

**Анализ абсолютной устойчивости сингулярно –возмущенных
крупномасштабных систем при структурных возмущениях.
(Неравномерное градуирование временной шкалы.)**

В.Г.Миладжанов, Р.В.Муллажонов, К.Х.Тургунова, Ж.В. Муллажонова.

Сингуляр тойиган йирик масштаби системаларнинг турғунлиги масаласи ўрганилган аммо унинг абсолют турғунлиги қаралмаган эди. Ушбу ишда Лурье типдаги сингуляр – тойиган йирик масштаби системалар абсолют турғунлигининг етарли шартлари ҳосил қилинган.

Калит сўзлар: Турғунлик, сингуляр тойиган, йирикмасштаби.

Stability of the singular-indignant large scale systems researched but don't researched common stability. This article is devoted to the formation of sufficient condition of asymptotic stability of the singular-indignant large scale systems such as system a class of Lure's.

Key words: Stability, singular-indignant, large scale.

Крупномасштабные системы с сингулярным возмущением характеризуются наличием нескольких малый параметров μ_i , $\mu_i > 0$, при старших производных систем уравнений возмущенного движения. Существование этих параметров часто приводит к тому, что матрица агрегирования исходной системы зависит от них. Такая зависимость существенно затрудняет получение допустимой верхней оценки для значений параметров μ_i , удовлетворяющих определенным условиям.

Рассмотрим сингулярно-возмущенную КМС типа систем Лурье.

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= A_i x_i + \sum_{l=1}^q S_{il}^{(1)} A_{il} y_l + q_{i1} f_{i1}(\sigma_{i1}), \\ \sigma_{i1} &= c_{i1}^T x + c_{i2}^T y, \quad \forall i = 1, 2, \dots, q, \\ \mu_i \frac{dy_i}{dt} &= \sum_{l=1}^q \mu_i S_{q+i,l}^{(1)} B_{il} x_l + B_i y_i + q_{i2} f_{i2}(\sigma_{i2}) + q_{i3} f_{i3}(\sigma_{i3}), \\ \sigma_{i2} &= \mu_i c_{i3}^T x_i + c_{i4}^T y_i \quad \sigma_{i3} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^q (\mu_i c_{i5}^T S_{q+i,l}^{(2)} x_l + c_{i6}^T S_{q+i,l}^{(3)} y_l), \\ i &= 1, 2, \dots, q, \quad 2q = s \\ \sigma_{ij}^{-1} f_{ij}(\sigma_{ij}) &\in [0, k_{ij}] \subset R_+, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{1}$$

где

все матрицы и векторы соответствующего порядка, причем

$$S_{ii}^{(1)}, \quad S_{q+i,l}^{(1)}, \quad S_{q+i,l}^{(2)}, \quad S_{q+i,l}^{(3)}$$

диагональные матрицы.

Пусть

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{i1}^{(1)} & S_{i2}^{(1)} \dots S_{ii-1}^{(1)} & I & S_{ii=1}^{(1)} \dots S_{iq}^{(1)} \\ S_{q+i,1}^{(1)} & S_{q+i,2}^{(1)} \dots S_{q+i,i-1}^{(1)} & I & S_{q+i,I+1}^{(1)} \dots S_{q+i,q}^{(1)} \\ S_{q+i,1}^{(2)} & S_{q+i,2}^{(2)} \dots S_{q+i,i-1}^{(2)} & O & S_{q+i,i+1}^{(2)} \dots S_{q+i,q}^{(2)} \\ S_{q+i,1}^{(3)} & S_{q+i,2}^{(3)} \dots S_{q+i,i-1}^{(3)} & O & S_{q+i,i+1}^{(3)} \dots S_{q+i,q}^{(3)} \end{bmatrix},$$

$$S = diag \{S_1, S_2, \dots, S_q\}.$$

Структурное множество определим формулой

$$\Phi_s = \{S : 0 \leq S_{jl}^{(k)} \leq I, \quad S_{ii}^{(1)} = S_{q+i,i} = I; \quad S_{q+i,i}^{(2)} = S_{q+i,i}^{(3)} = 0, \quad i, l = 1, 2, \dots, 2q, \quad k = 1, 2, 3\},$$

где I -единичная матрица соответствующей размерности.

Независимые, сингулярно-возмущенные подсистемы, соответствующие системе (1), получаютcя подстановкой x^i и y^i вместо x и y :

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= A_i x_i + A_{ii} y_i + q_{i1} f_{i1}(\tilde{\sigma}_{i1}), \\ \tilde{\sigma}_{i1} &= c_{i1}^T x^i + c_{i2}^T y^i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mu_i \frac{dy_i}{dt} = \mu_i B_{ii} x_i + B_i y_i + q_{i2} f_{i2}(\sigma_{i2}),$$

$$\sigma_{i2} = \mu_i c_{i3}^T x^i + c_{i4}^T y^i \quad \sigma_{i3} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^q (\mu_i c_{l5}^T S_{q+i,l}^{(2)} x^i + c_{l6}^T S_{q+i,l}^{(3)} y^i),$$

$$i = 1, 2, \dots, q, \quad 2q = s$$

где

$$x^i = (0^T, \dots, 0^T, x_i^T, 0^T, \dots, 0^T)^T \in R^n, \quad x_i \in R^{n_i}, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_q = n,$$

$$y^i = (0^T, \dots, 0^T, y_i^T, 0^T, \dots, 0^T)^T \in R^m, \quad y_i \in R^{m_i}, \quad m_1 + \dots + m_q = m..$$

При этом система (1) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= f_{i0} + f_i^* + f_i^{**}, \quad i = 1, 2, \dots, q, \\ \frac{dy_i}{dt} &= g_{i0} + g_i^* + g_i^{**}, \quad i = 1, 2, \dots, q.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь вектор - функции f_{i0} и g_{i0} соответствуют независимой вырожденной подсистеме

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i x_i + q_{i1} f_{i1}(\tilde{\sigma}_{i1}^0), \quad \tilde{\sigma}_{i1}^0 = c_{i1}^T x_i \quad (4)$$

и подсистеме, описывающей граничный слой

$$\mu_i \frac{dy_i}{dt} = B_i y_i + q_{i2} f_{i2}(\sigma_{i2}^0), \quad \sigma_{i2}^0 = c_{i2}^T y_i \quad (5)$$

Вектор - функции $f_{i0} + f_i^*$ и $g_{i0} + g_i^*$ соответствуют независимым сингулярно-возмущенным подсистемам (1).

Вместе с системой (1) и подсистемами (2), (4), (5) будем рассматривать матрицу-функцию

$$U(t, x, y, M) = \begin{bmatrix} U_{11}(t, x) & U_{12}(t, x, y, M) \\ U_{12}^T(t, x, y, M) & U_{22}(t, y, M) \end{bmatrix} \quad (6)$$

где

$$U_{11}(t, x) = [v_{ij}(t, \cdot)], \quad v_{ij} = v_{ij}(t, x_i), \quad v_{ji} = v_{ij}(t, x_i, x_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, q;$$

$$U_{22}(t, y, M) = [v_{q+i, q+j}^*(t, \cdot)], \quad v_{q+i, q+j}^* = \mu_i v_{q+i, q+j}^*(t, y_i)$$

$$v_{q+i, q+j}^* = v_{q+i, q+j}^* = \mu_i \mu_j v_{q+i, q+j}^*(t, y_i, y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, q$$

$$U_{12}(t, x, y, M) = [\mu_j v_{i, q+j}(t, x_i, y_j)], \quad i, j = 1, 2, \dots, q, \quad 2q = s;$$

для элементов которой выполняются следующие оценки

$$a) \quad \underline{\alpha}_{o\varphi_{i1}}(x_i)\varphi_{j1}(x_j) \leq v_{ij}(t, \cdot) \leq \overline{\alpha}_{i\varphi_{i2}}(x_i)\varphi_{j2}(x_j),$$

$$\forall (t, x_i, y_j) \in R \times N_{ix} \times N_{jy}, i, j = 1, 2, \dots, q, j \geq i;$$

$$b) \quad \underline{\alpha}_{q+i, q+j\varphi} \psi_{i1}(y_i)\psi_{j1}(y_j) \leq v_{q+i, q+j}^*(t, \cdot) \leq \overline{\alpha}_{q+i, q+j}^x \Psi_{i2}(y_i)\Psi_{j2}(y_j), \quad \forall (t, y_i, y_j) \in R \times N_{iy} \times N_{jy},$$

$$(j \geq i) \in [1, q]$$

$$\text{в)} \underline{\alpha}_{i,q+j} \varphi_{i1}(x_i) \psi_{j1}(y_j) \leq v_{i,q+j}(t, x_i, y_j) \leq \overline{\alpha}_{i,q+j} \times \varphi_{i2}(x_i) \psi_{j2}(y_j),$$

$$\forall (t, x_i, y_i) \in R \times N_{ix} \times N_{iy} \quad i, j = 1, 2, \dots, q.$$

С помощью матрицы-функции (6) и постоянного вектора $\eta \in R_+^s$ вводится функция

$$V(t, x, y, M) = \eta^T U(t, x, y, M) \eta \quad (7)$$

и рассматривается выражение верхней правой производной Дини

$$\begin{aligned} D^+ V(t, x, y, M) &= \eta^T D^+ U(t, x, y, M) \eta, \\ D^+ U(t, x, y, M) &= [D^+ v_{r,k}(t, \dots)], \quad r, k = 1, 2, \dots, S \end{aligned} \quad (8)$$

Для функции (7) имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Если выполняются оценки а), б), в), то для функции (7) выполняется двусторонняя оценка

$$u_1^T A(M) u_1 \leq V(t, x, y, M) \leq u_2^T B(M) u_2,$$

$$\forall (t, x, y, M) \in R \times N_{ix} \times N_{iy} \times M,$$

где

$$N_x \subseteq N_{1x} \times N_{2x} \times \dots \times N_{qx}, \quad N_y \subseteq N_{1y} \times N_{2y} \times \dots \times N_{qy},$$

$$u_k^T = (\varphi_{1k}(x_1), \dots, \varphi_{qk}(x_q), \Psi_{1k}(y_1), \dots, \Psi_{qk}(y_q)), \quad k = 1, 2$$

$$A(M) = H^T A_1(M) H, \quad B(M) = H^T A_2(M) H,$$

$$H = \text{diag}\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s\}, \quad s = 2q,$$

$$A_1(M) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}(M) \\ A_{12}^T(M) & A_{22}(M) \end{bmatrix}, \quad A_2(M) = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}(M) \\ -\overline{A}_{12}^T(M) & \overline{A}_{22}(M) \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = [\underline{\alpha}_{ij}], \quad \underline{\alpha}_{ij} = \underline{\alpha}_{ij}, \quad \overline{A}_{11} = [\overline{\alpha}_{ij}], \quad \overline{\alpha}_{ij} = \overline{\alpha}_{ji},$$

$$A_{12}(M) = [\mu_j \underline{\alpha}_{i,q+j}], \quad \overline{A}_{12}(M) = [\mu_j \overline{\alpha}_{i,q+j}],$$

$$A_{22}(M) = [\mu_{ij}^* \underline{\alpha}_{q+i,q+j}], \quad \underline{\alpha}_{q+i,q+j} = \underline{\alpha}_{q+j,q+i},$$

$$\overline{A}_{22}(M) = [\mu_{ij}^* \overline{\alpha}_{q+i,q+j}], \quad \overline{\alpha}_{q+i,q+j} = \overline{\alpha}_{q+j,q+i},$$

$$\mu_{ij}^* = \begin{cases} \mu_i & \text{при } i = j, \\ \mu_i \mu_j & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, q.$$

Доказательство. Пусть выполняются оценки а), б), в). Тогда для функции (7) имеем последовательность неравенств

$$\begin{aligned} V(t, x, y, M) &= \sum_{i=1}^q \eta_i^2 v_{ii}(t, x_i) + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^q \eta_i \eta_j v_{ij}(t, x_i, x_j) + \sum_{i=1}^q \eta_{q+1}^2 \mu_{i, q+i, q+j}(t, y_i) + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^q \eta_{q+i} \eta_{q+j} \mu_i \mu_j v_{q+i, q+j}(t, x_i, y_j) + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^q \eta_i \eta_{q+j} \mu_j v_{i, q+j}(t, x_i, y_j) \geq \sum_{i=1}^q \eta_i^2 \underline{\alpha}_{ii} \varphi_{i1}^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^q \eta_i \eta_j \underline{\alpha}_{ij} \varphi_{i1}(x_i) \varphi_{j1}(x_j) + \sum_{i=1}^q \eta_{q+i}^2 \mu_{i, q+i, q+i} \psi_{i1}^2(y_i) + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^q \eta_{q+i} \eta_{q+j} \mu_i \mu_j \underline{\alpha}_{q+i, q+j} \psi_{i1}(y_i) \psi_{j1}(y_j) + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^q \eta_i \eta_{q+j} \mu_j \underline{\alpha}_{i, q+j} \varphi_{i1}(x_i) \psi_{j1}(y_j) = \\ &= (\varphi_{11}(x_1), \dots, \varphi_{q1}(x_q), \psi_{11}(y_1), \dots, \psi_{q1}(y_q))^T \text{diag}\{\eta_1, \dots, \eta_{2q}\} \cdot x \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}(M) \\ A_{12}^T(M) & A_{22}(M) \end{bmatrix} x \\ &+ x \text{diag}\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2q}\} x (\varphi_{11}(x_1), \dots, \varphi_{q1}(x_q), \psi_{11}(y_1), \dots, \psi_{q1}(y_q)) = u_1^T A(M) u_1 \end{aligned}$$

Аналогично доказывается верхняя оценка.

Пусть для системы (1) построена МФ (6) с элементами

$$\begin{aligned} v_{ij}(x_i, y_j) &= v_{ji}(x_i, y_j) = x_i^T P_{ij} x_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, q; \\ v_{i, q+j}(x_i, y_j) &= x_i^T P_{i, q+j} y_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, q, \quad 2q = S, \\ v_{q+i, q+j}(y_i, y_j) &= v_{q+j, q+i}(y_i, y_j) = y_i^T P_{q+i, q+j} y_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \quad (9)$$

где P_{ii} , $P_{q+i, q+i}$ -симметрические, положительно-определенные матрицы.

Для функций (9) выполняются оценки

$$\begin{aligned} \text{а) } \lambda_m(P_{ii}) \|x_i\|^2 &\leq v_{ii}(x_i) \leq \lambda_M(P_{ii}) \|x_i\|^2, \quad \forall x_i \in N_{ix0}, \quad i \in [1, q]; \\ \text{б) } \lambda_m(P_{q+i, q+i}) \|y_i\|^2 &\leq v_{q+i, q+i}(y_i) \leq \lambda_M(P_{q+i, q+i}) \|y_i\|^2, \quad \forall y_i \in N_{iy0}, \quad \forall i \in [1, q], \\ \text{в) } -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{ij} P_{ij}^T) \|x_i\| \cdot \|x_j\| &\leq v_{ij}(x_i, x_j) \leq \lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{ij} P_{ij}^T) \|x_i\| \|x_j\|, \quad \forall (x_i, x_j) \in N_{ix0} \times N_{ix0}, \end{aligned}$$

$$\forall i,j=1,2,\dots,q, i \neq j; \quad (10)$$

$$\Gamma) - \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{q+i,q+j} P_{q+i,q+j}^T) \|y_i\| \|y_j\| \leq \nu_{q+i,q+j}(y_i, y_j) \leq \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{q+i,q+j} P_{q+i,q+j}^T) \|y_i\| \|y_j\|,$$

$$\forall (y_i, y_j) \in N_{iy_0} \times N_{iy_0}, \forall i,j=1,2,\dots,q, i \neq j;$$

$$\Delta) - \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{i,q+j} P_{i,q+j}^T) \|x_i\| \|y_j\| \leq \nu_{i,q+j}(x_i, y_j) \leq \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{i,q+j} P_{i,q+j}^T) \|x_i\| \|y_j\|,$$

$$\forall (x_i, y_j) \in N_{ix_0} \times N_{iy_0}, i,j=1,2,\dots,q$$

где $\lambda_m(P_{ii})$ и $\lambda_m(P_{q+i,q+i})$ -минимальные собственные числа, $\lambda_M(P_{ii})$ и $\lambda_M(P_{q+i,q+i})$ -максимальные собственные числа матриц P_{ii} и $P_{q+i,q+i}$ соответственно; $\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{ij} P_{ij}^T)$, $\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{q+i,q+j} P_{q+i,q+j}^T)$, $\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{i,q+j} P_{i,q+j}^T)$ - норма матриц P_{ij} , $P_{q+i,q+j}$, $P_{i,q+j}$ соответственно.

При выполнении оценок (10) для функции (7) с элементами (9) имеет место двустороннее неравенство

$$u^T A(M) u \leq V(x, y, M) \leq u^T B(M) u.$$

Здесь матрицы $A(M)$ и $B(M)$ определяются так, как и в лемме 1,

$$u^T = (\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_q\|, \|y_1\|, \|y_2\|, \dots, \|y_q\|),$$

$$\alpha_{ii} = \lambda_m(P_{ii}), \alpha_{q+i,q+j} = \lambda_m(P_{q+i,q+i}), \alpha_{ij} = -\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{ij} P_{ij}^T),$$

$$\alpha_{q+i,q+j} = -\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{q+i,q+j} P_{q+i,q+j}^T), \alpha_{i,q+j} = -\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{i,q+j} P_{i,q+j}^T),$$

$$\bar{\alpha}_{ii} = \lambda_M(P_{ii}), \bar{\alpha}_{q+i,q+i} = \lambda_M(P_{q+i,q+i}), \bar{\alpha}_{ij} = -\alpha_{ij},$$

$$\bar{\alpha}_{q+i,q+i} = \alpha_{q+i,q+j}, \bar{\alpha}_{i,q+j} = \alpha_{i,q+j}, \forall i,j \in [1,q].$$

Лемма 2. Для производных Дини функций (9) выполняются оценки:

$$a) \eta_i^2 (D_{x_i}^+ v_{ii})^T f_{i0} \leq \rho_{1i} \|x_i\|^2, \quad \forall x_i \in N_{ix_0}, \quad \forall i \in [1,q]$$

$$б) \eta_{q+i}^2 (D_{y_i}^+ v_{q+i,q+i})^T g_{i0} \leq \rho_{2i} \|y_i\|^2, \quad \forall y_i \in N_{iy_0}, \quad \forall i \in [1,q]$$

$$\begin{aligned}
& \epsilon) \eta_i^2 (D_{x_i}^+ v_{ii})^T f_{i0}^* + \eta_{q+i}^2 (D_{q+i}^+ v_{q+i, q+i})^T g_i^* + 2\eta_i \eta_{q+i} \{\mu_i (D_{x_i}^+ v_{i, q+i})^T (f_{i0} + f_i^*) + \\
& + (D_{y_i}^+ v_{i, q+i})^T (g_{i0} + g_i^*)\} \leq (\rho_{3i} + \mu_i \rho_{4i}) \|x_i\|^2 + 2(\rho_{5i} + \mu_i \rho_{6i}) \|y_i\|^2 + 2(\rho_{7i} + \\
& + \mu_i \rho_{8i}) \|x_i\| \|y_i\|, \quad \forall (x, y, M) \in N_{ix_0} \times N_{iy_0} \times M, \quad i = 1, 2, \dots, q; \\
& \Gamma) \sum_{i=1}^q \eta_i^2 (D_{x_i}^+ v_{ii})^T f_i^{**} + \sum_{i=1}^q \eta_{q+i}^2 (D_{y_i}^+ v_{q+i, q+i})^T g_i^{**} + 2 \sum_{i=1}^q \eta_i \eta_{q+i} \{\mu_i (D_{x_i}^+ v_{i, q+i})^T f_i^{**} + \\
& + (D_{y_i}^+ v_{i, q+i})^T g_i^{**}\} + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^q \eta_i \eta_j \{(D_{x_i}^+ v_{ij})^T (f_{i0} + f_i + f_i^{**}) + (D_{x_j}^+ v_{ij})^T (f_{j0} + f_j + \\
& + f_j^{**})\} + \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^q \eta_{q+i} \eta_{q+j} \{\mu_i (D_{y_i}^+ v_{q+i, q+j})^T (g_{i0} + g_i^* + g_i^{**}) + \mu_i (D_{y_i}^+ v_{q+i, q+j})^T (g_{i0} + \\
& + g_i^* + g_i^{**})\} + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^q \eta_i \eta_{q+j} \times \{\mu_j (D_{x_i}^+ v_{i, q+j})^T (f_{i0} + f_i^* + f_i^{**}) + (D_{y_j}^+ v_{i, q+j})^T (g_{i0} + g_i^* + \\
& + g_i^{**})\} \leq \sum_{i=1}^q \{(\rho_{9i}(S) + \mu_i \rho_{10i}(S)) \|x_i\|^2 + \rho_{11i}(S) \|y_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^q \{(\rho_{1ij}(S) + \mu_i \rho_{2ij}(S)) \|x_i\| \|x_j\| + \\
& + (\rho_{3ij}(S) + \mu_i \rho_{4ij}(S) + \mu_j \rho_{5ij}(S)) \|y_i\| \|y_j\|\} + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q (\rho_{6ij}(S) + \mu_i \rho_{7ij}(S) + \mu_i \mu_j \rho_{8ij}(S)) \|x_i\| \|y_j\|, \\
\end{aligned}$$

$$\forall (x_i, y_i, M, S) \in N_{ix_0} \times N_{iy_0} \times M \times \Phi_s,$$

где $\rho_{\alpha i}, \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, i \in [1, q], \rho_{\beta i}(S), \beta = 9, 10, 11, i \in [1, q]$ – максимальные собственные числа матриц

$$\eta_i^2 [p_{ii} A_i + A_i^T p_{ii} + p_{ii} k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^i)^T + (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^i)^T)^T p_{ii}];$$

$$\eta_{q+i}^2 [p_{q+i,q+i} B_i + B_i^T p_{q+i,q+i} + p_{q+i,q+i} k_{i2}^* q_{i2} (c_{i2}^i)^T + (k_{i2}^* q_{i2} (c_{i2}^i)^T)^T p_{q+i,q+i}];$$

$$\eta_i^2 [p_{ii} k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^i)^T + (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^i)^T)^T p_{ii}]; \quad \frac{1}{2} \eta_i \eta_{q+i} (p_{i,q+i} B_{ii} + B_{ii}^T p_{i,q+i}^T + p_{i,q+i} k_{i2}^* q_{i2} c_{i3}^T + (k_{i2}^* q_{i2} c_{i3}^T)^T p_{i,q+i}^T);$$

$$\eta_{q+i}^2 [p_{q+i,q+i} k_{i2}^* q_{i2} c_{i4}^T + (k_{i2}^* q_{i2} c_{i4}^T)^T p_{q+i,q+i}];$$

$$\frac{1}{2} \eta_i \eta_{q+i} (p_{i,q+i} A_{ii} + A_{ii}^T p_{i,q+i}^T + p_{i,q+i} k_{i1}^* q_{i1} (c_{i2}^i)^T + (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i2}^i)^T)^T p_{i,q+i});$$

$$\eta_i^2 [p_{ii} k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^i)^T + (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^i)^T)^T p_{ii}] + \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^q \eta_i \eta_j \{ (k_{j1}^* q_{j1} (c_{j1}^*)^T)^T p_{ji} + p_{ji}^T k_{j1}^* q_{j1} (c_{j1}^i)^T \};$$

$$\eta_i \eta_{q+i} [p_{i,q+i} k_{i3}^* q_{i3} c_{i5}^T S_{q+i,i}^{(2)} + (k_{i3}^* q_{i3} c_{i5}^T S_{q+i,i}^{(2)})^T p_{i,q+i}^T];$$

$$\eta_i \eta_{q+i} [p_{i,q+i}^T k_{i1}^* q_{i1} (c_{i2}^i)^T + (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i2}^i)^T)^T p_{i,q+i} + p_{q+i,q+i}^T k_{i3}^* q_{i3} c_{i6}^T S_{q+i,i}^{(3)} + (k_{i3}^* q_{i3} c_{i6}^T)^T p_{q+i,q+i}];$$

соответственно;

$\rho_{7i}, \rho_{8i}, \rho_{kij}(S), \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad i, j = 1, 2, \dots, q$ – нормы матриц

$$\eta_i^2 p_{ii} (A_{ii} + k_{i1}^* q_{i1} (c_{i2}^i)^T) + \eta_i \eta_{q+i} p_{i,q+i} (B_i + k_{i2}^* q_{i2} c_{i4}^T);$$

$$\eta_{q+i}^2 (B_{ii}^T + (k_{i2}^* q_{i2} c_{i3}^T)^T) p_{q+i,q+i} + \eta_i \eta_{q+i} (A_i + (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^i)^T)^T) p_{i,q+i};$$

$$\eta_i^2 p_{ii} k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^j)^T + \eta_i \eta_j (p_{ij} A_j + A_i^T p_{ij}) + \sum_{l=1}^{j-1} \eta_l \eta_j \{ p_{il}^T k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^j)^T + (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^j)^T)^T p_{ij} \} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{j-1} \{ \eta_i \eta_l p_{il} k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^j)^T + \eta_l \eta_j (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^j)^T)^T p_{lj} \} + \sum_{l=j}^q \{ \eta_i \eta_l p_{il} k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^j)^T + \eta_j \eta_l (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^j)^T)^T p_{jl}^T \};$$

$$\eta_i \eta_{q+i} p_{i,q+i} (S_{q+i,j}^{(1)} B_{ij} + k_{i3}^* q_{i3} c_{j5}^T S_{q+i,j}^{(2)}) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^q \eta_i \eta_{q+l} p_{i,q+l} (S_{q+l}^{(1)} B_{ij} + k_{i3}^* q_{i3} c_{j5}^T S_{q+l,j}^{(2)});$$

$$p_{i,q+i}^T k_{i1}^* q_{i1} (c_{i2}^j)^T + \eta_i \eta_{q+i} (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i2}^j)^T)^T p_{i,q+i};$$

$$\eta_{q+i} \eta_{q+j} p_{q+i, q+j} (B_j + k_{j2} q_{j2} c_{j4}^T) + \eta_i \eta_{q+i} p_{i, q+i}^T (S_{ij}^{(1)} A_{ij}) + \sum_{l=1}^{i-1} \eta_{q+l} \eta_{q+i} p_{q+l, q+i}^T (k_{l3}^* q_{l3} c_{j6}^T S_{q+l, j}^{(3)}) +$$

$$\sum_{l=i}^q \eta_{q+i} \eta_{q+l} p_{q+i, q+l} (k_{l3}^* q_{l3} c_{j6}^T S_{q+l, j}^{(3)});$$

$$\eta_{q+i} \eta_{q+j} (B_i^T + (k_{i2}^* q_{i2} c_{i4}^T)^T) p_{q+i, q+j} + \sum_{l=1}^{i-1} \eta_l \eta_i p_{il}^T S_{ij}^{(1)} A_{ij} + \sum_{l=i}^q \eta_i \eta_l p_{il} S_{ij}^{(1)} A_{ij} +$$

$$+ \sum_{l=1}^q \eta_i \eta_{q+l} p_{i, q+l}^T (k_{l1}^* q_{l1} (c_{j2}^l)^T) + \sum_{l=1}^{i-1} \eta_{q+i} \eta_{q+l} p_{q+i, q+l} (k_{l3}^* q_{l3} c_{j6}^T S_{q+l, j}^{(3)}),$$

$$\eta_i^2 p_{ii} (S_{ij}^{(1)} A_{ij} + k_{i1}^* q_{i1} (c_{i2}^j)^T) + \eta_i \eta_{q+i} (k_{i1}^* q_{i1} (c_{i1}^j)^T)^T p_{i, q+i} + \eta_i \eta_{q+j} p_{i, q+j} (B_j + k_{j2}^* q_{j2} c_{i4}^T) +$$

$$\sum_{l=1}^{i-1} \eta_l \eta_i p_{il}^T (S_{ij}^{(1)} A_{ij} + k_{l1}^* q_{l1} (c_{l2}^j)^T) + \sum_{l=i+1}^q \eta_i \eta_l p_{il} (S_{ij}^{(1)} A_{ij} + k_{l1}^* q_{l1} (c_{l2}^j)^T) +$$

$$+ \sum_{l=1}^q \eta_j \eta_{q+l} p_{j, q+l} (k_{l3}^* q_{l3} c_{l6}^T S_{q+l, i}^{(3)});$$

$$\eta_{q+j}^2 p_{q+j, q+j}^T (S_{q+j, i}^{(1)} B_{ji} + k_{j3}^* q_{j3} c_{j5}^T S_{q+j, i}^{(2)}) + \eta_i \eta_{q+j} A_i^T p_{i, q+j} + \sum_{l=1}^q \eta_l \eta_{q+j} (k_{l1}^* q_{l1} (c_{l1}^j)^T)^T p_{l, q+j};$$

$$\sum_{l=1}^{i-1} \eta_{q+l} \eta_{q+i} p_{q+l}^T (S_{q+l}^{(1)} B_{ij} + k_{l3}^* q_{l3} c_{l5}^T S_{q+l, j}^{(2)}) + \sum_{l=i}^q \eta_{q+i} \eta_{q+l} p_{q+i, q+l} (S_{q+l, j}^{(1)} B_{ij} + k_{l3}^* q_{l3} c_{j5}^T S_{q+l, j}^{(2)}) +$$

$$\eta_{q+i} \eta_{q+j} [(k_{i2}^* q_{i2} c_{i3}^T)^T p_{q+i, q+j} + p_{q+i, q+j} (k_{i2}^* q_{i2} c_{i3}^T)];$$

соответственно, здесь $i \neq j$,

$$k_{ij}^* = \begin{cases} k_{ij} & \text{при} \quad \sigma_o (S_{ij}^{(r)} q_{ij})^T p_{ij} x_j > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, s; \quad r = 1, 2; \\ 0 & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$k_{ii}^{**} = \begin{cases} k_{ii} & \text{при} \quad \sigma_o (S_{ii}^{(2)} q_{ii})^T p_{ii} x_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, s; \\ -k_{ii} & \text{при} \quad \sigma_{ii} (S_{ii}^{(2)} q_{ii})^T p_{ii} x_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \end{cases}$$

$$c_{ij}^k \in R^{nk} - k - \text{я компонента вектора } c_{ij}.$$

Лемма 3. Пусть выполняются все условия леммы 2. Тогда для полной производной функции (7) с элементами (9) имеет место оценка

$$DV(x, y, M) \leq u^T \tilde{G}(M) u$$

$$\forall (x, y, M, S) \in N_{x_0} \times N_{y_0} \times M \times \Phi_s, \quad (11)$$

где

$$u^T = (\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|y_q\|, \|y_1\|, \|y_2\|, \dots, \|y_q\|), \quad \tilde{G}(M) = [\tilde{c}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}(M)], \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \quad s = 2q. \text{ Элементы}$$

матриц $\tilde{G}(M)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ii} &= \rho_{1i} + \rho_{3i} + \rho_{9i}(S^*); & \tilde{c}_{ij} &= \tilde{c}_{ji} = \rho_{1ij}(S^*), \quad i \neq j; \\ \tilde{c}_{q+i, q+i} &= \rho_{2i} + \rho_{3i} + \rho_{11i}(S^*); & \tilde{c}_{i, q+j} &= \tilde{c}_{q+j, q+i} = \rho_{3ij}(S^*), \quad i \neq j; \\ \tilde{c}_{i, q+j} &= \rho_{7i}; & \tilde{c}_{i, q+j} &= \rho_{6ij}(S^*), \quad i \neq j = 1, 2, \dots, q; & \tilde{\sigma}_{ij}(M) &= \mu_i(\rho_{4i} + \rho_{10i}(S^*)); & \sigma_{q+i, q+i}(M) &= \mu_i \rho_{6i}; \\ \tilde{\sigma}_{ij}(M) &= \tilde{\sigma}_{ji}(M) = \mu_i \rho_{2ij}(S^*), & i \neq j; & \tilde{\sigma}_{q+i, q+j}(M) &= \mu_i \rho_{4ij}(S^*) + \mu_j \rho_{5ij}(S^*), & i \neq j; \\ \tilde{\sigma}_{i, q+i}(M) &= \mu_i \rho_{8i} & \tilde{\sigma}_{i, q+j}(M) &= \mu_i \rho_{7ij}(S^*) + \mu_i \mu_j \rho_{8ij}(S^*), & i \neq j = 1, 2, \dots, q; \end{aligned}$$

$S^* \in \Phi_s$ постоянная матрица такая, что

$$\rho_{ki}(S) \leq \rho_{ki}(S^*); \quad \rho_{rj}(S) \leq \rho_{rj}(S^*), \quad k = 9, 10, 11, 12, \quad r = 1, 2, \dots, 9, \quad i, j = 1, 2, \dots, q, \quad i \neq j.$$

Теорема 1. Пусть уравнения сингулярно-возмущенной КМС типа систем Лурье (1) таковы, что для неё построена МФ (6) с элементами (9), удовлетворяющими оценкам (10) и для полной производной Дини от функции (7), а также:

а) матрица $A(M)$ - положительно-определенная при любом $\mu_i \in]0, \tilde{\mu}_{i1}[$ и при $\mu_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, q$;

б) матрица $\tilde{G}(M)$ -отрицательно-определенная при любом $\mu_i \in]0, \tilde{\mu}_{i2}^*[$ и при $\mu_i \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, q$.

Тогда состояние равновесия $(x^T y^T)^T = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво при любом $\mu_i \in]0, \tilde{\mu}_i^*[$ и при $\mu_i \rightarrow 0$, на Φ_s , где $\tilde{\mu}_i^* = \min\{1, \mu_{i1}, \mu_{i2}^*\}$

Если к тому же $N_{ix} = R^{ni}, N_{iy} = R^{mi}$, то состояние равновесия $(x^T y^T)^T = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво в целом при любом $\mu_i \in]0, \tilde{\mu}_i^*[$ при $\mu \rightarrow 0$ на Φ_s .

Здесь $\tilde{\mu}_{i1}$ и $\tilde{\mu}_{i2}$ определяются из условий положительной определенности матрицы $A(M)$ и отрицательной определенности матрицы $\tilde{G}(M)$ соответственно.

Литература

- 1 . Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев: Наук. Думка, 1884. – 307 с.
2. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема А. // Электронное моделирование. - 1992. - 14, №1. - С. 3-10.
3. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема Б. // Электронное моделирование. - 1992. - 14, № 4. - С. 35-42.
4. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. О структурной устойчивости сингулярно-возмущенных крупномасштабных систем. 1 // Электронное моделирование. - 1993. - __, №1 - С. 23 – 30.
5. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. О структурной устойчивости сингулярно-возмущенных крупномасштабных систем. П // Электронное моделирование. — 1994. - __, №1 - С. 43 – 51.