популяции или рост популяции, мощность которого зависимости от значений плотности популяции и времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \left(u^{m-1} \left| \nabla u^k \right|^{p-2} \nabla u \right) + div(v(t)u) + \gamma(t)u + \varepsilon b(t) u^q \qquad (8)$$

$$u(0, x) = u_0(x),\ x \in R^N$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 5. Если выполнено условие

$q > 1,\ k(p-2) + m - 1 > 0,\ u_0(x) \le z_1(0, r)$, то обобщенного решения задачи (8) и для него уместна следующая оценка $u(\tau, x) \le z_1(\tau, r)$ в области $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$.

Здесь

$$z_1(\tau, r) = a_2(\tau)(f_2(\tau) - r^{p/(p-1)})_+^{(p-1)/(k(p-2)+m-1)}$$

$$\frac{da_2}{d\tau} + \gamma\gamma_1[(\gamma\gamma_1 + N)]a^{k(p-2)+m-1} \le 0,$$

$$\gamma\gamma_1 a_2(\tau) \frac{df_2}{d\tau} + \varepsilon b_1(\tau) a^q - (\gamma\gamma_1)^2 a^{k(p-2)+m-1} f_2(\tau) \le 0$$

$$\tau(t) = \int_0^t \left[\exp\left(k(p-2) + m - 1 \right) \int_0^\eta \gamma(y) dy d\eta \right]$$

Теорема 6. Пусть $0 < q < 1,\ u_0(x) \le w_0^{1-q}, x \in R^N$ тогда для решение задачи (8) справедлива оценка

$$u(t, x) \le \int_0^t e^{b(y)dy} \left(w_0^{1-q} - (1-q) \int_0^\tau f_1(y) dy \right)_+^{1/(1-q)}$$

и существует явление вымирание популяции, т.е. $u(t,x) \equiv 0,\ x \in R^N,\ \tau \ge T_0 < \infty$.

Здесь $\tau(t) = \int_0^t e^{b(y)dy}$

В параграфе 2.4 исследуются вопросы численного моделирования процессов нелинейной диффузии, биологической популяции в случае источника популяции и поглощения популяции. Разработана численная схема и алгоритм для проведения эксперимента. В качестве вычислительных схем $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\quad h > 0,\quad i = 0,1,...,n_1,\quad hn_1 = b\}$ и $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\quad \tau > 0,\quad j = 0,1,...,m_1,\quad \tau m_1 = T\}$ по t и x использованы

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \dfrac{\left(y_{i+1,j}\right)^n}{h^2}\left[a_{i+1}\left(y^j\right)\left(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}\right) - a_i\left(y^j\right)\left(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}\right) - \left(y_i^j\right)^q\right] \\ \qquad i = 1,2,...,n-1; \quad \mathrm{j} = 0,1,...,m_1 - 1 \\ y_i^0 = u_0\left(x_i\right), \qquad i = 0,1,...,n_1 \\ y_0^j = \phi_1\left(\tau_j\right), \qquad j = 1,2,...,m_1 \\ y_n^j = \phi_2\left(\tau_j\right), \qquad j = 1,2,...,m_1 \end{cases}$$

где a_{i+1} и a_i выбраны следующим образом:

$$a_{i+1}(y^j) = \frac{1}{2}\left[\left(y_i^j\right)^{m-1}\left|\frac{(y_{i+1}^j)^k - (y_i^j)^k}{h}\right|^{p-2} + \left(y_{i+1}^j\right)^{m-1}\left|\frac{(y_i^j)^k - (y_{i-1}^j)^k}{h}\right|^{p-2}\right]$$

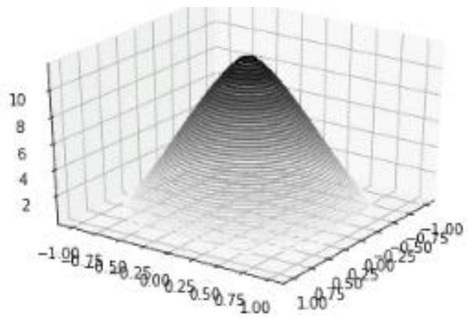
$$a_i(y^j) = \frac{1}{2}\left[\left(y_{i-1}^j\right)^{m-1}\left|\frac{(y_i^j)^k - (y_{i-1}^j)^k}{h}\right|^{p-2} + \left(y_i^j\right)^{m-1}\left|\frac{(y_{i-1}^j)^k - (y_{i-2}^j)^k}{h}\right|^{p-2}\right]$$

Для нахождения ее решения используется метод итерации. Итерационный процесс строим следующим образом:

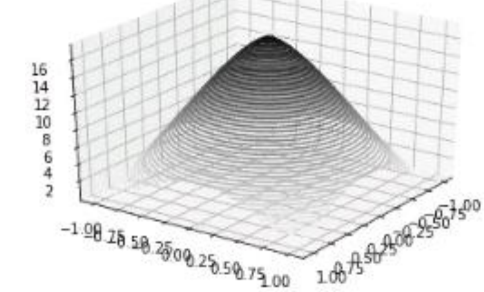
$$\frac{\overset{s+1}{y_i^{j+1}} - y_i^j}{\tau} = \frac{\left(y_{i+1,j}\right)^n}{h^2}\left[a_{i+1}\left(\overset{s}{y^j}\right)\left(\overset{s+1}{y_{i+1}^j} - \overset{s+1}{y_i^j}\right) - a_i\left(\overset{s}{y^j}\right)\left(\overset{s+1}{y_i^j} - \overset{s+1}{y_{i-1}^j}\right)\right] - \left(\overset{s}{y_i^j}\right)^q \qquad (9)$$

Относительно функции $\overset{(s+1)}{y}{}^{j+1}$ разностная схема (9) будет линейной. В качестве начальной итерации берутся функция y предыдущего шага по времени: $\overset{(0)}{y}{}^{j+1} = y^j$. Для сходимости итерации требуются выполнение условий $\max\limits_{0 \le i \le n}\left|\overset{s+1}{y}_i - \overset{s}{y}_i\right| < \varepsilon$.

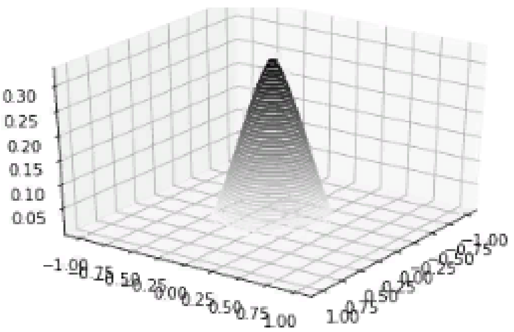
В параграфе 2.5 Разработаны численные схемы, алгоритмы и комплекс программ для решения задач в среде Python3, проведен анализ результатов на основе полученных оценок решений.



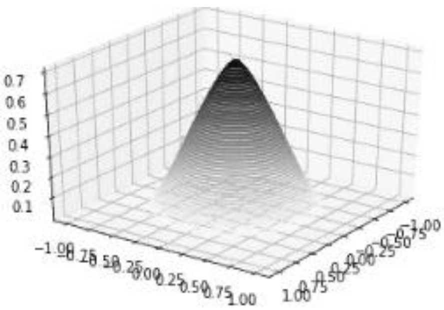
а) $t=0$



б) $t=0$



а) $t=2$



б) $t=2$

Результаты численных экспериментов представлены в визуальной форме для случаев:

а) $k = 1.1,\ p = 3.3,\ m = 1.1,\ n = 1.1,\ 0<q<1,\ \varepsilon=-1$

б) $k = 1.1,\ p = 3.3,\ m = 1.1,\ n = 1.1,\ 0<q<1,\ \varepsilon=+1$

В третьей главе диссертации «Математическое моделирование нелинейной задачи биологической популяции с переменной плотностью» установлено условие глобальной разрешимости рассматриваемой задачи

$$Lu \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + u^n \nabla\left(|x|^l u^{m-1} \left|\nabla u^k\right|^{p-2} \nabla u\right) + \gamma(t)u - b(t)u^q = 0, \tag{10}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in R^N \tag{11}$$

для решения типа Фужиты, оценки решения для $p > n+1$ и свободной границы. Получены условия локализации решения, глобальная разрешимость задачи в зависимости от значения параметров среды и мощности поглощения (источника) $\gamma(t)u^q$, оценки решений и фронтов. Рассматривается критический случай $k(p-2)+m+n-1=0$ и двойной критический случай $k(p-2)+m+n-1=0,\ p=l$. Установлены следующие свойства решений: инерционная конечная скорость распространения, эффект пространственной локализации популяционной вспышки, эффект конечного времени существования популяционной вспышки. Найдено точное решение для широкого класса коэффициентов $\gamma(t), b(t)$. Разработаны численные схемы, метод численного решения, алгоритм и комплексная программа.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 7. Пусть

$k(p-2)+m+n-1>0,\ p>l, b_0(\tau)[\tilde{u}(\tau)]^{q-(k(p-2)+m+n)}\tau_1(\tau)<s/p, T\geq 0, \tau>0$,

и выполнены следующие условия $u_0(x)\leq u_+(0,x),\ x\in R^N$. Тогда существует глобальное решение задачи Коши (10)-(11), для которого в $Q=\{(t,x): t>0, x\in R^N\}$ имеется оценка $u(t,x)\leq u_+(t,x)$. Для фронта популяции справедлива следующая оценка

$$|x|\leq (\frac{a}{b})^{(p-1)/p} p_1\left[\tau_1(t)\right]^{1/(p-l)},\ t>0.$$

Здесь $\tau_1(t)=\int\limits_0^t\left[\exp(m+k(p-2)+n-1)\int\limits_0^\eta \gamma(y)dy\ d\eta\right],\quad \xi=\int\limits_0^t v(y)dy-x$

Критический случай.

Случай $k(p-2)+m+n-1=0,\ p>l$ назовем критическим. В этом случае поведение решения задачи (10) изменяется. Более точно можно сказать следующее:

Теорема 8. Пусть $k(p-2)+m+n-1=0,\ p>l$

$b_0(\tau)[\tilde{u}(\tau)]^{q-1}(T+t)<N/(p-l), T\geq 0, t>0$ и выполнено следующее условие $u_0(x)\leq u_+(0,x),\ x\in R^N$. Тогда существует глобальное решение задачи Коши (10)-(11), для которого в Q\{0} имеет место оценка

$$u(t,x)\leq u_+(t,x)=\bar{u}(t)\tilde{u}(\tau)\,\bar{f}(\xi),\ \ \xi=\varphi\left(|x|\right)/\left(T+\tau_1(t)\right)^{1/p}.$$

Теорема 9. Пусть $k(p-2)+m+n>1,\ p>l,\ q=1,\ \tau_1(\infty)<+\infty$.

Тогда решение задачи (10) обладает свойством пространственной локализации, если $u_0(x)\leq z_1(0,x),\ x\in R^N$.

Для свободной границы имеет место оценка

$$\left|x\right|\leq (a/b_1)^{(p-1)/p}[\tau_1(t)]^{1/(p+k(p-2)+m+n-1)s},\ x\in R^N, t>0.$$

Здесь $z_1(t,x)=\bar{u}(t)\tilde{u}(\tau)[\tau_1(\tau)]^{-1/p}(a-b_1|\eta|^{p/(p-1)})_+^{(p-1)/(k(p-2)+m+n-1)}$

Теорема 10. Если выполнено условие

$$k(p-2)+m+n-1=0,\ p>l, b_0(\tau)=1,\ u_0(x)\leq z_+(0,x),\ x\in R^N\setminus\{0\},$$

$$\beta\geq (k(p-2)+m+n)+(1-q)(p-l)/N,\ q<1$$

тогда существует глобальное решение задачи Коши (10)-(11), для которого в области Q\{0} имеет место оценка

$$u(t,x)\leq z_+(t,x)=\bar{u}(t)\tilde{u}(\tau)\exp\left(-\frac{(p-1)\eta^{p/(p-1)}}{k^{(p-2)/(p-1)}p^{1/(q-1)}}\right), \eta=\varphi(|x|)/(T+t)^{1/p}$$

$\tilde{u}(\tau)=(T+(q-1)\tau)^{-1/p},\ \eta=\varphi[T+t]^{-1/p}$

Двойной критический случай.

Случай $k(p-2)+m+n-1=0,\ p=l$ назовем двойным критическим случаем и сингулярным.

Теорема 11. Пусть $k(p-2)+m+n-1=0,\ p=l, b_0(\tau)=1$, $u_0(x)\le z_1(0,x),\ x\in R^N\setminus\{0\}, q\ge 1+p$. Тогда существует глобальное решение задачи Коши (10)-(11), для которого в области Q\{0} имеет место оценка

$$u(t,x)\le z_1(t,x)=\bar{u}(t)\tilde{u}(\tau)[\tau_1(\tau)]^{-1/p}\exp\left(-\frac{(p-1)\eta^{p/(p-1)}}{k^{(p-2)/(p-1)}p^{1/(p-1)}}\right),$$

$$\eta=\ln(|x|)/(T+t)^{1/p},\ \bar{u}(t)=\exp(\int_0^t b(y)dy),\ \tilde{u}(\tau)=(T+(\beta-1)\int_0^\tau (b_1(y)dy)^{-1/(\beta-1)},\ T\ge 0$$

В параграфе 3.4 представлены численные схемы, методы решения и анализ результатов численных экспериментов. Поставленная задача аппроксимируется неявной схемой переменных направлений. Для решения системы дифференциальных уравнений используется итерационный метод. Во всех случаях число итераций не превысило двух на первом полуслое и одной – на втором полуслое, что подтверждает эффективность предложенного метода. Из графиков видно, что с увеличением значения параметра *l* который характеризует неоднородность среды, область возмущений сокращается.

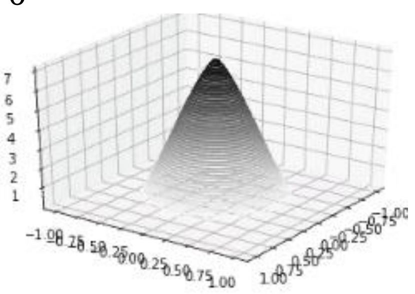
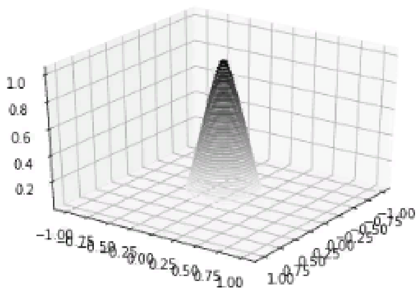
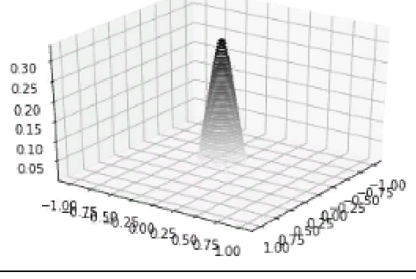
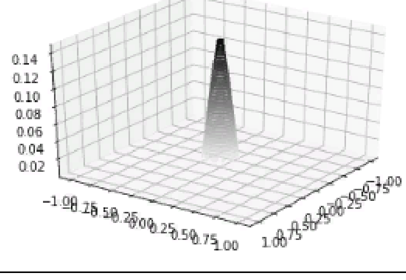
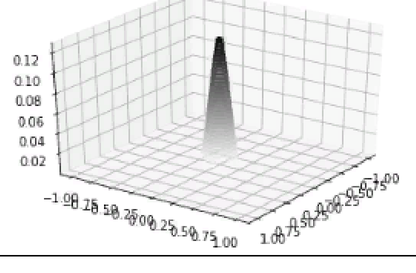
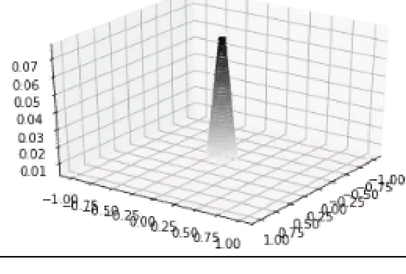
a) l = 0 	*b) l* = 0.4 
c) *l* = 0.9 	*d) l* = 1.0 
e) l = 1.4 	*f) l* = 1.7 

График изменения процесса с вымиранием популяции в случае для различных значений параметра *l*: $n=1.1, m=1.1, k=1.1, p=3, eps=10^{-3}$ **.**

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что все итерационные методы подходят для построенной схемы. Благодаря предложенной начальной аппроксимации достигается быстрая сходимость численных результатов. Во всех случаях предложенного подхода число итераций в среднем не превышает трех с точностью 10^{-3}. Результаты численных экспериментов показали возможность использования неявной численной схемы для решения рассматриваемой задачи за счет хорошей начальной аппроксимации решения.

Заключение

Диссертация представляет собой исследование моделирования задач биологической популяции алгоритмом нелинейного расщепления и методами нелинейных эталонных уравнений. В данной работе показано, что в рассматриваемой задаче наблюдается проявление следующих нелинейных эффектов: инерционного эффекта конечной скорости распространения вспышки популяции, эффекта пространственной локализации вспышки и эффекта конечного времени существования вспышки в среде с вымиранием. Получена также оценка обобщённого решения из имеющего физический смысл класса решений.

1. Доказаны процессов биологической популяции и выявлены явления конечной скорости распространения популяции, пространственной локализации под воздействием точного сильного поглощения, существование глобального решения типа Фужиты для задач, описываемых параболическим уравнением с двойной нелинейностью.
2. Изучены качественные свойства математических моделей процессов биологической популяции, получены обобщенные точные решения, оценки для решения и фронта.
3. Были исследованы проблемы теоремы существования глобального решения типа Фужиты для задачи биологической популяции недивергентного вида и изучены качественные свойства решения задачи на основе автомодельного анализа, получено обобщенное частное решение.
4. Исследованы математические модели процессов биологической популяции под действием конвективного переноса, линейного источника и нелинейного сильного поглощения. На основе оценок решения было показано справедливость вышеуказанных новых эффектов.
5. Изучены качественные свойства математических моделей процессов биологической популяции, описываемых недивергентным параболическим уравнением с двойной нелинейностью в среде с переменной плотностью.

6. Выявлены новые нелинейные эффекты и получена оценка решения, получены точные решения задач, описываемых вырождающимися параболическими уравнениями недивергентного вида, под воздействием сильного вымирания и плотности, для процессов биологической популяции и распространения вирусов.

7. Решен вопрос поиска начальной итерации при численном решении рассматриваемых нелинейных задач, разработан комплекс программ и методы решения на основе соответствующих разностных схем, проведен вычислительный эксперимент для решения задач.

8. В зависимости от значений числовых параметров, входящих в математическую модель, при изучении качественных свойств решений было доказано, что для медленных, быстрых, критических и сингулярных случаев решение имеет разный характер.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.T.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

SAYFULLAYEVA MAFTUXA ZAFRULLAYEVNA

NUMERICAL MODELING OF THE BIOLOGICAL POPULATION PROBLEMS DESCRIBED BY THE NONLINEAR PARABOLIC EQUATION IN NON-DIVERGENT FORM

05.01.07 – Mathematical modeling. Numerical methods and software complexes

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHISICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2018.1.PhD/T589.

The dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz.)

Scintific superviser:	**Aripov Mersaid Mirsiddiqovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Ganixujayev Rasul Nabiyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Muhamediyeva Dildora Kabilovna Doctor of Technical Sciences
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place "____" _________ 2023 at _________ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.T.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resourse centre at National University of Uzbekistan (is registered №____). (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "____"______________ 2023 year
(Mailing report №. __________ on "____" _____________ 2023 year)

R.D.Aloyev
Deputy chairman of Scientific Council
awarding scientific degrees, d.ph.-m.s., professor

Z. R. Rakhmonov
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, d.ph.-m.s.

B.F.Abduraximov
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award scientific degrees,
d.ph.-m.s., professor

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work consists is the establish the qualitative properties of mathematical models of biological population processes in a nonlinear environment, to develop computational schemes, solution methods and algorithms for the numerical study of nonlinear problems of a biological population described by two-dimensional nonlinear parabolic equations of a non-divergent type, taking into account convective transport, the rate of which depends on time, population growth and extinction, and variable density.

The object of the research work are the processes of biological population and virus spread described by nonlinear parabolic equations with double nonlinearity of divergent and non-divergent species with convective transport and variable density.

The scientific novelty of the research work is as follows:

using the principle of comparing solutions, an estimate of the solution and the front of the Cauchy problem for the equation of a divergent biological population in a medium with double nonlinearity, convective transport, nonlinear strong absorption is found;

qualitative properties of a nonlinear mathematical model are obtained, such as Fujita-type global solvability conditions for the problem of a biological population with variable density, an estimate of the speed of wave solutions, estimates of generalized solutions and the front;

using the principle of comparison of solutions, the nonlinear effects of the finite rate of propagation of a biological population, spatial localization and extinction of a population in a finite time are determined;

the estimation of the solution for the problem of virus propagation and the exact generalized solutions of the problem of a biological population with variable density in critical, double critical cases are found, and an algorithm, computational scheme and solution method for numerical investigation are proposed.

Implementation of the research results. On the basis of numerical schemes and research methods for solving the Cauchy problem for the parabolic equation of the nondivergent species in a homogeneous and heterogeneous environment:

the program product for solving nonlinear equations of the parabolic type of non-divergent form was used within the framework of the fundamental grant BV-M-F4-004 "Development of Principles for Traditimizing the Management of Complex Systems Based on Algebra over Tables of Functioning" for the numerical solution of nonlinear equations of the parabolic type (reference no. 89-03-5280 dated December 15, 2020, Ministry of Higher and Secondary Special Education of the Republic of Uzbekistan). The results of the scientific study showed the effectiveness of the proposed computational scheme for solving the nonlinear Cauchy problem for the parabolic equation of the non-divergent type;

the use of computational schemes and the run method to solve nonlinear Cauchy problems for a nonlinear parabolic equation of the non-divergent type with strong absorption were used as part of the fundamental grant No. BV-Ateh-2018(399

+ 487) "Creating a three-dimensional model of hydrological processes and a package of proposals for numerical modeling of diffusion processes in two-component environments" (reference no. 89-03-681 dated February 5, 2021, Ministry of Higher and Secondary Special Education of the Republic of Uzbekistan). The application of scientific results according to the proposed criterion showed the effectiveness of these schemes for the numerical solution of parabolic systems associated with non-local boundary conditions.

Structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, conclusion, references and appendices. The volume of the dissertation is 101 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. **Sayfullayeva M**. “A review of nonlinear problems of a biological population in nondivergence form with the absorption” // Solid State Technology, 2020. Volume 63. Issue 2. – P. 239-245 (№ 3, Scopus, IF=0.3).
2. Арипов М., **Сайфуллаева М**. “Задачи биологической популяции в не дивергентной форме” // Ilm sarchashmalari. – Urganch, 2020. – № 8. – B. 14-19 (01.00.00. № 12).
3. Aripov M., **Sayfullayeva M.** “Mathematical modeling of nonlinear problem biological population in not divergent form with absorption, and variable density” // Acta of Turin Polytechnic University in Tashkent. – Tashkent, 2020. – № 10. – P. 1-7 (05.00.00. № 25).
4. Aripov M., **Sayfullayeva M**. “On the new nonlinear properties of the nonlinear heat conductivity problem in nondivergence form” // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. – Tashkent, 2020. 15.06. Volume 3. Article 8. – P. 200-208 (01.00.00. № 8).
5. Aripov M., **Sayfullayeva M.** “About new nonlinear properties of the problem of nonlinear thermal conductivity” // International Journal of Physics & Mathematics, 2021. – № 4 (1). – P. 17-22 (№ 23, SJIF, IF=6.1).
6. Aripov M., Sadullayeva Sh.A., **Sayfullayeva M.** “To Mathematical Modeling of Nonlinear Problem Biological Population in Nondivergent Form with Variable Density” / AIP Conference Proceedings, 2021. February. – P. 020064 (1-6) (№ 3, Scopus, IF=0.4).
7. Aripov M., **Sayfullayeva M.** and Kabiljanova F. “Exact Solution of a Double Nonlinear Problem of Biological Population with Absorption and with Migration” / International Conference on “Information Science and Communications Technologies (ICISCT)”, 2021. – P. 1-4 (№ 3, Scopus, IF=0.60).

II bo‘lim (II часть; II part)

1. Арипов М., Абдуллаева З., **Сайфуллаева М**. “Нелинейные эффекты существования тепловой структуры в среде с поглощением” / Материалы Республиканской научно-практической конференции “Актуальные проблемы математического моделирования, алгоритмизации и программирования”. Ташкент, 2018. 17-18 сентября. – С. 87-91.
2. Арипов М., **Сайфуллаева М.** “О свойствах одной модели биологической популяции с двойной нелинейной диффузией не дивергентного вида” / Материалы Республиканской научно-практической конференции “Актуальные проблемы математического моделирования, алгоритмизатsiи и программирования”. – Ташкент, 2018. 17-18 сентября. – С. 326-328.

3. Aripov M., **Sayfullaeva M.** “On the properties of a model of a biological population of the Kolmogorov-Fisher type with double nonlinear diffusion” / Тезисы Международной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики и информацонных технологий-Ал-Хорезми 2018”. – Ташкент, 2018. 13-15 сентября. – С. 118-119.

4. Aripov M., **Sayfullayeva M.** “In the biological population with double nonlinear diffusion of a non-divergent type” / Abstracts of Uzbek-Israel joint international conference. – Uzbekistan, 2019. May 13-17. – P. 22-23.

5. Арипов М., **Сайфуллаева М.** “Явление конечной скорости и пространственной локализации для нелинейного уравнения теплопроводности не дивергентного вида с переменной плотностью” / Международная конференция “Обратные и некорректные задачи”. – Самарканд, 2019. 2-4 октября. – С. 55-57.

6. **Сайфуллаева М.** “Задачи биологической популяции в недивергентной форме” // Monografia pokonferencyjna science, research, development. – Santa Monica (California), 2019. 17.05. – № 16/7. – P. 337-340.

7. Арипов М., **Сайфуллаева М.** “Свойства популяционной модели типа диффузия с двойной нелинейностью” / Узбекско-Российская научная конференция “Неклассические уравнения математической физики и их приложения”, 2019. 24-26 октября. – С. 262-264.

8. **Сайфуллаева М.** “Решение уравнения диффузии с двойной нелинейностью недивергентного вида и с переменной плотьностью” / Тезисы “Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий”, 2019. 14-15 ноябрь. – С. 103-104.

9. Aripov M., **Sayfullayeva M.** “About new nonlinear properties of the problem of nonlinear thermal conductivity” / III International Scientific Conference “Mathematical modeling”. – Borovets, Bulgaria, 2019. 11-14.12. – P. 33-38.

10. Арипов М., **Сайфуллаева М.** “Свойства нелинейной популяционной модели типа диффузия реакция с двойной нелинейностью и недивергентного вида” / International conference “Frontier in mathematics and computer science”. – Tashkent, Uzbekistan, 2020. October 12-15. – C. 179-180.

11. **Сайфуллаева М.** “Свойства популяционной модели типа диффузия с двойной нелинейностью с плотностью” / Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Современные методы математической физики и их приложения”, 2020. 17-18 ноября. – С. 269-273.

12. Aripov M., **Sayfullayeva M.** “On the phenomena localization of temperature disturbances in media with variable density and strong absorption” / 7th International Conference on “Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2020)”, 2020. September 25-28. – P. 99-100.

13. Арипов М.М., **Сайфуллаева М.З.** “Математическая модель распространение вируса” / Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа”. – Бухара, Узбекистан, 2021. 04-05 ноябрь. – С. 306-310.

14. Арипов М.М., Мукимов А.Ш., **Сайфуллаева М.З**. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ / “Комплекс программ для численного решения и визуализации нелинейной задачи теплопроводности в одномерном случае”. №DGU 2019 0605. Агентство по интеллектуальной собственности РУз. – Ташкент, 2019. 10.05.

15. **Сайфуллаева М.З**. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ / “Комплекс программ для численного решения и визуализации нелинейной задачи биологической популяции в недивергентной форме”. №DGU 2020 1595. Агентство по интеллектуальной собственности РУз. – Ташкент, 2020. 22.09.

Avtoreferat O‘zbekiston Milliy universitetining “OzMU xabarlari” jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. “Times New Roman” garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,75. Adadi 100 dona. Buyurtma № 40/23.

Guvohnoma № 851684.
“Tipograff” MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.