

**QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI  
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI  
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

---

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI**

**G‘AFFOROV RAHMATJON ABDUQAXXOROVICH**

**CHIZIQ VA SIRTLARNING PSEVDROYEVKLID FAZOLARIDAGI  
ALMASHTIRISHLARGA NISBATAN EKVIVALENTLIGI**

**01.01.01 – Matematik analiz**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi  
AVTOREFERATI**

**Qarshi – 2023**

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi  
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD)  
по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD)  
on physical-mathematical sciences**

**G'afforov Rahmatjon Abduqaxxorovich**

Chiziq va sirtlarning psevdoyevklid fazolaridagi almashtirishlarga nisbatan  
ekvivalentligi ..... 3

**Гаффоров Рахматжон Абдукаххорович**

Эквивалентность кривых и поверхностей относительно движений  
псевдоевклидовых пространств ..... 19

**Gafforov Rahmatjon Abduqaxxorovich**

An equivalency of curves and surfaces with respect to the action of the movements  
for pseudoeuclidean spaces ..... 37

**E'lon qilingan ishlar ro'yxati**

Список опубликованных работ

List of published works..... 41

**QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI  
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI  
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

---

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI**

**G‘AFFOROV RAHMATJON ABDUQAXXOROVICH**

**CHIZIQ VA SIRTLARNING PSEVDROYEVKLID FAZOLARIDAGI  
ALMASHTIRISHLARGA NISBATAN EKVIVALENTLIGI**

**01.01.01 – Matematik analiz**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi  
AVTOREFERATI**

**Qarshi – 2023**

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi Oliy attestatsiya komissiyasida B2018.2.PhD/FM207 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Farg'ona davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb-sahifasi ([www.qarshidu.uz](http://www.qarshidu.uz)) va "Ziyonet" Axborot ta'lim tarmog'ida ([www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)) joylashtirilgan.

**Ilmiy rahbar:**

**Mo'minov Qobiljon Qodirovich**  
fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Rasmiy opponentlar:**

**Rasul Nabiyevich G'anixo'jayev**  
fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Axror Yusupovich Hamrayev**  
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

**Yetakchi tashkilot:**

**Andijon davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Qarshi davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil «06» iyul soat 14<sup>00</sup> dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 180103, Qarshi sh., Ko'chabog' ko'chasi, 17-uy. Tel.: (+998 75) 225-34-13, faks: (+998 75) 221-00-56, e-mail: [qarshidu@mail.uz](mailto:qarshidu@mail.uz)). Qarshi davlat universiteti, Fizika-matematika fakulteti, 102-xona.

Dissertatsiya bilan Qarshi davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (172 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 180103, Qarshi sh., Ko'chabog' ko'chasi, 17-uy. Tel.: (+998 75) 225-34-13).

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil «24» iyun kuni tarqatildi.  
(2023 yil «24» iyun dagi 5 raqamli reyestr bayonnomasi).



**B.A.Sholimqulov**

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

**SH.D.Nodirov**

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d. (PhD)

**A.A.Imomov**

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi o'rinbosari, f.-m.f.d. (DSc), dotsent

## KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

**Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati.** Jahonda miqiyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda egri chiziq va sirtlarning ekvivalentligi shartlarini o‘rganish masalalariga keltiriladi. Egri chiziq va sirtlarning ekvivalentligi masalalari tadqiq qilish invariantlar nazariyaning asosini tashkil qiladi. “Invariantlar nazariyasi” zamonaviy matematikada muxim ahamiyatga ega. “Invariantlar nazariyasi” matematika va fizikaning ko‘pgina sohalarda, masalan, proyektiv geometriya, differensial geometriyaning, kvant mexanikasi va boshqa ko‘plab sohalarda markaziy o‘rinni egallaydi. Shu sababli chiziq va sirtlarning ekvivalentligi shartlarini topish zamonaviy matematikada muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Jahonda hozirgi vaqtda chekli o‘lchamli chizikli fazoda yotgan egri chiziq va sirtlarning ma’lum bir gruppaga ta’siriga nisbatan ekvivalentligi shartlarini aniqlashga doir ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. Shu jumladan, egri chiziqlar va sirtlarning ma’lum bir gruppaga ta’siriga nisbatan ekvivalent bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari asosiy muammosiga qo‘shimcha ravishda, uni hal qilishning geometrik yondashuvi doirasida egri chiziqlar va sirtlarni egrilik, burilish va boshqa geometrik xususiyatlarni berilganlar bo‘yicha tiklash masalasiga alohida e’tibor berilmoqda.

Respublikamizda keyingi yillarda fundamental tadqiqotlarni ilmiy va amaliy qo‘llanilishini kengaytirish bo‘yicha keng ko‘lamli chora-tadbirlar amalga oshirildi va muayyan ijobiy natijalarga erishildi. Jumladan, oxirgi yillarda egri chiziqlar va sirtlarning ekvivalent bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlarini o‘rganishga alohida e’tibor qaratildi. Evklid fazosida berilgan yo‘llar va sirtlarning ma’lum bir gruppaga ta’siriga nisbatan ekvivalent bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlarini topishda salmoqli natijalarga erishildi. 2020 - 2024-yillarda “Funksional analiz, matematik analiz, differensial tenglamalar, matematik fizika, ehtimollar nazariyasi va invariantlar nazariyasi fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy izlanishlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalar va faoliyat yo‘nalishlari” etib belgilandi<sup>1</sup>. Ushbu qarorni ijrosini ta’minlash maqsadida invariantlar nazariyasini tadqiq qilish usullarini ishlab chiqish va rivojlantirish muhim ahamiyat kasb etadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son «O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha xarakteristik strategiyasi to‘g‘risida»gi Farmoni, 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son «Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida», 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi

---

<sup>1</sup>O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar mahkamasining 2017 yil 18 maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish to‘g‘risida”gi 292-son qarori.

PQ-4708-sonli Qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda mazkur dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

**Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yoʻnalishlariga bogʻliqligi.** Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yoʻnalishi doirasida bajarilgan.

**Muammoning oʻrganilganlik darajasi.** Yoʻllar va sirtlarning ekvivalentligi muammosini hal qilishning asosiy vositasi chiziqli gruppalarning invariantlari nazariyasi boʻlib, uning asoslari A.Puankare, G.Weyl, D.Hilbert, J.Dieudonne, J.Kerroll, D.Mumford, X.Kraft va boshqalar ishlarida koʻrilgan. Chekli oʻlchamli fazolar doirasidagi invariantlar nazariyasining asosiy vazifalari quyidagilardan iborat:

- I. Maʼlum chiziqli gruppaga taʼsiriga nisbatan ekvivalentligigacha aniqlikda chiziqli fazo elementlarini tasniflash.
- II. Invariantlar algebrasining chekli tashkil etuvchilarini tiklash va ular orasidagi munosabatlarni aniqlash.

II masala Hilbertning 14-masalasi sifatida tanilgan. Yoʻllar va sirtlarning ekvivalentligi muammosi XX asr boshida E. Kartan tomonidan qoʻyilgan va hozirda Kartan muammosi deb nomlanadi. Bu muammoni invariantlar nazariya usullaridan farq qiluvchi reperlar usuli bilan chuqur oʻrganishni E.Kartanning oʻzi olib bordi. Bu masalani yechishning geometrik yondashuvlari J.Pommare, Yu.A.Aminov, V.Blashke, P.A.Shirokovlar ishlarida koʻrib chiqilgan. I.M.Yaglomning simplektik gruppaga taʼsiriga nisbatan bir juft egri chiziqning ekvivalentligi masalasini yechishga bagʻishlangan ishlarini ham qayd etish lozim.

Chekli oʻlchamli fazolardagi egri chiziqlar ekvivalentligi masalasini geometrik usullar bilan yechishda egri chiziqlarning egrilik, buralish va boshqa geometrik xossalarini berilganlar boʻyicha tiklash masalasi A.Ortiqboev, I.M. Yaglom ishlarida koʻrib chiqilgan.

Hilbertning 14-masalasining “differensial” analogi respublikamizda J.Xadjiev, O.Peksen, R.G. Aripov, K.K. Moʻminov, A.M. Suxtaeva, B. Tursunovlarning ishlarida turli klassik gruppalarning taʼsiriga nisbatan koʻrib chiqilgan va Oʻzbekiston Fanlar akademiyasi akademigi J.Xadjiev asarlarida batafsil bayon qilingan. Jumladan pseudoortogonal va simplektik gruppalar taʼsiriga nisbatan yoʻllarning ekvivalentligini K.K. Moʻminov, V.I. Chinning ishlarida koʻrish mumkin, sirtlarning ekvivalentligi masalasini xal qilish masalalarini esa K.Moʻminov, U.Bekboyev va boshqalar ishlarida koʻrilgan. Ushbu dissertatsiyada yuqorida sanab oʻtilgan masalalar maxsus psevdortogonal gruppaning taʼsiriga nisbatan yechilgan. Bundan tashqari ushbu gruppaga taʼsiriga nisbatan koʻp oʻlchovli sirtlarning ekvivalentlik masalasi invariant matritsaviy funksiyalari yordamida xal qilingan. Shuningdek baʼzi Evklid boʻlmagan geometriyalarda yoʻllarning maxsus psevdortogonal gruppaga taʼsiriga nisbatan ekvivalent boʻlishining zaruriy va yetarli shartlari topilgan.

**Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy taʼlim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bogʻliqligi.** Dissertatsiya

tadqiqoti Farg‘ona davlat universitetining 2017-2021 yillarga mo‘ljallangan ilmiy ishlar, ilmiy-pedagogik kadrlar ilmiy salohiyatni ko‘tarishning ustuvor yo‘nalishlari dasturining, “Funksional analiz va uning tadbiqlari” nomli bandi doirasida bajarilgan.

**Tadqiqotning maqsadi** maxsus psevdootogonal gruppaga ta’siriga nisbatan yo‘llar va sirlarning ekvivalentligi muammosini hal qilishdan iborat.

**Tadqiqotning vazifalari** quyidagilardan iborat:

psevdoevklid fazosida berilgan yo‘llar va sirlarning maxsus psevdootogonal gruppaga ta’siriga nisbatan ekvivalent bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlarini aniqlash;

psevdoevklid fazosida berilgan yo‘llar va sirlar sistemalarini maxsus psevdootogonal gruppaga ta’siriga nisbatan ekvivalentligi shartlarini topishda hosil bo‘lgan differensial tenglamalar sistemasini yechimini aniqlash;

ba’zi Evklid bo‘lmagan geometriyalarda maxsus psevdootogonal gruppaga ta’siriga nisbatan yo‘llarning ekvivalentligi uchun zarur va etarli shartlarni topish;

psevdoevklid fazosida berilgan yo‘llar va sirlarni ularning differensial invariantlari bo‘yicha ekvivalentligiga qadar qayta tiklash teoremlarini isbotlash.

**Tadqiqotning obyekti** maxsus psevdootogonal gruppaning ta'siriga nisbatan yo‘llar va sirlarning ekvivalentligi.

**Tadqiqotning predmeti** invariantlar nazariyasi, gruppalarni tasvirlari nazariyasi, differensial tenglamalar, funksional analiz.

**Tadqiqotning usullari.** Dissertatsiyada invariantlar nazariyasi, Li gruppalari nazariyasi va gruppalarni tasvirlari nazariyasi, shuningdek differensial tenglamalar va differensial algebra usullaridan foydalanilgan.

**Tadqiqotning ilmiy yangiligi** quyidagilardan iborat:

psevdoevklid fazosida berilgan yo‘llar va sirlarning maxsus psevdootogonal gruppaga ta’siriga nisbatan ekvivalent bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari invariant matritsaviy funksiyalar va differensial chiziqli formalar orqali topilgan;

psevdoevklid fazosida berilgan yo‘llar va sirlar sistemalarini maxsus psevdootogonal gruppaga ta’siriga nisbatan ekvivalentligi shartlarini topishda hosil bo‘lgan oddiy differensial tenglamalar sistemasi yechimining mavjud va yagonaligi ma’lum shartlar va invariant matritsaviy funksiyalar yordamida isbotlangan;

ba’zi Evklid bo‘lmagan geometriyalarda yo‘llarning maxsus psevdootogonal gruppaga ta’siriga nisbatan ekvivalent bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari invariant matritsaviy funksiyalar va differensial chiziqli formalar orqali topilgan;

psevdoevklid fazosida berilgan yo‘llar va sirlarni ularning differensial invariantlari bo‘yicha maxsus psevdootogonal gruppaga ta’siriga nisbatan ekvivalentligigacha qadar qayta tiklash teoremlari matritsaviy differensial tenglamalar sistemasini yechimining mavjud va yagona bo‘lishini ko‘rsatish orqali isbotlangan.

**Tadqiqotning amaliy natijalari** quyidagilardan iborat:

Differensial geometriyaga oid masalalarni yechishda maxsus psevdootogonal gruppaga ta’siriga nisbatan yo‘llar va sirlar sistemalarining ekvivalent bo‘lishining

zaruriy va yetarli shartlarini topilib va ushbu shartlarni topishda hosil bo'lgan differensial tenglamalar sistemasi yechimining mavjudligi va yagonaligini aniqlash usullaridan foydalanilgan.

**Tadqiqot natijalarining ishonchliligi.** matematik va funksional analiz, invariantlar nazariyasi, gruppalar tasvirlari nazariysi va differensial tenglamalar usullaridan foydalanilgani hamda olingan natijalar matematik jihatdan qat'iy isbotlangani bilan asoslanadi.

**Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.** Tadqiqot natijalarning ilmiy ahamiyati shundan iboratki, olingan natijalardan gruppalar tasvirlari nazariyasi, differensial geometriya va invariantlar nazariyasining yanada rivojlanishida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Dissertatsiyaning amaliy ahamiyati yo'llar va sirlarning ekvivalent bo'lishining zaruriy va yetarli shartlarini topish orqali differensial geometriyaga oid masalalarni yechishda qo'llanilishi bilan izohlanadi.

**Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi.** Chiziq va sirlarning psevdoyevklid fazolaridagi almashtirishlarga nisbatan ekvivalentligi bo'yicha olib borilgan tadqiqot natijalari asosida:

maxsus psevdoortogonal gruppaning ta'siriga nisbatan yo'llarning ekvivalentligi shartlarni topish MD-758.2022.1.1 raqamli «Tebranish jarayonlari va to'yingan jarayonlarni o'rganish uchun kasr dinamikasining matematik modellarini ishlab chiqish» mavzusidagi xorijiy fundamental loyihasida qo'llanilgan (Vitus Bering nomidagi Kamchatka davlat universitetining 2023-yil 4-apreldagi № 14-12-son ma'lumotnomasi). Natijada ba'zi Evklid bo'lmagan geometriya uchun yo'llarning ekvivalentligi uchun shartlar topish imkonini bergan;

maxsus psevdoortogonal gruppaga ta'siriga nisbatan yo'llar va sirlarning ekvivalentligi natijalari OT-F-4-(37-29) "A-analitik funksiyalarning funksional xossalari va ularning qo'llanilishi. Matritsaviy soxalarda kompleks analizning ba'zi masalalari" tadqiqot doirasida maxsus matritsa funksiyasi kiritilgan va ushbu funksiya yordamida maxsus psevdoortogonal gruppaga ta'siriga nisbatan yo'llar va sirlarning ekvivalentligi uchun zarur va yetarli shartlar topilgan (O'zbekiston Milliy universitetining 2023-yil 14-apreldagi № 04/11-2129-son ma'lumotnomasi). Ushbu ilmiy natijalarning qo'llanilishi yo'llar va sirlarning differensial invariantlari bo'yicha ekvivalentligigacha tiklash imkonini bergan.

**Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi.** Tadqiqot natijalari 4 ta xalqaro va 5 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

**Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi.** Dissertatsiya tadqiqoti mavzusi bo'yicha jami 21 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 8 ta, jumladan 3 tasi xorijiy va 5 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

**Dissertatsiya'ning hajmi va tuzilishi.** Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabietlar ro'yxatidan iborat bo'lib, 92 betni tashkil etgan.

## DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

**Kirish** qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar haqida ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning «**Boshlang‘ich ma’lumotlar**», deb nomlanuvchi bobida dissertatsiya natijalarini taqdim etish uchun zarur bo‘lgan ko‘phadlar halqasi, maydon kengaytmalari, differensial halqalar va maydonlar, differensial maydonlar  $d$ -chiziqli gruppalar ta’sirida invariant bo‘lgan ratsional funksiyalar, klassik gruppalar ta’sirida ko‘phadli invariantlar  $GL(n, K)$  gruppasi, chekli o‘lchamli fazolarga yo‘llar.

$A$  birlik ixtiyoriy kommutativ halqa bo‘lsin. Elementlari cheksiz tartibli ketma-ketliklar bo‘lgan  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ ,  $a_i \in A$  yangi  $B$  to‘plamni qaraymiz, barcha  $a_i$  lar nol yoki chekli sonlardan iborat. Ikkita ketma-ketlik ushbu qoidaga ko‘ra qo‘shiladi:

$$a + b = (a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

ko‘paytirish esa  $a \cdot b = (a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = c = (c_0, c_1, c_2, \dots)$  formula bilan beriladi, bu yerda  $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Ravshanki,  $B$  birlik  $(1, 0, 0, \dots)$  elementli

kommutativ halqa bo‘ladi.

$(a, 0, 0, \dots)$  ko‘rinishidagi ketma-ketliklar  $A$  halqa elementlari kabi qo‘shiladi va ko‘paytiriladi. Bundan kelib chiqadiki bunday ketma-ketliklar  $A$  ning elementlariga mos holda tanlanadi, ya’ni  $a = (a, 0, 0, \dots)$ ,  $a \in A$  uchun olinadi.

Quyida  $x$  orqali  $(0, 1, 0, 0, \dots)$  elemayentni belgilaymiz va  $x$  ni  $A$  ustidagi erkli o‘zgaruvchi deyiladi.  $B$  halqada kiritilgan ko‘paytirish amalidan quyidagilarga ega bo‘lamiz

$$\begin{aligned} x &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ x^2 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\dots\dots\dots \\ x^n &= (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \end{aligned} \tag{1}$$

yuqoridagi (1) tengliklardan va  $A \subset B$  ekanligidan  $(0, 0, \dots, 0, a, 0, \dots) = a x^n = x^n a$  ga ega bo‘lamiz. Bu holda  $a_n - f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$  ketma-ketlikni noldan farqli hadlari bo‘lsin, ya’ni

$$\begin{aligned} f &= (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0, 0, \dots) + a_n x^n = (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, 0, 0, \dots) + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n. \end{aligned} \tag{2}$$

**Ta'rif 1.** Yuqorida kiritilgan  $B$  halqa  $A[x]$  bilan belgilanadi va  $x$  o'zgaruvchili ko'phadlar halqasi deyiladi. Halqaning elementlari  $x$  o'zgaruvchili ko'phadlar deyiladi,  $a_i$  elementlari esa  $f$  ko'phadning koeffitsientlari deb ataladi.

Aytaylik  $F$   $P$  maydonning qism maydoni bo'lsin. Bunday holda,  $P$  maydoni  $F$  qism maydonning kengaytmasi deyiladi. Ma'lumki,  $P$  maydonning nol va biri  $F$  da bo'ladi va  $P$  uchun nol va bir bo'lib xizmat qiladi. Agar  $P$  da  $F$  ni o'z ichiga olgan barcha qism maydonlarning  $F_1$  kesishmasini va  $F$  ga tegishli bo'lmagan ba'zi  $x \in K$  elementini olsak, u holda  $F_1, F$  va  $x$  ni o'z ichiga olgan minimal maydon bo'ladi, xususan  $F_1$   $F$  maydonining kengaytmasi hisoblanadi. Bunda  $F$  maydonining  $F_1$  kengaytmasi  $F$  ga  $x$  elementni qo'shish orqali olinadi va bu  $F_1 = F(x)$  ko'rinishda yoziladi. Xuddi shunday,  $P$  maydonining  $x_1, \dots, x_n$  elementlarini  $F$  ga qo'shish natijasida olingan  $P$  maydonning  $F(x_1, \dots, x_n)$  qism maydoni haqida aytish mumkin.

Aytaylik,  $F$   $P$  maydonning qism maydoni bo'lsin.  $x \in P$  element  $F$  da algebraik deyiladi, agar  $F$  da shunday  $a_0, a_1, \dots, a_n$  elementlar mavjud bo'lib ularning xammasi ham 0 ga teng bo'lmasa va  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$  tenglik o'rinli bo'lsa. Agar  $P$  ning har bir elementi  $F$  da algebraik bo'lsa,  $P$  maydon kengaytmasi  $F$  da algebraik deyiladi.

$P$  maydon  $b_1, \dots, b_n$  elementlari  $F$  qism maydonda algebraik bog'liq agar  $f = F[x_1, \dots, x_n]$  nolga teng bo'lmagan ko'phad mavjud bo'lib va  $f(b_1, \dots, b_n) = 0$  bo'lsa, qism maydonga algebraik jihatdan bog'liq deyiladi. Aks holda,  $b_1, \dots, b_n$  elementlar  $F$  ga nisbatan algebraik erkli deyiladi.

$A$  ixtiyoriy kommutativ halqa bo'lsin.  $d$  akslantirish  $A$  halqada differentsiallashtirish deyiladi, agar  $x, y \in A$  elementlar uchun quyidagi  $d(x + y) = d(x) + d(y)$  va  $d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y)$  tengliklar o'rinli bo'lsa.

Birlik elementli  $A$  kommutativ halqada fiksirlangan differentsiallashtirish berilganda differensial halqa yoki  $d$ -halqa (mos holda differensial maydon yoki  $d$ -maydon) deyiladi.

Aytaylik  $K, R$  haqiqiy sonlar maydoni yoki  $C$  kompleks sonlar maydoni bo'lsin va  $X, K$  maydoni ustidagi  $n$  o'lchamli chiziqli fazo bo'lsin.  $X$  ning elementlarini  $n$  o'lchamli vektor-ustunlar  $x = \{x_i\}_{i=1}^n$  sifatida ifodalanadi, bu yerda  $x_i \in K, i = \overline{1, n}$  va shuning uchun biz  $X$  ni  $K^n$  bilan belgilaymiz.

Barcha  $K\{x_1, \dots, x_n\}$  ko'phadlarning  $K$  maydon ustidagi  $x_1, \dots, x_n$  o'zgaruvchilar  $d$ -halqasini va  $d$  - ratsional funktsiyalarning  $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  maydonini ko'rib chiqaylik, bunda differentsiallashtirish qoidasi  $d(x_i) = x_i^{(r)}$  tenglik bilan aniqlanadi, bu yerda  $x_i^{(0)} = x_i, i = \overline{1, n}, r \in Z_+$ .

Budan keyin  $x = \{x_i\}_{i=1}^n \in K^n$  vektor uchun  $x_i^{(r)} = \{x_i^{(r)}\}_{i=1}^n, r \in Z_+$  belgisi qo'llaniladi. Bundan tashqari, belgilangan  $K\{x_1, \dots, x_n\}$  va  $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  o'rniga biz  $K\{x\}$  va  $K\langle x \rangle$  qisqa yozuvlaridan foydalanamiz.

$GL(n, K)$  bilan  $X$  fazoning barcha teskari chiziqli almashtirishlar gruppasini belgilaymiz va  $GL(n, K)$  gruppaining ixtiyoriy qism gruppasini  $G$  bilan belgilaymiz.  $G$ -gruppaining  $n$  o'lchovli vektorga ta'sirini  $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in G$  matritsani  $x$  vektoriga chapdan ko'paytirilish sifatida aniqlanadi, ya'ni  $(g, x) \mapsto gx$ .

$d$  - ratsional funksiyalar  $f\langle x \rangle := f\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in K\langle x \rangle$  da  $G$ -invariant, agar barcha  $g \in G$  uchun  $f\langle gx \rangle = f\langle x \rangle$  o'rinli bo'lsa.

Barcha  $G$ -invariant  $d$  - ko'phadlar ( $d$ -ratsional funktsiyalar) to'plamini  $K\{x\}^G := K\{x_1, \dots, x_n\}^G$  (mos ravishda,  $K\langle x \rangle^G := K\langle x_1, \dots, x_n \rangle^G$ ) bilan belgilanadi.

**Teorema 1.**  $GL(n, K)$  gruppaining har qanday  $G$  qism gruppasi uchun  $K\{x\}^G$  to'plami (mos ravishda,  $K\langle x \rangle^G$ )  $d$  - halqadagi  $d$  - qism halqadir (mos ravishda,  $d$  - maydondagi  $d$  - qism maydon).

$k$  ta vektordan iborat  $x_j = \{x_{ji}\}_{i=1}^n \in K^n, j = \overline{1, k}$  bo'lgan  $V = \{x_1, \dots, x_k\}$  to'plamni qaraylik.  $k \cdot n$  o'zgaruvchili bo'lgan barcha  $\{x_{ji} : j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}\}$  ko'phadlarning  $K$  maydoni ustidagi halqasini  $K[x_1, \dots, x_k]$  bilan belgilaymiz. Har bir  $g = (g_{j\ell})_{j,\ell=1}^k \in GL(k, K)$  uchun  $K[x_1, \dots, x_k]$  da  $(g \circ f)(x_1, \dots, x_k) = f(gx_1, \dots, gx_k)$  ko'phadga  $g$  ning ta'sirini  $(g \circ f)(x_1, \dots, x_k) = f(gx_1, \dots, gx_k)$  qoidaga asosan aniqlaymiz. Barcha  $f \in K[x_1, \dots, x_k]$  uchun  $(g \circ f) \in K[x_1, \dots, x_k]$ .

Aytaylik  $G, GL(n, K)$  gruppaining ixtiyoriy qism gruppasi bo'lsin.  $f \in K[x_1, \dots, x_k]$  ko'phad  $G$ -invariant deyiladi, agar ixtiyoriy  $g \in G$  uchun  $g \circ f = f$  tenglik o'rinli bo'lsa. Ko'rish mumkinki  $K[x_1, \dots, x_k]^G$  to'plamning barcha  $G$ -invariant ko'phadlari  $K[x_1, \dots, x_k]$  halqada  $K[x_1, \dots, x_k]$  qism halqa tashkil etadi.  $E = \{f_i\}_{i \in I} \subset K[x_1, \dots, x_k]^G$  ko'phadlar sistemasi, bunda  $I$  qandaydir indekslar to'plami bo'lsin,  $K[x_1, \dots, x_k]^G$  butun ratsional bazis deyiladi, agar har qanday element  $f \in K[x_1, \dots, x_k]$  uchun chekli to'plam  $\{f_i\}_{i=1}^m \subset E$  va  $K$  da  $\phi(y_1, \dots, y_m)$  ko'phad mavjud bo'lsa. Bu shuni anglatadiki,  $E$  to'plam  $K[x_1, \dots, x_k]^G$  halqa uchun tashkil etuvchilar sistemasi, yoki  $E$  ni o'z ichiga olgan eng kichik qism halqa  $K[x_1, \dots, x_k]^G$ .  $E$  chekli to'plam bo'lgan holda  $\{f_1, \dots, f_m\}, K[x_1, \dots, x_k]^G$  halqa chekli butun ratsional bazisga ega deyiladi.

$(0, 1)$  intervalni  $X$  fazoga uzluksiz akslantiruvchi va har bir  $x(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^n$  koordinatalari cheksiz marta uzluksiz differensiallanuvchi  $x_i : (0, 1) \rightarrow K$  vektor funksiya yo'l deyiladi,  $i = \overline{1, n}$ .

Yo'ning  $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$   $r$ -tartibli hosilasi  $x^{(r)}(t) = \{x_1^{(r)}(t), \dots, x_n^{(r)}(t)\}$  vektor bo'ladi, bu yerda  $x_i^{(r)}(t)$  –  $r$ -tartibli hosilasi. Ravshanki,  $r = 1, 2, \dots$  lar uchun  $x^{(r)}(t)$  yo'l bo'ladi.

$x(t)$  yo'l regulyar yo'l deyiladi, agar barcha  $t \in (0,1)$  lar uchun  $x^{(1)}(t) := x'(t) \neq 0$  tenglik bajarilsa.

Har bir yo'l  $x(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^n$  uchun biz  $n \times n$  -  $(x(t) \ x^{(1)}(t) \ \dots \ x^{(n-1)}(t))$  matritsa olamiz, bu yerda  $j$  – ustun  $x_i^{(j-1)}(t), i = \overline{1, n}$  koordinatalariga ega,  $M(x)(t)$   $n \times n$  bilan matritsa belgilanadi.  $M'(x)(t)$  bilan  $(x^{(1)}(t) \ x^{(2)}(t) \ \dots \ x^{(n)}(t))$  matritsani belgilaymiz. Agar  $x(t)$  yo'l barcha  $t \in (0,1)$  lar uchun  $\det M(x)(t)$  nolga teng bo'lmasa, u holda yo'l kuchli regulyar yo'l deb ataladi. Agar  $x(t)$  yo'l regulyar yo'l bo'lmasa, unda ba'zi  $t_0 \in (0,1)$  lar uchun  $x^{(1)}(t_0) = 0$  bo'ladi va shuning uchun  $\det M(x)(t_0) = 0$ , ya'ni kuchli regulyar yo'l bo'lmaydi. Shuning uchun har bir kuchli regulyar yo'l regulyar yo'l dir.

Aytaylik  $G, GL(n, K)$  gruppaining ixtiyoriy qism gruppasi bo'lsin. Ikkita yo'l  $x(t)$  va  $y(t)$   $G$ -ekvivalent deyiladi agar hamma  $t \in (0,1)$  uchun shunday  $g \in G$  element mavjud bo'lsa va  $y(t) = g x(t)$  tenglik bajarilsa. Ko'rinib turibdiki,  $y^{(r)}(t) = g x^{(r)}(t), r = 1, 2, \dots$ , holatda  $M(y)(t) = g M(x)(t)$  bo'ladi. Bundan tashqari, ko'rinib turibdiki, oxirgi tenglikdan  $G$ -ekvivalentligidan  $x(t)$  va  $y(t)$  yo'llarning ekvivalentligi kelib chiqadi.

Quyidagi teorema ikkita yo'ning  $GL(n, K)$  gruppaga ta'siriga nisbatan ekvivalentlik shartini beradi.

**Teorema 2.** Ikki  $x(t)$  va  $y(t)$  kuchli regulyar yo'llar  $GL(n, K)$  gruppaga ta'siriga nisbatan ekvivalent deyiladi, faqat va faqat quyidagi tenglik bajarilganda:

$$(M(x)(t))^{-1} M'(x)(t) = (M(y)(t))^{-1} M'(y)(t) \quad (3)$$

barcha  $t \in (0,1)$  lar uchun.

$X$  fazoning barcha affin almashtirishlari  $Aff(X)$  gruppasini ko'rib chiqamiz.  $Aff(X)$  dagi har bir chiziqli hosmas almashtirish  $g \in GL(n, K)$  va siljishga nisbatan superpozitsiyadir,  $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in K^n$  element tomonidan hosil qilingan ya'ni, har qanday affin almashtirish  $(u, g) \in Aff(X)$   $X$  da ushbu qoidaga muvofiq harakat qiladi

$$(u, g)(x) = g x + u, \quad (4)$$

bu yerda  $x \in X, u \in K^n, g \in GL(n, K)$ .

$Aff(X)$  gruppada ko'paytirish quyidagi tenglik bilan aniqlanadi  $(u, g)(v, h) = (u + g u, g h)$ , bu yerda  $u, v \in K^n, g, h \in GL(n, K)$ . Bunday holda,  $Aff(X)$  gruppada yarim to'g'ri ko'paytma aniqlangan deyiladi, u quyidagicha yoziladi  $Aff(X) = K^n \triangleleft GL(n, K)$ . Agar  $G \subset GL(n, K)$  gruppaining ixtiyoriy

qism gruppasi bo'lsa, u holda  $K^n \triangleleft G = \{(u, g) \in K^n \triangleleft GL(n, K) : g \in G\}$  to'plam  $K^n \triangleleft GL(n, K)$  ning qism gruppasi bo'lib, u gruppalar va  $G$  ning yarim to'g'ri ko'paytmasi deb ham ataladi.

**Tasdiq 1.**  $X$  da berilgan ikkita  $x(t)$  va  $y(t)$  yo'llar  $K^n \triangleleft G$  - ekvivalent bo'ladi, faqat va faqat  $x'(t)$  va  $y'(t)$  yo'llar  $G$  ekvivalent bo'lsa.

**Xulosa 1.** Ikki  $x(t)$  va  $y(t)$  yo'llar uchun  $\det M'(x)(t) \neq 0$ ,  $\det M'(y)(t) = 0$ ,  $t \in (0, 1)$  tenglik o'rinli bo'lsa  $K^n \triangleleft GL(n, K)$  - ekvivalent deyiladi faqat va faqat quyidagi tenglik bajarilsa:

$$(M'(x)(t))^{-1} M''(x)(t) = (M'(y)(t))^{-1} M''(y)(t) \quad (5)$$

barcha  $t \in (0, 1)$  lar uchun.

Dissertatsiyaning “**Maxsus psevdootogonal gruppaga ta'siriga nisbatan yo'llarning ekvivalentligi**” deb nomlangan ikkinchi bobida ikkita yo'l va chekli yo'llar sistemasining maxsus psevdootogonal ta'siriga nisbatan ekvivalentligi muammosi o'rganiladi. Bu masalani hal qilish uchun,  $G = SO(n, p, K)$  bo'lganda chekli yo'llar sistemalarining differensial  $G$ -invariant ratsional funksiyalarining differensial maydonlari tashkil etuvchilari tasvirlangan. Shuningdek, differensial invariantlar bo'yicha  $G$ -ekvivalentgacha yo'llarni tiklash masalasiga yechim topilgan, bu yerda  $G = SO(n, p, K)$ .

Biz  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  natural sonini tuzatamiz va  $K^n$   $n$  o'lchovli fazoda chiziqli simmetrik formani  $[x, y]_p = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n$  ko'rib chiqamiz, bu yerda  $x = \{x_i\}_{i=1}^n, y = \{y_i\}_{i=1}^n \in K^n$ .  $GL(n, K)$  da  $I$  bilan  $(I_{ij}^{(p)})_{i,j=1}^n$  ko'rinishdagi,  $I_{jj}^{(p)} = 1$  teng  $j = \overline{1, p}$  da,  $I_{jj}^{(p)} = -1$  teng  $j = \overline{p+1, n}$  da,  $I_{ij}^{(p)} = 0$  teng  $i \neq j, i, j = \overline{1, n}$  da bo'lgan matritsani belgilaymiz.

Psevdootogonal gruppaga  $O(n, p, K)$  quyidagi tenglik bilan belgilanadi  $O(n, p, K) = \{g \in GL(n, K) : g^T I g = I\}$ .

Har qanday  $x, y \in K^n$  uchun  $g \in O(n, p, K)$  bo'lsa, u holda  $[g x, g y] = [x, y]$  bo'lishi aniq.

Maxsus psevdootogonal gruppaga  $SO(n, p, K)$ , bu  $g \in O(n, p, K)$  bo'lib va  $\det g = 1$  bo'ladi.

Quyidagi teorema matritsalar yordamida ikkita yo'lning ekvivalentligi uchun zarur va etarli shartlarni beradi.

**Teorema 3.** Ikki  $x(t)$  va  $y(t)$  kuchli regulyar yo'llar  $SO(n, p, K)$  gruppaga amaliga nisbatan ekvivalent bo'ladi, agar quyidagi tengliklar bajarilsa:

$$(M(x)(t))^{-1} M'(x)(t) = (M(y)(t))^{-1} M'(y)(t) \quad (6)$$

$$M^T(x)(t) I M(x)(t) = M^T(y)(t) I M(y)(t) \quad (7)$$

$$\det M(x)(t) = \det M(y)(t) \quad (8)$$

barcha  $t \in (0, 1)$  lar uchun.

Endi, chiziqli formalarning tengligi yordamida  $SO(n, p, K)$  gruppaga amaliga nisbatan ikkita yo‘lning ekvivalentligi shartini keltiramiz.

**Teorema 4.** Ikki  $x(t)$  va  $y(t)$  kuchli regulyar yo‘llar  $SO(n, p, K)$  gruppaga amaliga nisbatan ekvivalent bo‘ladi, agar quyidagi tengliklar bajarilsa:

$$[x^{(m)}(t), x^{(m)}(t)] = [y^{(m)}(t), y^{(m)}(t)]$$

va

$$\det M(x)(t) = \det M(y)(t)$$

barcha  $m = \overline{0, n-2}$ ,  $t \in (0, 1)$ .

$X$  da bitta yo‘l regulyar bo‘lgan,  $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$  chekli sonli yo‘llar sistemasini ko‘rib chiqaylik. Umumiylikni yo‘qotmasdan, biz har doim  $x^1(t)$  yo‘lning regulyar deb olamiz. Bunday yo‘llar sistemalarini aniqlangan deb ataladi.

Quyidagi teorema matritsalar tilida ma’lum yo‘llar sistemasining ekvivalentligi uchun zarur va etarli shartlarni beradi.

**Teorema 5.** Ikki  $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$  va  $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$  yo‘llar sistemasi  $X$  da  $SO(n, p, K)$  gruppaga amaliga nisbatan ekvivalent bo‘ladi, agar quyidagi tengliklar bajarilsa:

$$\left(M(x^1(t))\right)^{-1} M'(x^1(t)) = \left(M(y^1(t))\right)^{-1} M'(y^1(t)); \quad (9)$$

$$M^T(x^1(t)) I M(x^1(t)) = M^T(y^1(t)) I M(y^1(t)); \quad (10)$$

$$\left(M(x^1(t))\right)^{-1} x^i(t) = \left(M(y^1(t))\right)^{-1} y^i(t); \quad (11)$$

$$\det M(x^1(t)) = \det M(y^1(t)) \quad (12)$$

barcha  $t \in (0, 1)$  lar uchun.

Endi, chiziqli formalarning tengligi yordamida  $SO(n, p, K)$  gruppaga amaliga nisbatan ikkita yo‘llar sistemasining ekvivalentligi shartini keltiramiz.

**Teorema 6.** Ikki  $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$  va  $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$  yo‘llar sistemasi  $SO(n, p, K)$  gruppaga amaliga nisbatan ekvivalent bo‘ladi, agar quyidagi tengliklar bajarilsa:

$$[x^{(m)}, x^{(m)}](t) = [y^{(m)}, y^{(m)}](t), \quad (13)$$

$$[x^{(\ell)}, x^{(\ell)}](t) = [y^{(\ell)}, y^{(\ell)}](t) \quad (14)$$

$$[x^{(1)}, x^{(n-1)} \dots x^{(1)}](t) = [y^{(1)}, y^{(n-1)} \dots y^{(1)}](t) \quad (15)$$

barcha  $t \in (0, 1)$ ,  $m = \overline{0, (n-1)}$ ,  $\ell = \overline{0, (n-1)}$ ,  $r = \overline{2, k}$ .

Dissertatsiyaning “Maxsus psevdootogonal grupp ta’siriga nisbatan sirtlarning ekvivalentligi” deb nomlangan uchinchi bobida maxsus psevdootogonal grupp ta’siriga sirtlarning ekvivalentligi muammosi o’rganilgan. Bundan tashqari, sirtlarning mavjudligini  $G$  - ekvivalentgacha tiklash zarur va etarli shartlari berilgan.

Har bir koordinatalari cheksiz marta uzluksiz differensiallanuvchi  $x:(0,1) \times (0,1) \rightarrow C^n$  akslantirish elementar sirt deyiladi. Agar  $G \subset GL(n, K)$  gruppining ixtiyoriy qism gruppasi bo’lsa, unda ikkita elementar sirt  $y(s, t)$  va  $x(s, t)$   $G$ -ekvivalent deyiladi, agar ba’zi  $g \in G$  va har qanday  $(s, t) \in (0,1) \times (0,1)$  uchun  $y(s, t) = gx(s, t)$  tenglik bajarilsa.

Har bir  $x(s, t) = (x_j(s, t))_{j=1}^n$  elementar sirtni  $M_s(x)$  orqali  $n \times n$  matritsa  $(m_{ij}(s, t))_{i,j=1}^n$  bilan belgilaymiz, bu yerda  $i$  - chi ustun koordinatalari  $m_{ij}(s, t) = \frac{\partial^{i-1} x_j(s, t)}{\partial s^{i-1}}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  ga ega bo’ladi, bu yerda  $\frac{\partial^0 x_j(s, t)}{\partial s^0} = x_j(s, t)$   $j = 1, \dots, n, s, t \in (0,1)$ .

$M'_{ss}(x)$  bilan  $\left\{ \frac{\partial^i x_j(s, t)}{\partial s^i} \right\}_{i,j=1}^n$  matritsa,  $M'_{st}(x)$  bilan esa matritsa  $\left\{ \frac{\partial^i x_j(s, t)}{\partial s^{i-1} \partial t} \right\}_{i,j=1}^n$  belgilanadi. Biz hamma joyda faqat regulyar sirtlarni qaraymiz, ya’ni hamma  $s, t \in (0,1)$  uchun determinanti  $\det M_s(x(s, t)) \neq 0$  bo’lgan elementar sirtlar.

**Teorema 7.** Ikki  $x(s, t)$  va  $y(s, t)$  regulyar sirtlar  $SO(n, p, C)$  grupp amaliga nisbatan ekvivalent bo’ladi, faqat va faqat agar quyidagi tengliklar bajarilsa:

$$M_s^{-1}(x)(s, t) M'_{ss}(x)(s, t) = M_s^{-1}(y)(s, t) M'_{ss}(y)(s, t); \quad (16)$$

$$M_s^{-1}(x)(s, t) M'_{st}(x)(s, t) = M_s^{-1}(y)(s, t) M'_{st}(y)(s, t); \quad (17)$$

$$M_s^T(x)(s, t) e_p M_s(x)(s, t) = M_s^T(y)(s, t) e_p M_s(y)(s, t); \quad (18)$$

$$\det M_s(x)(s, t) = \det M_s(y)(s, t) \quad (19)$$

barcha  $s, t \in (0,1)$  lar uchun.

Aytaylik  $x(s, t) = \{x_j(s, t)\}_{j=1}^n$   $C^n$  da regulyar sirt bo’lsin va

$$M_s(x) = \left\{ \frac{\partial^{i-1} x_j(s, t)}{\partial s^{i-1}} \right\}_{i,j=1}^n, \quad s, t \in (0,1).$$

$(M_s(x))^{-1}$  teskari matritsani hisoblab,  $(M_s(x))^{-1} M'_s(x) = A(s, t) = (a_{ij}(s, t))_{i,j=1}^n$  dan quyidagi

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n}(s,t) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n}(s,t) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{3n}(s,t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}(s,t) \end{pmatrix},$$

shaklga ega ekanlibilib olaginiz, bu yerda  $a_{in}(s,t)$  - kompleksqiyimatli cheksiz differensiallanuvchi funksiya  $(s,t) \in (0,1) \times (0,1)$ ,  $i=1,\dots,n$ , va quyidagi formulalar bilan hisoblanadi

$$a_{in} = \frac{\left[ x \dots x_s^{(i-1)} x_s^{-(i+1)} \dots x_s^{(n-1)} \right]}{\det M_s(x)}, \quad i = 2, \dots, n-1;$$

$$a_{1n} = \frac{\left[ x_s^{(n)} x_s^{(1)} \dots x_s^{(n-1)} \right]}{\det M_s(x)};$$

$$a_{nn} = \frac{\left[ x x_s^{(1)} \dots x_s^{(n-2)} x_s^{(n)} \right]}{\det M_s(x)}.$$

Bu tengliklardan kelib chiqadiki,  $\det M_s(x) = \left[ x x^{(1)} \dots x^{(n-1)} \right] = d(s,t)$  sonli funksiya  $a_{nn} d = a_{nn} \left[ x x_s^{(1)} \dots x_s^{(n-1)} \right] = \left[ x x_s^{(1)} \dots x_s^{(n-2)} x_s^{(n)} \right] = d'_s$  tenglikni qanoatlantiradi ya'ni  $d'_s(s,t) = a_{nn}(s,t)d(s,t)$  barcha  $s,t \in (0,1)$  lar uchun o'rinli. Bundan tashqari, hosmas  $C = M_s^T(x) e_p M_s(x)$  matritsa uchun,  $\det C = d^2$ , agar  $(n-p)$  - juft bo'lsa va  $\det C = -d^2$ , agar  $(n-p)$  - toq bo'lsa.

Quyidagi matritsali differensial tenglamalar sistemasini ko'raylik

$$\begin{cases} X'_s(s,t) = X(s,t)A(s,t) \\ X'_t(s,t) = X(s,t)B(s,t) \end{cases} \quad (20)$$

bu yerda  $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$  noma'lum  $n \times n$ -matritsa,  $A(s,t) = (a_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$ ,  $B(s,t) = (b_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$  fiksirlangan  $n \times n$ -matritsalar, barcha  $s,t \in (0,1)$  lar uchun  $(a_{ij}(s,t))$  va  $(b_{ij}(s,t))$  funksiyalar cheksiz differensiallanuvchi deb faraz qilinadi. (20) sistemaning yechimi  $X(s,t)$  hosmas deyiladi agar hamma  $s,t \in (0,1)$  uchun  $\det X(s,t) \neq 0$  bo'lsa. Ikkita yechim  $X_0(s,t)$  va  $X_1(s,t)$   $SO(n,p,C)$  gruppaga nisbatan ekvivalent deyiladi agar bazi  $g \in SO(n,p,C)$  uchun  $X_1(s,t) = gX_0(s,t)$  tenglik o'rinli bo'lsa.

(20) sistema bilan birgalikda quyidagi tengliklar sistemasini ham ko'rib chiqamiz

$$\begin{cases} X^T(s,t)e_p X(s,t) = C(s,t) \\ \det X(s,t) = d(s,t) \end{cases}$$

bu yerda  $C(s,t) = (c_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n = C^T(s,t)$  va  $c_{ij}(s,t), d(s,t)$  cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar, barcha  $s, t \in (0,1)$  lar uchun.

**Teorema 8.**  $A(s,t), B(s,t), C(s,t)$  hosmas matritsalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$(i). A(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n}(s,t) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n}(s,t) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{3n}(s,t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}(s,t) \end{pmatrix};$$

$$(ii). A_t + BA = B_s + AB, \text{ bu yerda } A_t(s,t) = \left( \frac{\partial a_{ij}(s,t)}{\partial t} \right)_{i,j=1}^n, B_s(s,t) = \left( \frac{\partial b_{ij}(s,t)}{\partial s} \right)_{i,j=1}^n;$$

$$(iii). C_s = A^T C + CA, \text{ bu yerda } C_s(s,t) = \left( \frac{\partial c_{ij}(s,t)}{\partial s} \right)_{i,j=1}^n;$$

$$(iv). C_t = B^T C + CB, \text{ bu yerda } C_t(s,t) = \left( \frac{\partial c_{ij}(s,t)}{\partial t} \right)_{i,j=1}^n;$$

va  $d(s,t)$  cheksiz differensiallanuvchi funksiya quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi

$$(v). d'_s = a_{nn} d;$$

$$(vi). d'_t = (b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}) d;$$

$$(vii). d^2(s,t) = \det C(s,t).$$

U holda quyidagi tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} X'_s = XA \\ X'_t = XB \\ X^T e_p X = C \\ \det X = d \end{cases} \quad (21)$$

hosmas yechimaga ega. Bundan tashqari, (21) sistemaning yechimi  $SO(n, p, C)$ -ekvivalentgacha yagonadir.

## XULOSA

Dissertatsiya maxsus psevdoortogonal gruppaga ta'siriga nisbatan yo'llar va sirtlarning ekvivalentligi muammosini hal qilishga bag'ishlangan.

Maxsus psevdoortogonal gruppaga ta'siriga nisbatan ikkita yo'l va chekli yo'llar sistemasining ekvivalentligi haqidagi masalalar yechiladi. Ushbu masalani yechish uchun  $G = SO(n, p, K)$  chekli yo'llar sistemalarining  $G$ -invariant differensial ratsional funksiyalarining differensial maydonning tashkil etuvchi sistemalari bo'lganda tasvirlangan.

Bundan tashqari, o'zgarmas parametrlar yordamida maxsus psevdoortogonal gruppaning ta'siriga nisbatan yo'llar sistemasining ekvivalentligi shartlari o'rnatildi. Uning differensial invariantlariga nisbatan  $G$  - ekvivalentlikgacha bo'lgan yo'llarni tiklash masalasining yechimi ham olinadi, bu yerda  $G = SO(n, p, K)$ .

Maxsus psevdoortogonal gruppaning ta'siriga nisbatan ikkita sirtning ekvivalentligi muammosi hal qilindi. Maxsus psevdoortogonal gruppaga ta'siriga nisbatan ikkita sirtning ekvivalentligi uchun shartlar topiladi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ  
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ КАРШИНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ  
УНИВЕРСИТЕТЕ**

---

**ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ГАФФОРОВ РАХМАТЖОН АБДУКАХХОРОВИЧ**

**ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ  
ОТНОСИТЕЛЬНО ДВИЖЕНИЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ  
ПРОСТРАНСТВ**

**01.01.01 – Математический анализ**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)  
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Карши – 2023**

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии за № В2018.2.PhD/FM207.

Диссертация выполнена в Ферганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета ([www.qarshidu.uz](http://www.qarshidu.uz)) и на информационно-образовательном портале «Ziyonet» ([www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)).

Научный руководитель:

Муминов Кобилжон Кодирович  
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Расул Набиевич Ганиходжаев  
доктор физико-математических наук, профессор

Ахрор Юсупович Хамраев  
кандидат физико-математических наук, доцент

Ведущая организация:

Андижанский государственный университет

Защита диссертации состоится «06» 07 2023 года в 14<sup>00</sup> на заседании Научного совета PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 при Каршинском государственном университете (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабег 17. Тел.: (+998 75) 225-34-13, факс: (+998 75) 221-00-56, e-mail: [qarshidu@umail.uz](mailto:qarshidu@umail.uz)). Каршинский государственный университет, физико-математический факультет, аудитория 102.

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Каршинского государственного университета (зарегистрирована за № 177). (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабег, 17. Тел.: (+998 75) 225-34-13).

Автореферат диссертации разослан «24» 06 2023 года.  
(протокол рассылки № 5 от «24» 06 2023 года).



Б.А.Шоимкулов

Председатель Научного совета по  
присуждению ученых степеней,  
д.ф.-м.н., профессор

Ш.Д.Нодиров

Учредитель-секретарь Научного совета по  
присуждению ученых степеней,  
д.ф.ф.-м.н. (PhD)

А.А.Имомов

Председатель Научного семинара при  
Научном совете по присуждению ученых  
степеней, д.ф.-м.н. (DSc), доцент

## **ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))**

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** Многие научные исследования с практическими приложениями, проводимые в мире, во многих случаях сводятся к задачам изучения условий эквивалентности кривых и поверхностей. Исследование этих условий составляет содержание теории инвариантов. Теория инвариантов в современной математике играет важную роль. Теория инвариантов занимает центральное место во многих областях математики и физики, таких как проективная геометрия, квантовая механика и многих других. Поэтому нахождение условий эквивалентности кривых и поверхностей играет важную роль в современной математике.

В настоящее время в мире проводятся научные исследования по определению условий эквивалентности кривых и поверхностей, лежащих в конечномерном линейном пространстве, относительно действия некоторой группы. В связи с этим, помимо основной проблемы о необходимых и достаточных условиях эквивалентности кривых и поверхностей относительно действия некоторой группы, в рамках геометрического подхода к ее решению кривым и поверхностям придается кривизна, кручений и другим геометрическим свойствам особое внимание уделяется вопросу восстановления.

В последние годы в нашей республике были предприняты масштабные меры по расширению научного и практического применения фундаментальных исследований и получены значительные результаты. В частности, в последнее время уделено особое внимание изучению необходимых и достаточных условий эквивалентности кривых и поверхностей. Значительные результаты достигнуты в нахождении необходимых и достаточных условий эквивалентности заданных путей и поверхностей в евклидовом пространстве относительно действия некоторой группы. В 2020 - 2024 годах качестве основных задач и направлений деятельности математической науки определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным областям функционального анализа, математического анализа, дифференциальных уравнений, математической физики, теории вероятностей и теории динамических систем<sup>1</sup>. Для обеспечения реализации данного постановления важную роль играет разработка методов исследования теории инвариантов.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии

---

<sup>1</sup> Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», также и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** Основным инструментом решения задачи об эквивалентности путей и поверхностей является теория инвариантов линейных групп, основы которой были заложены в работах Г.Вейля, Д.Гильберта, Ж.Дьедонне, Дж.Керролла, Д.Мамфорда, Х.Крафта и других. Таким образом, основными задачами теории инвариантов в рамках конечномерных пространствах являются:

- I. Классификация элементов линейного пространства с точностью до эквивалентности относительно действия некоторой линейной группы.
- II. Восстановление конечной порождаемости алгебры инвариантов и определение отношений между ними.

Задача II известна как 14-я проблема Гильберта. Задача об эквивалентности путей и поверхностей в более общей постановке была поставлена Э. Картаном в начале XX века и известна в настоящее время как проблема Картана. Глубокое исследование этой проблемы методом подвижного репера, отличающегося от методов теории инвариантов, проведено самим Э. Картаном. Геометрические подходы к решению этой задачи рассмотрены в работах Ж.Поммаре, Ю.А.Аминов, В.Бляшке, П.А.Широков. Отметим также работы И.М.Яглома, посвященные решению задачи об эквивалентности пары кривых для действия симплектической группы.

При решении проблемы эквивалентности кривых в конечномерных пространствах геометрическими методами возможность восстановления этих кривых при заданных значениях кривизны, кручения и других геометрических свойств кривых рассматривалась в работах А. Артыкбаева, И. Яглома.

В нашей республике «Дифференциальный» аналог 14-ой проблемы Гильберта относительно действия различных классических групп подробно описан в работах академика Академии наук Узбекистана Ж. Хаджиева, также подробно рассматривался в работах О.Пексена, Р.Г.Арипова, К.К.Муминова, А.М.Сухтаева, Б.Турсунова. Эквивалентность путей относительно действия псевдоортогональных и симплектических групп можно найти в работах К.К.Муминова, В.И.Чилина, а решение задачи эквивалентности поверхностей в работах К.К.Муминова, У.Бекбаева и других. В настоящей диссертации решаются аналогичные задачи для действия специальной псевдоортогональной группы. Кроме того, с помощью инвариантных матричных функций решалась проблема эквивалентности

многомерных поверхностей по отношению действия этой группы. Также в некоторых неевклидовых геометриях найдены необходимые и достаточные условия эквивалентности путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы.

**Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация.** Диссертационная работа, научно-педагогические кадры Ферганского государственного университета на 2017-2021 годы выполнены в рамках программы приоритетных направлений повышения научного потенциала, пункта “функциональный анализ и его приложения”.

**Целью исследования** является решение задачи об эквивалентности путей и поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной групп.

**Задачи исследования** состоит в следующем:

определить необходимые и достаточные условия эквивалентности заданных путей и поверхностей в псевдоевклидовом пространстве относительно действия специальной псевдоортогональной группы;

определить решение системы дифференциальных уравнений, образованной нахождением условий эквивалентности заданных систем путей и поверхностей в псевдоевклидовом пространстве относительно действия специальной псевдоортогональной группы;

нахождение необходимых и достаточных условий эквивалентности путей относительно специальных псевдоортогональных групповых эффектов в некоторых неевклидовых геометриях;

доказательство теорем о восстановлении заданных путей и поверхностей в псевдоевклидовом пространстве точно до их эквивалентности по их дифференциальным инвариантам.

**Объектом исследования** является эквивалентность путей и поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы.

**Предмет исследования:** Теории инвариантов, теории представлений групп, дифференциальных уравнений, функционального анализ.

**Методы исследования.** В диссертации используются методы теории инвариантов, теории групп Ли и теории представлений групп, а также методы дифференциальных уравнений и дифференциальной алгебры.

**Научная новизна исследования** состоит в следующем:

Через специальные матричные функции и дифференциальные линейные формы находятся необходимые и достаточные условия эквивалентности заданных путей и поверхностей в псевдоевклидовом пространстве относительно действия специальной псевдоортогональной группы;

существование и единственность решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, образованной нахождением условий эквивалентности заданных систем путей и поверхностей в псевдоевклидовом пространстве по отношению действия специальной псевдоортогональной

группы, доказываемые с помощью некоторых условий и инвариантные матричные функции;

в некоторых неевклидовых геометриях через инвариантные матричные функции и дифференциальные линейные формы найдены необходимые и достаточные условия эквивалентности путей относительно действия специальных псевдоортогональных групп;

доказаны теоремы о восстановлении заданных путей и поверхностей в псевдоевклидовом пространстве к их дифференциальным инвариантам относительно действия специальной псевдоортогональной группы.

**Практические результаты исследования.** При решении задач, связанных с дифференциальной геометрией, найдены необходимые и достаточные условия эквивалентности систем путей и поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы, а также способы определения существования и единственности решения использовалась система дифференциальных уравнений, полученная при нахождении этих условий.

**Достоверность результатов исследования** обоснована строгой последовательностью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов функционального анализа и теории инвариантов, теории представлений групп и дифференциальных уравнений.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.**

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории представлений групп, дифференциальной геометрии и теории инвариантов.

Практическая значимость диссертации объясняется ее применением при решении задач, связанных с дифференциальной геометрией, путем нахождения необходимых и достаточных условий эквивалентности путей и поверхностей.

**Внедрение результатов исследования.** Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Нахождение условий эквивалентности путей относительно эффектов специальной псевдоортогональной группы использовано в зарубежном фундаментальном проекте МД-758.2022.1.1 по теме “Развитие математических моделей дробной динамики с целью исследования колебательных процессов и процессов с насыщением” (Витус Беринг Камчатка справка № 14-12 государственного университета от 4 апреля 2023 года). Применение полученных научных результатов позволило найти условия эквивалентности путей для некоторой неевклидовой геометрии;

результаты эквивалентности путей и поверхностей относительно специальных псевдоортогональных групповых эффектов ОТ-F-4-(37-29) “Функциональные свойства  $A$ -аналитических функций и их применения. Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях” включали специальную матричную функцию, и с помощью этой функции были

найжены необходимые и достаточные условия эквивалентности путей и поверхностей по отношению к действию специальной псевдоортогональной группы (Национальный университет им. Узбекистан, 14 апреля 2023 г., регистрационный номер 04/11-2129). Применение этих научных результатов позволило восстановить эквивалентность дифференциальных инвариантов путей и поверхностей.

**Апробация результатов исследования.** Основное содержание диссертации доложено в научных докладах на 4 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

**Публикация результатов исследования.** По теме диссертации опубликовано 21 научных работ, из них 8 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 3 работы опубликованы в зарубежных журналах и 5 в республиканских научных изданиях.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 92 стр.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлен объект и предмет исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Предварительные сведения**», приведены необходимые для изложения результатов диссертации кольцо многочленов, расширения полей, дифференциальные кольца и поля, дифференциальные поля  $d$ -рациональных функций, инвариантных относительно действия линейных групп, полиномиальные инварианты для действия классических подгрупп группы  $GL(n, K)$ , пути в конечномерных пространствах.

Пусть  $A$  - произвольное коммутативное кольцо с единицей. Рассмотрим новое кольцо  $B$ , элементами которого является бесконечные упорядоченные последовательности  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ ,  $a_i \in A$ , такие, что все  $a_i$  кроме конечного их числа, равны нулю. Две последовательности будем складывать по правилу:  $a + b = (a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ , а умножение зададим формулой  $a \cdot b = (a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = c = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ , где

$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $B$  есть коммутативное ассоциативное кольцо с единицей  $(1, 0, 0, \dots)$ .

С последовательностью  $(a, 0, 0, \dots)$  операции сложения и умножения производятся так же, как и с элементами кольца  $A$ . А это есть равносильность последовательности с соответствующими элементами из  $A$ , т.е. можно положить  $a = (a, 0, 0, \dots)$  для всех  $a \in A$ . Тогда кольцо  $B$  имеет подкольцо  $A$ . Введём элемент  $(0, 1, 0, 0, \dots)$ , обозначив его через  $x$ , и назовем переменной над  $A$ . Тогда по правилу умножения последовательностей получим

$$\begin{aligned} x &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ x^2 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\dots\dots\dots \\ x^n &= (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \end{aligned} \tag{1}$$

Ввиду равенства (1) и включения  $A \subset B$ , имеем, что  $(0, 0, \dots, 0, a, 0, \dots) = ax^n = x^n a$ . Если  $a_n$  - последний, отличный от нуля член последовательности  $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ , то в новых обозначениях получим

$$\begin{aligned} f &= (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0, 0, \dots) + a_n x^n = (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, 0, 0, \dots) + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n. \end{aligned} \tag{2}$$

**Определение 1.** Введенное выше кольцо  $B$  обозначается через  $A[x]$  и называется кольцом многочленов над  $A$  от одной переменной  $x$ , а элементы кольца  $A[x]$  называются многочленами от переменной  $x$ , при этом, элементы  $a_i$  называют коэффициентами многочлена  $f$ .

Пусть  $F$  подполе в поле  $P$ . В этом случае, говорят что поле  $P$  является расширением подполя  $F$ . Ясно, что нуль и единица поля  $P$  будут содержаться в  $F$  и служить для  $F$  нулем и единицей. Если взять в  $P$  пересечение  $F_1$  всех подполей, содержащих  $F$  и некоторой элемент  $x \in K$ , не принадлежащий  $F$ , то  $F_1$  будет минимальным полем, содержащим  $F$  и  $x$ , в частности  $F_1$  является расширением для поля  $F$ . В этом случае, говорят, что расширение  $F_1$  поля  $F$  получено присоединением к  $F$  элемента  $x$ , и отражают этот факт в записи  $F_1 = F(x)$ . Аналогично можно говорить о подполе  $F(x_1, \dots, x_n)$  поля  $P$ , полученным присоединением к  $F$  элементов  $x_1, \dots, x_n$  поля  $P$ .

Пусть  $F$  – подполе поля  $P$ . Элемент  $x \in P$  называется алгебраическим над  $F$ , если в  $F$  существуют элементы  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , не все равные 0, такие, что  $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$ . Расширение  $P$  поля  $F$  называется алгебраическим, если всякий элемент из  $P$  алгебраичен над  $F$ . Примером алгебраического

расширения поля  $F$  служит расширение  $F(x)$  для алгебраического элемента  $x$  над  $F$ .

Элементы  $b_1, \dots, b_n$  из поля  $P$  называются алгебраически зависимыми над подполем  $F$  в том и только в том случае, когда существует такой ненулевой полином  $f = F[x_1, \dots, x_n]$ , что  $f(b_1, \dots, b_n) = 0$ . В противном случае элементы  $b_1, \dots, b_n$  называются алгебраически независимыми над  $F$ .

Пусть  $A$  – произвольное коммутативное кольцо. Дифференцированием кольца  $A$  называется отображение  $d$  кольца  $A$  в себя, удовлетворяющее соотношениям:  $d(x+y) = d(x) + d(y)$  и  $d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y)$  для любых  $x, y \in A$ .

Любое дифференцирование в произвольной области целостности  $A$  допускает единственное продолжение до дифференцирования на соответствующее поле частных. При этом, дифференцирование в поле частных задается равенством  $d(xy^{-1}) = (d(x)y - xd(y))(y^{-1})^2$  для любых  $x, y \in A, y \neq 0$ .

Коммутативное кольцо  $A$  с единицей, в котором задано некоторое дифференцирование, называется дифференциальным кольцом ( $d$ -кольцом). Соответственно, поле  $P$  с заданным в нем дифференцированием, называется дифференциальным полем ( $d$ -полем).

Пусть  $K$  есть поле действительных чисел  $R$ , либо поле комплексных чисел  $C$  и  $X$  –  $n$ -мерное линейное пространство над  $K$ ,  $n \in N$ . Элементы из  $X$  будем представлять в виде  $n$ -мерных вектор – столбцов  $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ , где  $x_i \in K, i = \overline{1, n}$ , и тем самым, будем отождествлять  $X$  с  $K^n$ .

Рассмотрим  $d$ -кольцо  $K\{x_1, \dots, x_n\}$  всех  $d$ -многочленов над  $K$  от  $d$ -переменных  $x_1, \dots, x_n$  и соответствующее  $d$ -поле  $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$   $d$ -рациональных функций, в которых операция дифференцирования определяется равенством  $d(x_i^{(r)}) = x_i^{(r+1)}$ , где  $x_i^{(0)} = x_i, i = \overline{1, n}, r \in Z_+$ .

В дальнейшем для вектора  $x = \{x_i\}_{i=1}^n \in K^n$  будет использоваться обозначение  $x_i^{(r)} = \{x_i^{(r)}\}_{i=1}^n, r \in Z_+$ . Кроме того, вместо обозначенный  $K\{x_1, \dots, x_n\}$  и  $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  будем использовать короткие записи  $K\{x\}$  и  $K\langle x \rangle$ .

Обозначим через  $GL(n, K)$  группу всех обратимых линейных преобразований пространства  $X$ , а через  $G$  – произвольную подгруппу группы  $GL(n, K)$ . Действие группы  $G$  на  $n$ -мерный вектор  $x \in X$  определим как умножение слева матрицы  $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in G$  на вектор  $x$ , т.е.  $(g, x) \mapsto gx$ .

Говорят, что  $d$ -рациональных функций  $f\langle x \rangle := f\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in K\langle x \rangle$  является  $G$ -инвариантной,  $f\langle gx \rangle = f\langle x \rangle$  для всех  $g \in G$ .

Множество всех  $G$ -инвариантных  $d$ -многочленов ( $d$ -рациональных функций) обозначим через  $K\{x\}^G := K\{x_1, \dots, x_n\}^G$  (соответственно,  $K\langle x \rangle^G := K\langle x_1, \dots, x_n \rangle^G$ ).

**Теорема 1.** Для любой подгруппы  $G$  группы  $GL(n, K)$  множество  $K\{x\}^G$  (соответственно,  $K\langle x \rangle^G$ ) есть  $d$  - подкольцо в  $d$  - кольце  $K\{x\}$  (соответственно,  $d$  - подполе в  $d$  - поле  $K\langle x \rangle$ ).

Рассмотрим набор  $V = \{x_1, \dots, x_k\}$ , состоящий из  $k$  штук векторов  $x_j = \{x_{ji}\}_{i=1}^n \in K^n$ ,  $j = \overline{1, k}$ . Обозначим через  $K[x_1, \dots, x_k]$  кольцо всех многочленов над полем  $K$  от  $k \cdot n$  независимых переменных  $\{x_{ji} : j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}\}$ . Для каждого  $g = (g_{j\ell})_{j, \ell=1}^n \in GL(n, K)$  определим действие  $g$  на многочлен  $f \in K[x_1, \dots, x_k]$  по правилу  $(g \circ f)(x_1, \dots, x_k) = f(gx_1, \dots, gx_k)$ . Ясно, что  $(g \circ f) \in K[x_1, \dots, x_k]$  для всех  $f \in K[x_1, \dots, x_k]$ .

Пусть  $G$  – произвольная подгруппа в  $GL(n, K)$ . Говорят, что многочлен  $f \in K[x_1, \dots, x_k]$  является  $G$  – инвариантным, если  $g \circ f = f$  для любого  $g \in G$ . Нетрудно видеть, что множество  $K[x_1, \dots, x_k]^G$  всех  $G$  – инвариантных многочленов из  $K[x_1, \dots, x_k]$  образует подкольцо в  $K[x_1, \dots, x_k]$ . Система многочленов  $E = \{f_i\}_{i \in I} \subset K[x_1, \dots, x_k]^G$ , где  $I$  – некоторое множество индексов, называется целым рациональным базисом в  $K[x_1, \dots, x_k]^G$ , если для любого элемента  $f \in K[x_1, \dots, x_k]^G$  существует конечный набор  $\{f_{i_r}\}_{r=1}^m \subset E$  и многочлен  $\varphi(y_1, \dots, y_m)$  над  $K$  такие, что  $f = \varphi(f_{i_1}, \dots, f_{i_m})$ . Это означает, что множество  $E$  есть система образующих для кольца  $K[x_1, \dots, x_k]^G$ , т.е. наименьшее подкольцо в  $K[x_1, \dots, x_k]^G$ , которое содержит  $E$ , обязательно совпадает с самим кольцом  $K[x_1, \dots, x_k]^G$ . В случае, когда  $E$  – конечное множество  $\{f_1, \dots, f_m\}$ , говорят, что кольцо  $K[x_1, \dots, x_k]^G$  имеет конечный целый рациональный базис  $f_1, \dots, f_m$ .

Путь в  $X$  называется вектор-функция  $x(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^n$  из  $(0, 1)$  в  $X$ , у которой все координатные отображения  $x_i : (0, 1) \rightarrow K$  являются бесконечно дифференцируемыми функциями,  $i = \overline{1, n}$ .

Производной  $r$  - го порядка от пути  $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  назовем вектор  $x^{(r)}(t) = \{x_1^{(r)}(t), \dots, x_n^{(r)}(t)\}$ , где  $x_i^{(r)}(t)$  –  $r$  - ая производная координатной функции  $x_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Ясно, что  $x^{(r)}(t)$  также является путем для всех  $r = 1, 2, \dots$

Путь  $x(t)$  называется регулярным, если  $x^{(1)}(t) := x'(t) \neq 0$  для всех  $t \in (0, 1)$ .

Для каждого пути  $x(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^n$  через  $M(x)(t)$  обозначим  $n \times n$  - матрицу  $(x(t) \ x^{(1)}(t) \ \dots \ x^{(n-1)}(t))$ , где  $j$  – ый столбец имеет координаты  $x_i^{(j-1)}(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Через  $M'(x)$  обозначается матрица  $(x^{(1)}(t) \ x^{(2)}(t) \ \dots \ x^{(n)}(t))$ . Путь  $x(t)$  называется сильно регулярным, если определитель  $\det M(x)(t)$  не равен нулю при всех  $t \in (0, 1)$ . Если  $x(t)$  - не регулярный путь, то  $x^{(1)}(t_0) = 0$  для некоторого  $t_0 \in (0, 1)$  и поэтому  $\det M(x)(t_0) = 0$ , т.е.  $x(t)$  не является сильно регулярным

путем. Следовательно, каждый сильно регулярный путь является регулярным путем.

Пусть  $G$  – произвольная подгруппа группы  $GL(n, K)$ . Два пути  $x(t)$  и  $y(t)$  называются  $G$  – эквивалентными, если существует такой элемент  $g \in G$ , что  $y(t) = g x(t)$  для всех  $t \in (0, 1)$ . Ясно, что в этом случае,  $y^{(r)}(t) = g x^{(r)}(t)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , и поэтому  $M(y)(t) = g M(x)(t)$ . Очевидно также, что справедливость последнего равенства влечет  $G$  – эквивалентность путей  $x(t)$  и  $y(t)$ .

Следующая теорема дает матричный критерий для  $GL(n, K)$  – эквивалентности двух путей.

**Теорема 2.** Два сильно регулярных пути  $x(t)$  и  $y(t)$  являются  $GL(n, K)$  – эквивалентными тогда и только тогда, когда верно равенство

$$(M(x)(t))^{-1} M'(x)(t) = (M(y)(t))^{-1} M'(y)(t) \quad (3)$$

для всех  $t \in (0, 1)$ .

Рассмотрим группу  $Aff(X)$  всех аффинных преобразований пространства  $X$ . Каждое преобразование из  $Aff(X)$  является суперпозицией линейного невырожденного преобразования  $g \in GL(n, K)$  и сдвига, порожденного элементом  $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in K^n$  т.е. любое аффинное преобразование  $(u, g) \in Aff(X)$  действует в  $X$  по правилу

$$(u, g)(x) = g x + u, \quad (4)$$

где  $x \in X$ ,  $u \in K^n$ ,  $g \in GL(n, K)$ .

В группе  $Aff(X)$  операция умножения определяется равенством  $(u, g)(v, h) = (u + g v, g h)$ , где  $u, v \in K^n$ ,  $g, h \in GL(n, K)$ . В этом случае, говорят, что группа  $Aff(X)$  есть полупрямое произведение групп  $K^n$  и  $GL(n, K)$ , что записывается в виде  $Aff(X) = K^n \triangleleft GL(n, K)$ . Если  $G$  – подгруппа в  $GL(n, K)$ , то множество  $K^n \triangleleft G = \{(u, g) \in K^n \triangleleft GL(n, K) : g \in G\}$  является подгруппой в  $K^n \triangleleft GL(n, K)$ , и она также называется полупрямым произведением групп  $K^n$  и  $G$ .

Следующее утверждение сводит задачу о  $K^n \triangleleft G$  – эквивалентности путей  $x(t)$  и  $y(t)$  к задаче  $G$  – эквивалентности путей  $x'(t)$  и  $y'(t)$ .

**Утверждение 1.** Два пути  $x(t)$  и  $y(t)$ , заданные в  $X$ , являются  $K^n \triangleleft G$  – эквивалентными тогда и только тогда, когда пути  $x'(t)$  и  $y'(t)$  –  $G$  – эквивалентны.

**Следствия 1.** Два пути  $x(t)$  и  $y(t)$ , для которых  $\det M'(x)(t) \neq 0$ ,  $\det M'(y)(t) = 0$ ,  $t \in (0, 1)$ , являются  $K^n \triangleleft GL(n, K)$  – эквивалентными тогда и только тогда, когда верно равенство

$$(M'(x)(t))^{-1} M''(x)(t) = (M'(y)(t))^{-1} M''(y)(t) \quad (5)$$

для всех  $t \in (0, 1)$ .

Во второй главе диссертации, названной «Эквивалентность путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы», исследуются решена задача об эквивалентности двух путей и конечных систем путей относительно действия специальных псевдоортогональных групп. Для решения этой задачи описаны системы образующих дифференциальных полей дифференциальных  $G$ -инвариантных рациональных функций конечных систем путей в случае когда,  $G = SO(n, p, K)$ . Получено также решение задачи восстановления путей с точностью до  $G$ -эквивалентности по её дифференциальным инвариантам, где  $G = SO(n, p, K)$ .

Зафиксируем натуральное число  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  и рассмотрим в  $n$ -мерном пространстве  $K^n$  билинейную симметрическую форму  $[x, y]_p = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n$ , где  $x = \{x_i\}_{i=1}^n, y = \{y_i\}_{i=1}^n \in K^n$ . Обозначим через  $I$  матрицу  $(I_{ij}^{(p)})_{i,j=1}^n$  из  $GL(n, K)$ , у которой  $I_{jj}^{(p)} = 1$  при  $j = \overline{1, p}$ ,  $I_{jj}^{(p)} = -1$  при  $j = \overline{p+1, n}$ ,  $I_{ij}^{(p)} = 0$  при  $i \neq j, i, j = \overline{1, n}$ .

Псевдоортогональная группа  $O(n, p, K)$  определяется равенством  $O(n, p, K) = \{g \in GL(n, K) : g^T I g = I\}$ .

Ясно, что  $g \in O(n, p, K)$  в том и только в том случае, когда  $[g x, g y] = [x, y]$  для любых  $x, y \in K^n$ .

Специальная псевдоортогональная группа - это группа  $SO(n, p, K)$  всех тех  $g \in O(n, p, K)$ , для которых  $\det g = 1$ .

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для  $SO(n, p, C)$  - эквивалентности двух путей на языке матриц  $M(x)$ .

**Теорема 3.** Два сильно регулярных пути  $x(t)$  и  $y(t)$  -  $SO(n, p, C)$  - эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:

$$(M(x)(t))^{-1} M'(x)(t) = (M(y)(t))^{-1} M'(y)(t) \quad (6)$$

$$M^T(x)(t) I M(x)(t) = M^T(y)(t) I M(y)(t) \quad (7)$$

$$\det M(x)(t) = \det M(y)(t) \quad (8)$$

для всех  $t \in (0, 1)$ .

Приведем теперь критерий  $SO(n, p, C)$  - эквивалентности двух путей на языке равенства билинейных форм.

**Теорема 4.** Сильно регулярные пути  $x(t)$  и  $y(t)$  являются  $SO(n, p, C)$  - эквивалентными в том и только в том случае, когда верны равенства

$$[x^{(m)}(t), x^{(m)}(t)] = [y^{(m)}(t), y^{(m)}(t)]$$

и

$$\det M(x)(t) = \det M(y)(t)$$

для всех  $m = \overline{0, n-2}$ ,  $t \in (0, 1)$ .

Рассмотрим конечную систему путей  $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$  в  $X$ , для которой один путь является регулярным. Не ограничивая общности, всегда можно считать, что путь  $x^1(t)$  - регулярен. Такие системы путей будем называть определенными.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для соответственно  $SO(n, p, C)$  - эквивалентности определенных систем путей на языке матриц  $M(x)(t)$ .

**Теорема 5.** Две определенные системы путей  $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$  и  $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$  в  $X$  являются  $SO(n, p, C)$  - эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:

$$\left(M(x^1(t))\right)^{-1} M'(x^1(t)) = \left(M(y^1(t))\right)^{-1} M'(y^1(t)); \quad (9)$$

$$M^T(x^1(t)) I M(x^1(t)) = M^T(y^1(t)) I M(y^1(t)); \quad (10)$$

$$\left(M(x^1(t))\right)^{-1} x^i(t) = \left(M(y^1(t))\right)^{-1} y^i(t) \quad (11)$$

$$\det M(x^1(t)) = \det M(y^1(t)) \quad (12)$$

для всех  $t \in (0, 1)$ ,  $i = \overline{2, k}$ .

Приведем теперь критерий  $SO(n, p, C)$  - эквивалентности двух определенных конечных систем путей на языке равенства билинейных форм.

**Теорема 6.** Две определенные системы путей  $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$  и  $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$  являются  $SO(n, p, C)$  - эквивалентными тогда и только тогда, когда

$$[x^1, x^1]^{(m)}(t) = [y^1, y^1]^{(m)}(t), \quad (13)$$

$$[x^1, x^r]^{(\ell)}(t) = [y^1, y^r]^{(\ell)}(t) \quad (14)$$

$$[x^1, x^1 \dots x^1]^{(1)}(t) = [y^1, y^1 \dots y^1]^{(1)}(t) \quad (15)$$

для всех  $t \in (0, 1)$ ,  $m = \overline{0, (n-1)}$ ,  $\ell = \overline{0, (n-1)}$ ,  $r = \overline{2, k}$ .

В третьей главе диссертации, названной «Эквивалентность поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы», изучены задача об эквивалентности поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы. Кроме того, приводятся необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование единственных с точностью до  $G$ -эквивалентности поверхностей, удовлетворяющих естественным тождествам.

$C^\infty$ - дифференцируемое отображение  $x:(0,1)\times(0,1)\rightarrow C^n$  называется элементарной поверхностью. Если  $G$  - подгруппа группы  $GL(n,C)$ , то две элементарные поверхности  $y(s,t)$  и  $x(s,t)$  называют  $G$  - эквивалентными, если  $y(s,t) = gx(s,t)$  для некоторого  $g \in G$  и любых  $(s,t) \in (0,1)\times(0,1)$ .

Для каждой элементарной поверхности  $x(s,t) = (x_j(s,t))_{j=1}^n$  через  $M_s(x)$  обозначим  $n \times n$  - матрицу  $(m_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$  где  $i$ -й столбец имеет координаты  $m_{ij}(s,t) = \frac{\partial^{i-1} x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , при этом считается, что  $\frac{\partial^0 x_j(s,t)}{\partial s^0} = x_j(s,t)$  для всех  $j = 1, \dots, n, s, t \in (0,1)$ .

Через  $M'_{ss}(x)$  обозначается матрица  $\left\{ \frac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^i} \right\}_{i,j=1}^n$ , а через  $M'_{st}(x)$  матрица  $\left\{ \frac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^{i-1} \partial t} \right\}_{i,j=1}^n$ . Всюду в дальнейшем рассматриваются только регулярные поверхности, т.е. элементарные поверхности  $x(s,t)$ , для которых определитель  $\det M_s x(s,t) \neq 0$  при всех  $s, t \in (0,1)$ .

**Теорема 7.** Две регулярные поверхности  $x(s,t)$  и  $y(s,t)$  является  $SO(n, p, C)$ - эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:

$$M_s^{-1}(x)(s,t)M'_{ss}(x)(s,t) = M_s^{-1}(y)(s,t)M'_{ss}(y)(s,t); \quad (16)$$

$$M_s^{-1}(x)(s,t)M'_{st}(x)(s,t) = M_s^{-1}(y)(s,t)M'_{st}(y)(s,t); \quad (17)$$

$$M_s^T(x)(s,t)e_p M_s(x)(s,t) = M_s^T(y)(s,t)e_p M_s(y)(s,t); \quad (18)$$

$$\det M_s(x)(s,t) = \det M_s(y)(s,t) \quad (19)$$

для всех  $s, t \in (0,1)$ .

Пусть  $x(s,t) = \{x_j(s,t)\}_{j=1}^n$  регулярная поверхность в  $C^n$  и пусть  $M_s(x) = \left\{ \frac{\partial^{i-1} x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}} \right\}_{i,j=1}^n$ ,  $s, t \in (0,1)$ .

Вычисляя обратную матрицу  $(M_s(x))^{-1}$ , получим, что произведение  $(M_s(x))^{-1}M'_s(x) = A(s,t) = (a_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$  имеет следующий вид

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n}(s,t) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n}(s,t) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{3n}(s,t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}(s,t) \end{pmatrix},$$

где  $a_{in}(s,t)$  - комплекснозначные бесконечно дифференцируемые функции,  $(s,t) \in (0,1) \times (0,1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , вычисляемые по следующим формулам

$$a_{in} = \frac{\begin{bmatrix} x \dots x_s^{(i-1)} x_s^{(i+1)} \dots x_s^{(n-1)} \end{bmatrix}}{\det M_s(x)}, \quad i = 2, \dots, n-1;$$

$$a_{1n} = \frac{\begin{bmatrix} x_s^{(n)} x_s^{(1)} \dots x_s^{(n-1)} \end{bmatrix}}{\det M_s(x)};$$

$$a_{nn} = \frac{\begin{bmatrix} x x_s^{(1)} \dots x_s^{(n-2)} x_s^{(n)} \end{bmatrix}}{\det M_s(x)}$$

(здесь запись  $[x \ y \ \dots \ z]$  означает детерминант матрицы, у которой столбцами являются векторы  $x, y, \dots, z$ ).

Из этих равенств вытекает, что числовая функция  $\det M_s(x) = [x \ x^{(1)} \ \dots \ x^{(n-1)}] = d(s,t)$  удовлетворяет равенствам  $a_{nn}d = a_{nn} [x \ x_s^{(1)} \ \dots \ x_s^{(n-1)}] = [x \ x_s^{(1)} \ \dots \ x_s^{(n-2)} \ x_s^{(n)}] = d'_s$ , т.е.  $d'_s(s,t) = a_{nn}(s,t)d(s,t)$  для всех  $s, t \in (0,1)$ . Кроме того, для невырожденной матрицы  $C = M_s^T(x)e_p M_s(x)$  следует, что  $\det C = d^2$ , если  $(n-p)$ -четно и  $\det C = -d^2$ , если  $(n-p)$ -нечетно.

Рассмотрим следующую систему матричных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} X'_s(s,t) = X(s,t)A(s,t) \\ X'_t(s,t) = X(s,t)B(s,t) \end{cases} \quad (20)$$

где  $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$  – неизвестная  $n \times n$ -матрица,  $A(s,t) = (a_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$ ,  $B(s,t) = (b_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$  – заданные фиксированные  $n \times n$ -матрицы,  $s, t \in (0,1)$  (предполагается, что функции  $a_{ij}(s,t)$  и  $b_{ij}(s,t)$   $C^\infty$ -дифференцируемы).

Решение  $X(s,t)$  системы (20) называется невырожденным, если  $\det X(s,t) \neq 0$  для всех  $s, t \in (0,1)$ . Два решения  $X_0(s,t)$  и  $X_1(s,t)$  называют  $SO(n, p, C)$  - эквивалентными, если  $X_1(s,t) = gX_0(s,t)$  для некоторого  $g \in SO(n, p, C)$ .

Вместе с системой (20) рассмотрим также следующую систему равенств

$$\begin{cases} X^T(s,t)e_p X(s,t) = C(s,t) \\ \det X(s,t) = d(s,t) \end{cases}$$

где  $C(s,t) = (c_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n = C^T(s,t)$  и  $c_{ij}(s,t), d(s,t)$  есть  $C^\infty$ -дифференцируемые функции,  $d(s,t) \neq 0$  при всех  $s, t \in (0,1)$ .

**Теорема 7.** Пусть невырожденные матрицы  $A(s,t), B(s,t), C(s,t)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$(i). A(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n}(s,t) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n}(s,t) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{3n}(s,t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}(s,t) \end{pmatrix};$$

$$(ii). A_t + BA = B_s + AB, \text{ где } A_t(s,t) = \left( \frac{\partial a_{ij}(s,t)}{\partial t} \right)_{i,j=1}^n, B_s(s,t) = \left( \frac{\partial b_{ij}(s,t)}{\partial s} \right)_{i,j=1}^n;$$

$$(iii). C_s = A^T C + CA, \text{ где } C_s(s,t) = \left( \frac{\partial c_{ij}(s,t)}{\partial s} \right)_{i,j=1}^n;$$

$$(iv). C_t = B^T C + CB, \text{ где } C_t(s,t) = \left( \frac{\partial c_{ij}(s,t)}{\partial t} \right)_{i,j=1}^n,$$

и пусть  $C^\infty$ -дифференцируемая функция  $d(s,t)$  удовлетворяет равенствам

$$(v). d'_s = a_{nn} d;$$

$$(vi). d'_t = (b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}) d;$$

$$(vii). d^2(s,t) = \det C(s,t).$$

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} X'_s = XA \\ X'_t = XB \\ X^T e_p X = C \\ \det X = d \end{cases} \quad (21)$$

имеет невырожденное решение. При этом решение системы (21) единственно с точностью до  $SO(n, p, C)$  - эквивалентности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена решению задачи об эквивалентности путей и поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы.

Решена задача об эквивалентности двух путей и конечных систем путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы. Для решения этой задачи описаны системы образующих дифференциальных полей дифференциальных  $G$ -инвариантных рациональных функций конечных систем путей в случае, когда  $G = SO(n, p, K)$ .

Кроме того, с помощью инвариантных параметров установлен критерий эквивалентности системы путей для действия специальной псевдоортогональной группы.

Получено также решение задачи восстановления путей с точностью до  $G$ -эквивалентности по её дифференциальным инвариантам, где  $G = SO(n, p, K)$ .

Решена задача об эквивалентности двух поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы. Найдены критерии эквивалентности двух поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIK DEGREES  
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 KARSHI STATE UNIVERSITY**

---

**FERGANA STATE UNIVERSITY**

**GAFFOROV RAHMATJON ABDUKAXXOROVICH**

**AN EQUIVALENCY OF CURES AND SURFACES WITH RESPECT  
TO THE ACTION OF THE MOVEMENTS FOR PSEUDOEUCCLIDEAN  
SPACES**

**01.01.01-Mathematical analysis**

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)  
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**Karshi-2023**

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission under number № B2018.2.PhD/FM207.

Dissertation has been prepared at Bukhara engineering and technology institute.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council ([www.qarshidu.uz](http://www.qarshidu.uz)) and the "ZiyoNet" Information and educational portal ([www.ziyo.net](http://www.ziyo.net)).

**Scientific supervisor:** Muminov Kobiljon Kodirovich  
Doctor of physical and mathematical sciences, Professor

**Official opponents:** Rasul Nabiyevich Ganixojayev  
Doctor of physical and mathematical sciences, Professor

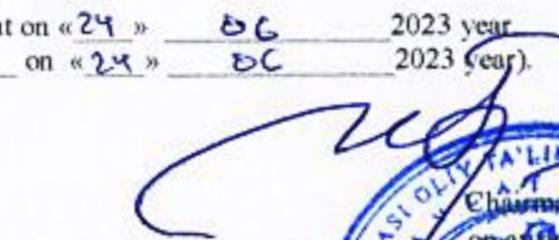
Axror Yusupovich Xamrayev  
Candidate of physical and mathematical sciences, docent

**Leading organization:** Andijan State University

Defense will take place «06» 07 2023 at \_\_\_ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 at Karshi State University (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225-34-13, fax: (+998 75) 221-00-56, e-mail: [qarshidu@umail.uz](mailto:qarshidu@umail.uz)). Karshi State University, Faculty of Physics and Mathematics, room 102.

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Karshi State University (is registered № 177). (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225-34-13).

Abstract of dissertation sent out on «24» 06 2023 year  
(Mailing report № 5 on «24» 06 2023 year).


B.A. Shoimkulov  
Chairman of Scientific council  
on award of scientific degrees,  
Dr. Phys-Math Sci., professor

Sh.D. Nodirov  
scientific secretary of  
Scientific council on award  
of scientific degrees, PhD

A.A. Imomov  
Chairman of scientific seminar under  
Scientific council on award of scientific  
degree, DSc., associate professor

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of the research work** is the solution of the problem of the equivalence of paths and surfaces under the action of a special pseudo-orthogonal group.

**The objects of the research work** is the equivalence of paths and surfaces under the action of a special pseudo-orthogonal group.

**Scientific novelty of the research work** is as follows:

Using special matrix functions and differential linear forms, necessary and sufficient conditions are found for the equivalence of given paths and surfaces in a pseudo-Euclidean space with respect to the action of a special pseudo-orthogonal group;

the existence and uniqueness of a solution to a system of differential equations obtained by finding conditions for the equivalence of systems of paths and surfaces given in pseudo-Euclidean space with respect to the action of a special pseudo-orthogonal group with the help of ordinary differential equations is proved;

necessary and sufficient conditions for the equivalence of paths under the action of a special pseudo-orthogonal group were found with the help of special matrix functions and differential linear forms in some non-Euclidean geometries;

recovery theorems are proved for paths and surfaces with respect to differential invariants up to their equivalence, given in a pseudo-Euclidean space.

**Implementation of the research results.** The obtained results on the dissertation work were used in the following research projects:

Finding the conditions for the equivalence of paths with respect to the effects of a special pseudo-orthogonal group was used in the foreign fundamental project MD-758.2022.1.1 on the topic “Development of mathematical models of fractional dynamics in order to study oscillatory processes and processes with saturation” (Vitus Bering Kamchatka State University note No. 14-12 dated 4 April 2023). The application of the obtained scientific results made it possible to find conditions for the equivalence of paths for some non-Euclidean geometry;

results of equivalence of paths and surfaces with respect to special pseudo-orthogonal group effects OT-F-4-(37-29) “Functional properties of A-analytic functions and their applications. Some problems of complex analysis in matrix domains” included a special matrix function, and with the help of this function, necessary and sufficient conditions for the equivalence of paths and surfaces with respect to the action of a special pseudo-orthogonal group were found (National University named after Uzbekistan, April 14, 2023, registration number 04/11-2129). The application of these scientific results made it possible to restore the equivalence of the differential invariants of paths and surfaces.

**The structure and volume of the thesis.** The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 92 pages.

**E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI**  
**СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**  
**LIST OF PUBLISHED WORKS**

**I bo'lim (1 часть; part 1)**

1. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // Узбекский математический Журнал. 2011, № 4, С.135-141. (01.00.00. № 6)
2. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность конечных систем путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия “Физико – математические науки”. Том 24 (63) № 1 (2011), с. 90-100.
3. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Образующие дифференциального поля инвариантных рациональных функций конечного числа путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // Доклады академии наук Республики Узбекистан. 2011, № 4, С. 12-13. (01.00.00. № 7)
4. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность путей относительно движений в псевдоевклидовом пространстве // Узбекский математический Журнал. 2011, № 4, С.142-149. (01.00.00. № 6)
5. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность решений систем матричных уравнений относительно специальной псевдоортогональной группы // ЎзМУ хабарлари 2014 й, 2/1 аниқ фанлар. (01.00.00. № 8)
6. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Системы матричных дифференциальных уравнений для поверхностей // Современная математика. Фундаментальные направления. (Journal of Mathematical Sciences). 2022. Том (68). С. 70–79. (3. Scopus. IF=0. 357)
7. Гаффоров Р.А. Эквивалентность многомерных поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // Бюллетень Института математики 2022, Vol. 5, №4, стр.48-54. (01.00.00; №17)
8. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность путей в некоторой неевклидовой геометрии // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 40. №3. С. 28-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-28-41. (35. CrossRef)

**II bo'lim (2 часть; part 2)**

9. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность путей для действия специальной псевдоортогональной группы // Вестник КРСУ. 2010. Том 10. 26-28 с.
10. Гаффоров Р.А. Эквивалентность путей относительно действия группы  $G = O(1,1) \triangleleft R^2$  // ФДУ. Илмий хабарлар. 2011 й, 1-сон. 54 б.
11. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность путей относительно действия группы  $SO(p, q)$  // Ҳозирги замон математикаси ва уни

- Ўқитишнинг долзарб муаммолари. 23-24 апрель 2010. 1 - қисим .Тошкент. 93-94 б.
12. Muminov K., Gafforov R.A. Equivalence of paths by action of the special pseudoorthogonal group // The 4-th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011.
  13. Гаффоров Р.А. Эквивалентность поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // Материалы VI-Ферганской конференции “Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения”, г.Фергана, 10-12 мая 2011г.С.218.
  14. Гаффоров Р.А. Эквивалентность системы поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Операторные алгебры и смежные проблемы”, г.Ташкент, 12-14 сентября 2012 г.с.121
  15. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // ФДУ. Илмий хабарлар. 2015й, 2-сон. 92-93 б.
  16. Muminov K. K., Gafforov R. A. Criterion of  $SO(n, p, C)$  - equivalence of elementary surfaces // S T E M M of the Joint International Conference , Science – Technology – Education – Mathematics – Medicine, May 13–17, 2019. Tashkent.
  17. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Системы матричных дифференциальных уравнений для описания  $SO(n, p, C)$  - эквивалентных поверхностей // Неклассические уравнения математической физики и их приложения. Узбекско–Российская научная конференция. Ташкент, 24–26 октября, 2019. С. 26-227.
  18. Muminov K. K., Gafforov R. A. Systems of matrix differential equations for  $SO(n, p, C)$ - equivalent surfaces // Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых «Проблемы современной топологии и её приложения», Ташкент, 21-23 ноябрь, 2019 г., С. 63.
  19. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность путей относительно действия группы  $O(n-2, p-1, K)$  // Uzbekistan-Malaysia international online conference. Computational models and technologies. august 24-25, 2020. Tashkent.
  20. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность путей относительно действия группы  $SO(n-2, p-1, K)$  // “Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар” Республика илмий анжумани . 21-23 октябр. 2020. Термиз.
  21. Muminov K. K., Gafforov R. A. Equivalence of surfaces with respect to the action of a special pseudo-orthogonal group // Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021. 15-17 november, 2021, Fergana, Uzbekistan.

Avtoreferat Qarshi davlat universitetining “QarDU xabarları” ilmiy-nazariy, uslubiy jurnali  
tahririyatida tahrirdan o‘tkazildi (23.06.2023 yil).

Guvohnoma № 22-4161

23.06.2023. Bosishga ruxsat etildi.  
Ofset bosma qog‘ozi. Qog‘oz bichimi 60x84 1/16.  
“Times New Roman” garniturası. Ofset bosma usuli.  
Hisob-nashriyot t. 3.2 Shartli b.t. 3,7.  
Adadi 80 nusxa. Buyurtma №.9.

“ILDARADO PRINT” MCHJ  
bosmaxonasida chop etildi.

