**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

XAMROYEVA DILAFRO‘Z NAMOZOVNA

BERILGANLARNING INTERVAL ANIQMASLIK SHARTIDA ALGEBRAIK XOS QIYMAT MUAMMOLARINI YECHISH ALGORITMLARI

**05.01.07-Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Toshkent – 2023

UDK: 519.614

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

XAMROYEVA DILAFRO‘Z NAMOZOVNA

BERILGANLARNING INTERVAL ANIQMASLIK SHARTIDA ALGEBRAIK XOS QIYMAT MUAMMOLARINI YECHISH ALGORITMLARI

**05.01.07-Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Toshkent – 2023

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2019.4.PhD/FM453 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Navoiy davlat pedagogika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.ik-fizmat.nuu.uz) va «ZiyoNet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Yuldashev Ziyavidin Xabibovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Normurodov Chori Begaliyevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Kalxanov Polatbek Jumabayevich fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)
Yetakchi tashkilot:	**Qarshi davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSC.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning 2023-yil «12» 07 soat 14⁰⁰ dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.:(+99871)227-12-24, faks:(+99871)246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (97 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil «21» 06 kuni tarqatildi.
(2023-yil «05» 06 dagi 1 raqamli reyestr bayonnomasi).

M.M.Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z.R.Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.

B.F.Abduraximov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlarda, ayniqsa muhandislik texnologiyalari bilan bog‘liq tizimlarning matematik modellarini tahlil, sintez va diagnostika qilishda ko‘p hollarda xos qiymatlar masalalarini yechishga keltiriladi. Masalan, mexanik va elektr tizimlarida xos qiymatlar - tebranishlar chastotasini aniqlashga imkon bersa, ularga mos xos vektorlar esa - tebranish shakllarini tavsiflaydi. Shuningdek, dinamik tizimlar nazariyasida xos qiymatlar haqidagi bilimlar, tizimning vaqt oralig‘idagi muhim xossalarini aniqlashga va bunday tizimlarning turg‘unligi muammosini hal qilishga imkon beradi. Shu sababli, xos qiymatlar masalasini yechishning samarali usullari, algoritmlari va dasturiy ta’minotini ishlab chiqish hamda ularni turli amaliy masalalarning matematik modellari xossalarini tadqiq etishda qo‘llash amaliy matematikaning muhim vazifalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi vaqtda dunyoda bir qator muhim amaliy masalalarni yechishda berilganlarning noaniqligini hisobga olish vositasi sifatida interval analiz va noravshan to‘plamlar nazariyasi usullari keng tadqiq etilmoqda. Ushbu nisbatan yangi yondashuvlar an’anaviy ehtimolli usullarga qaraganda sodda matematik apparatni taqdim etadi va birinchidan, algoritmik, hisoblash ma’nosida yetarlicha samarali, ikkinchidan, aniqmas parametrli matematik modellarni turg‘un tadqiq qilishga imkon beradi. Shu sababli aniqmaslik sharoitidagi jarayonlarni tavsiflaydigan interval matematik modellarni qurish, ularni tadqiq etish uchun yangi interval usullarni va algoritmlarni ishlab chiqish, hamda keng doiradagi foydalanuvchilar uchun mo‘ljallangan mos dasturiy ta’minot yaratish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqiga ega bo‘lgan boshqaruv nazariyasi, mexanika, robototexnika, iqtisodiyot va energetika sohalaridagi masalalarni sonli-analitik yechish usullarini ishlab chiqish kabi dolzarb yo‘nalishlarga katta e’tibor qaratilmoqda. Xususan, interval aniqmaslikka ega bo‘lgan jarayonlarni matematik modellashtirish, turli mexanik tuzilmalar va boshqaruv tizimlarining turg‘unligini asoslash, hamda iqtisodiy balans modellarning samaradorligini aniqlash bo‘yicha salmoqli natijalarga erishildi. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kabi ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish O‘zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi[1]. Qarorning bajarilishini ta’minlash uchun amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan qator masalalarning matematik modellari muhim xossalarini aniqlash indikatori sifatida interval xos qiymat masalalarining analitik va sonli yechish usullarini takomillashtirish muhim ahamiyatga ega.

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida” gi farmoni, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori, 2019-yil 8-oktabrdagi PF-5847-son “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi farmoni, 2019-yil 27-apreldagi PQ-3682-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori va 2021-yil 1-apreldagi PF-6198-son “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo‘yicha davlat boshqaruvi tizimini takomillashtirish to‘g‘risida”gi farmonlari, hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalarini rivojlantirishning IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Jahon ilmiy adabiyotlari tahlili keyingi yillarda interval analiz usullariga bo‘lgan qiziqish muntazam ortib borayotganligidan dalolat beradi. Interval analiz asoslari G.Alefeld, E.Kaucher, Y.I.Shokin, R.B.Kearfott, V.Kreinovich, G. Mayer, R.E.Moore, A.Neumaier, J.Rohn, S.M.Rump, E.Hansen, S.P.Shary, A.V. Lakeyev, S.I.Jilin, B.S.Dobronets, S.A.Kalmikov, Z.X.Yuldashev va boshqalarning monografiyalarida keng yoritilgan.

Interval analiz usullari doirasida xos qiymat masalalari B.R.Barmish, D.Hudak, Y.T.Juang, A.Deif, J.Rohn, R.Lohner, H.-S.Ahn, G.Mayer, L.Kolev, D.Hertz, M.Hladik, Z.Qiu, H.Leng, D.Hartman, M.-H.Matcovschi, D.Daney, E.P.Tsigaridas, D.Nerantzis, M.A.El-Gebeily va boshqa mualliflarning ishlarida qaralgan. Xos qiymat masalalarini yechishning interval usullarini ishlab chiqish va takomillashtirish bo`yicha asosiy natijalar A.Deif, J.Rohn, G.Mayer, L.Kolev, D.Hertz va M.Hladiklarga tegishli. A.Deif va J.Rohn ishlarida interval matritsaning haqiqiy xos sonlari to‘plami chegaraviy nuqtalarini topish masalalari qaralgan. G. Mayer Teylor qatoriga yoyib hisoblashga asoslangan haqiqiy va kompleks interval matritsalarining xos qiymatlarini hisoblash usulini ishlab chiqdi. M.Hladik va uning hammualliflari simmetrik, shuningdek nosimmetrik haqiqiy interval matritsalarning xos qiymatlari to‘plami chegaralarini aniqlashda “Filtrlash usuli” deb ataladigan iteratsion usulni taklif qilgan. Ushbu usul interval matritsalarning xosmaslik yetarli shartiga asoslangan bo‘lib, har bir iteratsiyada yaqinlashishni yaxshilaydi. Z.Qiu va uning hammualliflari interval matritsani buzilgan haqiqiy matritsa sifatida qarab, haqiqiy nosimmetrik interval matritsalarning barcha mumkin bo‘lgan xos qiymatlarini baholash uchun “interval buzilishlar” usulini ishlab chiqishgan. L.Kolev parametrli matritsalar asosida xos qiymatlarni tashqi interval baholash masalasini ko‘rib chiqdi. D.Gertz esa J.Rohnning haqiqiy interval matritsalar xos qiymatlari to‘plamining chegarasini topish bo‘yicha natijalarini kompleks interval matritsalar uchun umumlashtirdi. Interval xos qiymat masalalarining turli amaliy masalalarni yechishga tadbiq etilishi B.R.Barmish, L.V.Kolev, S.L.Demacro, R.K.Edevally, D.Hu, H.H.Liao, S.H.Lin, J.A. Argoun, J.Chen, A.D.Dimarogonas, Z.Qiu, K.Yuan, H.Leng, A.Deif, I. Elishakoff, M.A.El-Gebeily, V.N.Efanov, D.I. Schwartz va boshqa olimlarning ishlarida qaralgan.

O‘zbekistonda interval analiz muammolari va interval usullarning ba’zi tadbiqlari Z.X.Yuldashev, R.H.Hamdamov, Sh.A.Nazirov, N.R.Yusupbekov, Sh.M.G‘ulomov, M.B.Bazarov, A.A.Abdukadirov, U.Sharipov, A.A.Ibragimov, M.B.Xudayarov, P.J.Kalxanov, O.J.Xudayberdiyev va boshqalarning ishlarida tadqiq etilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Navoiy davlat pedagogika institutining I1-FM-2018-3 – “Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish, hisoblash algoritmlari va ularning dasturiy ta’minoti” rejali mavzusi, shuningdek A-5-034+(A-5-035) – “Parametrlarning interval aniqmasligida uzluksiz texnologik obyektlarni boshqarish tizimlarining turg‘unligini tahlil qilish usullari va dasturiy ta’minotini ishlab chiqish” (2015-2017) mavzusidagi davlat amaliy ilmiy-tadqiqot loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi algebraik xos qiymat muammosini yechishning interval usullari, algoritmlari, dasturiy ta’minotini ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

haqiqiy va interval matritsalar uchun xos qiymat muammolarining turli yondashuvlar asosida qo‘yilishini tahlil qilish;

haqiqiy interval matritsalar uchun standart masala xos qiymatlarining to‘liq muammosini yechish usullarini ishlab chiqish va asoslash;

interval matritsalar uchun xos qiymatlar qismiy muammosini yechishning ba’zi iteratsion usullarining takomillashtirilgan algoritmlarini ishlab chiqish;

ishlab chiqarish xarajatlari matritsasining xos qiymatlari asosida tarmoqlararo iqtisodiy balans interval modelining mahsuldorligini asoslash;

interval parametrlar bilan berilgan avtomobil osmasi mexanik tebranish tizimining turg‘unlik shartlarini topish va asoslash;

interval xos qiymat masalalarini sonli yechish algoritmlari va dasturlar majmuasini ishlab chiqish.

Tadqiqotning obyekti interval berilganlarga ega bo‘lgan jarayonlar, xos qiymatlarni hisoblash usullari, interval modellar va algoritmlar.

Tadqiqotning predmeti interval matritsalarning xos qiymatlari uchun interval baholarni olish usullari, yechimlarning intervalga tegishlilik teoremalari, interval algoritmlar va dasturiy ta’minot ishlab chiqishni o‘z ichiga oladi.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida interval analiz, chiziqli algebra, hisoblash matematikasi va sonli tahlil, matematik modellashtirish va obyektga yo‘naltirilgan dasturlash usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

simmetrik va nosimmetrik interval matritsalarning xos qiymatlari to`plamlarining quyi va yuqori chegaralarini hisoblash formulalari olingan;

maxsus qirra matritsalarini qurish yo‘li bilan interval matritsalar xos qiymatlarining mos intervallarga tegishlilik baholari topilgan;

interval matritsalar dominant xos qiymatlar to‘plami chegaralarini hisoblash uchun xos qiymatlar qismiy muammosini yechishning darajali va skalyar ko‘paytmalar usullarining modifikatsiyalangan algoritmlari ishlab chiqilgan;

ishlab chiqarish xarajatlari matritsasining xos qiymatlari uchun o‘rnatilgan shart asosida tarmoqlararo iqtisodiy balans interval modelining mahsuldorlik masalasi yechilgan;

parametrlarning interval aniqmaslik shartida avtomobil osma tuzilmasi yopiq boshqariluvchi tebranish tizimi sifatida qaralib, holat matritsasi xos qiymatlari asosida tebranish tizimi turg‘unligining baholari olingan;

interval arifmetikani qo‘llash orqali xos qiymat to‘liq va qismiy muammolarini yechishning mos algoritmlari va dasturiy ta’minoti ishlab chiqilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

simmetrik, shuningdek nosimmetrik haqiqiy interval matritsalarning har bir xos qiymatlarining chegaralarini topish uchun oshkor formulalar olingan;

haqiqiy interval matritsalar uchun to‘liq va qismiy xos qiymatlar muammolarini yechish uchun mos algoritmlar ishlab chiqilgan va dasturlar majmuasi yaratilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiyada olingan tasdiqlarning ishonchliligi undagi matematik mulohazalar va isbotlarning qat’iyligi, chiziqli algebra va interval analiz usullaridan foydalanilganligi, yechimlarni ichida saqlash sharti bilan interval kengligi uchun baholarning o‘rnatilganligi va sonli tajribalar o‘tkazilganligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati taklif etilayotgan usullarni mexanik konstruksiyalarni loyihalash masalalarini yechishda, iqtisodiy balans modellarining samadorligini aniqlashda, tebranish tizimlari diagnostikasida va interval berilganlar asosida xos qiymat masalalari yuzaga keladigan boshqa fan sohalarida qo‘llash mumkinligi bilan izohlanadi.

Dissertatsiya ishining amaliy ahamiyati interval iteratsion jarayonlarni loyihalashda, interval algoritmlarni ishlab chiqishda va yaratilgan dasturiy ta’minotdan xos qiymat masalasiga keltiriladigan turli amaliy masalalarni yechishda foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Berilganlarning interval aniqmaslik shartida algebraik xos qiymat masalalarini yechish bo‘yicha olingan ilmiy natijalar quyidagi yo‘nalishlarda amaliyotga joriy etilgan:

interval xos qiymatlarning to‘liq muammosini yechish usullari, algoritmlari va dasturiy ta’minotidan 06/2020-E - “Navoiy kon-metallurgiya kombinati muhandislik inshootlarida generator majmualarini ishlab chiqish va o‘rnatish” mavzusidagi amaliy ilmiy-tadqiqot loyihasida generator majmualarini mexanik tuzilmalari holatini diagnostika qilish masalalarini yechishda foydalanilgan (Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universitetining 2023-yil 2-fevraldagi №01-04/258-son ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi muhandislik inshootlarida generatorlarni o‘rnatishda “inshoot-asos” mexanik tuzilmasining turg‘unligini aniqlash imkonini bergan.

xos qiymatlar qismiy muammosini yechishning interval usullari va algoritmlaridan OT-F4-28 raqamli “Giperbolik sistemalar uchun adekvat hisoblash modellarini qurish” mavzusidagi davlat ilmiy-tadqiqot loyihasida dissipativ chegaraviy shartlar asosida berilgan bir oʻlchovli chiziqli giperbolik sistemalar yechimlari turgʻunligini baholashda foydalanilgan (Oʻzbekiston Milliy universitetining 2023-yil 8-fevraldagi 04-11/636-son maʼlumotnomasi). Interval usullarni qoʻllash orqali olingan sonli natijalar Lyapunov funksiyasining diskret analogi uchun aprior baholarni tahlil qilish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyada olingan natijalar 19 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, shundan 12 ta xalqaro va 7 ta respublika miqyosidagi anjumanlarda maʼruza qilingan va muhokamadan oʻtkazilgan.

Tadqiqot natijalarining eʼlon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi boʻyicha jami nashrlar soni 32 tani tashkil etadi, shulardan, Oʻzbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etishga tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta ilmiy maqola, 2 tasi xorijiy va 4 tasi respublika ilmiy jurnallarida chop etilgan, shuningdek, 4 ta EHM uchun dasturga mualliflik guvohnomasi olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar roʻyxati va ilovalardan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 108 betdan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning Oʻzbekiston Respublikasi fan va texnologiyalarini rivojlantirishning ustuvor yoʻnalishlariga mosligi koʻrsatilgan, muammoning oʻrganilganlik darajasi bayon qilingan, tadqiqotning maqsadi va vazifalari belgilangan, tadqiqotning obyekti, predmeti va usullari tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning ishonchliligi asoslab berilgan, olingan natijalarning ilmiy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi haqida maʼlumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Haqiqiy va interval matritsalar uchun algebraik xos qiymatlar muammosi”** deb nomlangan birinchi bobi tadqiqotda qaralgan masalalar, usullar va boshqa zarur tushunchalar sharhiga qaratilgan boʻlib, unda xos qiymat muammosi boʻyicha mavjud yondashuvlar, masalaning turli shakllarda matematik qoʻyilishi tavsiflangan. Bunda asosiy eʼtibor berilgan maʼlumotlarda interval aniqmasliklarning mavjudligiga qaratiladi.

Birinchi paragrafda xos qiymat masalalarining umumiy tasnifi, xususan, xos qiymatlar standart masalasining toʻliq va qismiy muammolari, simmetrik va nosimmetrik matritsalar sinflari boʻyicha masalaning matematik qoʻyilishi qaralgan. Shuningdek, xos qiymatlar muammosini yechish usullarining asosiy gʻoyalari toʻgʻri va iteratsiyali usullar uchun tahlil qilingan.

I bobning ikkinchi paragrafida esa, interval matritsalar uchun xos qiymatlar masalasini tadqiq qilishda zarur bo‘lgan interval analizning asosiy tushunchalari keltirilgan.

Xalqaro interval belgilashlar sistemasiga ko‘ra interval kattaliklar matnda qalin va yotiq matematik shriftlar bilan ajratiladi, interval bo‘lmagan (haqiqiy) kattaliklar esa alohida ajratilmaydi.

Ta’rif 1. *Faraz qilaylik,* $\underline{a}$ *va* $\overline{a}$ *sonlar* $\underline{a} \le \overline{a}$ *shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar bo‘lsin. U holda* $\boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \le x \le \overline{a}\}$ *to‘plam* ***haqiqiy interval*** *yoki oddiy so‘z bilan,* ***haqiqiy interval son*** *deb ataladi (bunda “haqiqiy” so‘zi kompleks intervaldan farqlash uchun qo‘llaniladi). Barcha haqiqiy intervallar to‘plami* $\mathbb{IR}$ *kabi belgilanadi. Haqiqiy* $\underline{a}$ *va* $\overline{a}$ *sonlar esa, mos ravishda* $\boldsymbol{a}$ *intervalning quyi va yuqori chegaralari deyiladi.*

Ta’rif 2. *Faraz qilaylik,* $\boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ *- haqiqiy interval. U holda*

- $\boldsymbol{a}$ *intervalning* ***kengligi*** *deb* $\operatorname{wid}\boldsymbol{a} = \overline{a} - \underline{a}$ *songa aytiladi;*
- $\boldsymbol{a}$ *interval* ***radiusi*** *deb* $\operatorname{rad}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\left(\overline{a} - \underline{a}\right)$ *sonni aytamiz;*
- $\boldsymbol{a}$ *intervalning* ***o‘rtasi*** $\operatorname{mid}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\left(\underline{a} + \overline{a}\right)$ *kabi aniqlanadi;*
- $\boldsymbol{a}$ *interval sonining* ***absolyut qiymati (moduli*** *yoki* ***magnitudasi)*** *deb* $|\boldsymbol{a}| = \max\{|a| \mid a \in \boldsymbol{a}\} = \max\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\}$ *songa aytiladi.*

Ta’rif 3. *Kvadrat interval matritsa* $\boldsymbol{A} := [\underline{A}, \overline{A}] = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ \underline{A} \le A \le \overline{A}\right\}$ *kabi aniqlanadi,* $\underline{A}, \overline{A} \in R^{n\times n}$ *matritsalar esa* ***chegaraviy matritsalar*** *deyiladi.*

Interval $\boldsymbol{A}$ matritsaning *o‘rta* va *radius* matritsalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\operatorname{mid}\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A}), \qquad \operatorname{rad}\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A}).$$

Anglash mumkinki, $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}$ va $\operatorname{rad}\boldsymbol{A}$ matritsalar elementlari interval sonlar emas, ya’ni haqiqiy sonlardan iborat. U holda interval matritsani quyidagi ko‘rinishda tasvirlash mumkin:

$$\boldsymbol{A} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] = \left[\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A}, \operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\right] =$$

$$= \left\{A \mid \left(\left|A - \operatorname{mid}\boldsymbol{A}\right| \le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\right) \text{ yoki } \left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \le A \le \operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\right)\right\},$$

bu yerda tengsizliklar matritsa elementlariga nisbatan qo‘llaniladi.

Ta’rif 4. *Interval* $\boldsymbol{A}$ *matritsa* ***simmetrik matritsa*** *deyiladi, agar* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ *tenglik o‘rinli bo‘lsa va u quyidagicha aniqlanadi:*

$$\boldsymbol{A}^S = \left\{A \mid A = A^T,\ A \in \boldsymbol{A}\right\}.$$

Ta’rif 5. *Ixtiyoriy haqiqiy matritsa* $n \times n$ *o‘lchovli* $\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}_{ij}\right) \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ *interval matritsaning* ***qirra matritsasi*** *deyiladi, agar uning* ij *- elementi* $\underline{a}_{ij}$ *yoki* $\overline{a}_{ij}$ *lardan iborat bo‘lsa. Interval* $\boldsymbol{A}$ *matritsaning barcha qirra matritsalari to‘plami quyidagicha aniqlanadi:*

$$\operatorname{vert} \boldsymbol{A} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = (a_{ij}),\ a_{ij} \in \{\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\} \right\}.$$

Uchinchi paragrafda interval xos qiymatlar muammosining turli matematik qo‘yilishi tahlil qilingan va xos qiymatlar to‘plamini interval baholash variantlari taklif etilgan.

Algebraik xos qiymatlar masalasi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ interval kvadrat matritsa uchun quyidagi tenglama bilan aniqlanadi

$$\boldsymbol{A}x = \lambda x, \tag{1}$$

u holda (1) sistemaning barcha xos qiymatlari to‘plami, umumiy holda $\mathbb{C}$ kompleks sonlar maydonida soha tashkil qiladi va u kompakt to‘plamdir, ya’ni

$$\Lambda(\boldsymbol{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A \in \boldsymbol{A},\ x \neq 0,\ Ax = \lambda x\}. \tag{2}$$

Xos qiymatlar to‘plami Λ ni topish masalasi, bevosita quyidagi sistemani yechishga olib keladi

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\| = 1, \quad A \in \boldsymbol{A}, \quad \lambda \in \boldsymbol{\lambda}, \tag{3}$$

bu yerda $\|\cdot\|$ - ixtiyoriy vektor normasi. Interval xos qiymatlar masalalarini yechishda interval amallarni haqiqiy (an’anaviy) yechish usullariga to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘llash samara bermaydi, bunday yondashuv “*O‘rash effekti*” (ing. “*Wrapping effect*”, ruscha “*Эффект обёртывания*”) deb nomlanuvchi holatga olib kelishi mumkin, ya’ni hisoblangan interval xos qiymatlar kengligi sezilarli darajada oshib ketishi mumkin.

Interval analizda chiziqli (shuningdek, chiziqli bo‘lmagan) interval koeffitsiyentli tenglamalar sistemasining yechimlari to‘plamini baholashda eng ko‘p qo‘llaniladigan ikkita masala qaraladi, ular *tashqi* va *ichki* interval baholash masalalaridir. Umumiy holda, interval baholash deganda biz yechim joylashgan qiymatlar sohasini uning interval bahosi bilan almashtirishni tushunamiz. Keyin, xos qiymatlar to‘plamini baholash masalasi uchun biz ushbu tushunchalarning ta’rifini ixtiyoriy haqiqiy interval matritsa uchun qayta shakllantiramiz, chunki interval simmetrik matritsalar ixtiyoriy interval matritsaning xususiy holi hisoblanadi.

Ta’rif 6. *Faraz qilaylik,* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ *- ixtiyoriy interval matritsa bo‘lsin. U holda interval xos qiymatlar masalasini yechishda:*

1) ***tashqi interval baholash*** *deyiladi, agar bizdan* $\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Re}} + j\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Im}} \in \mathbb{IC}$ *intervallarni topish talab qilingan bo‘lib, ularning chekli birlashmalari yechim to‘plam* Λ *ni tashqaridan qoplay olsa, ya’ni* $\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i \supseteq \Lambda$.
2) ***ichki interval baholash*** *deyiladi, agar bizdan* $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{Re}} + j \cdot \boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{Im}} \in \mathbb{IC}$ *intervallarni topish talab qilingan bo‘lib, ularning chekli birlashmalari yechim to‘plam* Λ *ning ichida joylashgan bo‘lsa, ya’ni* $\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mu}_i \subseteq \Lambda$.

Interval baholash masalalarida eng kichik “*tashqi*” va eng katta “*ichki*” baholar optimal hisoblanadi. Ushbu dissertatsiyada faqat tashqi interval baholash masalalari qaralgan va bizni eng kichik kenglikdagi interval yechimlar qiziqtiradi.

Birinchi bobning to‘rtinchi paragrafida interval xos qiymatlar standart masalasi buzilgan (ing. “perturbed”, ruscha «возмущенная») masala sifatida ko‘rib chiqiladi:

$$\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)x=\lambda x, \qquad |\delta A|\le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}, \tag{4}$$

bunda $\lambda=\lambda^{Re}+j\lambda^{Im}$, $x=x^{Re}+jx^{Im}$, shuningdek,

$$\lambda_i^{Re}\in\boldsymbol{\lambda}_i^{Re}=\left[\underline{\lambda}_i^{Re},\overline{\lambda}_i^{Re}\right], \quad \lambda_i^{Im}\in\boldsymbol{\lambda}_i^{Im}=\left[\underline{\lambda}_i^{Im},\overline{\lambda}_i^{Im}\right], \quad i=1,2,\ldots,n,$$

hamda

$$\underline{\lambda}_i^{Re}=\min_{A\in\boldsymbol{A}}\left\{\operatorname{Re}\left(\lambda_i(A)\right)\right\}, \quad \overline{\lambda}_i^{Re}=\max_{A\in\boldsymbol{A}}\left\{\operatorname{Re}\left(\lambda_i(A)\right)\right\}, \; i=1,2,\ldots,n,$$

$$\underline{\lambda}_i^{Im}=\min_{A\in\boldsymbol{A}}\left\{\operatorname{Im}\left(\lambda_i(A)\right)\right\}, \quad \overline{\lambda}_i^{Im}=\max_{A\in\boldsymbol{A}}\left\{\operatorname{Im}\left(\lambda_i(A)\right)\right\}, \; i=1,2,\ldots,n.$$

Oettli-Prager teoremasiga asosan (3) masala uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\left|\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\,x-\lambda x\right|\le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|x|. \tag{5}$$

Haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib olish uchun (5) tengsizlikni quyidagicha yozamiz

$$\left|\operatorname{mid}\boldsymbol{A}(x^{\mathrm{Re}}+jx^{\mathrm{Im}})-(\lambda^{\mathrm{Re}}+j\lambda^{\mathrm{Im}})(x^{\mathrm{Re}}+jx^{\mathrm{Im}})\right|\le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|x^{\mathrm{Re}}+jx^{\mathrm{Im}}|,$$

keyin, bir nechta amallardan keyin quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned} &|\lambda^{\mathrm{Re}}x^{\mathrm{Re}}-\lambda^{\mathrm{Im}}x^{\mathrm{Im}}-\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\,x^{\mathrm{Re}}|\le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|x^{\mathrm{Re}}|,\\ &|\lambda^{\mathrm{Re}}x^{\mathrm{Im}}+\lambda^{\mathrm{Im}}x^{\mathrm{Re}}-\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\,x^{\mathrm{Im}}|\le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|x^{\mathrm{Im}}|. \end{aligned} \tag{6}$$

Anglash mumkinki, (6) tengsizliklar bevosita $\boldsymbol{A}x\cap\lambda x\ne\varnothing$ shartdan kelib chiqadi, ya’ni $\boldsymbol{A}x=\left[\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\;x-\operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|x|,\,\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\;x+\operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|x|\right]$.

Demak, $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A$ matritsalar oilasi uchun har bir xos (λ,x) juftlik $|\delta A|\le\operatorname{rad}\boldsymbol{A}$ shart bilan (6) moslik mezonini qanoatlantiradi.

(4) masalani $\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)\left(x^{\mathrm{Re}}+jx^{\mathrm{Im}}\right)=\left(\lambda^{\mathrm{Re}}+j\lambda^{\mathrm{Im}}\right)\left(x^{\mathrm{Re}}+jx^{\mathrm{Im}}\right)$ ko‘rinishda yozib, uni $y^*x=\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T x^{\mathrm{Re}}+\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T x^{\mathrm{Im}}=1$ shaklda normallashtirilgan qo‘shma kompleks $y^*=y^{\mathrm{Re}}-j\,y^{\mathrm{Im}}$ vektorga ko‘paytirish orqali ixtiyoriy haqiqiy interval matritsa uchun xos qiymatlarning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib olishga erishamiz:

$$\lambda^{\mathrm{Re}}=\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)x^{\mathrm{Re}}+\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)x^{\mathrm{Im}}, \tag{7}$$

$$\lambda^{\mathrm{Im}}=\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)x^{\mathrm{Im}}-\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)x^{\mathrm{Re}}. \tag{8}$$

Dissertatsiyaning **“Xos qiymatlar muammosini yechishning interval usullari va algoritmlarini ishlab chiqish”** deb nomlangan ikkinchi bobi xos qiymatlar to‘liq va qismiy muammolarini yechish usullarini tadqiq etishga bag‘ishlangan. Bunda haqiqiy interval matritsalarning simmetrik va nosimmetrik sinflari qaraladi.

Ushbu bobning birinchi paragrafi uchta qismparagrafga bo‘lingan. Birinchi qismparagrafda simmetrik, ikkinchi bo‘limda nosimmetrik interval matritsalarning har bir interval xos qiymatini topish masalasi yechilgan. Oxirgi uchinchi bo‘limda boshqa mualliflarning natijalari bilan taqqoslash asosida ishlab chiqilgan usullarning samaradorligini ko‘rsatuvchi sonli natijalar keltirilgan.

Simmetrik hol uchun $|\delta A^S|\le\operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S$ shart bilan quyidagi masala qaraladi:

$$\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S+\delta A^S\right)x=\lambda x. \tag{9}$$

Bunda interval baholash masalasi quyidagicha qo‘yiladi:

$$\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{A}^S=\left\{A^S \;\middle|\; |\boldsymbol{A}^S-\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S|\le \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\right\} \textit{ simmetrik interval} \\ \textit{matritsa uchun } \Lambda(\boldsymbol{A}^S)=\left\{\lambda\in\mathbb{R}\mid A^Sx=\lambda x,\ \|x\|_2=1,\ A^S\in\boldsymbol{A}^S\right\} \\ \textit{to`plamdan } A^S\in\boldsymbol{A}^S \textit{ matritsalarning har bir xos qiymati} \\ \textit{uchun interval baholari topilsin} \end{array}\right).$$

(5) tengsizlik $\Lambda\left(\boldsymbol{A}^S\right)$ to‘plamni baholashning sodda usulini taqdim etadi. Sababi (9) sistemaning har bir xos juftligi (λ, x)

$$-\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot|x|\le \mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S x-\lambda x\le \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot|x|$$

tengsizlikni qanoatlantiradi, ya’ni $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S x-\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot|x|\le\lambda x\le \mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S x+\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot|x|$. Tengsizlikni chap tomondan x^T ga ko‘paytirib ($x^Tx=1$), quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{x^T\cdot\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S\cdot x-|x|^T\cdot\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot|x|}{x^Tx}\le\lambda\le\frac{x^T\cdot\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S\cdot x+|x|^T\cdot\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot|x|}{x^Tx}. \tag{10}$$

Ushbu (10) munosabat, berilgan interval matritsaning butun spektri bo‘yicha eng katta va eng kichik haqiqiy xos qiymatlarni beradi. Shu sababli har bir $\lambda_i,\ i=1,2,\dots,n,$ aniq xos qiymat uchun barcha buzilish δA^S matritsalarida mos x^i xos vektorlari komponentlari ishorasi o‘zgarmaydi deb hisoblaymiz. Ushbu farazga ko‘ra diagonal matritsani, ya’ni ishora matritsasini $S^i=\mathrm{diag}\left(\mathrm{sgn}(x_1^i),\dots,\mathrm{sgn}(x_n^i)\right),\ \ x_j^i\ne 0$ kabi aniqlaymiz, bunda xos vektorlar komponentlarining ishorasini

$$(\mathrm{sgn}\,x)_i=\begin{cases}1, & \text{agar } x_i\ge 0,\\ -1, & \text{agar } x_i<0,\end{cases}\qquad i=1,2,\dots,n, \tag{11}$$

formula bilan aniqlashni taklif qilamiz va ko‘rinib turibdiki, $S^ix^i=|x^i|>0$. Ishora matritsasi S^i, o‘rta matritsa $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}$ ning xos vektorlari komponentlarining (11) formula bilan aniqlangan qiymatlaridan hosil bo‘ladi. (10) dan $\overline{\lambda}$ va $\underline{\lambda}$ larni baholash uchun taniqli Kun-Takker teoremasiga asosan va $x^Tx=1$ ni hisobga olib quyidagi baholarni olamiz:

$$\lambda=\max_{\|x\|_2=1}\left\{x^T\cdot\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S\cdot x+|x|^T\cdot\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot|x|\right\}\le\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S+S^i\cdot\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot S^i=\overline{\lambda}, \tag{12a}$$

$$\lambda=\min_{\|x\|_2=1}\left\{x^T\cdot\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S\cdot x-|x|^T\cdot\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot|x|\right\}\ge\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S-S^i\cdot\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot S^i=\underline{\lambda}, \tag{12b}$$

bunda λ - Lagranj ko‘paytuvchisi uchun $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S x+S^i\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S S^i x-\lambda x=0$ va $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S x-S^i\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S S^i x-\lambda x=0$.

(12a)-(12b) formulalarda olingan matritsalar $\underline{\lambda}$ va $\overline{\lambda}$ xos qiymatlar uchun mos qirra matritsalarini ifodalaydi, ularni $\underline{B}=\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S-S^i\cdot\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot S^i$ va $\overline{B}=\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^S+S^i\cdot\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}^S\cdot S^i$ kabi belgilaymiz. Simmetrik muammoni yechishda qirra matritsalarining umumiy soni $2n$ ga teng, bu esa boshqa mavjud usullardan kam ekanligini qayd etish mumkin. Masalan, D. Hertz usuli uchun bu son 2^n ga teng.

Teorema 1. *Faraz qilaylik,* $\boldsymbol{A}^S = \left[\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S - \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S, \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S + \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S\right]$ *- simmetrik interval matritsa bo'lsin. Agar* $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S$ *matritsaning* x^i *xos vektorlari komponentlarining ishoralari* $\boldsymbol{A}^S$ *interval matritsa uchun ham o'zgarmas bo'lsa, u holda* $A^S \in \boldsymbol{A}^S$ *matritsalarning* λ_i *xos qiymatlari quyidagi intervalda bo'ladi*

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \left[\lambda_i(\underline{B}),\ \lambda_i(\overline{B})\right],$$

bu yerda $i = 1, 2, ..., n$, $\underline{B}, \overline{B}$ *- mos qirra matritsalari.*

Simmetrik xos qiymatlar masalasini yechish uchun taklif etilayotgan usulga mos hisoblash algoritmi ishlab chiqilgan va dissertatsiyada psevdokodlar shaklida berilgan.

Nosimmetrik holat uchun ham (4) masala qaraladi. (7) va (8) formulalarga ko'ra xos qiymatlarning haqiqiy va mavhum qismlari ajratib olingandan so'ng, mos ravishda xos qiymatlar chegaralari $\overline{\lambda}^{\mathrm{Re}}$, $\underline{\lambda}^{\mathrm{Re}}$, $\overline{\lambda}^{\mathrm{Im}}$, $\underline{\lambda}^{\mathrm{Im}}$ baholanadi. Buning uchun (7) formulaga muvofiq, haqiqiy qism uchun quyidagi baholar olingan:

$$\overline{\lambda}^{\mathrm{Re}} = \lambda^{\mathrm{Re}}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ \left| x^{\mathrm{Re}}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T + x^{\mathrm{Im}}\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \right|\right), \tag{13a}$$

$$\underline{\lambda}^{\mathrm{Re}} = \lambda^{\mathrm{Re}}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ \left| x^{\mathrm{Re}}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T + x^{\mathrm{Im}}\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \right|\right), \tag{13b}$$

bunda quyidagi shartlar o'rinli

$$\begin{gathered}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Re}} + \left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Im}} = 1, \qquad \left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Re}} - \left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Im}} = 0, \\ p_{kl}^i\left(y_k^{\mathrm{Re}} \cdot x_l^{\mathrm{Re}} + y_k^{\mathrm{Im}} \cdot x_l^{\mathrm{Im}}\right) > 0, \qquad k, l = 1, 2, \ldots, n,\end{gathered} \tag{14}$$

"$\circ$" – belgi matritsalar skalyar ko'paytmasini bildiradi, ya'ni mos indekslar bo'yicha ko'paytmasi va $A \circ B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$ formula bo'yicha hisoblanadi. Bu yerda xos qiymatlar haqiqiy qismi uchun $P^i = (p_{kl}^i)$ ishora matritsasi $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}$ matritsaning mos chap va o'ng xos vektorlari $x, y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komponentlari yordamida hosil bo'lgan $\left(y_k^{\mathrm{Re}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Re}}\right)^i + \left(y_k^{\mathrm{Im}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Im}}\right)^i$ ifoda bilan aniqlanadi:

$$P^i = (p_{kl}^i) = \operatorname{sgn}\left(\left(y_k^{\mathrm{Re}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Re}}\right)^i + \left(y_k^{\mathrm{Im}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Im}}\right)^i\right), \quad k, l = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Analog tarzda, (8) formulaga asosan mavhum qismlar $\overline{\lambda}^{\mathrm{Im}}$ va $\underline{\lambda}^{\mathrm{Im}}$ uchun ham baholar olingan:

$$\overline{\lambda}^{\mathrm{Im}} = \lambda\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ \left| x^{\mathrm{Im}}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T - x^{\mathrm{Re}}\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \right|\right), \tag{16a}$$

$$\underline{\lambda}^{\mathrm{Im}} = \lambda\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ \left| x^{\mathrm{Im}}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T - x^{\mathrm{Re}}\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \right|\right), \tag{16b}$$

quyidagi shartlar asosida

$$\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Re}} + \left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Im}} = 0, \qquad \left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Im}} - \left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Re}} = 1,$$
$$p_{kl}^i \left(y_k^{\mathrm{Re}} \cdot x_l^{\mathrm{Im}} - y_k^{\mathrm{Im}} \cdot x_l^{\mathrm{Re}}\right) < 0, \quad k,l = 1,2,\ldots,n. \tag{17}$$

Bu hol uchun ishora matritsasi quyidagicha aniqlanadi:

$$Q^i = (q_{kl}^i) = \mathrm{sgn}\left(\left(y_k^{\mathrm{Re}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Im}}\right)^i - \left(y_k^{\mathrm{Im}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Re}}\right)^i\right), \quad k,\, l = 1,2,\ldots,n. \tag{18}$$

Nihoyat (13a)-(13b) va (16a)-(16b) larga muvofiq, barcha $A \in \boldsymbol{A}$ haqiqiy matritsalarning har bir $\lambda_i = \lambda_i^{\mathrm{Re}} + j\lambda_i^{\mathrm{Im}}$ xos qiymatlari chegaralari uchun formulalar olingan:

$$\lambda_i^{\mathrm{Re}}\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ P^i\right) \le \lambda^{\mathrm{Re}} \le \lambda_i^{\mathrm{Re}}\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ P^i\right),$$
$$\lambda_i^{\mathrm{Im}}\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ Q^i\right) \le \lambda^{\mathrm{Im}} \le \lambda_i^{\mathrm{Im}}\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ Q^i\right).$$

Bu yerda $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} \pm \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ P^i$ va $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} \pm \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ Q^i$ lar berilgan nosimmetrik interval matritsalar uchun qirra matritsalarni ifodalaydi.

Teorema 2. *Faraz qilaylik* $\boldsymbol{A} = \left[\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A},\, \mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}\right] \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ - *ixtiyoriy haqiqiy interval matritsa bo‘lsin. Agar* $\boldsymbol{A}$ *interval matritsaning* $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}$ *o‘rta matritsasi turli* $\lambda_i = \lambda_i^{\mathrm{Re}} + j\lambda_i^{\mathrm{Im}}$ *xos qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda barcha haqiqiy* $A \in \boldsymbol{A}$ *matritsalarning xos qiymatlari uchun quyidagi baho o‘rinli:*

$$\lambda_i^{\mathrm{Re}}\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ P^i\right) \le \lambda^{\mathrm{Re}} \le \lambda_i^{\mathrm{Re}}\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ P^i\right),$$
$$\lambda_i^{\mathrm{Im}}\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ Q^i\right) \le \lambda^{\mathrm{Im}} \le \lambda_i^{\mathrm{Im}}\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ Q^i\right),$$

bunda $P^i = (p_{kl}^i) = \mathrm{sgn}\left(\left(y_k^{\mathrm{Re}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Re}}\right)^i + \left(y_k^{\mathrm{Im}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Im}}\right)^i\right)$ *va*

$Q^i = (q_{kl}^i) = \mathrm{sgn}\left(\left(y_k^{\mathrm{Re}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Im}}\right)^i - \left(y_k^{\mathrm{Im}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Re}}\right)^i\right)$ *(*$k,\, l = 1,2,\ldots,n$*)* – $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}$ *matritsaning chap va o‘ng xos vektorlari komponentlari yordamida aniqlanadigan ishora matritsalari.*

Ushbu usulda hosil bo‘ladigan qirra matritsalarining umumiy soni $4n$ ga teng. Taklif etilayotgan usul uchun ham mos hisoblash algoritmi ishlab chiqilgan va dissertatsiyada psevdokodlar shaklida keltirilgan.

2.1.3-bo‘limda taklif etilayotgan usullar asosida simmetrik va nosimmetrik interval matritsalar uchun xos qiymatlar to‘liq muammosi bo‘yicha olingan sonli natijalar keltirilgan. Ushbu bo‘limda keltirilgan sonli natijalar asosan qiyosiy taqqoslash xarakteriga ega. Olingan sonli natijalarni boshqa mualliflarning natijalari bilan solishtirish imkoniyatiga ega bo‘lish maqsadida, keltirilgan barcha misollar ushbu sohadagi boshqa tadqiqotchilarning ishlaridan olingan.

Hisoblash tajribalari Intel® Core™ i3-3217U, CPU 1.83 GHz protsessorli va 4 GB DDR3 tezkor xotirali shaxsiy kompyuterda o‘tkazildi. Ishlab chiqilgan modulli dasturlarning ba’zi kodlari Embarcadero Dev-C++ v.6.3. dasturlash vositasida yozilgan bo‘lsa, ba’zilari GNU Octave v.4.2.1. matematik sistemasining interval hisoblashlar uchun mo‘ljallangan “Octave-interval v.3.2.0-3_amd64” dasturiy majmuaga moslab yozilgan. Ushbu dasturiy majmua interval arifmetika uchun IEEE Std 1788-2015 standartga mos keladi.

Misol 1. M.Hladik ishidan $\boldsymbol{A}^S \in \mathbb{IR}^{3\times 3}$ simmetrik interval matritsani qaraymiz:

$$\boldsymbol{A}^S = \begin{bmatrix} [0,2] & [-7,3] & [-2,2] \\ [-7,3] & [4,8] & [-3,5] \\ [-2,2] & [-3,5] & [1,5] \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

O‘rta va radius matritsalar mos ravishda quyidagicha aniqlanadi:

$$\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S$ matritsaning xos qiymatlari va ularga mos xos vektorlari hisoblanadi, shuningdek, S^i ishora matritsasi aniqlanadi:

$\lambda_1 = 0.2564$, $\quad x^1 = (0.9298,\ 0.3457,\ -0.1260)$, $\quad S^1 = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$,

$\lambda_2 = 2.8145$, $\quad x^2 = (0.1971,\ -0.1788,\ 0.9639)$, $\quad S^2 = \operatorname{diag}(1, -1, 1)$,

$\lambda_3 = 6.9291$, $\quad x^3 = (-0.3107,\ 0.9211,\ 0.2344)$, $\quad S^3 = \operatorname{diag}(-1, 1, 1)$.

Jadval 1 da (19) matritsa uchun turli mualliflar tomonidan ishlab chiqilgan algoritmlar bo`yicha olingan sonli natijalari keltirilgan: (R) - J.Rohn algoritmi, (D1), (D2), (I1), (I2), (DD1), (DI1), (B) - algoritmlar esa M.Hladik va uning hammualliflari tomonidan taklif etilgan, (O) - D.Gertz algoritmi, jadvalning oxirgi satridagi sonli natijalar biz taklif etayotgan algoritm bilan olingan, umumiylikni saqlash maqsadida biz uni (N)-algoritm deb belgiladik.

Jadval 1. (19) simmetrik interval matritsa uchun sonli natijalar.

	$\left[\underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1\right]$	$\operatorname{wid}(\boldsymbol{\lambda}_1)$	$\left[\underline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_2\right]$	$\operatorname{wid}(\boldsymbol{\lambda}_2)$	$\left[\underline{\lambda}_3, \overline{\lambda}_3\right]$	$\operatorname{wid}(\boldsymbol{\lambda}_3)$
(R)	[-8.9026, 9.4154]	18.3180	[-6.3445, 11.9734]	18.3179	[-2.2298, 16.0881]	18.3179
(D1)	[-8.9026, 2.0000]	10.9026	[-2.5616, 6.0000]	8.5616	[4.0000, 15.3275]	11.3275
(D2)	[-8.9026, 2.0000]	10.9026	[-2.5616, 6.0000]	8.5616	[4.0000, 15.3275]	11.3275
(I1)	[-8.9026, 6.3760]	15.2786	[-3.3052, 10.4907]	13.7959	[-0.7436, 16.0881]	16.8317
(I2)	[-8.9026, 6.3760]	15.2786	[-3.3052, 10.4907]	13.7959	[-0.7436, 16.0881]	16.8317
(DD1)	[-8.3759, 2.0000]	10.3759	[-2.0000, 6.0000]	8.0000	[4.0000, 15.3275]	11.3275
(DI1)	[-8.3759, 6.7850]	15.1609	[-2.9115, 10.8445]	13.7560	[-0.9115, 16.3089]	17.2204
(B)	[-8.3759, 2.0000]	10.3759	[-2.0000, 6.0000]	8.0000	[4.0000, 15.3275]	11.3275
(O)	[-7.8184, 0.7522]	8.5706	[?, ?]	?	[6.3209, 15.3275]	9.0066
(N)	[-7.8184, 0.5921]	8.4105	[2.1194, 3.5639]	1.4445	[6.3209, 15.3275]	9.0066

Tashqi baholash masalalarida interval yechim optimal hisoblanadi, agar u iloji boricha minimal interval kenglikka ega bo‘lsa va albatta, qaralayotgan interval sistemaning barcha haqiqiy yechimlarini o‘z ichiga olsa. Bunda $\operatorname{wid}(\boldsymbol{\lambda}_i) = \overline{\lambda}_i - \underline{\lambda}_i$ funksiya interval yechimlar kengligini baholaydi. 1-jadvaldan (N)-algoritmi yordamida olingan sonli natijalar, boshqa algoritmlar natijalaridan yaxshiroq ekanligini ko‘rish mumkin.

Misol 2. Quyidagi nosimmetrik interval matritsani qaraymiz:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [-3,-2] & [4,5] & [4,6] & [-1,1.5] \\ [-4,-3] & [-4,-3] & [-4,-3] & [1,2] \\ [-5,-4] & [2,3] & [-5,-4] & [-1,0] \\ [-1,0.1] & [0,1] & [1,2] & [-4,2.5] \end{pmatrix}. \tag{20}
$$

Ushbu nosimmetrik interval matritsa uchun to‘liq muammoni yechish uchun ishlab chiqilgan usul bo‘yicha hisoblangan xos qiymatlar chegaralari 2-jadvalda keltirilgan.

Jadval 2. (20) matritsa uchun xos qiymatlarning interval bahosi.

$\boldsymbol{\lambda}_i$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$
$\boldsymbol{\lambda}_1$	-3.8502	-3.4325	6.4318	6.9672
$\boldsymbol{\lambda}_2$	-3.8502	-3.4325	-6.8986	-6.5645
$\boldsymbol{\lambda}_3$	-4.6471	-2.1729	0.9043	0.0000
$\boldsymbol{\lambda}_4$	-2.7729	2.6921	-0.9043	0.0000

Olingan sonli natijalarni taqqoslash uchun *Jadval 2* dan interval yechimlar birlashmasini topish orqali $\Lambda(\boldsymbol{A})$ yechim to‘plamning interval qobig‘i topiladi:

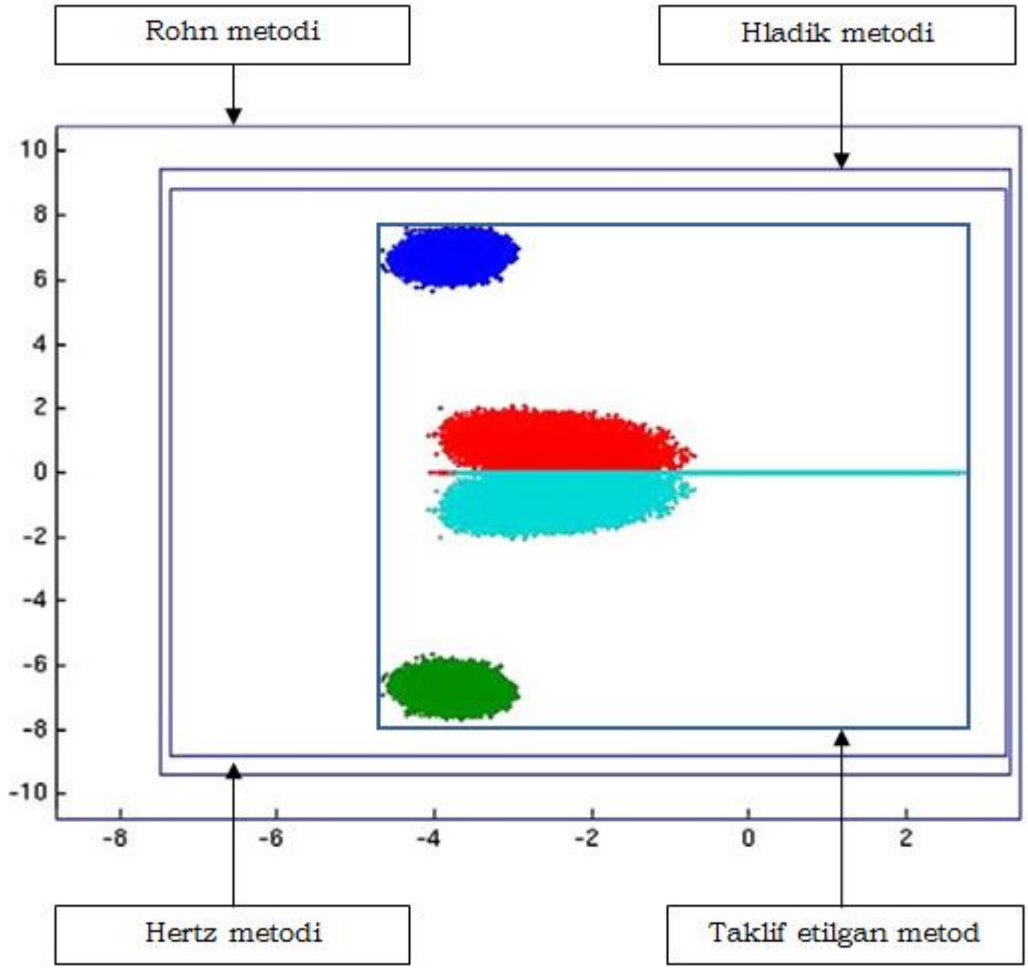
$$
\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{Re}} = \bigcup_{i=1}^{4} \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Re}} = [-4.6471,\ 2.6921], \qquad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{Im}} = \bigcup_{i=1}^{4} \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Im}} = [-6.8986,\ 6.9672].
$$

Chunki (20) matritsa boshqa mualliflar tadqiqotlarida har bir xos qiymatni baholash emas, balki butun yechimlar to‘plami $\Lambda(\boldsymbol{A})$ ni baholashda qo‘llanilgan.

Jadval 3. (20) matritsa uchun $\Lambda(\boldsymbol{A})$ xos qiymatlar yechim to‘plamining interval baholari.

Metodlar	$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{Re}}$	$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{Im}}$
Rohn metodi	[-8.8221, 3.4408]	[-10.7497, 10.7497]
Hladik metodi	[-7.4848, 3.3184]	[-9.4224, 9.4224]
Hertz metodi	[-7.3691, 3.2742]	[-8.7948, 8.7948]
Taklif etilgan metod	[-4.6471, 2.6921]	[-6.8986, 6.9672]

*3-jadval*dan ko‘rinib turibdiki, biz taklif etgan usul bo‘yicha olingan natijalar boshqa mualliflarning usulida olingan yechimlarga nisbatan optimal, ya’ni minimal kenglikka ega bo‘lgan interval yechimlar olingan. Olingan natijalarning grafik interpretatsiyasi quyidagi rasmda tasvirlangan (Rasm 1).



Rasm 1. (20) matritsa uchun xos qiymatlar yechim to‘plami va uning interval qobiqlari.

Bu yerda barcha haqiqiy matritsalar xos qiymatlari to‘plamining aproksimatsiyasi Monte-Karlo usuli yordamida tasvirlangan. Turli xil ranglar xos qiymatlarning uzluksiz joylashuviga ko‘ra bir necha guruhlarga ajralgan. Barcha xos qiymatlar uyumlari interval qobiqlar yordamida qoplangan, ya’ni to‘rtta to‘rtburchaklar bilan chegaralangan. Anglash mumkinki, kompleks interval shaklidagi xos qiymatlar kompleks sonlar tekisligida ma’lum bir to‘rtburchakni ifodalaydi. Rasm 1 da, olingan interval baholardan ko‘rinib turibdiki, eng katta to‘rtburchak Rohn usuliga tegishli, ya’ni u yechim to‘plam haqida kam ma’lumot beradi. Eng kichik to‘rtburchak - bu biz taklif qilgan usul bilan olingan kompleks intervallar bo‘lib, u boshqa usullar natijalariga nisbatan to‘liqroq sohani ifodalaydi.

II bobning ikkinchi paragrafida simmetrik interval matritsalar uchun xos qiymatlar qismiy muammosini yechish bo‘yicha asosiy natijalar keltirilgan. Bunda iteratsion usullar qaralgan bo‘lib, xususan, interval matritsalar uchun darajali usul va skalyar ko‘paytmalar usuli algoritmlarining modifikatsiyalari ishlab chiqilgan.

Simmetrik interval matritsa uchun barcha xos qiymatlar to‘plami quyidagicha yoziladi:

$$\Lambda(\boldsymbol{A}^s) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists A \in \boldsymbol{A}^s,\ \ \exists x \neq 0,\ \ ,\ Ax = \lambda x\}$$

va bu yerda $\boldsymbol{\lambda}_1 \in \mathbb{IR}$ dominant xos qiymat va unga mos $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{IR}^n$ dominant xos vektorni topish talab etiladi. O‘z navbatida barcha $A^s \in \boldsymbol{A}^s$ matritsalar uchun: $\boldsymbol{\lambda}_1$ -

barcha dominant $\lambda_1^* \in \mathbb{R}$ xos qiymatlarni, $\boldsymbol{x}_1$ - esa unga mos barcha dominant $x_1^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ xos vektorlarni o‘z ichiga oladi.

Ishlab chiqilgan algoritmlarning asosiy g‘oyasi *1-teoremaga* asoslanadi, ya’ni dastlab dominant xos qiymatlar uchun qirra matritsalar topiladi, so‘ngra algoritm quyi va yuqori chegara matritsalar uchun o‘z ishini davom ettiradi. Natijada interval matritsa uchun dominant xos qiymatlarga mos dominant interval topiladi.

Simmetrik interval matritsalar uchun darajali usul va skalyar ko‘paytmalar usullari algoritmlarining modifikatsiyasi dissertatsiyada psevdokodlar shaklida berilgan va boshlang‘ich berilganlar asosida olingan natijalar qiyosiy tahlil qilingan.

Misol 3. “Prujina-massa” mexanik sistemasi turg‘unligini o‘rganish jarayonida hosil bo‘lgan 4×4 o‘lchovli uch diagonalli simmetrik interval matritsani qaraymiz (Z.Qui va boshqalarning ishidan olingan):

$$\boldsymbol{A}^S = \begin{pmatrix} [2975,3025] & [-2015,-1985] & 0 & 0 \\ [-2015,-1985] & [4965,5035] & [-3020,-2980] & 0 \\ 0 & [-3020,-2980] & [6955,7045] & [-4025,-3975] \\ 0 & 0 & [-4025,-3975] & [8945,9055] \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Jadval 4. (21) matritsa uchun hisoblash natijalari.

Boshl. yaqinl. vektori	Darajali usulning modifikatsiyalangan algoritmi asosida olingan natijalar					Skalyar ko‘paytmalar usulining modifikatsiyalangan algoritmi asosida olingan natijalar				
$y^{(0)}$	l	$\underline{\lambda}_1$	r	$\overline{\lambda}_1$	$\mathrm{wid}\left(\left[\underline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_1\right]\right)$	l	$\underline{\lambda}_1$	r	$\overline{\lambda}_1$	$\mathrm{wid}\left(\left[\underline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_1\right]\right)$
(1;1;1;1)	14	12560.83398	14	12720.22559	159,39161	14	12560.83496	14	12720.22558	159,39062
(1;1;1;0)	11	12560.83594	11	12720.22461	159,38867	11	12560.83496	11	12720.22558	159,39062
(1;1;0;1)	10	12560.83398	11	12720.22656	159,39258	10	12560.83398	11	12720.22460	159,39062
(1;1;0;0)	14	12560.83398	14	12720.22363	159,38965	14	12560.83496	14	12720.22460	159,38964
(1;0;1;1)	22	12560.83594	22	12720.22559	159,38965	37	12560.83789	37	12720.22851	159,39062
(1;0;1;0)	13	12560.83594	13	12720.22461	159,38867	13	12560.83594	13	12720.22461	159,38867
(1;0;0;1)	14	12560.83496	14	12720.22461	159,38965	14	12560.83496	14	12720.22461	159,38965
(1;0;0;0)	16	12560.83301	17	12720.22559	159,39258	16	12560.83594	16	12720.22266	159,38672
(0;1;1;1)	11	12560.83594	11	12720.22656	159,39062	11	12560.83496	10	12720.22168	159,38672
(0;1;1;0)	14	12560.83691	14	12720.22559	159,38868	13	12560.83398	13	12720.22168	159,38770
(0;1;0;1)	10	12560.83398	10	12720.22266	159,38868	10	12560.83398	10	12720.22461	159,39063
(0;1;0;0)	15	12560.83594	15	12720.22363	159,38769	15	12560.83496	15	12720.22558	159,39062
(0;0;1;1)	18	12560.83594	18	12720.22559	159,38965	17	12560.83398	17	12720.22363	159,38965
(0;0;1;0)	12	12560.83594	12	12720.22559	159,38965	11	12560.83301	11	12720.22363	159,39062
(0;0;0;1)	13	12560.83496	13	12720.22559	159,39063	13	12560.83594	13	12720.22558	159,38964

Ushbu tadqiqotning asosiy maqsadi interval matritsalar uchun xos qiymatlar qismiy muammosini hal qilish uchun an’anaviy iterativ usullarni qo‘llashga qaratilgan. Bunda biz xos qiymatlar masalasini yechishda amaliyotda nisbatan ko‘p foydalaniladigan darajali usul va skalyar ko‘paytmalar usulini tanlab oldik. Olingan sonli natijalarning qiyosiy tahlili skalyar ko‘paytmalar usuli, umumiy holda, yaqinlashish tezligi va interval yechimlarning kengligi bahosi bo‘yicha darajali usuldan ustun ekanligini ko‘rsatdi. Shuningdek, dissertatsiyada, tanlab olingan interval matritsalar uchun boshqa mualliflarning natijalari bilan bizning sonli natijalarimiz qiyosiy tahlili ham amalga oshirilgan.

Dissertatsiya ishining **“Ba’zi amaliy masalalarning matematik modellari tahlili, sintezi va diagnostikasida interval xos qiymatlar masalalari tadbiqi”** deb nomlangan **uchinchi bobi** ba’zi amaliy masalalarning matematik modellari xossalarini tadqiq qilishda yuzaga keladigan interval xos qiymatlar masalasini yechishga bag‘ishlangan.

Ushbu bobning **birinchi paragrafida** Leontev interval matritsasining xos qiymati bilan aniqlanadigan interval berilganlar asosida tarmoqlararo balans iqtisodiy modelining mahsuldorligini aniqlash masalasi qaralgan. Matematik nuqtai nazardan, qaralayotgan modelning mahsuldorligi, masalada yuzaga keladigan $\boldsymbol{A}$ interval matritsaning dominant $\boldsymbol{\lambda}_A$ interval xos qiymati bilan aniqlanadi. Aynan shu faraz asosida Z.X.Yuldashev va A.A.Ibragimovlar Leontev modelining mahsuldorlik masalasini o‘rganib, quyidagi teoremani isbotlashgan:

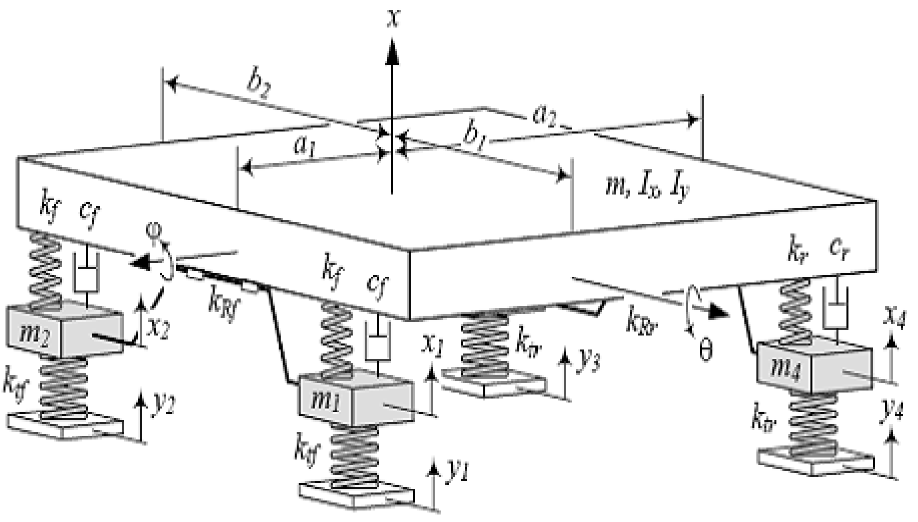
Teorema 3. *Leontev interval modeli mahsuldor bo‘ladi, faqat va faqat shu holdaki, agar* $|\boldsymbol{\lambda}_A| < 1$ *bo‘lsa.*

Ushbu dissertatsiyada *Teorema 3* asosida tarmoqlararo iqtisodiy balans chiziqli interval modelining mahsuldorligi masalasining yana bir mezoni asoslangan.

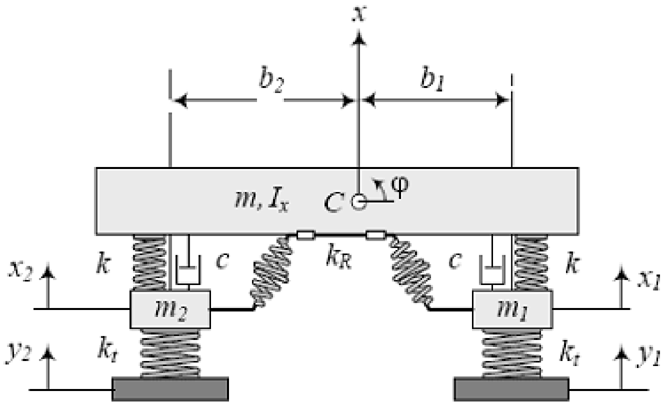
Teorema 4. *Faraz qilaylik,* $\boldsymbol{A}$ *elementlari manfiymas bo‘lgan interval matritsa bo‘lsin. Agar* $\boldsymbol{r}_i$ *uchun, ya’ni* $\boldsymbol{A}$ *interval matritsaning har bir satri (ustuni) elementlari yig‘indisi uchun* $|\boldsymbol{r}_i| \le 1$ *shart o‘rinli bo‘lib, hech bo‘lmaganda bitta satri (ustuni) uchun* $|\boldsymbol{r}_k| < 1$ *qat’iy tengsizlik bajarilsa, u holda Leontev interval modeli mahsuldor.*

Ushbu natijaning amaliy ahamiyatini tasdiqlovchi uchta ishlab chiqarish tarmog‘ining balans ma’lumotlari uchun aniq misol qaralgan bo‘lib, bu ko‘rib chiqilayotgan masalalar sinflarini kengaytirish mumkinligini anglatadi. Shuningdek, ushbu paragrafda tarmoqlararo balans modelini tadqiq qilish uchun musbat teskarilanuvchanlik va xosmaslik xossalariga ega bo`lgan M-matritsalar va H-matritsalar deb ataluvchi matritsalar sinfi tahlil qilingan. Tarmoqlararo balans modelining mahsuldorligini aniqlashda xos qiymatlarning mos kelishi, ya’ni bir xil bo`lishi ishlab chiqarish tuzilmalarida simmetriya mavjudligini anglatadi. Bu holat nosimmetrik matritsalar uchun xos qiymatlar masalasini yechishning yetarlicha samarali usullarini tanlashimizni talab qiladi. Ko‘pgina hollarda, xos qiymat qismiy muammosi uchun iterativ usullar tavsiya etiladi, chunki bizni balans tenglamalari interval matritsasining eng katta xos qiymati qiziqtiradi.

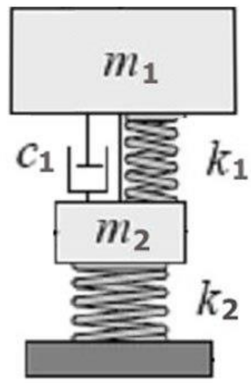
Mazkur bobning **ikkinchi paragrafida** avtomobil osma tuzilmasini loyihalash masalasi yopiq boshqarish tizimi sifatida qaralgan. Bunda avtomobil osmasining tebranish modellari to‘liq, yarim va chorak modellar sifatida qaralgan (Rasm 2).



a) To‘liq model



b) Yarim model



c) Chorak model

Rasm 2. Avtomobil osmasining modellari.

Osma tizimining strukturaviy parametrlari ma’lum bir noaniqlikda berilgan degan faraz ostida interval model taklif etilgan, ya’ni modelning prujina va shina qattiqligi, dempfirlash koeffitsienti va noaniqlikka ega bo‘lgan boshqa osma tuzilmasi parametrlari intervallarda berilgan deb hisoblanadi.

Muhandislik masalalaridagi real jarayonlarga muvofiq, avtomobilning osma tebranish tizimi bir necha erkinlik darajasiga ega bo‘lgan tebranish modeli sifatida soddalashtirilishi mumkin. Osma tebranish modelining dinamik tahlilini amalga oshirish uchun Nyuton usuli yoki Lagranj tenglamasidan foydalanib, harakatning differensial tenglamasi quyidagicha aniqlanadi:

$$M\,\ddot{y}(t) + C\,\dot{y}(t) + K\,y(t) = F(t), \qquad (22)$$

bu yerda $y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)$ - mos ravishda siljish, tezlik va tezlanish vektori; $F(t)$ - tashqi ta’sir vektori; M, C, K - matritsalar esa, mos ravishda - massa, dempfirlash va qattiqlik matritsalari. Ushbu matritsalar va vektorlarning o‘lchamlari avtomobil osmasi tebranish modelining erkinlik darajasi bilan belgilanadi. Parametrlar noaniqligini tavsiflash uchun M, C, K matritsalarga bog‘liq holda ikki tomonlama chegaralangan $q_{\min} \le q \le q_{\max}$ skalyar q parametrni kiritamiz yoki bu struktura parametrini interval shaklda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$q \in \boldsymbol{q} = \left[\underline{q}, \overline{q}\right] = \left[\mathrm{mid}\,\boldsymbol{q} - \mathrm{rad}\,\boldsymbol{q}, \mathrm{mid}\,\boldsymbol{q} + \mathrm{rad}\,\boldsymbol{q}\right] = \mathrm{mid}\,\boldsymbol{q} + \left[-\mathrm{rad}\,\boldsymbol{q}, \mathrm{rad}\,\boldsymbol{q}\right], \qquad (23)$$

u holda interval $\boldsymbol{q}$ parametrga mos interval matritsalar quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= M(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{q}) + \left[-M(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{q}), M(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{q})\right] = \\ &= \mathrm{mid}\,\boldsymbol{M} + \left[-\mathrm{rad}\,\boldsymbol{M}, \mathrm{rad}\,\boldsymbol{M}\right] = \mathrm{mid}\,\boldsymbol{M} + \Delta\boldsymbol{M},\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= C(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{q}) + \left[-C(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{q}), C(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{q})\right] = \\ &= \mathrm{mid}\,\boldsymbol{C} + \left[-\mathrm{rad}\,\boldsymbol{C}, \mathrm{rad}\,\boldsymbol{C}\right] = \mathrm{mid}\,\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C},\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} &= K(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{q}) + \left[-K(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{q}), K(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{q})\right] = \\ &= \mathrm{mid}\,\boldsymbol{K} + \left[-\mathrm{rad}\,\boldsymbol{K}, \mathrm{rad}\,\boldsymbol{K}\right] = \mathrm{mid}\,\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K}.\end{aligned} \tag{26}$$

Shunday qilib, (22) tenglamani interval parametrlar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\Delta\boldsymbol{M}\,\ddot{y}_0(t) + M_0\Delta\ddot{\boldsymbol{y}}(t) + \Delta\boldsymbol{C}\,\dot{y}_0(t) + C_0\Delta\dot{\boldsymbol{y}}(t) + \Delta\boldsymbol{K}\,y_0(t) + K_0\Delta\boldsymbol{y}(t) = \Delta\boldsymbol{f}(t), \tag{27}$$

bunda $M_0 = \mathrm{mid}\,\boldsymbol{A},\ C_0 = \mathrm{mid}\,\boldsymbol{C},\ K_0 = \mathrm{mid}\,\boldsymbol{K}$ matritsalar haqiqiy, $\Delta\boldsymbol{M}, \Delta\boldsymbol{C}, \Delta\boldsymbol{K}$ - matritsalar esa interval matritsalardir.

Demak, harakat tenglamasi (22) uchun holat tenglamasi aniqlanadi:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \eta(t), \tag{28}$$

bu yerda $x(t) = \left(y(t), \dot{y}(t)\right)^T$ -holat vektori. U holda holat matritsasi A va tashqi ta'sir vektori $\eta(t)$ quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}, \qquad \eta(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{29}$$

bunda I - birlik matritsa.

Aniqmas strukturali boshqariluvchi yopiq tizimning interval holat tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_0\Delta\boldsymbol{x}(t) + \Delta\boldsymbol{A}x_0(t), \tag{30}$$

bu yerda

$$\boldsymbol{x}(t) = x_0(t) + \Delta\boldsymbol{x}(t),\ \ \delta x(t) \in \Delta\boldsymbol{x}(t) = [-\mathrm{rad}\,x(t), \mathrm{rad}\,x(t)],$$

$$\boldsymbol{A} = A_0 + \Delta\boldsymbol{A} = \mathrm{mid}\boldsymbol{A} + \left[-\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A},\ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}\right],$$

$$\Delta\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M_0^{-1}\Delta\boldsymbol{K} - \Delta\boldsymbol{M}^{-1}K_0 & -M_0^{-1}\Delta\boldsymbol{C} - \Delta\boldsymbol{M}^{-1}C_0 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, avtomobil osmasining tebranish modelini tahlil qilish uchun xos qiymat muammosi yuzaga keladi, ya'ni ixtiyoriy interval qiymatli $\boldsymbol{q}$ strukturaviy parametr uchun biz standart interval xos qiymat masalasiga ega bo'lamiz:

$$Aw = \lambda w, \quad A \in \boldsymbol{A}, \quad \lambda \in \boldsymbol{\lambda}, \tag{31}$$

bunda $A \in \boldsymbol{A} = A(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ tebranish tizimining holat matritsasi, $\lambda \in \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{IR}$ xos qiymat va w - xos qiymatga mos xos vektor. Bunda xos qiymatlar to'plami

$$\Lambda = \left\{\lambda \mid\ Aw = \lambda w,\ A \in \boldsymbol{A}\right\}, \tag{32}$$

kabi aniqlanadi.

Ushbu xos qiymat masalasi uchun xos intervallar $\boldsymbol{\lambda}_j = \lambda_{0j} + \Delta\boldsymbol{\lambda}_{1j}$ ko'rinishda yoziladi, bunda $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{1j} = \left[-\Delta\lambda_{1j}, \Delta\lambda_{1j}\right]$, $\Delta\lambda_{1j} = \left|\mathrm{Re}(\Delta\lambda_{1j})\right| + i\left|\mathrm{Im}(\Delta\lambda_{1j})\right|$. Shunday qilib, kompleks xos qiymatlarning haqiqiy va mavhum qismlari uchun quyi va yuqori chegaralariga ega bo‘lamiz:

$$\mathrm{Re}\left(\underline{\lambda}_j\right)=\mathrm{Re}\left(\lambda_{oj}\right)-\left|\mathrm{Re}\left(\Delta\lambda_{1j}\right)\right|, \qquad \mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}_j\right)=\mathrm{Re}\left(\lambda_{oj}\right)+\left|\mathrm{Re}\left(\Delta\lambda_{1j}\right)\right|,$$
$$\mathrm{Im}\left(\underline{\lambda}_j\right)=\mathrm{Im}\left(\lambda_{oj}\right)-\left|\mathrm{Im}\left(\Delta\lambda_{1j}\right)\right|, \qquad \mathrm{Im}\left(\overline{\lambda}_j\right)=\mathrm{Im}\left(\lambda_{oj}\right)+\left|\mathrm{Im}\left(\Delta\lambda_{1j}\right)\right|.$$

Boshqarish sistemasining turg‘unligini baholash uchun quyidagi shartdan foydalanamiz:

$$\mathrm{Re}\left(\lambda_{0j}\right)-\left|\mathrm{Re}\left(\Delta\lambda_{1j}\right)\right|\le \Upsilon_j \le \mathrm{Re}\left(\lambda_{0j}\right)+\left|\mathrm{Re}\left(\Delta\lambda_{1j}\right)\right|,$$

bunda Υ_j - yopiq boshqaruv tizimi xos qiymatlarining haqiqiy qismi. Agar teskari aloqaga asoslangan boshqaruv tizimini qurishda $\mathrm{Re}\left(\lambda_{0j}\right)\left(j=1,2,...,r\right)$ qiymat yetarlicha katta bo‘lsa, u holda interval parametrlar bilan aniqlanadigan boshqaruv tizimi turg‘unligi kafolatlangan hisoblanadi.

Ushbu paragraf so‘ngida avtomobil osmasi chorak modeli uchun misol keltirilgan. Undagi mexanik tizim tebranishlar modeli ikki jismdan iborat bo‘lib, faqat vertikal tebranishlar hisobga olingan (Rasm 2 (c)). Bunda avtomobil osmasi tebranish tizimi uchun hisoblash eksperimenti natijalari samaradorligini tahlil qilish maqsadida interval strukturaviy parametrlar uchun dastlabki berilganlar

$$\boldsymbol{m}_1=\left[1200,1200\right],\quad \boldsymbol{m}_2=\left[80,80\right],\quad \boldsymbol{c}_1=\left[4400,5200\right],$$
$$\boldsymbol{k}_1=\left[280,320\right],\quad \boldsymbol{k}_2=\left[3000,3400\right],$$

Z.Qiu va uning hammualliflari ishlaridan olingan va hisoblash

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} [0,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1] \\ [-0.26667,-0.23333] & [0.23333,0.26667] & [-4.3335,-3.6665] & [3.6665,4.3335] \\ [3.5,4] & [-46.5,-41] & [55,65] & [-65,-55] \end{pmatrix}$$

holat matritsasi uchun bajarilgan. Qaralgan masala uchun sonli natijalar 5 va 6-jadvallarda keltirilgan.

Jadval 5. Interval buzilishlar usuli bilan olingan sonli natijalar (Z.Qiu va b.).

$\boldsymbol{\lambda}_i$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\mathrm{wid}(\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Re}})$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$	$\mathrm{wid}(\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Im}})$
$\boldsymbol{\lambda}_1$	-66.9348	-59.7556	7.1792	0.0000	0.0000	0.0000
$\boldsymbol{\lambda}_2$	-0.0701	-0.0569	0.0132	0.0000	0.0000	0.0000
$\boldsymbol{\lambda}_3$	-0.6899	0.0987	0.7886	1.1837	1.9137	0.7300
$\boldsymbol{\lambda}_4$	-0.6899	0.0987	0.7886	-1.9137	-1.1837	0.7300

Jadval 6. Algoritm 2.2 bilan olingan sonli natijalar.

λ_i	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\mathrm{wid}(\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Re}})$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$	$\mathrm{wid}(\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Im}})$
$\boldsymbol{\lambda}_1$	-68.7681	-57.9054	10.8627	0.0000	0.0000	0.0000
$\boldsymbol{\lambda}_2$	-0.0742	-0.0545	0.0197	0.0000	0.0000	0.0000
$\boldsymbol{\lambda}_3$	-0.5294	0.0286	0.5580	1.4751	1.5720	0.0969
$\boldsymbol{\lambda}_4$	-0.3006	-0.2898	0.0108	-1.6453	-1.4036	0.2417

Interval xos qiymatining muqobil interpretatsiyasi shundan iboratki, intervalning $\mathrm{mid}\boldsymbol{\lambda} = \left(\overline{\lambda} + \underline{\lambda}\right)/2$ o‘rtasini haqiqiy xos qiymat λ ga yaqinlashish sifatida va $\mathrm{rad}\boldsymbol{\lambda} = \left(\overline{\lambda} - \underline{\lambda}\right)/2$ radiusini esa aniqmaslik sifatida qabul qilish mumkin. Shunday qilib, haqiqiy xos qiymatlarni o‘z ichiga olgan interval xos qiymatni hisoblash, $\mathrm{mid}\boldsymbol{\lambda}$ funksiyasi bilan aniq xos qiymatga yaqinlashishni anglatsa, $\mathrm{rad}\boldsymbol{\lambda}$ funksiya esa taqribiy xos qiymat uchun xatolik chegaralarini ta’minlaydi.

XULOSA

Dissertatsiya ishi bo‘yicha olib borilgan tadqiqot natijalarini umumlashtirib, quyidagicha xulosa qilish mumkin:

1. Tashqi va ichki interval baholash masalalari asosida algebraik interval xos qiymat muammosining turli matematik qo‘yilishi taklif etilgan va tizimlashtirilgan.

2. Xos qiymat standart masalasining simmetrik va nosimmetrik holatlari uchun interval matritsalarning xos qiymatlari to‘liq muammosini yechish usullari ishlab chiqilgan va asoslangan;

3. Simmetrik interval matritsalarning xos qiymatlari qismiy muammosini yechish uchun darajali usul va skalyar ko‘paytmalar usullarining modifikatsiyalangan algoritmlari ishlab chiqilgan.

4. Ishlab chiqarish xarajatlari matritsasining xos qiymatlari asosida tarmoqlararo iqtisodiy balans interval modeli mahsuldorligining bir mezoni taklif qilingan va asoslangan.

5. Avtomobil osmasi mexanik tebranish tizimi uchun interval model taklif etilgan va holat matritsasi xos qiymatlari asosida tizim turg‘unligining interval baholari olingan.

6. Interval xos qiymatlar masalasini yechish uchun taklif etilgan barcha usullarning algoritmlari, dasturiy ta’minoti ishlab chiqilgan va test misollarda aprobatsiyadan o‘tkazilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАВОИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ХАМРОЕВА ДИЛАФРУЗ НАМОЗОВНА

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ДАННЫХ

05.01.07- Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за B2019.4.PhD/FM453.

Диссертация выполнена в Навоийском государственном педагогическом институте.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Юлдашев Зиявидин Хабибович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Чори Нормуродов Бегалиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Калханов Полатбек Жумабаевич доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам
Ведущая организация:	**Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится «12» 07 2023 года в 14⁰⁰ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 97). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «21» 06 2023 года.
(протокол рассылки № 1 от 05.06. 2023 года).

М.М.Арипов
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Б.Ф.Абдурахимов
Председатель Научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность диссертации. Во многих научных и практических исследованиях в мировом масштабе, особенно при анализе, синтезе и диагностике математических моделей систем, связанных с инженерными технологиями, приводятся к решению проблемы собственных значений. Например, во многих механических и электрических системах собственные числа определяют собственные частоты колебаний, а соответствующие им собственные векторы отвечают к формам колебаний. Также, знания о собственных значениях в теории динамических систем позволяют определить важные свойства системы во времени и считаются очень важными в решении вопросов об устойчивости таких систем. Поэтому разработка эффективных методов, алгоритмов и программного обеспечения для решения проблемы собственных значений и применение их при исследовании свойств математических моделей различных прикладных задач остаётся одной из важных задач прикладной математики.

В настоящее время в мире широко исследуются методы интервального анализа и теории нечётких множеств, как средства учета неопределенности в данных для решения ряда важных прикладных задач. Эти относительно новые подходы представляют собой простой математический аппарат, чем традиционные вероятностные подходы, и, во-первых, они достаточно эффективные в алгоритмическом, вычислительном отношении, а во-вторых, позволяют корректно исследовать содержательные модели с неопределенными параметрами. Поэтому построение интервальных математических моделей, описывающих процессы в условиях неопределенности, разработка новых интервальных методов и алгоритмов их исследования, а также создание программного обеспечения для широкого круга пользователей, является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется таким актуальным направлениям, как разработка численных и аналитических методов решения задач в областях теории управления, механики, робототехники, экономики и энергетики, имеющих научное и практическое применение фундаментальных наук. В частности, достигнуты значительные результаты по математическому моделированию процессов с интервальной неопределенностью, обоснованию устойчивости различных механических конструкций и систем управления, по разработки логико-динамических систем и определению эффективности экономических балансных моделей. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» является одной из основных задач в деятельности Института математики имени В.И.Романовского АН РУз[1]. Для обеспечения выполнения

---

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

постановления важно улучшить аналитические и численные методы решения задач собственных значений с интервальными данными, как индикатор определения важных свойств математических моделей ряда практически важных задач.

Данная диссертационная работа в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных в Указах и Постановлениях Президента Республики Узбекистан №УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», № ПП-4708 от 7 мая 2020 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», № УП-5847 от 8 октября 2019 года «Об утверждении Концепции развития системы высшего образования Республики Узбекистан до 2030 года», № ПП-3682 от 27 апреля 2019 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов» и № УП-6198 от 1 апреля 2021 года «О совершенствовании системы государственного управления в сфере развития научной и инновационной деятельности», а также в других нормативно-правовых актах, принятых в данной сфере.

Соответствие исследований с приоритетным направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Обзор мировой литературы свидетельствует о том, что в последнее время интерес к методам интервального анализа интенсивно возрастает. Основы интервального анализа освещены в монографиях Г.Алефельда, Э.Каухера, Ю.И.Шокина, Р.Б.Кирфотта, В.Крейновича, Г.Майера, Р.Мура, А.Ноймайера, Дж.Рона, З.Румпа, Э.Хансена, С.П.Шарого, А.В.Лакеева, С.И.Жилина, Б.С.Добронца, С.А.Кальмыкова, З.Х.Юлдашева и др.

Задачи на собственные значения в рамках интервального анализа рассматривались в работах Б.Р.Бармиша, Д.Худака, Ю.Т.Джуанга, А.Дейфа, Дж.Рона, Р.Лонера, Х.-С.Ан, Г.Майера, Л.Колева, Д.Герца, М.Хладика, З.Цю, К.Юаня, Х.Ленга, Д.Хартмана, М.-Х.Мацковского, Д.Данея, Э.П.Цигаридаса, Д.Неранциса, М.А.Эль-Гебейли и других авторов. Основные результаты по разработке и совершенствования интервальных методов решения задачи собственных значений принадлежат А.Дейфу, Дж.Рону, Г.Майеру, Л.Колеву, Д.Герцу и М.Хладику. В работах А.Дейфа и Дж.Рона рассматриваются задачи нахождения граничных точек множества действительных собственных значений интервальной матрицы. Г.Майер разработал метод вычисления собственных значений вещественных и комплексных интервальных матриц, основанный на разложении в ряд Тейлора. М.Хладик и его соавторы предлагают итерационный метод, так называемый «Метод фильтрации» и применяемый для определения границ множества собственных значений как симметричной, так и несимметричной вещественной интервальной матрицы. Этот метод основан на достаточном условии невырождённости интервальной матрицы, который улучшает приближение на каждой итерации. З.Цю и его соавторы, рассматривая интервальную матрицу как возмущенная точечная матрица, разрабатывают метод «интервальных возмущений» для оценки всех возможных собственных значений вещественных несимметричных интервальных матриц. Л.Колев рассматривает задачу внешнего интервального оценивания собственных значений с параметрическими матрицами. Д.Герц обобщает результаты Дж.Рона по нахождению границы множества собственных значений вещественных интервальных матриц, для случая комплексных интервальных матриц. Приложения интервальной задачи на собственные значения к решению различных прикладных задач рассматривались в работах Б.Р.Бармиша, Л.В.Колева, С.Л.Демакро, Р.К.Едевалли, Д.Ху, Х.Х.Лиао, С.Х.Лина, Дж. А. Хайнена, М.Б.Аргоуна, Дж.Чена, А.Д.Димарогонаса, З.Цю, К.Юаня, Х.Ленга, А.Дейфа, И. Элишакоффа, М.А.Эл-Гебейли, В.Н.Ефанова, Д.И.Шварца и других учёных.

В Узбекистане задачи интервального анализа и некоторые их приложения исследовались в работах З.Х.Юлдашева, Р.Х.Хамдамова, Ш.А.Назирова, Н.Р.Юсупбекова, Ш.М.Гулямова, М.Б.Базарова, А.А.Абдукадырова, У.Шарипова, А.А.Ибрагимова, М.Б.Худаярова, П.Ж.Калханова, О.Ж.Худайбердиева и др.

Связь темы диссертации с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Работа выполнена в соответствии с плановой тематикой I1-FM-2018-3 - «Математическое моделирование естественных процессов, вычислительные алгоритмы и их программное обеспечение» Навоийского государственного педагогического института, а также государственными прикладными грантами А-5-034 +(А-5-035) - «Разработка методов и программного обеспечения для анализа устойчивости систем управления непрерывными технологическими объектами с интервальной неопределённостью параметров» (2015-2017).

Целью исследования является разработка интервальных методов, алгоритмов и программного обеспечения для решения алгебраических задач собственных значений.

Задачи исследования состоят в следующем:

анализ различных постановок задачи собственных значений точечных и интервальных матриц;

разработка и обоснование методов решения полной проблемы собственных значений для стандартной задачи симметричных и несимметричных вещественных интервальных матриц;

разработка модифицированные алгоритмы некоторых итерационных методов решения частичной проблемы собственных значений для интервальных матриц;

обоснование продуктивности интервальной модели межотраслевого экономического баланса, опираясь на собственные числа матрицы прямых производственных затрат;

нахождение и обоснование условий устойчивости механической системы колебаний для задачи автомобильной подвески, заданных интервальными параметрами;

создание алгоритмов и программного комплекса для численного решения интервальных задач на собственные значения.

Объектом исследования являются процессы с интервальными данными, методы вычисления собственных значений, интервальные модели и алгоритмы.

Предмет исследования составляют методы установления интервальных оценок для собственных значений интервальных матриц, доказательство теоремы включения решений, разработка алгоритмов и их программного обеспечения.

Методы исследования. В данной диссертации использовались методы интервального анализа, линейной алгебры, линейного программирования, вычислительной математики и численного анализа, математического моделирования и объектно-ориентированного программирования.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

получены формулы для вычисления нижних и верхних границ множеств собственных значений симметричных и несимметричных интервальных матриц;

путем построения специальных вершинных матриц найдены оценки принадлежности собственных значений интервальных матриц на основе принципа включения решений;

разработаны модифицированные алгоритмы степенного метода и метода скалярных произведений для вычисления границ множества доминирующих собственных значений интервальных матриц;

решена задача продуктивности интервальной модели межотраслевого экономического баланса путем установления соответствующих условий на собственные значения матрицы прямых производственных затрат;

получены оценки устойчивости вибрационной системы конструкций автомобильной подвески на основе собственных значений матрицы состояния, рассматривая как замкнутую управляемую систему;

разработаны соответствующие алгоритмы и программное обеспечение для решения полной и частичной проблемы собственных значений с применением интервальной арифметики.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

построены явные формулы для нахождения границ каждого собственного значения симметричных, также несимметричных вещественных интервальных матриц;

разработаны алгоритмы и программный комплекс для решения полной и частичной проблемы собственных значений для вещественных интервальных матриц.

Достоверность результатов исследования. Изложенные в диссертации утверждения обоснованы строгостью математических соображений и доказательств, применением методов линейной алгебры и интервального анализа, установлением оценок ширины интервального решения при условии включения точечных решений и проведением численных экспериментов.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что предложенные методы могут быть использованы при решении задачи проектирования механических конструкций, при определении продуктивности моделей экономического баланса, при диагностике вибрационных систем и в других областях науки, где возникает задачи на собственные значения с интервальными данными.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы при проектировании интервальных итерационных процессов, при разработке методов, алгоритмов и программного обеспечения в решении различных практических задач, которые сводятся к решению проблемы собственных значений.

Внедрение результатов исследования. Научные результаты по решению алгебраических задач на собственные значения в условиях интервальной неопределённости, внедрены в практику по следующим направлениям:

разработанные интервальные методы, алгоритмы и программное обеспечение решения полной проблемы собственных значений использованы при решении задачи диагностики состояния механических конструкций генераторных комплексов в выполнении научно-практического проекта 06/2020-Э - «Разработка и установка генераторных комплексов на инженерных сооружениях Навоийского горно-металлургического комбината» (Справка Навоийского государственного горного и технологического университета №01-04/258 от 2 февраля 2023 года). Применение научных результатов позволило получить оценки устойчивости механических конструкций «сооружение-основание» при установке генераторов на инженерных сооружениях.

интервальные методы и алгоритмы для решения частичной проблемы собственных значений использованы при получении оценки устойчивости решений одномерных линейных гиперболических систем, заданных с диссипативными граничными условиями в рамках государственного научно-исследовательского проекта № ОТ-Ф4-28 «Построение адекватных расчетных моделей гиперболических систем» (Справка Национального университета Узбекистана № 04-11/636 от 8 февраля 2023 года). Численные результаты, полученные интервальными методами, использовались при анализе априорных оценок дискретного аналога функции Ляпунова.

Апробация результатов исследования. Полученные в диссертации результаты докладывались и обсуждались на 19 научно-практических конференциях, в частности 12 международных и 7 республиканских.

Публикация результатов исследования. Общее количество работ по теме диссертации 32, из них 6 опубликованы в журналах включенных в перечень ВАК РУз, в том числе 2 из них опубликованы в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях, также получены 4 авторских свидетельства на программы для ЭВМ.

Структура и объем диссертации: Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 108 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведен обзор научных исследований по направлению темы диссертации, отмечены цели и задачи исследования, описаны объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, обоснована достоверность полученных результатов, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приведены сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, называемая **«Алгебраическая проблема собственных значений для точечных и интервальных матриц»**, имеет обзорный характер. Приводится обзор существующих подходов и методов решения рассматриваемых задач, изложены их математические постановки, в которых особое внимание уделяется наличию интервальных неопределённостей в исходных данных.

В первом параграфе излагается общая классификация задач собственных значений. Приводятся возможные постановки проблемы собственных значений для стандартной задачи, как полная и частичная, а также для классов матриц симметричная и несимметричная проблемы. Анализируются также общие идеи методов решения задачи собственных значений, таких как прямые и итерационные.

Во втором параграфе главы I, приводятся основы интервального анализа, необходимые для исследования проблемы собственных значений интервальных матриц.

В дальнейшем изложении мы используем неформальную международную систему интервальных обозначений, т.е. интервальные величины выделяются в тексте жирным и наклонным шрифтом, а «неинтервальные» (точечные) величины никак специально не выделяются.

Определение 1. *Пусть* $\underline{a}$ *и* $\overline{a}$ *— действительные числа, удовлетворяющие условие* $\underline{a} \le \overline{a}$. *Тогда множество* $\boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \le x \le \overline{a}\}$ *называется* ***вещественным интервалом*** *или просто* ***вещественное интервальное число*** *(где слово «вещественный» добавляется, чтобы различать от комплексных интервалов). Множество всех вещественных интервалов обозначается как* $\mathbb{IR}$. *Действительные числа* $\underline{a}$ *и* $\overline{a}$ *называется соответственно* ***нижние*** *и* ***верхние*** *границы интервала* $\boldsymbol{a}$.

Определение 2. *Пусть* $\boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ *- вещественный интервал. Тогда*

- ***Шириной*** *интервала* $\boldsymbol{a}$ *называется число* $\operatorname{wid}\boldsymbol{a} = \overline{a} - \underline{a}$ *;*
- ***Радиусом*** *интервала* $\boldsymbol{a}$ *назовём число* $\operatorname{rad}\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{2}\left(\overline{a} - \underline{a}\right)$*;*
- ***Середина*** *интервала* $\boldsymbol{a}$ *определяется как* $\operatorname{mid}\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{2}\left(\underline{a} + \overline{a}\right)$ *;*
- ***Абсолютная величина (модуль*** *или* ***магнитуда)*** *интервального числа* $\boldsymbol{a}$ *определяется как* $|\boldsymbol{a}| = \max\left\{|a| \mid a \in \boldsymbol{a}\right\} = \max\left\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\right\}$.

Определение 3. *Квадратная интервальная матрица определяется как* $\boldsymbol{A} := [\underline{A}, \overline{A}] = \left\{A \in R^{n\times n};\ \underline{A} \le A \le \overline{A}\right\}$, *матрицы* $\underline{A}, \overline{A} \in R^{n\times n}$ *называются её граничными матрицами.*

Средняя и радиусная матрицы интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ определяются как

$$\operatorname{mid}\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A}), \qquad \operatorname{rad}\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A}).$$

Можно заметить, что элементы матриц $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}$ и $\operatorname{rad}\boldsymbol{A}$ вещественные (точечные), а не интервальные. Тогда интервальную матрицу мы можем представлять как:

$$\boldsymbol{A} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] = \left[\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A}, \operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\right] =$$

$$= \left\{A \mid \left(\left|A - \operatorname{mid}\boldsymbol{A}\right| \le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\right) \text{ или } \left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \le A \le \operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\right)\right\},$$

где неравенства понимаются покомпонентно.

Определение 4. *Называем интервальную матрицу* $\boldsymbol{A}$ ***симметричной****, если справедливо равенство* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ *и определяется как*

$$\boldsymbol{A}^S = \left\{A \mid A = A^T,\ A \in \boldsymbol{A}\right\}.$$

Определение 5. *Любая точечная матрица интервальной матрицы* $\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}_{ij}\right) \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ *размерности* $n \times n$ *называется* ***вершинной матрицей****, если* ij *-ым элементом которых является* $\underline{a}_{ij}$ *или* $\overline{a}_{ij}$. *Все множества вершинных матриц интервальной матрицы* $\boldsymbol{A}$ *обозначаются как*

$$\operatorname{vert}\boldsymbol{A} := \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = (a_{ij}),\ a_{ij} \in \{\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\}\right\}.$$

В третьем параграфе проведён анализ для различных постановок интервальной задачи собственных значений и предложены варианты интервального оценивания множеств решений.

Алгебраическая проблема собственных значений с квадратной интервальной матрицей $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{A}x = \lambda x, \tag{1}$$

тогда множество всех собственных значений для системы (1) в общем случае, составляет область в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, определяемой как компактное множество:

$$\Lambda(\boldsymbol{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A \in \boldsymbol{A},\ x \ne 0,\ Ax = \lambda x\}. \tag{2}$$

Вычисление множества собственных значений Λ непосредственно приводится к решению системы:

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\| = 1, \quad A \in \boldsymbol{A}, \quad \lambda \in \boldsymbol{\lambda}, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|$ - любая векторная норма.

Прямое применение интервальных операций к точечным (классическим) методам не эффективно, такой подход приводит к так называемому «*эффекту обёртывания*», т.е. к огромному завышению ширины вычисленных интервалов собственных значений.

В интервальном анализе для оценивания множества решений интервальных систем линейных (также нелинейных) уравнений рассматриваются две наиболее популярные задачи, т.е. задачи *внешнего* и *внутреннего* оценивания. В общем случае, под интервальным оцениванием мы будем понимать замену точной области значений на её интервальную оценку. Тогда, для задачи оценивания множества собственных значений, переформулируем определение этих понятий для произвольной интервальной матрицы, так как симметричная матрица является частным случаем.

Определение 6. *Пусть* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ *произвольная вещественная интервальная матрица. Тогда, в решении интервальную алгебраическую проблему собственных значений называем:*

3) ***внешним интервальным оцениванием,*** *когда ищутся комплексные интервалы* $\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Re}} + j\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Im}} \in \mathbb{IC}$, *их конечное объединение объемлющее извне множество решений* Λ, *такие что* $\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i \supseteq \Lambda$.
4) ***внутренним интервальным оцениванием,*** *когда ищутся комплексные интервалы* $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{Re}} + j \cdot \boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{Im}} \in \mathbb{IC}$, *их конечное объединение содержащиеся во множестве решений* Λ, *такие что* $\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mu}_i \subseteq \Lambda$.

В задачах интервального оценивания наименьшая «внешняя» и наибольшая «внутренняя» оценки считаются оптимальными. В данной диссертации мы исследуем только задачи внешнего интервального оценивания, и нас интересуют интервальные решения по возможности с наименьшей шириной.

В четвёртом параграфе первой главы рассматривается стандартная интервальная задача на собственные значения как возмущённая задача:

$$\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \delta A\right)x = \lambda x, \qquad |\delta A| \le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}, \tag{4}$$

где $\lambda = \lambda^{Re} + j\,\lambda^{Im}$, $x = x^{Re} + j\,x^{Im}$, также

$$\lambda_i^{Re} \in \boldsymbol{\lambda}_i^{Re} = \left[\underline{\lambda}_i^{Re}, \overline{\lambda}_i^{Re}\right], \quad \lambda_i^{Im} \in \boldsymbol{\lambda}_i^{Im} = \left[\underline{\lambda}_i^{Im}, \overline{\lambda}_i^{Im}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

здесь

$$\underline{\lambda}_i^{Re} = \min_{A\in\boldsymbol{A}}\left\{\mathrm{Re}\left(\lambda_i(A)\right)\right\}, \quad \overline{\lambda}_i^{Re} = \max_{A\in\boldsymbol{A}}\left\{\mathrm{Re}\left(\lambda_i(A)\right)\right\}, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\underline{\lambda}_i^{Im} = \min_{A\in\boldsymbol{A}}\left\{\mathrm{Im}\left(\lambda_i(A)\right)\right\}, \quad \overline{\lambda}_i^{Im} = \max_{A\in\boldsymbol{A}}\left\{\mathrm{Im}\left(\lambda_i(A)\right)\right\}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Согласно характеристике Оеттли-Прагера для задачи (3) имеет место:

$$\left|\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\,x-\lambda x\right|\le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|\,x\,|. \tag{5}$$

Для выделения действительной и мнимой части неравенства (5), имеем:

$$\left|\operatorname{mid}\boldsymbol{A}(x^{\mathrm{Re}}+jx^{\mathrm{Im}})-(\lambda^{\mathrm{Re}}+j\lambda^{\mathrm{Im}})(x^{\mathrm{Re}}+jx^{\mathrm{Im}})\right|\le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|\,x^{\mathrm{Re}}+jx^{\mathrm{Im}}\,|,$$

далее, после некоторых выкладок, получим:

$$\begin{aligned}&|\,\lambda^{\mathrm{Re}}x^{\mathrm{Re}}-\lambda^{\mathrm{Im}}x^{\mathrm{Im}}-\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\,x^{\mathrm{Re}}\,|\le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|\,x^{\mathrm{Re}}\,|,\\&|\,\lambda^{\mathrm{Re}}x^{\mathrm{Im}}+\lambda^{\mathrm{Im}}x^{\mathrm{Re}}-\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\,x^{\mathrm{Im}}\,|\le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|\,x^{\mathrm{Im}}\,|.\end{aligned} \tag{6}$$

Можно заметить, что неравенства (6) непосредственно следуют из условий $\boldsymbol{A}x\cap\lambda x\ne\varnothing$, при том, что

$$\boldsymbol{A}x=\left[\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\;x-\operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|\,x\,|,\;\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\;x+\operatorname{rad}\boldsymbol{A}\,|\,x\,|\right].$$

Значит, каждая собственная пара (λ,x) для семейства матриц $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A$, удовлетворяет критерию совместимости (6), с условием $|\,\delta A|\le\operatorname{rad}\boldsymbol{A}$.

Предварительное умножение уравнения возмущённой задачи

$$\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)\left(x^{\mathrm{Re}}+jx^{\mathrm{Im}}\right)=\left(\lambda^{\mathrm{Re}}+j\lambda^{\mathrm{Im}}\right)\left(x^{\mathrm{Re}}+jx^{\mathrm{Im}}\right)$$

на комплексно-сопряжённый вектор $y^{*}=y^{\mathrm{Re}}-j\,y^{\mathrm{Im}}$, в котором можно нормализовать для достижения $y^{*}x=\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^{T}x^{\mathrm{Re}}+\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^{T}x^{\mathrm{Im}}=1$, приводит нас к формулам разделения вещественных и мнимых частей собственных значений для произвольной вещественной интервальной матрицы:

$$\lambda^{\mathrm{Re}}=\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^{T}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)x^{\mathrm{Re}}+\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^{T}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)x^{\mathrm{Im}}, \tag{7}$$

$$\lambda^{\mathrm{Im}}=\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^{T}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)x^{\mathrm{Im}}-\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^{T}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}+\delta A\right)x^{\mathrm{Re}}. \tag{8}$$

Вторая глава диссертации «**Разработка интервальных методов и алгоритмов решения проблемы собственных значений**» посвящена исследованию методов решения полной и частичной проблемы собственных значений. При этом рассматривается класс симметричных и несимметричных вещественных интервальных матриц.

Первый параграф данной главы разделен на три подпараграфа. В первом подпараграфе исследуется задача определения границы каждого собственного значения матриц $A\in\boldsymbol{A}$ для симметричных, во втором подпараграфе для несимметричных интервальных матриц. В последнем третьем подпараграфе приводятся численные результаты, подтверждающие эффективность разработанных методов в сравнении с результатами других авторов.

Для симметричного случая рассматривается возмущённая задача:

$$\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^{S}+\delta A^{S}\right)x=\lambda x, \tag{9}$$

с условием $|\,\delta A^{S}\,|\le\operatorname{rad}\boldsymbol{A}^{S}$. При этом задача интервального оценивания сформулирована следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c} \textit{Для симметричной интервальной матрицы } \boldsymbol{A}^S = \left\{ A^S \;\middle|\; |\boldsymbol{A}^S - \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S| \le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \right\} \\ \textit{найти интервалы для каждого собственного значения} \\ \textit{матриц } A^S \in \boldsymbol{A}^S \textit{ из множества } \Lambda(\boldsymbol{A}^S) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid A^S x = \lambda x,\ \|x\|_2 = 1,\ A^S \in \boldsymbol{A}^S \right\} \end{array}\right)$$

Неравенство (5) дает простой способ оценить множество $\Lambda\left(\boldsymbol{A}^S\right)$. Поскольку каждая собственная пара (λ, x) системы (9) удовлетворяет неравенством

$$-\operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot |x| \le \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S x - \lambda x \le \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot |x|,$$

следовательно $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S x - \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot |x| \le \lambda x \le \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S x + \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot |x|$. Умножая их слева на вектор x^T, учитывая что $x^T x = 1$, получим:

$$\frac{x^T \cdot \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S \cdot x - |x|^T \cdot \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot |x|}{x^T x} \le \lambda \le \frac{x^T \cdot \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S \cdot x + |x|^T \cdot \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot |x|}{x^T x}. \qquad (10)$$

Отношение (10) даёт максимальные и минимальные собственные значения всего спектра. Поэтому, для каждого конкретного собственного значения $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ будем предполагать, что знаки компонент соответствующего собственного вектора x^i не меняются при всех возмущениях δA^S. Обозначим диагональную матрицу $S^i = \operatorname{diag}\left(\operatorname{sgn}(x_1^i), \ldots, \operatorname{sgn}(x_n^i)\right),\ x_j^i \ne 0$, где знаки компонент собственного вектора предлагается определить по формуле

$$(\operatorname{sgn} x)_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \ge 0, \\ -1, & \text{если } x_i < 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (11)$$

и очевидно, что $S^i x^i = |x^i| > 0$. Знаковая матрица S^i образуется из знаков компонент собственных векторов средней матрицы $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}$ по формуле (11). Чтобы оценить $\overline{\lambda}$ и $\underline{\lambda}$ из (10), согласно общеизвестной теореме Куна-Таккера, учитывая, что $x^T x = 1$, имеем:

$$\lambda = \max_{\|x\|_2 = 1}\left\{ x^T \cdot \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S \cdot x + |x|^T \cdot \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot |x| \right\} \le \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S + S^i \cdot \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot S^i = \overline{\lambda}, \qquad (12а)$$

$$\lambda = \min_{\|x\|_2 = 1}\left\{ x^T \cdot \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S \cdot x - |x|^T \cdot \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot |x| \right\} \ge \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S - S^i \cdot \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot S^i = \underline{\lambda}, \qquad (12б)$$

что $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S x + S^i \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S S^i x - \lambda x = 0$ и $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S x - S^i \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S S^i x - \lambda x = 0$ соответственно, для множителя Лагранжа λ.

Полученные матрицы в (12а)-(12б), образуют соответствующие вершинные матрицы для собственных значений $\underline{\lambda}$ и $\overline{\lambda}$, обозначим их, как $\underline{B} = \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S - S^i \cdot \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot S^i$ и $\overline{B} = \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S + S^i \cdot \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S \cdot S^i$. Общее количество вершинных матриц для решения симметричной проблемы равно $2n$, что меньше чем в других существующих методах. Например, в методе Д.Герца это число равно 2^n.

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{A}^S = \left[\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S - \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S, \operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S + \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S\right]$ - *симметричная интервальная матрица. Если компоненты собственных векторов* x^i *матрицы* $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S$ *не меняют свой знак для интервальной* *матрицы* $\boldsymbol{A}^S$, *тогда собственные значения* λ_i *для всех матриц* $A^S \in \boldsymbol{A}^S$ *содержатся в интервале*

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \left[\lambda_i(\underline{B}),\ \lambda_i(\overline{B})\right],$$

где $\underline{B}, \overline{B}$ *- соответствующие вершинные матрицы, а* $i = 1, 2, ..., n$.

Разработанный алгоритм предлагаемого метода для решения симметричной проблеме собственных значений приводится в диссертации в виде псевдокодов.

Для несимметричного случая рассматривается также возмущенная задача (4). По формулам (7) и (8), т.е. после разделения, действительные и мнимые части собственных значений оцениваются границы $\overline{\lambda}^{\mathrm{Re}}, \underline{\lambda}^{\mathrm{Re}}, \overline{\lambda}^{\mathrm{Im}}, \underline{\lambda}^{\mathrm{Im}}$, соответственно. Для этого, согласно формуле (7), получены оценки для действительной части:

$$\overline{\lambda}^{\mathrm{Re}} = \lambda^{\mathrm{Re}}\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ \left| x^{\mathrm{Re}}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T + x^{\mathrm{Im}}\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \right|\right), \qquad (13а)$$

$$\underline{\lambda}^{\mathrm{Re}} = \lambda^{\mathrm{Re}}\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ \left| x^{\mathrm{Re}}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T + x^{\mathrm{Im}}\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \right|\right), \qquad (13б)$$

при условии, что

$$\begin{gathered}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Re}} + \left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Im}} = 1, \qquad \left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Re}} - \left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Im}} = 0, \\ p_{kl}^i\left(y_k^{\mathrm{Re}} \cdot x_l^{\mathrm{Re}} + y_k^{\mathrm{Im}} \cdot x_l^{\mathrm{Im}}\right) > 0, \qquad k, l = 1, 2, \ldots, n,\end{gathered} \qquad (14)$$

где знак “$\circ$” – означает *скалярное произведение матриц*, т.е. поэлементное умножение и вычисляется по формуле $A \circ B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$. Здесь знаковая матрица $P^i = (p_{kl}^i)$ определяется выражением $\left(y_k^{\mathrm{Re}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Re}}\right)^i + \left(y_k^{\mathrm{Im}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Im}}\right)^i$, образованным с компонентами правых и левых собственных векторов $x, y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ матрицы $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}$:

$$P^i = (p_{kl}^i) = \mathrm{sgn}\left(\left(y_k^{\mathrm{Re}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Re}}\right)^i + \left(y_k^{\mathrm{Im}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Im}}\right)^i\right), \quad k, l = 1, 2, \ldots, n. \qquad (15)$$

Аналогичным образом, получены оценки для $\overline{\lambda}^{\mathrm{Im}}$ и $\underline{\lambda}^{\mathrm{Im}}$ из (8):

$$\overline{\lambda}^{\mathrm{Im}} = \lambda\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ \left| x^{\mathrm{Im}}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T - x^{\mathrm{Re}}\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \right|\right), \qquad (16а)$$

$$\underline{\lambda}^{\mathrm{Im}} = \lambda\left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \circ \left| x^{\mathrm{Im}}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T - x^{\mathrm{Re}}\left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \right|\right), \qquad (16б)$$

с соответствующими условиями

$$\begin{gathered}\left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Re}} + \left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Im}} = 0, \qquad \left(y^{\mathrm{Re}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Im}} - \left(y^{\mathrm{Im}}\right)^T \cdot x^{\mathrm{Re}} = 1, \\ p_{kl}^i\left(y_k^{\mathrm{Re}} \cdot x_l^{\mathrm{Im}} - y_k^{\mathrm{Im}} \cdot x_l^{\mathrm{Re}}\right) < 0, \qquad k, l = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \qquad (17)$$

Тогда знаковая матрица Q^i, определяемая из компонент правых и левых собственных векторов матрицы $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}$ для нахождения мнимых границ собственных значений, и она определяется формулой:

$$Q^i = (q_{kl}^i) = \operatorname{sgn}\left(\left(y_k^{\mathrm{Re}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Im}}\right)^i - \left(y_k^{\mathrm{Im}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Re}}\right)^i\right), \quad k, l = 1, 2, \ldots, n. \qquad (18)$$

Согласно (13а)-(13б) и (16а)-(16б), получены формулы для вычисления границ каждого собственного значения $\lambda_i = \lambda_i^{\mathrm{Re}} + j\lambda_i^{\mathrm{Im}}$ всех вещественных матриц $A \in \boldsymbol{A}$:

$$\lambda_i^{\mathrm{Re}}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ P^i\right) \le \lambda^{\mathrm{Re}} \le \lambda_i^{\mathrm{Re}}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ P^i\right),$$
$$\lambda_i^{\mathrm{Im}}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ Q^i\right) \le \lambda^{\mathrm{Im}} \le \lambda_i^{\mathrm{Im}}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ Q^i\right).$$

Здесь $\operatorname{mid}\boldsymbol{A} \pm \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ P^i$ и $\operatorname{mid}\boldsymbol{A} \pm \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ Q^i$ образуют соответствующие вершинные матрицы для заданной несимметричной интервальной матрицы.

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{A} = \left[\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A}, \operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A}\right] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$. *Если средняя матрица* $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}$ *интервальной матрицы* $\boldsymbol{A}$ *имеет различные собственные значения* $\lambda_i = \lambda_i^{\mathrm{Re}} + j\lambda_i^{\mathrm{Im}}$, *тогда для каждого собственного значения вещественных матриц* $A \in \boldsymbol{A}$ *имеем оценки:*

$$\lambda_i^{\mathrm{Re}}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ P^i\right) \le \lambda^{\mathrm{Re}} \le \lambda_i^{\mathrm{Re}}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ P^i\right),$$
$$\lambda_i^{\mathrm{Im}}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} - \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ Q^i\right) \le \lambda^{\mathrm{Im}} \le \lambda_i^{\mathrm{Im}}\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} + \operatorname{rad}\boldsymbol{A} \circ Q^i\right),$$

где $P^i = (p_{kl}^i) = \operatorname{sgn}\left(\left(y_k^{\mathrm{Re}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Re}}\right)^i + \left(y_k^{\mathrm{Im}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Im}}\right)^i\right)$ *и*

$Q^i = (q_{kl}^i) = \operatorname{sgn}\left(\left(y_k^{\mathrm{Re}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Im}}\right)^i - \left(y_k^{\mathrm{Im}}\right)^i \cdot \left(x_l^{\mathrm{Re}}\right)^i\right)$, $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ *– знаковые матрицы, определяемые компонентами правых и левых собственных векторов матрицы* $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}$.

При реализации метода для несимметричного случая общее количество вершинных матриц составляет $4n$. Также для данного метода разработан соответствующий алгоритм, который приводится в диссертации ввиде псевдокодов.

В *разделе 2.1.3* приводятся численные результаты, апробирующие предложенные методы оценивания границы каждого собственного значения для симметричных и несимметричных интервальных матриц в решении полной проблемы собственных значений. Приведённые численные результаты в этом разделе, в основном имеют сравнительный характер. Рассмотренные примеры взяты из работ других исследователей по данной области, для того, чтобы иметь возможность сравнивать полученные численные результаты, с численными результатами других авторов.

Вычислительные эксперименты проводились на PC Intel® Core™ i3-3217U, CPU 1.83 GHz, 4 GB DDR3 Memory, исходный код был написан на Embarcadero Dev-C++ v.6.3. Также мы использовали программный пакет “octave-interval v.3.2.0-3_amd64” для интервальных вычислений, который работает в системе GNU Octave v.4.2.1. Данный пакет соответствует стандарту IEEE Std 1788-2015 для интервальной арифметики.

Пример 1. Рассматриваем симметричную интервальную матрицу $\boldsymbol{A}^S \in \mathbb{IR}^{3 \times 3}$ из работы М.Хладика:

$$\boldsymbol{A}^S = \begin{bmatrix} [0,2] & [-7,3] & [-2,2] \\ [-7,3] & [4,8] & [-3,5] \\ [-2,2] & [-3,5] & [1,5] \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Средняя и радиусная матрицы соответственно опредляюся как

$$\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rad}\boldsymbol{A}^S = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}^S$, также определяем знаковые матрицы S^i для дальнейшего хода алгоритма:

$\lambda_1 = 0.2564$, $x^1 = (0.9298,\ 0.3457,\ -0.1260)$, $S^1 = \operatorname{diag}(1,1,-1)$,

$\lambda_2 = 2.8145$, $x^2 = (0.1971,\ -0.1788,\ 0.9639)$, $S^2 = \operatorname{diag}(1,-1,1)$,

$\lambda_3 = 6.9291$, $x^3 = (-0.3107,\ 0.9211,\ 0.2344)$, $S^3 = \operatorname{diag}(-1,1,1)$.

В *таблице 1* представлены численные результаты алгоритмов для матрицы (19), разработанные разными авторами: (R) - алгоритм Дж.Рона, (D1), (D2), (I1), (I2), (DD1), (DI1), (B) - алгоритмы М.Хладика и его соавторов, (O) - алгоритм Д.Герца, а приведенные в последней строке численные результаты, получены по нашему методу, который для сохранения общности, мы обозначили его как (N) – алгоритм.

Таблица 1. Численные результаты для симметричной интервальной матрицы (19).

	$\left[\underline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_1\right]$	$\operatorname{wid}(\boldsymbol{\lambda}_1)$	$\left[\underline{\lambda}_2,\overline{\lambda}_2\right]$	$\operatorname{wid}(\boldsymbol{\lambda}_2)$	$\left[\underline{\lambda}_3,\overline{\lambda}_3\right]$	$\operatorname{wid}(\boldsymbol{\lambda}_3)$
(R)	[-8.9026, 9.4154]	18.3180	[-6.3445, 11.9734]	18.3179	[-2.2298, 16.0881]	18.3179
(D1)	[-8.9026, 2.0000]	10.9026	[-2.5616, 6.0000]	8.5616	[4.0000, 15.3275]	11.3275
(D2)	[-8.9026, 2.0000]	10.9026	[-2.5616, 6.0000]	8.5616	[4.0000, 15.3275]	11.3275
(I1)	[-8.9026, 6.3760]	15.2786	[-3.3052, 10.4907]	13.7959	[-0.7436, 16.0881]	16.8317
(I2)	[-8.9026, 6.3760]	15.2786	[-3.3052, 10.4907]	13.7959	[-0.7436, 16.0881]	16.8317
(DD1)	[-8.3759, 2.0000]	10.3759	[-2.0000, 6.0000]	8.0000	[4.0000, 15.3275]	11.3275
(DI1)	[-8.3759, 6.7850]	15.1609	[-2.9115, 10.8445]	13.7560	[-0.9115, 16.3089]	17.2204
(B)	[-8.3759, 2.0000]	10.3759	[-2.0000, 6.0000]	8.0000	[4.0000, 15.3275]	11.3275
(O)	[-7.8184, 0.7522]	8.5706	[?, ?]	?	[6.3209, 15.3275]	9.0066
(N)	[-7.8184, 0.5921]	8.4105	[2.1194, 3.5639]	1.4445	[6.3209, 15.3275]	9.0066

В задачах внешнего интервального оценивания, решения считается оптимальным, если оно имеет по возможности минимальную ширину, конечно же, содержащее все точечные решения рассматриваемой системы. Здесь функция $\operatorname{wid}(\boldsymbol{\lambda}_i) = \overline{\lambda}_i - \underline{\lambda}_i$ определяет ширину интервальных решений.

Из таблицы 1 видно, что численные результаты, полученные с помощью (N) - алгоритма более хорошие, чем результаты остальных алгоритмов.

Пример 2. Рассмотрим несимметричную интервальную матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [-3,-2] & [4,5] & [4,6] & [-1,1.5] \\ [-4,-3] & [-4,-3] & [-4,-3] & [1,2] \\ [-5,-4] & [2,3] & [-5,-4] & [-1,0] \\ [-1,0.1] & [0,1] & [1,2] & [-4,2.5] \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Для данной несимметричной интервальной матрицы, вычисленные границы собственных значений по разработанному методу решения полной проблеме, представлены в таблице 2.

Таблица 2. Оценки интервальных собственных значений для матрицы (20).

$\boldsymbol{\lambda}_i$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$
$\boldsymbol{\lambda}_1$	-3.8502	-3.4325	6.4318	6.9672
$\boldsymbol{\lambda}_2$	-3.8502	-3.4325	-6.8986	-6.5645
$\boldsymbol{\lambda}_3$	-4.6471	-2.1729	0.9043	0.0000
$\boldsymbol{\lambda}_4$	-2.7729	2.6921	-0.9043	0.0000

Для сравнения полученных численных результатов, найдены интервальная оболочка множества решений $\Lambda(\boldsymbol{A})$, путём объединения всех найденных собственных интервалов из таблицы 2:

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{Re}} = \bigcup_{i=1}^{4} \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Re}} = [-4.6471,\ 2.6921], \qquad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{Im}} = \bigcup_{i=1}^{4} \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Im}} = [-6.8986,\ 6.9672].$$

Так как матрица (20) в работах других авторов рассматривалась только для нахождения границ всего множества $\Lambda(\boldsymbol{A})$, а не для каждого собственного значения.

Таблица 3. Интервальные оценки множества решений собственных значений $\Lambda(\boldsymbol{A})$ для матрицы (20).

Методы	$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{Re}}$	$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{Im}}$
Метод Рона	[-8.8221, 3.4408]	[-10.7497, 10.7497]
Метод Хладика	[-7.4848, 3.3184]	[-9.4224, 9.4224]
Метод Герца	[-7.3691, 3.2742]	[-8.7948, 8.7948]
Предлагаемый метод	[-4.6471, 2.6921]	[-6.8986, 6.9672]

Из *таблицы 3* можно заметить, что полученные результаты по предлагаемому методу оптимальны, имеют меньшую ширину, чем остальные методы. Графическая интерпретация полученных результатов представлена на Рис.1.

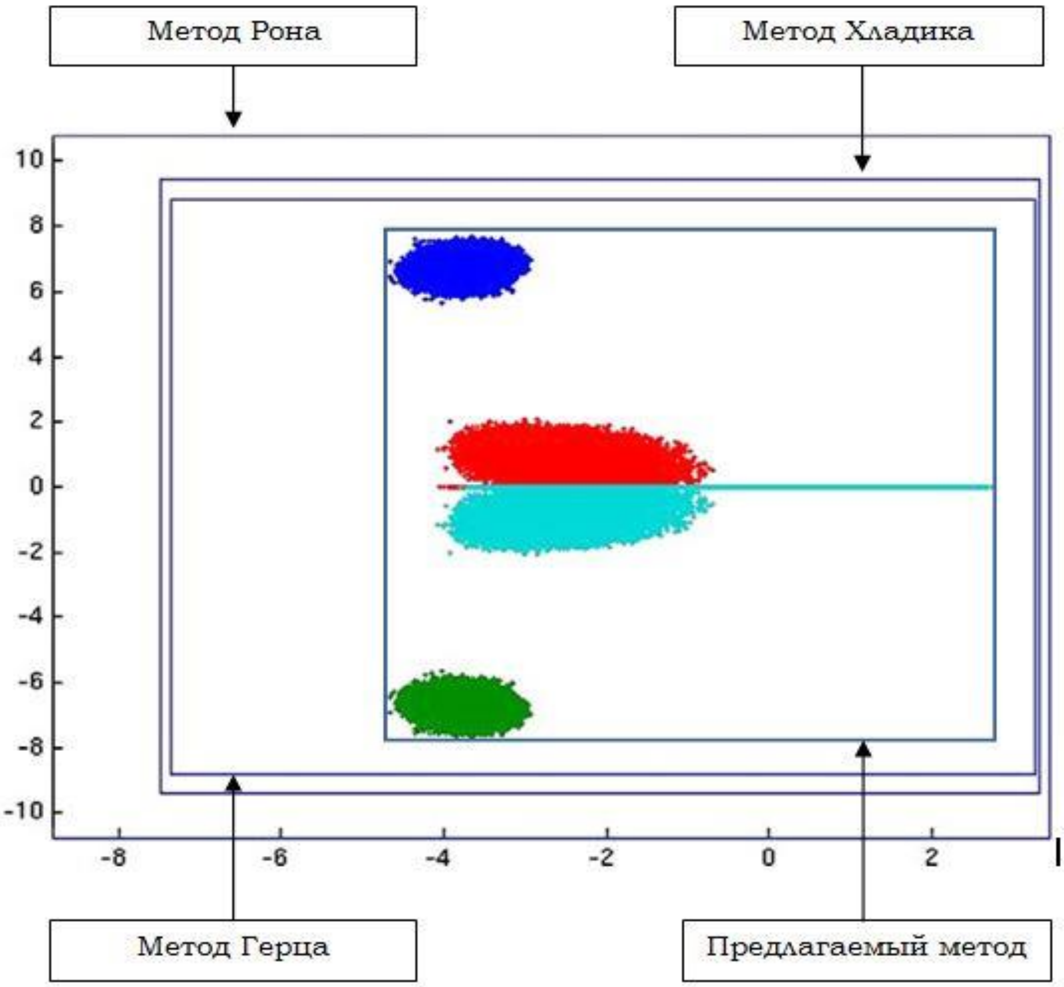


Рис. 1. Множества собственных значений и их интервальные оболочки для матрицы (25).

Здесь аппроксимация множества собственных значений для всех точечных матриц $A \in \boldsymbol{A}$ изображена с использованием метода Монте-Карло. Разные цвета разделяют собственные значения на несколько групп по их непрерывности. Однако все собственные значения перекрываются с помощью интервальных оболочек, т.е. четыре вычисленные границы представлены прямоугольниками. Можно заметить, что собственные значения в виде комплексного интервала, это есть некоторый прямоугольник в плоскости комплексных чисел. Из приведённого рисунка интервальных оценок видно, что самый большой прямоугольник, принадлежит к методу Рона, поэтому является малоинформативным. Самый меньший прямоугольник - это комплексный интервал, полученный по предлагаемому нами методу, что показывает максимально плотное ограждение, чем другие оценки.

Во втором параграфе Главы II приводятся основные результаты исследовании решения частичной проблемы собственных значений для симметричных интервальных матриц. Рассматриваются итерационные методы, такие как степенной метод и метод скалярных произведений, разработаны модификации этих алгоритмов для интервальных матриц.

Множество всех собственных значений для симметричной интервальной матрицы, записывается как

$$\Lambda(\boldsymbol{A}^s) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists A \in \boldsymbol{A}^s,\ \exists x \neq 0,\ ,\ Ax = \lambda x\},$$

и здесь требуется искать интервальное доминирующее собственное число $\boldsymbol{\lambda}_1 \in \mathbb{IR}$ и соответствующий ему интервальный вектор $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{IR}^n$, такие что, $\boldsymbol{\lambda}_1$ содержит все доминирующее собственные значения $\lambda_1^* \in \mathbb{R}$, а $\boldsymbol{x}_1$ содержит соответствующие их собственные векторы $x_1^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ для всех матриц.

Основная идея разработанных алгоритмов основана на *теореме 1*, т.е. сначала находятся вершинные матрицы, а затем алгоритм продолжает свою работу для нахождения собственных значений этих вершинных матриц. В результате находится доминирующий интервал собственных значений для интервальной матрицы.

Разработанные модифицированные алгоритмы степенного метода и метода скалярных произведений для интервальных симметричных матриц описываются в диссертации в виде псевдокодов и сравниваются полученные с их помощью результаты, с одинаковыми начальными данными.

Основная цель данного исследования была направлена на применение классических итерационных методов решения частичной проблемы собственных значений для интервальных матриц. При этом мы выбрали степенной метод и метод скалярных произведений, которые часто используются в практике для решения частичной проблеме собственных значений.

Пример 3. Рассматривается трёхдиагональная симметричная интервальная матрица размерности 4×4 из работы Z.Qui и др., которая образована при изучении устойчивости механических систем «пружина-масса»:

$$\boldsymbol{A}^S = \begin{pmatrix} [2975,3025] & [-2015,-1985] & 0 & 0 \\ [-2015,-1985] & [4965,5035] & [-3020,-2980] & 0 \\ 0 & [-3020,-2980] & [6955,7045] & [-4025,-3975] \\ 0 & 0 & [-4025,-3975] & [8945,9055] \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Таблица 4. Численные результаты для интервальной матрицы (21).

Вектор началь. прибл.	Модифицированный алгоритм степенного метода					Модифицированный алгоритм метода скалярных произведений				
$\left(y^{(0)}\right)^T$	l	$\underline{\lambda}_1$	r	$\overline{\lambda}_1$	$\mathrm{wid}\left(\left[\underline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_1\right]\right)$	l	$\underline{\lambda}_1$	r	$\overline{\lambda}_1$	$\mathrm{wid}\left(\left[\underline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_1\right]\right)$
(1;1;1;1)	14	12560.83398	14	12720.22559	159,39161	14	12560.83496	14	12720.22558	159,39062
(1;1;1;0)	11	12560.83594	11	12720.22461	159,38867	11	12560.83496	11	12720.22558	159,39062
(1;1;0;1)	10	12560.83398	11	12720.22656	159,39258	10	12560.83398	11	12720.22460	159,39062
(1;1;0;0)	14	12560.83398	14	12720.22363	159,38965	14	12560.83496	14	12720.22460	159,38964
(1;0;1;1)	22	12560.83594	22	12720.22559	159,38965	37	12560.83789	37	12720.22851	159,39062
(1;0;1;0)	13	12560.83594	13	12720.22461	159,38867	13	12560.83594	13	12720.22461	159,38867
(1;0;0;1)	14	12560.83496	14	12720.22461	159,38965	14	12560.83496	14	12720.22461	159,38965
(1;0;0;0)	16	12560.83301	17	12720.22559	159,39258	16	12560.83594	16	12720.22266	159,38672

(0;1;1;1)	11	12560.83594	11	12720.22656	159,39062	11	12560.83496	10	12720.22168	159,38672
(0;1;1;0)	14	12560.83691	14	12720.22559	159,38868	13	12560.83398	13	12720.22168	159,38770
(0;1;0;1)	10	12560.83398	10	12720.22266	159,38868	10	12560.83398	10	12720.22461	159,39063
(0;1;0;0)	15	12560.83594	15	12720.22363	159,38769	15	12560.83496	15	12720.22558	159,39062
(0;0;1;1)	18	12560.83594	18	12720.22559	159,38965	17	12560.83398	17	12720.22363	159,38965
(0;0;1;0)	12	12560.83594	12	12720.22559	159,38965	11	12560.83301	11	12720.22363	159,39062
(0;0;0;1)	13	12560.83496	13	12720.22559	159,39063	13	12560.83594	13	12720.22558	159,38964

Сравнительный анализ по полученным численным результатам показывает, что метод скалярных произведений в общем случае эффективнее, чем степенной метод по быстроте сходимости и по оптимальности интервального решения. Также проведен в диссертации сравнительный анализ полученных нами численных результатов, с результатами других авторов для подобранных интервальных матриц.

Третья глава диссертации, названная «**Приложения интервальной задачи собственных значений при анализе, синтезе и диагностике математических моделей некоторых прикладных задач**» посвящена приложению интервальной задачи собственных значений, которая возникает при анализе, синтезе и диагностике математических моделей некоторых практически важных прикладных задач.

В первом параграфе данной главы рассматривается задача анализа продуктивности интервальной линейной экономической модели межотраслевого баланса, который определяется собственным значением интервальной матрицы Леонтьева.

В математическом плане продуктивность рассматриваемой модели полностью определяется интервальной величиной доминирующего собственного числа $\boldsymbol{\lambda}_A$ интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$. Именно при таком предположении в работах З.Х.Юлдашева и А.А.Ибрагимова исследован вопрос продуктивности и доказана следующая:

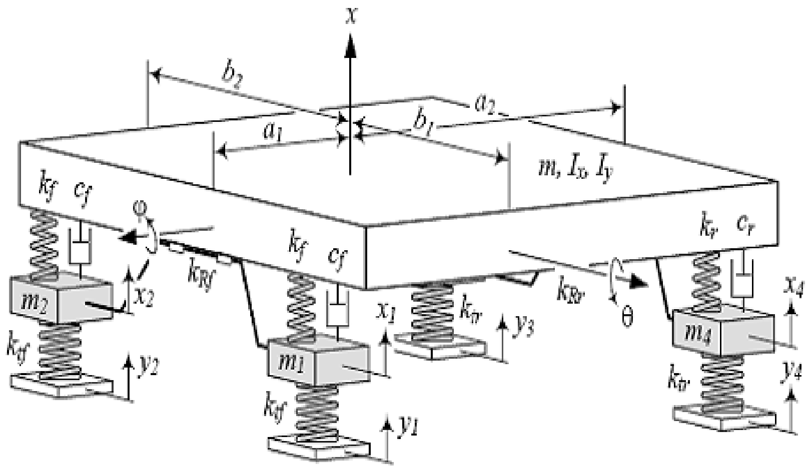
Теорема 3. *Интервальная модель Леонтьева продуктивна тогда и только тогда, когда* $|\boldsymbol{\lambda}_A| < 1$.

В данной диссертации доказан ещё один критерий продуктивности интервальной линейной модели межотраслевого экономического баланса, опираясь на *теорему 3*.

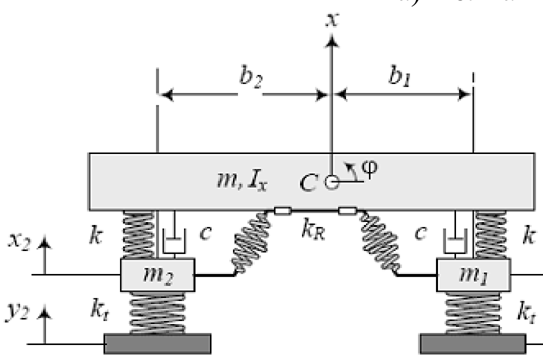
Теорема 4. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *неотрицательная интервальная матрица. Если для* $\boldsymbol{r}_i$*, т.е. для суммы всех элементов каждой строки (столбцы) справедливо* $|\boldsymbol{r}_i| \le 1$ *и хотя бы для одной строки (столбца)* $|\boldsymbol{r}_k| < 1$*, то интервальная модель Леонтьева продуктивна.*

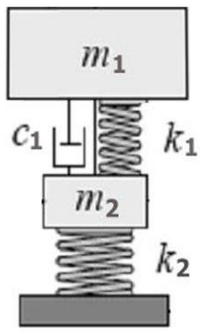
Приводится пример для данных баланса трех отраслей промышленности, подтверждающий практическую значимость данного результата. Также в этом параграфе анализируются классы матриц, так называемых М-матрицы и Н-матрицы, имеющие свойства как положительная обратимость и невырожденность для исследования модели межотраслевого баланса. Совпадения собственных чисел при проверке на продуктивность модели межотраслевого баланса означает, что в структурах производства есть некоторая симметрия, что в практических задачах, такое редко встречается. Такая ситуация от нас требует выбрать достаточно эффективные методы решения проблемы собственных значений для несимметричных матриц. В большинстве случаев рекомендуется использовать итерационные методы для решения частичной проблемы собственных значений, так как нас больше всего интересует наибольшее собственное число интервальной матрицы балансных уравнений.

Во втором параграфе данной главы рассматривается модель вибрации для задачи автомобильной подвески, как замкнутой системы управления. При этом возможные модели рассматриваются как полная, половинная и четверть модели подвески (Рис.2).



а) Полная модель





б) Половинная модель в) Четверть модель

Рис.2. Возможные модели автомобильной подвески.

Предлагается интервальная модель в предположении, что структурные параметры системы заданы с некоторой неопределенностью, т.е. исходные данные для расчета параметров модели, таких как жесткость пружины и шины, коэффициент демпфирования и некоторые другие параметры подвески считаются заданными в интервалах.

В соответствии с реальными условиями в инженерных задачах система подвески автомобиля может быть упрощена и представлена как модель вибрации с несколькими степенями свободы. Используя метод Ньютона или уравнение Лагранжа для реализации динамического анализа модели вибрации подвески, дифференциальное уравнение движения определяется как:

$$M\,\ddot{y}(t) + C\,\dot{y}(t) + K\,y(t) = F(t), \tag{22}$$

где $y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)$ - вектор перемещения, скорости и ускорения соответственно; $F(t)$ - вектор внешнего воздействия; M, C, K матрицы масс, демпфирования и жесткости соответственно. Размеры этих матриц и векторов определяются степенью свободы модели вибрации транспортного средства.

Для описания неопределенности параметров вводится зависимость матриц M, C, K от векторного или скалярного параметра q, ограниченного двусторонним неравенством $q_{\min} \le q \le q_{\max}$, этот структурный параметр можно выразить в интервальном виде как:

$$q \in \boldsymbol{q} = \left[\underline{q}, \overline{q}\right] = \left[\operatorname{mid}\boldsymbol{q} - \operatorname{rad}\boldsymbol{q}, \operatorname{mid}\boldsymbol{q} + \operatorname{rad}\boldsymbol{q}\right] = \operatorname{mid}\boldsymbol{q} + \left[-\operatorname{rad}\boldsymbol{q}, \operatorname{rad}\boldsymbol{q}\right], \tag{23}$$

тогда соответствующие интервальные матрицы определяются

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= M(\operatorname{mid}\boldsymbol{q}) + \left[-M(\operatorname{rad}\boldsymbol{q}), M(\operatorname{rad}\boldsymbol{q})\right] = \\ &= \operatorname{mid}\boldsymbol{M} + \left[-\operatorname{rad}\boldsymbol{M}, \operatorname{rad}\boldsymbol{M}\right] = \operatorname{mid}\boldsymbol{M} + \Delta\boldsymbol{M},\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= C(\operatorname{mid}\boldsymbol{q}) + \left[-C(\operatorname{rad}\boldsymbol{q}), C(\operatorname{rad}\boldsymbol{q})\right] = \\ &= \operatorname{mid}\boldsymbol{C} + \left[-\operatorname{rad}\boldsymbol{C}, \operatorname{rad}\boldsymbol{C}\right] = \operatorname{mid}\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C},\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} &= K(\operatorname{mid}\boldsymbol{q}) + \left[-K(\operatorname{rad}\boldsymbol{q}), K(\operatorname{rad}\boldsymbol{q})\right] = \\ &= \operatorname{mid}\boldsymbol{K} + \left[-\operatorname{rad}\boldsymbol{K}, \operatorname{rad}\boldsymbol{K}\right] = \operatorname{mid}\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K}.\end{aligned} \tag{26}$$

Таким образом, уравнение (22) может быть выражено как интервальное уравнение

$$\Delta\boldsymbol{M}\,\ddot{y}_0(t) + M_0\Delta\ddot{\boldsymbol{y}}(t) + \Delta\boldsymbol{C}\,\dot{y}_0(t) + C_0\Delta\dot{\boldsymbol{y}}(t) + \Delta\boldsymbol{K}\,y_0(t) + K_0\Delta\boldsymbol{y}(t) = \Delta\boldsymbol{f}(t), \tag{27}$$

где очевидно, что матрицы $M_0 = \operatorname{mid}\boldsymbol{A}, C_0 = \operatorname{mid}\boldsymbol{C}, K_0 = \operatorname{mid}\boldsymbol{K}$ являются точечными, а $\Delta\boldsymbol{M}$, $\Delta\boldsymbol{C}$, $\Delta\boldsymbol{K}$ - интервальными матрицами.

Следовательно, уравнение состояния для уравнения движения (22) записывается следующим уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \eta(t), \tag{28}$$

где $x(t) = \left(y(t), \dot{y}(t)\right)^T$ - вектор состояния, а системная матрица A и вектор внешнего воздействия $\eta(t)$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}, \qquad \eta(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{29}$$

где I — единичная матрица.

Тогда интервальное уравнение состояния управляемой замкнутой системы с неопределенными структурами имеет вид:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_0\Delta\boldsymbol{x}(t) + \Delta\boldsymbol{A}x_0(t), \tag{30}$$

где $\boldsymbol{x}(t) = x_0(t) + \Delta\boldsymbol{x}(t),$ при $\delta x(t) \in \Delta\boldsymbol{x}(t) = [-\operatorname{rad}x(t), \operatorname{rad}x(t)]$,

$$\boldsymbol{A} = A_0 + \Delta\boldsymbol{A} = \mathrm{mid}\boldsymbol{A} + [-\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}, \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}],$$

$$\Delta\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M_0^{-1}\Delta\boldsymbol{K} - \Delta\boldsymbol{M}^{-1}K_0 & -M_0^{-1}\Delta\boldsymbol{C} - \Delta\boldsymbol{M}^{-1}C_0 \end{pmatrix}.$$

При анализе модели вибрации автомобильной подвески возникает задача собственных значений. Таким образом, для любого интервальнозначного структурного параметра $\boldsymbol{q}$ имеем интервальную стандартную задачу определения собственных значений:

$$Aw = \lambda w, \quad A \in \boldsymbol{A}, \quad \lambda \in \boldsymbol{\lambda}, \tag{31}$$

где A - матрица состояния системы, содержащиеся в интервальной матрице $\boldsymbol{A} = A(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, λ - собственное значение из интервала $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{IR}$ для любой матрицы $A \in \boldsymbol{A}$, а w - соответствующий собственный вектор. При этом множества собственных значений определяются как

$$\Lambda = \{\lambda \mid Aw = \lambda w,\ A \in \boldsymbol{A}\}. \tag{32}$$

Для задачи (31) интервалы собственных значений записываются как $\boldsymbol{\lambda}_j = \lambda_{0j} + \Delta\boldsymbol{\lambda}_{1j}$, где $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{1j} = [-\Delta\lambda_{1j}, \Delta\lambda_{1j}]$, а $\Delta\lambda_{1j} = |\mathrm{Re}(\Delta\lambda_{1j})| + i|\mathrm{Im}(\Delta\lambda_{1j})|$ - границы, разделенные на вещественные и мнимые части. Таким образом, получим верхние и нижние границы действительных и мнимых частей комплексных собственных значений:

$$\mathrm{Re}(\underline{\lambda}_j) = \mathrm{Re}(\lambda_{oj}) - |\mathrm{Re}(\Delta\lambda_{1j})|, \qquad \mathrm{Re}(\overline{\lambda}_j) = \mathrm{Re}(\lambda_{oj}) + |\mathrm{Re}(\Delta\lambda_{1j})|,$$

$$\mathrm{Im}(\underline{\lambda}_j) = \mathrm{Im}(\lambda_{oj}) - |\mathrm{Im}(\Delta\lambda_{1j})|, \qquad \mathrm{Im}(\overline{\lambda}_j) = \mathrm{Im}(\lambda_{oj}) + |\mathrm{Im}(\Delta\lambda_{1j})|.$$

Для оценки устойчивости системы управления можно использовать условие:

$$\mathrm{Re}(\lambda_{0j}) - |\mathrm{Re}(\Delta\lambda_{1j})| \le \Upsilon_j \le \mathrm{Re}(\lambda_{0j}) + |\mathrm{Re}(\Delta\lambda_{1j})|,$$

где Υ_j - действительная часть собственных значений замкнутой системы управления. При построении управления с обратной связью, если $\mathrm{Re}(\lambda_{0j})(j = 1, 2, ..., r)$ достаточно большое, то можно гарантировать устойчивость системы с интервальными параметрами.

В конце данного параграфа приводится численный пример для модели автомобильной подвески, смоделированной системой из двух тел (Рис 2. (в)). При этом учитываются только вертикальные колебания системы. Чтобы сравнивать полученные нами численные результаты, исходные данные для интервальных структурных параметров автомобильной подвески, подобраны из работ З.Цю и его соавторов:

$$\boldsymbol{m}_1 = [1200, 1200], \quad \boldsymbol{m}_2 = [80, 80], \quad \boldsymbol{c}_1 = [4400, 5200],$$

$$\boldsymbol{k}_1 = [280, 320], \quad \boldsymbol{k}_2 = [3000, 3400].$$

Расчет проведен для интервальной матрицы состояния

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1] \\ [-0.26667,-0.23333] & [0.23333,0.26667] & [-4.3335,-3.6665] & [3.6665,4.3335] \\ [3.5,4] & [-46.5,-41] & [55,65] & [-65,-55] \end{pmatrix}.
$$

Таблица 5. Численные результаты, полученные методом интервальных возмущений (Z.Qiu и его соавторами).

$\boldsymbol{\lambda}_i$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\mathrm{wid}(\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Re}})$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$	$\mathrm{wid}(\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Im}})$
$\boldsymbol{\lambda}_1$	-66.9348	-59.7556	7.1792	0.0000	0.0000	0.0000
$\boldsymbol{\lambda}_2$	-0.0701	-0.0569	0.0132	0.0000	0.0000	0.0000
$\boldsymbol{\lambda}_3$	-0.6899	0.0987	0.7886	1.1837	1.9137	0.7300
$\boldsymbol{\lambda}_4$	-0.6899	0.0987	0.7886	-1.9137	-1.1837	0.7300

Таблица 6. Численные результаты, полученные с применением Алгоритма 2.2.

$\boldsymbol{\lambda}_i$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Re}}$	$\mathrm{wid}(\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Re}})$	$\underline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$	$\overline{\lambda}_i^{\mathrm{Im}}$	$\mathrm{wid}(\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{Im}})$
$\boldsymbol{\lambda}_1$	-68.7681	-57.9054	10.8627	0.0000	0.0000	0.0000
$\boldsymbol{\lambda}_2$	-0.0742	-0.0545	0.0197	0.0000	0.0000	0.0000
$\boldsymbol{\lambda}_3$	-0.5294	0.0286	0.5580	1.4751	1.5720	0.0969
$\boldsymbol{\lambda}_4$	-0.3006	-0.2898	0.0108	-1.6453	-1.4036	0.2417

Альтернативная интерпретация интервального собственного значения состоит в том, чтобы взять среднюю точку $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{\lambda} = \left(\overline{\lambda} + \underline{\lambda}\right)/2$ как приближение к λ и радиуса $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{\lambda} = \left(\overline{\lambda} - \underline{\lambda}\right)/2$ как неопределённость. Таким образом, вычисление интервального собственного значения, содержащее вещественные собственные значения, обеспечивает как приближение к точному собственному значению с $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{\lambda}$, а $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{\lambda}$ как границы ошибки для приближенного собственного значения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая полученные результаты исследований по диссертации, можно сделать следующие выводы:

1. Предложены и систематизированы различные постановки алгебраической интервальной проблемы собственных значений на основе задачи внешнего и внутреннего интервального оценивания.
2. Разработаны и обоснованы методы решения полной проблемы собственных значений интервальных матриц для симметричного и несимметричного случая стандартной задачи.
3. Разработаны модифицированные алгоритмы степенного метода и метода скалярных произведений для решения частичной проблемы собственных значений симметричных интервальных матриц.
4. Предложен и обоснован один критерий продуктивности интервальной модели межотраслевого экономического баланса на основе собственного числа матрицы прямых производственных затрат.
5. Предложена интервальная модель вибрации для механической системы автомобильной подвески и получены интервальные оценки устойчивости на основе собственных значений матрицы состояния системы.
6. Разработаны алгоритмы, программное обеспечение всех предложенных методов для решения интервальной задачи собственных значений и апробированы на тестовых примерах.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NAVOI STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE

KHAMROEVA DILAFRUZ NAMOZOVNA

ALGORITHMS FOR SOLVING THE ALGEBRAIC EIGENVALUE PROBLEM UNDER INTERVAL UNCERTAINTY DATA

05.01.07-Mathematical simulation. Numerical methods and software (Physical and mathematical sciences)

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2019.4.PhD/FM453.

Dissertation has been prepared at Navoi State Pedagogical Institute.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Yuldashev Ziyavidin Khabibovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Normurodov Chori Begaliyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Khalkhanov Polatbek Jumabaevich Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Karshi State University**

Defense will take place «12» 07 2023 at 14^00 at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered № 97) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «21» 06 2023 year
(Mailing report No 1 on 05.06.2023 year).

M.M.Aripov
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

B.F.Abdurahimov
Chairman of scientific seminar under scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to develop interval methods, algorithms and software for solving algebraic eigenvalue problems and applying them to solve some applied problems.

The object of the research is the methods for establishing interval estimates for the eigenvalues of interval matrices, the proof of the solution inclusion theorem, the development of algorithms and their software.

Scientific novelty of research is as follows:

formulas for calculating the lower and upper bounds of the sets of eigenvalues of symmetric and nonsymmetric interval matrices are obtained;

by constructing special vertex matrices, estimates of membership of eigenvalues of interval matrices are found based on the principle of inclusion of solutions;

modified algorithms of the power method and the scalar product method for calculating the boundaries of the set of dominating eigenvalues of interval matrices have been developed;

the problem of productivity of the interval model of intersectoral economic balance was solved by establishing the appropriate conditions for the eigenvalues of the matrix of direct production costs;

stability estimates for the vibration system of automobile suspension structures are obtained based on the eigenvalues of the state matrix, considering it as a closed controlled system;

appropriate algorithms and software have been developed to solve the full and partial eigenvalue problem using interval arithmetic.

Implementation of the research results. Scientific results on solving algebraic eigenvalue problems under conditions of interval uncertainty have been put into practice in the following areas:

the developed interval methods, algorithms and software for solving the complete eigenvalue problem were used in solving the problem of diagnosing the state of the mechanical structures of generator complexes in the implementation of the scientific and practical project 06/2020-E - "Development and installation of generator complexes at the engineering structures of the Navoi Mining and Metallurgical Plant" (Reference of the Navoi State Mining and Technological University No. 01-04/258 dated February 2, 2023). The application of scientific results made it possible to obtain estimates of the stability of mechanical structures “structure-base” when installing generators on engineering structures.

interval methods and algorithms for solving a partial eigenvalue problem were used to obtain an estimate of the stability of solutions to one-dimensional linear hyperbolic systems specified with dissipative boundary conditions within the framework of the state research project No. OT-F4-28 “Construction of adequate computational models of hyperbolic systems” (Reference of the National University of Uzbekistan No. 04-11/636 dated February 8, 2023). Numerical results obtained by interval methods were used in the analysis of a priori estimates of the discrete analogue of the Lyapunov function.

The structure and volume of the thesis: The dissertation work consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 108 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I, Part I)

1. Ibragimov A.A., Khamroeva D.N. On the productivity of the interval linear economic model of the inter-industry balance // ACADEMICIA: An International Scientific Research Journal, Vol 10, Issue 6, june, 2020, pp. 1038-1043. (№23 SJIF 2020 = 7.13).

2. Ibragimov A.A., Khamroeva D.N. On analysis of the computing process with interval data // Problems of Computational and Applied Mathematics. – 2021. - № 2(32):38-48. (01.00.00, №9)

3. Хамроева Д.Н. Об одном методе определения границ собственных значений для интервальных матриц // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2021. – № 4(34). – С. 128-138. (01.00.00, №9)

4. Ibragimov A.A., Khamroeva D.N. Iterative algorithms for solving the partial eigenvalue problem for symmetric interval matrixes // Mathematics and Statistics. - 2022, № 6(10), pp. 1229-1238, (№ 3 Scopus IF=1.0).

5. Ибрагимов А.А., Хамроева Д.Н., Мамуров Т.Т. Проблема сходимости интервального метода обратной матрицы для расчета установившихся режимов электроэнергетических систем // Фан ва жамият. – 2022, №4, с.4-7, (01.00.00, №15)

6. Ибрагимов А.А., Хамроева Д.Н. Полная проблема собственных значений для несимметричных интервальных матриц // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 1(46). – С. 31-46. (01.00.00, №9)

II bo‘lim (Часть II, Part II)

7. Bazarov M.B., Ibragimov A.A., Khamroeva D.N. Interval-analytical operations and functions library for MatLab programming system. Геотехнология: инновационные методы недропользования в XXI веке. Материалы Республиканской научно-технической конференции «Istiqlol». Москва-Навои, 25-27 сентября 2007 г. С.390.

8. Ibragimov A.A., Xamroyeva D.N. Interval arifmetik amallarni bajarishda Intlab paketi. “Ta’lim jarayonida axborot va pedagogik texnologiyalar: natijalar, izlanishlar va muammolar” Respublika ilmiy-amaliy konferensiya materiallari, Navoiy, 2008 y. 2-3 may. B.90-93.

9. Ибрагимов А.А., Хамроева Д.Н. О пакете интервальных алгоритмов для широкого пользователя. Сборник тезисов XI–ой Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, 26-29 октября 2010 года, г. Красноярск. С.71.

10. Ибрагимов А.А., Хамроева Д.Н. О пакете интервальных алгоритмов по принципу дружественности. Материалы 42-ой Всероссийской молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики», Институт

математики и механики УрО РАН, 30 январь - 6 февраль, 2011 г., г.Екатеринбург. С.112–114.

11. Xamroyeva D.N. Algebraik xos qiymat masalasini yechishning dasturiy ta'minoti. "Xotin-qizlarning fan, ta'lim, madaniyat va biznes sohasidagi yutuqlari" mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya materiallari, Jizzax, 4-kitob, 9-10-iyun, 2017-yil. B.276-279.

12. Xamroyeva D.N. Algebraik xos qiymat masalasini sonli yechish usullari va hisoblash algoritmlarining dasturiy ta'minoti // Fizika, matematika va informatika.-2018, №4, B.27-35.

13. Ибрагимов А.А., Хамроева Д.Н., Эргашева Ф.Т. Об интервальном варианте степенного метода для решения частичной проблемы собственных значений. Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции «Информатика, информационные технологии и системы управления: сегодня и в будущем» 20 апреля 2018 г. - Навоий, НавГПИ, II – часть, С.247-250.

14. Xamroyeva D.N. Octave dasturida algebraik xos qiymat masalasini sonli yechish usullari va hisoblash algoritmlarining dasturiy ta'minoti. "Fundamental matematika muammolari va ularning tatbiqlari" Respublika-ilmiy amaliy konferensiyasi materiallari to'plami, 25-may, 2019-y. - Navoiy, B.50-53.

15. Ибрагимов А.А., Хамроева Д.Н., Ходжабаев Ф.Д. Об оптимальности интервально поставленных задач и трудоемкость их алгоритмов. Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции «Перспективы модернизации образования информатики и информационных технологий», 25 мая 2018 г. - Навоий, НавГПИ, I – часть, С.219-224.

16. Ибрагимов А.А., Хамраева Д.Н. Об одном интервальном методе решения несимметричной проблемы собственных значений. Тезисы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий», 14-15 ноября 2019 г. -Ташкент, НУУз, С.113-114.

17. Xamroyeva D.N. Octave dasturida chiziqli algebraning ayrim masalalarini hal etish. "Ilm-fan va ta'limning rivojlanish istiqbollari" mavzusidagi 1-ilmiy-konferensiya to'plami, 1-qism, 27-aprel, 2020-yil. B.66-68.

18. Ibragimov A.A., Xamroyeva D.N., Aktamov Sh.Sh. Octave matematika tizimida chiziqli algebraning ba'zi masalalarini yechish tajribasi haqida // Муғаллим ҳәм үзликсиз билимлендириў. – 2020. №3. B.35-42.

19. Ибрагимов А.А., Хамраева Д.Н. О продуктивности интервальной линейной экономической модели межотраслевого баланса. Сборник материалов Международной научной конференции «Перспективы применения инновационных и современных информационных технологий в системах образования, науки и управления», 14-15 мая 2020 г. - Самарқанд, СамГУ. С.157-160.

20. Xamroyeva D.N., Xamroyev U.N. Octave dasturida M-fayllar bilan ishlash. "Ta'lim sifatini takomillashtirishda innovatsion hamkorlikning dolzarb masalalari" mavzusidagi xalqaro ilmiy onlayn konferensiya materiallari, 2020-yil, 27-may, Navoiy, 4-kitob, B.220-223.

21. Ibragimov A.A., Xamroyeva D.N., Amonov D.O‘., Turapova A. Interval hisoblashlarni tashkil qilish va dasturiy ta’minot ishlab chiqish muammolari tahlili // Elektron ta’lim. -2021. - №1 - B.4-22.

22. Ибрагимов А.А., Хамроева Д.Н. Об одной задаче на собственные значения для интервальных симметричных матриц. Сборник международной научно-практической конференции «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий», 15 апреля 2021 г. - Бухара, Узбекистан. С.224-226.

23. Ибрагимов А.А., Хамраева Д.Н. О приложении интервальной обобщенной задачи на собственные значения в сфере электротехники и электроники. Сарымсаковские чтения: Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых 16–18 сентября 2021 г. - Ташкент: “Университет”, 2021. С.64-66.

24. Khamroyeva D.N. A power-law method for solving a partial eigenvalue problem for interval matrices. Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021: abstracts of the international scientific conference (15-17 November, Fergana, Uzbekistan). – Fergana. 2021. P.84.

25. Ibragimov A.A., Khamrayeva D.N. Nonlinear interval eigenvalue problems in fracture mechanics. Contemporary mathematics and its application: abstracts of the international scientific conference (19-21 November 2021, Tashkent, Uzbekistan). Tashkent. 2021. P.32.

26. Ибрагимов А.А., Хамраева Д.Н. Об одном эффективном алгоритме решения проблемы собственных значений с интервальными данными. Сборник международной научно-практической конференции «Современные проблемы математической физики и математического моделирования» г. Карши, Узбекистан. 3 - 4 декабря 2021 г. С.139-141.

27. Ибрагимов А.А., Хамроева Д.Н. Об итерационных методах решения частичной проблемы собственных значений для несимметричной интервальной матрицы. Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий» (11-12 мая 2022 года, БухГУ, Узбекистан). – Бухара, 2022. С.323-324.

28. Ibragimov A.A., Khamroeva D.N. On a method for solving a generalized eigenvalue problem under interval uncertainty. Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics: international scientific conference (September 23-24, 2022 y. SamSU). –Samarkand. 2022. P.162-164.

29. Ibragimov A.A., Xamroyeva D.N. Haqiqiy va kompleks interval arifmetikaning dasturiy ta’minoti. O‘zbekiston Respublikasi intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 81586, 2020.

30. Ibragimov A.A., Xamroyeva D.N. Interval arifmetika asosida xos qiymat muammosini yechishning dasturiy ta’minoti. O‘zbekiston Respublikasi intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 13499, 2021.

31. Ibragimov A.A., Xamroyeva D.N. Interval xos qiymat masalasini yechishning filtrlash usuli uchun dasturiy ta’minot. O‘zbekiston Respublikasi intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 13500, 2021.

32. Ibragimov A.A., Xamroyeva D.N. Interval xos qiymat muammosini yechishning iteratsion usullari. O‘zbekiston Respublikasi intellektual mulk agentligi. Guvohnoma № DGU 15772, 2022.

Avtoreferat Navoiy davlat pedagogika institutining “Elektron ta’lim” ilmiy-uslubiy jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3,75. Adadi 100 dona. Buyurtma № 39/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.