V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

MAXAMMADALIYEV MUXTORJON TURSUNMUXAMMAD O'G'LI

AMENABEL BO'LMAGAN GRAFLARDA QATTIQ DISKLI (HC) VA POTTS MODELLARI UCHUN DAVRIY GIBBS O'LCHOVLARI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Namangan - 2023 yil

UDK: 517.98 – 519.21

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

MAXAMMADALIYEV MUXTORJON TURSUNMUXAMMAD O‘G‘LI

AMENABEL BO‘LMAGAN GRAFLARDA QATTIQ DISKLI (HC) VA POTTS MODELLARI UCHUN DAVRIY GIBBS O‘LCHOVLARI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Namangan – 2023 yil

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestasiya komissiyasida B2019.4.PhD/FM426 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Namangan davlat universitetida bajarilgan.
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (https://kengash.mathinst.uz) va “ZiyoNet” ta’lim axborot tarmog‘ida (http://www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Xakimov Rustamjon Maxmudovich** fizika-matematika fanlari doktori (DSc)
Rasmiy opponentlar:	**Jamilov Uyg‘un Umurovich** fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim **Botirov G‘olibjon Isroilovich** fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
Yetakchi tashkilot:	**O‘zbekiston Milliy Universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023-yil “ 01 ” avgust kuni soat 16:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (+998 71) 207 91 40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (163 raqami bilan ro‘yhatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (+998 71) 207 91 40).

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil “ 19 ” iyul kuni tarqatildi.

(2023-yil “ 19 ” iyuldagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A. Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

U.U. Jamilov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Ma'lumki, axborot almashinuvi nazariyasi hamda xizmat koʻrsatish nazariyasining koʻplab muammolari asosan fizik va biologik sistemalarning termodinamik xossalarini tadqiq qilushda muhim obyekt boʻlgan Gibbs oʻlchovlari nazariyasi masalalariga keltiriladi. Ta'kidlash joizki, Gibbs oʻlchovlari statistik mexanikada koʻp sonli zarrachalardan tashkil topgan sistemalarni tavsiflashning asosiy vositalaridan biri hisoblanadi. Panjarali sistemalarda Gibbs oʻlchovlari nazariyasining rivojlanishini R.L.Dobrushin, O.E.Lanford va D.Ryuelning tadqiqotlari asosida termodinamika masalalaridan boshlangan boʻlsa-da, bugungi kunda uning tatbiqlarini kimyo, fizika, biologiya, iqtisodiyot, xizmat koʻrsatish nazariyasi, materialshunoslik kabi fan va texnikaning turli sohalarida uchratish mumkin.

Oxirgi yillarda dunyoda fanning amaliy tatbiqlarga ega yoʻnalishlaridan biri – statistik fizika va mexanika masalalarini oʻrganishning asosiy ob'ekti boʻlgan Gibbs oʻlchovlari nazariyasini rivojlantirish orqali xizmat koʻrsatish hamda axborot almashinuvi nazariyasi masalalariga optimal yechim topishga alohida e'tibor qaratildi. Bunda fizika va statistik mexanikaning amenabel boʻlmagan graflarda berilgan modellariga mos translyatsion-invariant, davriy, kuchsiz davriy Gibbs oʻlchovlarini tadqiq etish muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli Gibbs oʻlchovlari nazariyasining quyidagi yoʻnalishlarida maqsadli ilmiy tadqiqotlarni amalga oshirish muhim vazifalardan biri hisoblanadi: berilgan Hamiltonian uchun davriy Gibbs oʻlchovlarning toʻliq tavsifini aniqlash; bunday oʻlchovlarning chekka oʻlchov boʻlish masalasini tadqiq qilish; spin qiymatlari toʻplami sanoqli boʻlgan modellar uchun fazalar almashinuvi mavjudligini tekshirish. Yuqorida keltirilgan yoʻnalishlarda olib borilayotgan ilmiy izlanishlar dissertatsiya mavzusining dolzarbligini izohlaydi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega boʻlgan funksional analiz va haqiqiy oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasinining dolzarb yoʻnalishlariga e'tibor kuchaytirilmoqda. Shu oʻrinda oxirgi yillarda sanoqli graflarda aniqlangan, spin qiymatlari chekli yoki sanoqli boʻlgan klassik modellarga mos translyatsion-invariant, davriy va kuchsiz davriy Gibbs oʻlchovlarini qurish hamda funksional analizning amaliy muammolarni hal etish borasida salmoqli natijalarga erishilganini e'tirof etish joiz. "Funksional analiz, matematik fizika va oʻlchovlar nazariyasi" fanlarining ustivor yoʻnalishlari boʻyicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyat yoʻnalishlari etib belgilandi[1]. Ilmiy natijalarni fanning turdosh sohalarida qoʻllash, qaror ijrosini ta'minlash maqsadida amenabel boʻlmagan graflarda spin qiymatlari koʻpi bilan sanoqli boʻlgan va konfiguratsiyalariga qattiq cheklashlar qoʻyilgan modellarga mos Gibbs

[1] Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar mahkamasining 2017-yil 18-maydagi "Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqotlar muassasalari faoliyatini tashkil etish toʻgʻrisida"gi 292-sonli qarori.

o‘lchovlarini qurish va bunday o‘lchovlar to‘plamining strukturasini tahlil qilish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi va 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning Taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmonlari, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustivor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Doimiy harorat saqlanadigan va atrof-muhit bilan issiqlik muvozanatidagi sistemalar uchun muhim ahamiyatga ega bo‘lgan Gibbs taqsimoti tushunchasi amerikalik olim J.U. Gibbs tomonidan kiritilgan. Gibbs o‘lchovi fizik sistemaning ma’lum bir holatda bo‘lish ehtimolligini aniqlash hamda termodinamik kattaliklarni sistemaning mikroskopik xossalari bilan bog‘lash imkonini beradi. Limit Gibbs o‘lchovining umumiy ta’rifi N.N. Bogolyubov, B.I. Xatset, R.L. Dobrushin, O.E. Lanford va D. Ryuel ishlarida berilgan. R.L. Dobrushin tomonidan limit Gibbs o‘lchovining mavjudligi haqidagi teorema isbotlangan. Faza almashinuvining asosiy nazariyasi S.A. Pirogov, Ya.G. Sinay, R.A. Minlos, N. Datta, R. Fernandez, J. Fröhlich, A.C.D. Enter va M. Zahradnik ishlarida o‘z aksini topgan.

Qattiq disklar (HC) modeli d-o‘lchovli $\mathbb{Z}^d$ panjarada A.E. Mazel va Yu.M. Suhovlar tomonidan kiritilgan va rivojlantirilgan. Keli daraxtida qattiq jismni modellashtirish uchun Monte-Karlo algoritmidan foydalaniladi. Tasodifiy bog‘liqmas graflar to‘plamini va panjarada gaz molekulalarinining sistemasini o‘rganishda HC modellarining paydo bo‘lishini hamda ularning tatbiqlariga bag‘ishlangan tadqiqotlarni R. Bekster, G.R. Braytvel, P. Uinkler, D. Galvin, J. Kan, F. Kelly, G. Louz, P. Mitra, K. Ramanan, A. Sengupta, I. Ziedins ishlarida ko‘rish mumkin. HC modellari uchun Keli daraxtida translyatsion-invariant, davriy, kuchsiz davriy va boshqa Gibbs o‘lchovlarini qurish, shuningdek, bunday o‘lchovlar to‘plamining strukturasini tahlil qilish bo‘yicha G.R. Braytvel, A.E. Mazel, F. Spitser, F. Martinelli, P. Uinkler, D. Galvin, O. Häggström, J. Kan, F. Kelly, G. Louz, P. Mitra, K. Ramanan, A. Sengupta, I. Ziedins, Yu.M. Suhov, J.

Martin, D. Gandolfo, O‘.A. Roziqov, Sh.A. Shoyusupov, R.M. Xakimov, O.N. Hakimov va boshqalar ilmiy izlanishlar olib borishgan.

N.N. G‘anixo‘jaev, O‘.A. Roziqov, R.M. Raxmatullayev, F.H. Haydarov, R.M. Xakimov, C. Kuelske, F. Vagner, D. Grensing, J. Heide, F.Y. Wularning tadqiqotlari Potts modeli uchun limit Gibbs o‘lchovlariga bag‘ishlangan. Ferromagnit Potts modeli uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining to‘liq tavsifi va ularning chekka o‘lchov bo‘lish masalasi C. Kuelske, O‘.A. Roziqov va R.M. Xakimov ishlarida o‘rganilgan. Kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovi tushunchasi O‘.A. Roziqov va M.M. Raxmatullayev ishlarida kiritilgan. Keli daraxtida Izing, Potts va HC modellari uchun bunday o‘lchovlarning mavjudligi O‘.A. Roziqov, M.M. Raxmatullayev va R.M. Xakimovlar ishlarida isbotlangan. Yuqoridagi kabi ko‘plab ilmiy ishlar bajarilganiga qaramasdan, Keli daraxtida hozirgacha birorta ham model uchun limit Gibbs o‘lchovlarining to‘liq tavsifi olinmaganligini ta’kidlash joiz.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Namangan davlat universitetining ilmiy-tadqiqot ishlari rejasining “Fundamental tadqiqotlar” tarmog‘i doirasida bajarilgan.

Tadqiqot maqsadi Keli daraxtida spin qiymatlari to‘plami ko‘pi bilan sanoqli bo‘lgan Potts va HC modellari uchun limit Gibbs o‘lchovlarining mavjudligini isbotlash va bunday o‘lchovlar to‘plamining strukturasini tahlil qilishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

ikkinchi va uchinchi tartibli Keli daraxtida ikki holatli HC modeli uchun davriy Gibbs o‘lchovlarining to‘liq tavsifi va ularning chekka bo‘lishini aniqlash;

ikki holatli HC modeli uchun davri to‘rt bo‘lgan kuchsiz davriy (davriy bo‘lmagan) Gibbs o‘lchovlari mavjudligining yangi shartlarni topish;

spin qiymatlari to‘plami sanoqli bo‘lgan HC modeli uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari yagona bo‘lmaydigan shartlarni aniqlash;

uchinchi tartibli Keli daraxtida to‘rt holatli Potts modeli uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish oraliqlarini ko‘rsatish;

Tadqiqot ob’ekti: Keli daraxti, ikki holatli HC modeli, sanoqli holatli HC modeli, q holatli Potts modeli, translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovi, davriy o‘lchovlar, kuchsiz davriy o‘lchovlar va ehtimollik bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlari.

Tadqiqot predmeti. Gruppalar va graflar nazariyasi, Gibbs o‘lchovlari nazariyasi, algebra, nochiziqli dinamik sistemalar nazariyasi, matematik analiz, funksional analiz, Markov jarayonlari.

Tadqiqot usullari. Tadqiqot ishida matematik analiz, funksional analiz, kombinatorika, gruppalar nazariyasi, o‘lchovlar nazariyasi, chiziqli algebra va dinamik sistemalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ikki holatli HC modeli uchun normal bo‘luvchi indeksi to‘rt bo‘lgan holda kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovi yagona bo‘ladigan hamda mavjud va yagona bo‘lmaydigan yangi shartlar topildi;

spin qiymatlari to‘plami sanoqli bo‘lgan HC modeli uchun “Jezl” turidagi graf holida 2, 3, 4-tartibli Keli daraxtida translyatsion-invariant va 2, 3-tartibli Keli daraxtida davriy ehtimollik bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlarining aniq sonini ta’minlovchi shartlar topildi;

to‘rt holatli ferromagnit Potts modeli uchun uchinchi tartibli Keli daraxtida translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish va bo‘lmaslik shartlari topildi.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Olingan natijalar va dissertatsiyada qo‘llanilgan usullar oliy o‘quv yurtlarida magistratura talabalari va tayanch doktorantlar uchun o‘quv kurs sifatida o‘qitilishi mumkin. Shuningdek, HC modeli uchun faza almashishini ta’minlovchi parametrlarning aniq qiymatlaridan xizmat ko‘rsatish va axborot almashish nazariyasi masalalarini yechishda foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Funksional analiz, sonlar nazariyasi, diskret vaqtli dinamik sistemalar, Gibbs o‘lchovlar nazariyasi, nochiziqli operatorlar nazariyasi usullari va qo‘zg‘olmas nuqtalar haqidagi teoremalardan foydalanilgan. Olingan natijalar qat’iy matematik mulohazalarga asoslanib isbotlangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati HC va Potts modellariga mos translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflash borasidagi ilmiy natijalar statistik mexanika va fizikaning turli modellarining termodinamik xossalarini tadqiq qilishda qo‘llanilganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati spin qiymatlari to‘plami sanoqli bo‘lgan HC modeli uchun Gibbs o‘lchovlarini qurish, parametrning ma’lum shartlarida chekli holatli HC modeli uchun Gibbs o‘lchovining mavjudligini tekshirish imkonini bergani bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Amenabel bo‘lmagan graflarda qattiq diskli (HC) va Potts modellari uchun davriy Gibbs o‘lchovlari bo‘yicha olingan natijalar asosida:

HC modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjud va yagonaligini isbotlash usullaridan YOT-FTEX-2018-154-sonli “$\mathbb{Z}^d$ panjaralarida va G^k Keli daraxtlarida gamiltonianlar spektrlari va Gibbs o‘lchovlari” mavzusidagi fundamental loyihada statistik mexanikaning spin qiymatlari to‘plami kontinuum bo‘lgan ba’zi modellari uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarini tadqiq qilishda foydalanilgan (O‘zbekiston Milliy universitetining 2023-yil 27-apreldagi 04/11-2400-sonli ma’lumotnomasi). Ushbu ilmiy natijaning qo‘llanilishi spin qiymatlari to‘plami kontinuum bo‘lgan ba’zi modellari uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflash imkonini bergan.

Qattiq diskli model uchun kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining yagonaligini isbotlash usullaridan YoFA-Ftex-2018-78 “Amenabel bo‘lmagan graflarda dinamik va termodinamik sistemalar” nomli fundamental loyihada Potts modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarini tadqiq qilishda foydalanilgan (Matematika Institutining 2023-yil 28-apreldagi 02/167-sonli ma’lumotnomasi). Ushbu ilmiy natijaning qo‘llanilishi Potts modeli uchun parametrlarning ma’lum shartlarida kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjud bo‘lmasligini isbotlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 15 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 5 ta xalqaro va 10 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya tadqiqoti mavzusi bo‘yicha jami 23 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 8 ta, jumladan 3 tasi xorijiy va 5 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, to‘qqizta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 111 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustivor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning “**Chekli holatli HC modellari uchun Gibbs o‘lchovlari**” deb nomlanuvchi birinchi bobida Keli daraxtida ikki holatli HC modeli o‘rganilgan. Qaralayotgan model uchun zarur ta’riflar hamda ma’lum natijalar keltirilgan. Gibbs o‘lchovi hamda Gibbs o‘lchovlari nazariyasiga oid boshqa tushunchalar berilgan. Ikkinchi va uchinchi tartibli Keli daraxtida ikki-davriy Gibbs o‘lchovlarining to‘liq tavsifi berilgan va ularning chekka bo‘lish oraliqlari aniqlangan. Bundan tashqari, HC modeli uchun normal bo‘luvchi indeksi to‘rt bo‘lgan holda kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining yagona bo‘lish va yagona bo‘lmaslik shartlari topilgan.

1-ta’rif. $G=(V,L)$ cheksiz va bog‘lamli graf bo‘lsin. Agar G graf uchun

$$\inf_{A\subset V,|A|<\infty}\frac{|\partial A|}{|A|}=0$$

tenglik bajarilsa, u holda G amenabel graf, aks holda amenabel bo‘lmagan graf deyiladi. Bu yerda $|\partial A|-$ A to‘plamning chegarasidagi uchlari soni, $|A|-$ esa A to‘plamning ichidagi uchlari soni.

d o‘lchamli $\mathbb{Z}^d$ panjara, uchburchakli, oltiburchakli panjaralar amenabel graf bo‘ladi, Keli va Bruhat-Tits daraxtlari, giperbolik graflar, Schreier grafi amenabel bo‘lmagan grafga misol bo‘ladi.

1-eslatma. Keli daraxtidan boshqa amenabel bo‘lmagan graflarda Gibbs o‘lchovlari kam o‘rganilgan. Masalan, bunday graflar uchun gruppaviy tasvir mavjud bo‘lmagani sababli davriy Gibbs o‘lchovlari aniqlanmagan. Biz davriy Gibbs o‘lchovlarini gruppaviy tasvir mavjud bo‘lgan Keli daraxtida o‘rganamiz.

$\tau^k = (V, L)$ ni qaraylik, bu yerda V daraxtning uchlari to‘plami, L uning qirralari to‘plami. Agar $x, y \in V$ uchlar uchun ularni tutashtiruvchi $l \in L$ qirra mavjud bo‘lsa, u holda x va y uchlar eng yaqin qo‘shnilar deyiladi va $l = \langle x, y\rangle$ kabi belgilanadi. Keli daraxtida $x, y \in V$ uchlar orasidagi $d(x, y)$ masofa ushbu

$$d(x,y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V, \quad \langle x_0, x_1\rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}$$

formula orqali aniqlanadi.

Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$W_n = \left\{x \in V \mid d(x, x^0) = n\right\}, \quad V_n = \bigcup_{j=0}^{n} W_j, \quad L_n = \left\{l = \langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\right\}.$$

$x \in W_n$ uchun $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$ to‘plam x uchning to‘g‘ri avlodlari to‘plami deyiladi.

$G_k -$barpo etuvchilari mos ravishda $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ bo‘lgan $k+1$ ta ikkinchi tartibli siklik gruppalarning ozod ko‘paytmasi bo‘lsin.

Quyidagi tasdiq N.N. G‘anihodjayevning ishlaridan ma’lum.

1-tasdiq. k-tartibli Keli daraxtining V uchlar to‘plami bilan G_k gruppa o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud.

$A \subseteq V$ to‘plamda aniqlangan $x \in A \to \sigma_A(x) \in \Phi = \{0, 1, ..., q\}$ funksiya konfiguratsiya deyiladi. A to‘plamda aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to‘plami $\Omega_A = \Phi^A$ kabi belgilanadi. Xususan, $\Omega = \Omega_V$ va $\sigma = \sigma_V$.

$\sigma \in \Omega$ konfiguratsiyaning energiyasi ushbu

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{A \subset V: \\ diam(A) \le r}} I(\sigma_A), \tag{1}$$

gamiltonian orqali beriladi, bu yerda $r \in N$, $diam(A) = \max_{x, y \in A} d(x, y)$ va $I(\sigma_A) : \Omega_A \to R-$ berilgan potensial.

$D^c = V \setminus D$ da φ_{D^c} chegaraviy shart berilgan chekli $D \subset V$ soha uchun shartli gamiltonian quyidagi

$$H(\sigma_D \mid \varphi_{D^c}) = \sum_{A \Subset V : A \cap D \neq \varnothing} I(\sigma_A)$$

ko‘rinishga ega, bu yerda

$$\sigma_A(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ agar } x \in A \bigcap D \\ \varphi(x), \text{ agar } x \in A \bigcap D^c. \end{cases}$$

$\mathbf{B}-$ Ω to‘plamning chekli asosli silindrik qism to‘plamlaridan tashkil topgan σ-algebra bo‘lsin. Ushbu

$$\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V\setminus A}(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ agar } x \in A, \\ \tilde{\sigma}(x), \text{ agar } x \in V \setminus A. \end{cases}$$

konfiguratsiyani qaraylik.

2-ta’rif. Agar ixtiyoriy chekli $A \subset V$ uchun ushbu

$$\mu(\sigma_A \mid \tilde{\sigma}_{V\setminus A}) = \frac{e^{-\beta H(\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V\setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda μ ehtimollik o‘lchovi $\mathbf{B}$ $\sigma-$algebrada limit Gibbs o‘lchovi deyiladi, bu yerda $H(\sigma)$ (1) formula orqali aniqlangan, $\beta = 1/T$, $T > 0-$ harorat va $Z_{A,\tilde{\sigma}} = \sum_{\varphi \in \Omega_A} e^{-\beta H(\varphi_A \vee \tilde{\sigma}_{V|A})}$.

$\mathcal{G}(H)-$barcha limit Gibbs o‘lchovlari to‘plami bo‘lsin. Ma’lumki, agar $H-$ uzluksiz gamiltonian bo‘lsa, $\mathcal{G}(H)$ to‘plam har bir $\beta > 0$ uchun $(\Omega, \mathbf{B})$ da aniqlangan barcha ehtimolliklar to‘plamining bo‘sh bo‘lmagan qavariq kompakt qism to‘plami bo‘ladi.

Asosiy masalalar. Tadqiqot ishida quyidagi ikkita masala muhim hisoblanadi:

1) Berilgan gamiltonian uchun hech bo‘lmaganda bitta Gibbs o‘lchovining mavjudligini aniqlash.

2) Berilgan gamiltonianga mos barcha Gibbs o‘lchovlari to‘plamining strukturasini tahlil qilish.

$\Phi = \{0,1\}$ va $\sigma \in \Phi^V -$konfiguratsiya bo‘lsin, bunda $\sigma(x) = 1$ ekanligi Keli daraxtida x uchning “band” ligini, $\sigma(x) = 0$ esa uning “vakant” ligini bildiradi.

3-ta’rif. Agar V (V_n) dagi ixtiyoriy $\langle x, y \rangle$ uchun $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ bajarilsa, u holda σ konfiguratsiya joiz konfiguratsiya deyiladi.

Joiz konfiguratsiyalar to‘plamini Ω^a $(\Omega^a_{V_n})$ kabi belgilaymiz. U holda $\Omega^a \subset \Phi^V$.

HC-modelning gamiltoniani ushbu

$$H(\sigma) = \begin{cases} J\sum_{x \in V} \sigma(x), \text{ agar } \sigma \in \Omega^a, \\ +\infty, \quad \text{ agar } \sigma \notin \Omega^a, \end{cases}$$

formula orqali aniqlanadi, bu yerda $J \in R$.

Har qanday joiz $\sigma_n \in \Omega^a_{V_n}$ konfiguratsiya uchun $\#\sigma_n$ orqali V_n dagi birlar (band uchlar) sonini belgilaymiz:

$$\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \sigma_n(x).$$

$z: x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}) \in R_+^2$ funksiya V da berilgan vektor-funksiya bo‘lsin. $\Omega_{V_n}^a$ da $n = 1, 2, \ldots$ uchun quyidagicha

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma_n(x), x} \tag{2}$$

aniqlangan $\mu^{(n)}$ ehtimollik taqsimotini qaraylik, bu yerda $\lambda = e^{J\beta} > 0 -$parametr, $Z_n -$normallovchi bo‘luvchi:

$$Z_n = \sum_{\varphi_n \in \Omega_{V_n}^a} \lambda^{\#\varphi_n} \prod_{x \in W_n} z_{\varphi_n(x), x}.$$

Agar ixtiyoriy $n \geq 1$ va $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^a$ uchun quyidagi

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^a) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}),$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $\mu^{(n)}$ ehtimolliklar ketma-ketligi muvofiqlashgan deyiladi, bu yerda

$$\mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^a) = \begin{cases} 1, \text{ agar } & \sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^a \\ 0, \text{ agar } & \sigma_{n-1} \vee \omega_n \notin \Omega_{V_n}^a. \end{cases}$$

Agar $\mu^{(n)}$ uchun muvofiqlik sharti bajarilsa, u holda Kolmogorov teoremasiga ko‘ra $(\Omega^a, \mathbf{B})$ da ixtiyoriy n va $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^a$ uchun ushbu

$$\mu(\{\sigma : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi yagona μ o‘lchov mavjud.

G_k^* gruppa G_k gruppaning qism gruppasi bo‘lsin.

4-ta’rif. Agar $\forall x \in G_k,\ y \in G_k^*$ uchun $z_{yx} = z_x$ bo‘lsa, u holda $z = \{z_x, x \in G_k\}$ miqdorlar to`plami G_k^*-davriy deyiladi.

G_k-davriy miqdorlar to`plami translyatsion-invariant deyiladi.

Ixtiyoriy $x \in G_k$ uchun $\{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ to‘plam yagona elementga ega, bu elementni $x_\downarrow$ orqali belgilaymiz.

$G_k / G_k^* = \{H_1, \ldots, H_r\} -$faktor gruppa bo‘lsin, bu yerda $G_k^* -$bu $r \geq 1$ indeksli normal bo‘luvchi.

5-ta’rif. Agar $x \in H_i,\ x_\downarrow \in H_j$ da $z_x = z_{ij}$ bo‘lsa, u holda $z = \{z_x, x \in G_k\}$ miqdorlar to`plami G_k^*-kuchsiz davriy deyiladi.

2-eslatma. Agar z_x miqdorning qiymati $x_\downarrow$ ga bog‘liq bo‘lmasa, u holda $x_\downarrow$ kuchsiz davriy miqdorlar oddiy davriy bilan ustma-ust tushadi.

6-ta’rif. G_k^*-(kuchsiz) davriy z miqdorlar to`plamiga mos μ o‘lchovni G_k^*-(kuchsiz) davriy o‘lchov deyiladi.

Ma’lumki, Keli daraxtida HC modeli uchun (2) ko‘rinishda aniqlangan $\mu^{(n)}(\sigma_n)$ $(n=1,2,\dots)$ ehtimollik taqsimotlari ketma-ketligi muvofiqlashgan bo‘lishi uchun ixtiyoriy $x\in V$ da $z=\{z_x, x\in G_k\}$ miqdorlar to‘plami ushbu

$$z_x^{'} = \prod_{y\in S(x)} \frac{1}{1+\lambda z_y^{'}},$$

tenglikni qanoatlantirishi zarur va yetarli, bu yerda $\lambda = e^{J\beta} > 0 -$ parametr.

$G_k^{(2)}$ gruppa G_k gruppaning uzunligi juft bo‘lgan so‘zlardan iborat qism gruppasi bo‘lsin, ya’ni

$$G_k^{(2)} = \{x\in G_k : |x| - \text{juft}\}.$$

Yu.M. Suhov va U.A. Rozikov ishlarida $k\geq 2$ va $\lambda > k^k\cdot(k-1)^{-k-1}$ bo‘lganda HC modeli uchun translyatsion-invariant bo‘lmagan ikkita μ_1 va μ_2 $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovlari mavjud ekanligi isbotlangan.

Quyidagi teorema o‘rinli.

1-teorema. $k=2\,(k=3)$ bo‘lsin. U holda $\lambda>4$ $(\lambda>27/16)$ bo‘lganda HC modeli uchun μ_1 va μ_2 $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovlari chekka o‘lchov bo‘ladi.

Birinchi bobning uchinchi paragrafi HC modeli uchun davri to‘rtga teng kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarini (KDGO‘) o‘rganishga bag‘ishlangan. $\varnothing\neq A\subset N_k=\{1,2,...,k+1\}$ va $H_A=\{x\in G_k : \sum_{i\in A} w_x(a_i) -$ juft$\}$ bo‘lsin, bu yerda $w_x(a_i) -$son $x\in G_k$ so‘zdagi a_i harflar soni. $G_k^{(4)} = H_A \bigcap G_k^{(2)} -$to‘rt indeksli bo‘lgan normal bo‘luvchi bo‘lsin. Quyidagi to‘plamlarni qaraylik:

$I_1=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4 : z_1=z_2=z_7=z_8\},\ I_2=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4 : z_1=z_7,\ z_2=z_8\},$

$I_3=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4 : z_1=z_2,\ z_7=z_8\},\quad I_4=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4 : z_1=z_8,\ z_2=z_7\}.$

R.M. Xakimov va G‘.T. Madg‘oziyev ishlaridan quyidagilar ma’lum:

1. I_1 invariant to‘plamda $k\geq 1, i\leq k$; I_3 invariant to‘plamda $k=2, i=2$ va $k\geq 1, i=1$; I_4 invariant to‘plamda $k=2, i=1$, $k=3, i=1$ va $k=i$ bo‘lgan hollarda KDGO‘ yagona va u yagona translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari (TIGO‘) bilan ustma-ust tushadi.

2. I_2 invariant to‘plamda $k=2, i=1$ va $k=2, i=2$ bo‘lgan hollarda parametrning KDGO‘ yagona bo‘lmaydigan aniq qiymati mavjud;

3. I_2 invariant to‘plamda $k=3, i=1$ bo‘lgan holda parametrning KDGO‘ yagona bo‘lmaydigan qiymati mavjudligi ko‘rsatilgan.

Uchinchi paragrafning asosiy natijalari quyidagilar.

2-teorema. HC modeli uchun normal bo‘luvchining indeksi to‘rt bo‘lganda quyidagilar o‘rinli:

1. $k=i$ bo‘lganda I_3 invariant to‘plamda KDGO‘ yagona va u yagona TIGO‘ bilan ustma-ust tushadi.

2. I_3 invariant to‘plamda 1) $k=3, i=2$, 2) $k=4, i=1$, 3) $k=4, i=2$, 4) $k=4, i=3$ и 5) $k=5, i=1$ bo‘lgan hollarda I_4 invariant to‘plamda KDGO‘ yagona va u yagona TIGO‘ bilan ustma-ust tushadi.

3-teorema. $k=3$, $i=1$ va $\lambda_{cr}=27/16$ bo‘lsin. U holda I_2 to‘plamda $\lambda \le \lambda_{cr}$ bo‘lganda translyatsion-invariant bo‘lgan yagona KDGO‘ mavjud, $\lambda > \lambda_{cr}$ da biri TIGO‘, qolgan ikkitasi davriy bo‘lmagan uchta KDGO‘ mavjud.

Quyidagicha belgilashlar kiritaylik:

$$s^{\pm} := s^{\pm}(k) = \frac{k-3 \pm \sqrt{k^2-6k+1}}{4}, \quad \lambda^{\pm} := \lambda^{\pm}(k) = \left(s^{\pm}+1\right)^k s^{\pm}.$$

4-teorema. $k \ge 6$, $i=1$ va $\lambda \in \left(\lambda^-(k), \lambda^+(k)\right)$ bo‘lsin. U holda HC modeli uchun normal bo‘luvchi indeksi to‘rt bo‘lganda I_4 to‘plamda kamida uchta KDGO‘ mavjud va ulardan biri TIGO‘, ikkitasi davriy bo‘lmagan KDGO‘.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi **“Spin qiymatlari to‘plami sanoqlita bo‘lgan HC modeli uchun Gibbs o‘lchovlari”** deb nomlanib, Keli daraxtida spin qiymatlari to‘plami $\mathbb{Z}$ bo‘lgan HC modellariga bag‘ishlanadi.

$\Phi = \mathbb{Z}$ bo‘lsin, bu yerda $\mathbb{Z}$ butun sonlar to‘plami. $\mathbb{Z}$ to‘plamni biror cheksiz G grafning uchlari to‘plami deb qaraylik. Agar V (V_n) dagi ixtiyoriy x, y yaqin qo‘shnilar uchun $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ juftlik G grafning qirrasi bo‘lsa, u holda σ konfiguratsiya Keli daraxti (V_n) da G-joiz konfiguratsiya deyiladi. G-joiz konfiguratsiyalar to‘plamini Ω^G $\left(\Omega^G_{V_n}\right)$ orqali belgilaymiz.

G graf uchun aktivlik to‘plami $\lambda : G \to R_+$ chegaralangan funksiyadir. λ funksiyaning $i \in \mathbb{Z}$ uchlardagi λ_i qiymatlari uchning “aktivligi” deyiladi.

Berilgan G va λ lar uchun $G-$HC modelning gamiltoniani

$$H_G^{\lambda}(\sigma) = J \sum_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, \quad \text{agar } \sigma \in \Omega^G,$$

kabi aniqlanadi, bu yerda $J \in \mathbb{Z}$.

$z : x \to z_x = \left(\ldots, z_{-1,x}, z_{0,x}, z_{1,x}, \ldots\right) \in \mathbb{R}_+^{\infty}$ V dagi vektor-funksiya bo‘lsin. $z_{i,x}$ ni $i \in \mathbb{Z}$ va $x \in V$ argumentlari bo‘yicha chegaralangan deb olaylik.

Har bir $n = 1, 2, \ldots$ va $\lambda > 0$ uchun $\Omega^G_{V_n}$ to‘plamda

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \prod_{x \in V_n} \lambda_{\sigma_n(x)} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma_n(x), x}. \tag{3}$$

ko‘rinishda aniqlangan $\mu^{(n)}$ ehtimollik bo‘lmagan taqsimotni qaraylik.

$L(G)$ orqali G grafning qirralar to‘plamini belgilaylik, $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ orqali esa G ning qo‘shnilik matritsasini belgilaylik, ya’ni

$$a_{ij} = a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{agar } \{i,j\} \in L(G) \\ 0, & \text{agar } \{i,j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Quyidagi teorema o‘rinli.

5-teorema. (3) formula bilan aniqlangan $\mu_n(\sigma_n),\ n=1,2,\dots$ o‘lchovlar ketma-ketligi muvofiqlik shartini qanoatlantirishi uchun ixtiyoriy $x\in V$ da $z=\{z_x, x\in G_k\}$ miqdorlar to‘plami ushbu

$$z'_{i,x}=\lambda'_i\prod_{y\in S(x)}\frac{a_{i0}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{im}z'_{m,y}}{a_{00}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{0m}z'_{m,y}},\ i,m\in\mathbb{Z}_0,$$

tenglikni qanoatlantirishi zarur va yetarli, bu yerda $z'_{i,x}=\lambda'_i z_{i,x}/z_{0,x}$, $\lambda'_i=\lambda_i/\lambda_0$, $\mathbb{Z}_0=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida spin qiymatlari to‘plami sanoqli bo‘lgan HC modeli uchun “Jezl” turidagi G graf holida ehtimollik bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlari qaralgan. Quyidagi ko‘rinishda aniqlangan grafni qaraylik:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{agar } i=j \text{ va } i,j-\text{toq},\\ 1, & \text{agar } |i-j|=1,\\ 0, & \text{boshqa hollarda,}\end{cases}$$

bu yerda $i,j\in\mathbb{Z}$.

$G = jezl$ turidagi graf uchun quyidagi teorema o‘rinli.

6-teorema. $k=2$ $(k=3,\ k=4)$ va $\lambda_{cr}=2$ $(\lambda_{cr}=8/27,\ \lambda_{cr}=1/24)$ bo‘lsin. U holda spin qiymatlari to‘plami sanoqli bo‘lgan HC modeli ($G = jezl$ grafga mos keluvchi) uchun $0<\lambda\le\lambda_{cr}$ bo‘lganda aniq bitta μ_0 ehtimollik bo‘lmagan σ-chekli TIGO‘ mavjud, $\lambda>\lambda_{cr}$ da esa aniq uchta $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2$ ehtimollik bo‘lmagan σ-chekli TIGO‘ mavjud.

$G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovlari uchun quyidagi invariant to‘plamlarni qaraylik:

$$I_1=\left\{(z_1,z_2,\hat z_1,\hat z_2)\in R^4: z_1=z_2=\hat z_1=\hat z_2\right\},\ I_2=\left\{(z_1,z_2,\hat z_1,\hat z_2)\in R^4: z_1=\hat z_1,\ z_2=\hat z_2\right\},$$

$$I_3=\left\{(z_1,z_2,\hat z_1,\hat z_2)\in R^4: z_1=\hat z_2,\ z_2=\hat z_1\right\},\ I_4=\left\{(z_1,z_2,\hat z_1,\hat z_2)\in R^4: z_1=z_2,\ \hat z_1=\hat z_2\right\}.$$

Quyidagi teorema o‘rinli.

7-teorema. Spin qiymatlari to‘plami sanoqli bo‘lgan HC modeli uchun ($G = jezl$ grafga mos keluvchi) quyidagilar o‘rinli:

1. $k\ge 2$ bo‘lsin. U holda $\lambda>0$ bo‘lganda I_3 invariant to‘plamda aniq bitta ehtimollik bo‘lmagan σ-chekli yagona $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovi mavjud. Bu o‘lchov yagona μ_0 ehtimollik bo‘lmagan TIGO‘ bilan ustma-ust tushadi.

2. $k=2$ $(k=3)$ va $\lambda_{cr}=2$ $(\lambda_{cr}=256/27)$ bo‘lsin. U holda I_4 invariantda $\lambda\ge\lambda_{cr}$ bo‘lganda translyatsion-invariant bo‘lgan aniq bitta μ_0 ehtimollik bo‘lmagan σ-chekli $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovi mavjud, $0<\lambda<\lambda_{cr}$ da aniq uchta $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2$ ehtimollik bo‘lmagan σ-chekli $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovlari mavjud.

Ikkinchi bobning uchunchi paragrafida spin qiymatlari to‘plami sanoqli bo‘lgan HC modeli uchun “Faqat nolda sirtmoq” turidagi graf holida ehtimollik Gibbs o‘lchovlari qaralgan. Quyidagi ko‘rinishda aniqlangan grafni qaraylik:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i \cdot j = 0, \\ 0, & \text{boshqa hollarda,} \end{cases}$$

bu yerda $i, j \in \mathbb{Z}$.

$G =$ *faqat nolda sirtmoq* turidagi graf uchun quyidagi teoremalar o‘rinli.

8-teorema. $k = 2$ bo‘lsin. U holda spin qiymatlari to‘plami sanoqli bo‘lgan HC modeli uchun (“Faqat nolda sirtmoq” grafga mos keluvchi) quyidagilar o‘rinli:

1. Agar $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$ parametrlar ketma-ketligidan tuzilgan $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$ qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda yagona TIGO‘ mavjud.

2. Agar $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$ parametrlar ketma-ketligidan tuzilgan $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$ qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda TIGO‘ mavjud emas

9-teorema. $k = 2$ va $\Lambda_{cr} = 4$ bo‘lsin. U holda sanoqli holatli HC modeli uchun ((“Faqat nolda sirtmoq” grafga mos keluvchi) quyidagilar o‘rinli:

1. Agar $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$ parametrlar ketma-ketligidan tuzilgan $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$ qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j = \Lambda$ bo‘lsin. Agar $0 < \Lambda \le \Lambda_{cr}$ bo‘lsa yagona $G_k^{(2)}$ –davriy Gibbs o‘lchovi mavjud va u yagona TIGO‘ bilan ustma-ust tushadi. Agar $\Lambda > \Lambda_{cr}$ bo‘lsa, uchta $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovi mavjud va ulardan biri yagona TIGO‘ bilan ustma-ust tushadi, qolgan ikkitasi translyatsion-invariant bo‘lmagan $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovilaridir.

2. Agar $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$ parametrlar ketma-ketligidan tuzilgan $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$ qator uzoqlashuvchi bo’lsa, u holda $G_k^{(2)}$- davriy Gibbs o‘lchovi mavjud emas.

Dissertatsiyaning uchinchi bobi **“Potts modeli uchun Gibbs o‘lchovlari”** deb nomlanib, Keli daraxtida Potts modeli uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlarini o‘rganishga bag‘ishlangan.

$\Phi = \{1, 2, \ldots, q\}$, $(q \ge 2)$ bo‘lsin. Barcha konfiguratsiyalar to‘plami $\Omega = \Phi^V$.

Potts modelining gamiltoniani ushbu

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle\in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x\in V} \delta_{1\sigma(x)},$$

formula yordamida aniqlanadi, bu yerda $J \in R$, $\alpha \in R-$tashqi magnit maydon, $\langle x, y\rangle -$ yaqin qo‘shnilar va δ_{ij} –Kroneker simvoli.

Ma’lumki, Keli daraxtida Potts modeli uchun $\mu^{(n)}(\sigma_n)$ o‘lchovlar ketma-ketligi muvofiqlashgan bo‘lishi uchun uchun ixtiyoriy $x \in V$ da $h = \{h_x, x \in G_k\}$ miqdorlar to‘plami ushbu

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} F(h_y, \theta, \alpha), \tag{4}$$

tenglikni qanoatlantirishi zarur va yetarli, bu yerda

$F : h = (h_1, \ldots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \to F(h, \theta, \alpha) = (F_1, \ldots, F_{q-1}) \in R^{q-1}$ funksiya ushbu

$$F_i = \alpha\beta\delta_{1i} + \ln \frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}$$

ko‘rinishda aniqlanadi va $\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)$ to‘plam x ning to‘g‘ri avlodlari va

$$h_{i,x} = \tilde{h}_{i,x} - \tilde{h}_{q,x}, \ i = 1, \dots, q-1.$$

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida uchinchi tartibli Keli daraxtida to‘rt holatli ferromagnit Potts modeli uchun TIGO‘ larining to‘liq tavsifi berilgan.

$\alpha = 0$ bo‘lsin. Translyatsion-invariant yechimlarni qaraylik, ya’ni ixtiyoriy $x \in V$ uchun $h_x = h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1}$ bo‘lsin. (4) tenglamadan $h = kF(h,\theta)$ ga egamiz, ya’ni

$$h_i = k \ln \left(\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right), \ i = 1, \dots, q-1. \quad (5)$$

$z_i = \exp(h_i)$, $i = 1, \dots, q-1$, belgilash kiritib, (5) dan ushbu

$$z_i = \left(\frac{(\theta-1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j} \right)^k, \ i = 1, \dots, q-1.$$

tenglamani olamiz.

Quyidagilar ma’lum:

$J < 0$ $(\theta < 1)$, $k \geq 1$ va $q \geq 2$ da Potts modeli uchun yagona TIGO‘ mavjud;

$J > 0$ $(\theta > 1)$ bo‘lganda, ixtiyoriy TIGO‘ ushbu

$$z = f_m(z) \equiv \left(\frac{(\theta + m - 1)z + q - m}{mz + q - m - 1 + \theta} \right)^k \quad (6)$$

tenglamaning biror $m = 1, \dots, q-1$ dagi yechimlariga mos keladi.

Ma’lumki, o‘lchovlarning chekkaligini o‘rganish uchun z vektorning aniq ko‘rinishi kerak. (6) tenglamaning $k = 3$, $q = 4$ va $m = 1$ bo‘lganda z_1 va z_2, mos ravishda $m = 2$ bo‘lganda esa z_3 va z_4 yechimlarning aniq ko‘rinishi topildi.

K. Kuelske, U.A. Rozikov va R.M. Xakimov ishlaridan Potts modeli uchun $\theta > \theta_{cr}$ bo‘lganda 15 ta TIGO‘ larining mavjudligi ma’lum. (6) tenglamalar sistemasidagi simmetriyaga ko‘ra $(z_1,1,1)$, $(1,z_1,1)$ va $(1,1,z_1)$ (mos ravishda $(z_2,1,1)$, $(1,z_2,1)$ va $(1,1,z_2)$; $(1,z_3,z_3)$, $(z_3,1,z_3)$ va $(z_3,z_3,1)$; $(1,z_4,z_4)$, $(z_4,1,z_4)$ va $(z_4,z_4,1)$) yechimlarga mos o‘lchovlarning chekka bo‘lish va chekka bo‘lmaslik oraliqlari bir xil bo‘ladi. Shuning uchun mos ravishda $(1,1,1)$, $(z_1,1,1)$,

$(z_2,1,1)$, $(1,z_3,z_3)$, $(1,z_4,z_4)$, (z_1,z_1,z_1) va (z_2,z_2,z_2) yechimlarga mos μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 va μ_6 o‘lchovlarning chekka bo‘lish va chekka bo‘lmaslik oraliqlarini o‘rganish yetarli.

Quyidagi teorema o‘rinli.

10-teorema. $q=4,\ k=3,\ \theta_1 \approx 2.69994,\ \theta_{cr}=\theta_2=3$ va $J>0$ bo‘lsin. U holda Potts modeli uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

1. μ_0 o‘lchov $0<\theta<5$ da chekka o‘lchov bo‘ladi va $\theta>3+2\sqrt{3}$ da chekka o‘lchov bo‘lmaydi.
2. μ_1 o‘lchov $\theta>\theta_1$ da chekka o‘lchov bo‘ladi .
3. μ_2 o‘lchov $\theta_1<\theta<\theta^{(4)}$ da chekka o‘lchov bo‘ladi va $\theta>\theta^{(1)}$ da chekka o‘lchov bo‘lmaydi, bunda $\theta^{(4)}\approx 4.506544$ va $\theta^{(1)}\approx 5.259758642$.
4. μ_3 va μ_4 o‘lchovlar mos ravishda $\theta_{cr}<\theta<\theta^{(7)}$ da chekka o‘lchov bo‘ladi va $\theta>\theta^{(3)}$ da chekka o‘lchov bo‘lmaydi, bunda $\theta^{(7)}\approx 3.915695379$ va $\theta^{(3)}\approx 4.055415669$.
5. μ_5 o‘lchov $\theta_1<\theta<\theta^{(5)}$ da chekka o‘lchov bo‘ladi va $\theta>\theta^{(2)}$ da chekka o‘lchov bo‘lmaydi, bunda $\theta^{(5)}\approx 4.395479909$ va $\theta^{(2)}\approx 5.110182292$.
6. μ_6 o‘lchov $\theta_1<\theta<\theta^{(6)}$ da chekka o‘lchov bo‘ladi va $\theta>\theta^{(6)}$ da chekka o‘lchov bo‘lmaydi, bunda $\theta^{(6)}\approx 4.254583559$.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafi q holatli antiferromagnit Potts modeli uchun davriy Gibbs o‘lchovlariga bag‘ishlangan, ya’ni ba’zi shartlar ostida translayatsion-invariant bo‘lmagan $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovlarining aniq soni ko‘rsatilgan.

Quyidagi invariant to‘plamlarni qaraylik:

$$I_m=\left\{z=(u,v)\in R^{q-1}\times R^{q-1}: x_i=x,\ y_i=y, i=\overline{1,m},\ x_i=y_i=1, i=\overline{m+1,q-1}\right\},$$

$$I_m'=\Big\{z=(u,v)\in R^{q-1}\times R^{q-1}: x_i=x,\ i=\overline{1,m},\ \ x_i=1,\ \ i=\overline{m+1,q-1-m},$$

$$x_i=y,\ \ i=\overline{q-m,q-1},\ \ y_i=y,\ \ i=\overline{1,m},\ \ y_i=1,\ \ i=\overline{m+1,q-1-m},$$

$$y_i=x,\ \ i=\overline{q-m,q-1}\Big\},$$

Quyidagi teorema o‘rinli.

11-teorema. $\theta_{cr}=\dfrac{k-q+1}{k+1}$ bo‘lsin. U holda Potts modeli uchun $k\geq 3$, $3\leq q<k+1$ va $0<\theta<\theta_{cr}$ bo‘lganda $\bigcup_{m=1}^{q} I_m$ va $\bigcup_{m=1}^{q} I_m'$ to‘plamlarda aniq $2\cdot\left(2^q-1+\sum_{m=1}^{[q/2]}C_q^m\cdot C_{q-m}^m\right)$ ta translayatsion-invariant bo‘lmagan $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovlari mavjud.

3-eslatma. U.A. Rozikov, R.M. Xakimov va F.H. Xaydarov ishlarida Potts modeli uchun $k\geq 3$, $3\leq q<k+1$ va $0<\theta<\theta_{cr}$ bo‘lganda $\bigcup_{m=1}^{q} I_m$ va $\bigcup_{m=1}^{q} I_m'$

to‘plamlarda kamida $2\cdot\left(2^q-1+\sum_{m=1}^{[q/2]}C_q^m\cdot C_{q-m}^m\right)$ ta translayatsion-invariant bo‘lmagan $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjud ekanligi isbotlangan.

XULOSA

Dissertatsiya chekli holatli HC va Potts modellari uchun translayatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlariga, shuningdek, ularning chekkalik muammolari hamda spin qiymatlari to‘plami sanoqli bo‘lgan HC modeli uchun ehtimollik va ehtimollik bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlariga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Ikkinchi va uchinchi tartibli Keli daraxtida ikki holatli HC modeli uchun ikki davriy Gibbs o‘lchovlarini to‘liq tavsifi berilgan va ularning o‘zining aniqlanish sohasida chekka bo‘lishligi ko‘rsatilgan.
2. Keli daraxtida ikki holatli HC modeli uchun normal bo‘luvchi indeksi to‘rt bo‘lgan holda kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarini yagona bo‘lishining yangi shartlari topilgan.
3. Keli daraxtida ikki holatli HC modeli uchun normal bo‘luvchi indeksi to‘rt bo‘lgan holda kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarini yagona bo‘lmaslik va mavjud bo‘lishining yangi shartlari topilgan.
4. 2, 3 va 4- tartibli Keli daraxtida spin qiymatlari to‘plami sanoqlita bo‘lgan HC modeli uchun joizlik grafi “Jezl” bo‘lgan holda ehtimollik bo‘lmagan σ-chekli translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining aniq soni topilgan.
5. 2 va 3- tartibli Keli daraxtida spin qiymatlari to‘plami sanoqlita bo‘lgan HC modeli uchun joizlik grafi “Jezl” bo‘lgan holda ehtimollik bo‘lmagan σ-chekli ikki davriy Gibbs o‘lchovlarining aniq soni topilgan.
6. 2- tartibli Keli daraxtida spin qiymatlari to‘plami sanoqlita bo‘lgan HC modeli uchun joizlik grafi “Faqat nolda sirtmoq” bo‘lgan holda parametrlar to‘plamining ehtimollik bo‘lgan ikki davriy Gibbs o‘lchovlarining soni 3 ta bo‘ladigan aniq qiymati topilgan.
7. Uchinchi tartibli Keli daraxtida to‘rt holatli ferromagnit Potts modeli uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka bo‘lish va bo‘lmaslik oraliqlari topilgan.
8. $k \geq 3$ tartibli Keli daraxtida antiferromagnit Potts modeli uchun ba’zi shartlar ostida translyatsion-invariant bo‘lmagan davriy Gibbs o‘lchovlarining aniq soni topilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

НАМАНГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАХАММАДАЛИЕВ МУХТОРЖОН ТУРСУНМУХАММАД УГЛИ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ЖЕСТКОЙ СЕРДЦЕВИНЫ (HC) И ПОТТСА НА НЕАМЕНАБЕЛЬНЫХ ГРАФАХ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Наманган – 2023 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за № B2019.4.PhD/FM426.

Диссертация выполнена в Наманганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (https://kengash.mathinst.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Хакимов Рустамжон Махмудович** доктор физико-математических наук (DSc)
Официальные оппоненты:	**Жамилов Уйгун Умурович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
	Ботиров Голибжон Исроилович доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	Национальный Университет Узбекистана

Защита диссертации состоится « 01 » августа 2023 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+998 78) 207 91 40, e-mail: mathinst@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 163). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+998 78) 207 91 40).

Автореферат диссертации разослан « 19 » июля 2023 года.
(протокол рассылки № 2 от « 19 » июля 2023 года).

У.У. Розиков
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

У.У. Жамилов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие проблемы теории информационного обмена и теории обслуживания сводятся к задачам теории мер Гиббса, которая является важным объектом при изучении термодинамических свойств физических и биологических систем. Следует отметить, что меры Гиббса являются одним из основных средств описания систем, состоящих из большого числа частиц, в статистической механике. Хотя развитие теории мер Гиббса в решетчатых системах началось с задач термодинамики, основанных на исследованиях Р.Л. Добрушина, O.E. Lanford и D. Ruelle, на сегодняшний день ее приложения можно встретить в различных областях науки и техники как химия, физика, биология, экономика, теория обслуживания, материаловедение.

В последние годы в мире особое внимание уделяется поиску оптимального решения задач теории обслуживания и обмена информацией путем развития теории мер Гиббса, которая является основным объектом изучения задач статистической физики и механики, одно из направлений науки, имеющее практические приложения. При этом большое значение имеет исследование трансляционно-инвариантных, периодических, слабопериодических мер Гиббса, соответствующих моделям физики и статистической механики, заданным в неаменабельных графах. Поэтому одной из важных задач является проведение целевых научных исследований в следующих областях теории мер Гиббса: определение полного описания периодических мер для данного гамильтониана; изучение задач крайности таких мер; проверка существования фазовых переходов для моделей со счетным множеством спиновых значений. Научные исследования, проводимые в вышеупомянутых направлениях, подтверждают актуальность темы диссертации.

В нашей стране всё больше внимания уделяется актуальным направлениям функционального анализа и теории функций с действительными переменными, фундаментальным наукам, имеющие научное и практическое применение. Следует признать, что за последние годы были достигнуты значительные результаты в построении трансляционно-инвариантных, периодических и слабо периодических мер Гиббса соответствующим классическим моделям с конечными или счётными спиновыми значениями, определенными на счетных графах, а также при решении практических задач функционального анализа. В качестве основных задач и направлений деятельности математической науки определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, математическая физика и теория мер»[1]. В целях применения научных результатов в смежных областях науки имеет важное значение построение мер Гиббса, пригодных

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «Об организации вновь созданных научно-исследовательских институтов Академии наук Республики Узбекистан».

для моделей в неаменабельных графах с не более чем счётными спиновыми значениями и строгими ограничениями на их конфигурации.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» и № УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии Развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Понятие распределения Гиббса, которое имеет важное значение для систем, находящихся в тепловом равновесии с окружающей средой, в которой поддерживается постоянная температура, было введено американским ученым Дж.У. Гиббсом. Мера Гиббса позволяет определить вероятность нахождения физической системы в определенном состоянии, а также связать термодинамические величины с микроскопическими свойствами системы. Общее определение предельной меры Гиббса дано в работах Н.Н. Боголюбова, Б.И. Хацета, Р.Л. Добрушина, O.E. Lanford и D. Ruelle. Р.Л. Добрушиным доказана теорема о существования предельной меры Гиббса. В работах С.А. Пирогова, Я.Г. Синая, R.A. Minlos, N. Datta, R. Fernandez, J. Fröhlich, A.C.D. Enter и M. Zahradnik содержится основная теория фазовых переходов.

Модель жесткой сердцевины (HC) на d-мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, введена и развита в работе A.E. Mazel и Yu.M. Suhov. Для моделирования твердого тела на дереве Кэли используется алгоритм Монте-Карло. Возникновение HC моделей при изучении случайных независимых множеств графа, исследовании молекул газа на решетке и в исследованиях, посвященных их применениям, можно увидеть в работах Р. Бэкстера, G.R. Brightwell, P. Winkler, D. Galvin, J. Kahn, F. Kelly, G. Louth, P. Mitra, K. Ramanan, A. Sengupta, I. Ziedins. Научные исследования, посвященные построению трансляционно-инвариантных, периодических, слабо периодических и других мер Гиббса, а также по анализу структуры множества таких мер для HC моделей на дереве Кэли, можно увидеть в работах G.R. Brightwell, A.E. Mazel, Ф. Спитцера, F. Martinelli, P. Winkler, D. Galvin, O. Häggström, J. Kahn, F. Kelly, G. Louth, P. Mitra, K. Ramanan, A. Sengupta, I. Ziedins, Yu.M. Suhov,

J. Martin, D. Gandolfo, У.А. Розикова, Ш.А. Шоюсупова, Р.М. Хакимова и О.Н. Хакимова и других.

Работы Н.Н. Ганиходжаева, У.А. Розикова, Р.М. Рахматуллаева, Ф.Х. Хайдарова, Р.М. Хакимова, C. Kuelske, F. Wagner, D. Grensing, J. Heide, F.Y. Wu посвящены предельным мерам Гиббса для модели Поттса. Полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса и задача их крайности изучена в работах C. Kuelske, У.А. Розикова и Р.М. Хакимова. Понятие слабо периодической меры Гиббса введено в работах У.А. Розикова и М.М. Рахматуллаева. Существование таких мер для моделей Изинга, Поттса и НС на дереве Кэли доказано в работах У.А. Розикова, М.М. Рахматуллаева и Р.М. Хакимова. Несмотря на многочисленные работы, отметим, что ни для одной модели на дереве Кэли не получено полное описание всех предельных мер Гиббса.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ в направлениях «Фундаментальные исследования» Наманганского государственного университета.

Целью исследования являются изучение задачи существования предельных мер Гиббса для моделей Поттса и НС с конечным и счетным множеством спиновых значений на дереве Кэли.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

полное описание периодических мер Гиббса для НС модели с двумя состояниями на дереве Кэли порядка два, три и исследование их крайности;

нахождение новых условий существования слабо периодических (не периодических) мер Гиббса с периодом четыре для НС модели с двумя состояниями;

определение условий, при которых трансляционно-инвариантная и периодическая меры Гиббса не единственны для НС-моделей со счетным числом состояний;

исследование крайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с четырьмя состояниями на дереве Кэли порядка $k = 3$;

Объектом исследования являются дерево Кэли, НС-модель с двумя состояниями, НС-модель со счетным числом состояний, модель Поттса с q-состояниями, трансляционно-инвариантная мера Гиббса, периодические меры, слабо периодические меры и невероятностные меры Гиббса.

Предметом исследования являются теория групп и графов, теория мер Гиббса, алгебра, теория нелинейных динамических систем, математический анализ, функциональный анализ, марковские процессы.

Методы исследования. В работе использовались методы математического анализа, функционального анализа, комбинаторики, теории групп, теории мер, линейной алгебры, теории динамических систем.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

найдены новые условия единственности, а также существования и неединственности слабо периодических мер Гиббса для HC-модели с двумя состояниями в случае нормального делителя индекса четыре;

определены условия, обеспечивающие точное количество трансляционно-инвариантных и периодических невероятностных мер Гиббса для HC-моделей со счетным множеством значений спина в случае графа типа “Жезл” на дереве Кэли порядков 2,3,4 и 2,3, соответственно;

указаны области крайности и некрайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с четырьмя состояниями на дереве Кэли третьего порядка;

Практические результаты исследования. Полученные результаты и методы, использованные в диссертации, могут быть использованы в качестве учебного курса для магистрантов и базовых докторантов в высших учебных заведениях. А также, найденные точные значения параметров, обеспечивающие фазовый переход для HC модели, могут быть использованы для решения задач теории обслуживания и теории информаций.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов математического и функционального анализа, использованием известных методов исследования других мер Гиббса, динамических систем с дискретным временем, теории нелинейных операторов и теоремы о неподвижных точках.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что научные результаты по описанию множества трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса, соответствующих моделям HC и Поттса, используются при исследовании термодинамических свойств различных моделей статистическая механика и физика.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что методы построения мер Гиббса для HC модели со счетным значений спина позволяют проверить существование меры Гиббса для HC модели с конечным числом состояний при определенных условиях параметров.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Методы доказательства существования и неединственности слабо периодических мер Гиббса для HC-модели, использованы в фундаментальном проекте № ЁОТ-Фтех-2018-154 «Меры Гиббса и спектры гамильтонианов на решетках Z^d и на деревьях Кэли Γ^k» при исследовании трансляционно-инвариантных мер Гиббса для некоторых моделей статистической механики, принимающих континуум множество спиновых значений (Справка Национального университета Узбекистана от 27 апреля 2023 года, № 04/11-2400). Применение данных научных результатов позволило описать множество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для некоторых моделей с континуум множеством спиновых значений.

Методы доказательства единственности слабо периодических мер Гиббса для НС-модели использованы в фундаментальном проекте № ЁОТ-Фтех-2018-78 «Динамические и термодинамические системы на не аменабельных графах» при изучении слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса (Справка Института математики от 28 апреля 2023 года, № 02/167). Применение данных научных результатов позволило доказать не существование слабо периодических мер Гиббса при некоторых значениях параметров для модели Поттса.

Апробация результатов исследования. Основные темы диссертации обсуждались на 5 международных и 10 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 23 научных работ, из них 8 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан по защите диссертации на степень доктора философии. 3 статьи опубликованы в зарубежных журналах и 5 – в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на девять параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 111 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИСЕРТАЦИИ

Во введении освещаются актуальность и необходимость исследования, соответствие его приоритетам науки и технологий, уровень изученности проблемы, цель, задачи, объект и предмет исследования, научная новизна и практические результаты, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, реализация результатов исследований, опубликованные работы и информация о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, озаглавленная **«Меры Гиббса для НС модели с конечным числом состояний»**, изучена НС модель с двумя состояниями на дереве Кэли. Приведены основные определения и известные результаты по рассматриваемой модели. Дано понятие меры Гиббса и другие понятия, связанные с теорией мер Гиббса. Дано полное описание два-периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка два и три и исследована задача крайности этих мер. Кроме того, получены условия единственности и существования слабо периодических мер Гиббса для рассматриваемой модели в случае нормального делителя индекса четыре.

Определение 1. Пусть $G=(V,L)$— бесконечный и связный граф. Граф G называется аменабельным, если

$$\inf_{A\subset V,|A|<\infty}\frac{|\partial A|}{|A|}=0,$$

и неаменабельным в противном случае. Здесь $|\partial A|-$количество граничных вершин множества A, $|A|-$количество внутренних вершин множества A

Пример. d-мерная решетка $\mathbb{Z}^d$, треугольная, шестиугольная решетки являются аменабельными, а деревья Кэли, Брюа-Титса, гиперболические графы, графы Schreier являются неаменабельными графами.

Замечание 1. Заметим, что меры Гиббса на неаменабельных графах, кроме дерева Кэли мало изучены, например, периодические меры Гиббса на таких графах не определены, так как для них нет группового представления. Периодические меры Гиббса, которые мы изучаем, определены на групповом представлении дерева Кэли.

Пусть $\tau^k=(V,L)$, где V есть множество вершин τ^k, $L-$множество его ребер. Две вершины x и y называются ближайшими соседями, если существует ребро $l\in L$, соединяющее их и для них будем использовать обозначение $l=\langle x,y\rangle$. Расстояние $d(x,y),\ x,y\in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$d(x,y)=\min\{d\,|\,\exists x=x_0,x_1,\ldots,x_{d-1},x_d=y\in V$ такие, что $\langle x_0,x_1\rangle,\ldots,\langle x_{d-1},x_d\rangle\}$.

Для фиксированного $x^0\in V$ обозначим

$$W_n=\left\{x\in V\,|\,d(x,x^0)=n\right\},\ \ V_n=\bigcup_{j=0}^{n}W_j,\ \ L_n=\left\{l=\langle x,y\rangle\in L|\ x,y\in V_n\right\}.$$

Для $x\in W_n$ обозначим $S(x)=\{y\in W_{n+1}:\ d(x,y)=1\}$. $S(x)$ называется множеством прямых потомков вершины x.

Пусть G_k-свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1,a_2,...,a_{k+1}$, соответственно.

Из работы Н.Н.Ганиходжаева известно следующее

Утверждение 1. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и элементами группы G_k.

Для $A\subseteq V$ конфигурация σ_A на A определяется как функция $x\in A\to\sigma_A(x)\in\Phi=\{0,1,...,q\}$. Множество всех конфигураций совпадает с $\Omega_A=\Phi^A$. Обозначим $\Omega=\Omega_V$ и $\sigma=\sigma_V$.

Энергия конфигурации $\sigma\in\Omega$ задается с помощью гамильтониана

$$H(\sigma)=\sum_{\substack{A\subset V:\\ diam(A)\le r}} I(\sigma_A),\qquad (1)$$

где $r\in N$, $diam(A)=\max\limits_{x,y\in A}d(x,y)$ и $I(\sigma_A):\Omega_A\to R-$данный потенциал.

Для конечной области $D\subset V$ с граничным условием φ_{D^c} данным на его дополнении $D^c=V\setminus D$ условный гамильтониан есть

$$H(\sigma_D \mid \varphi_{D^c}) = \sum_{\substack{A\subset V: A\cap D\neq\varnothing \\ diam(A)\leq r}} I(\sigma_A) \quad ,$$

где

$$\sigma_A(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ если } x\in A\bigcap D \\ \varphi(x), \text{ если } x\in A\bigcap D^c. \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{B}-\sigma$-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω с конечными основаниями. Обозначим

$$\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V\setminus A}(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ если } x\in A, \\ \tilde{\sigma}(x), \text{ если } x\in V\setminus A. \end{cases}$$

Определение 2. Вероятностная мера μ на σ-алгебре $\mathbf{B}$ называется предельной мерой Гиббса, если для любого конечного $A\subset V$ имеет место

$$\mu(\sigma_A \mid \tilde{\sigma}_{V\setminus A}) = \frac{e^{-\beta H(\sigma_A\vee\tilde{\sigma}_{V\setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

где $H(\sigma)$ определена в (1), $\beta=1/T$, $T>0-$температура и

$$Z_{A,\tilde{\sigma}} = \sum_{\varphi\in\Omega_A} e^{-\beta H(\varphi_A\vee\tilde{\sigma}_{V|A})}.$$

Пусть $\mathcal{G}(H)-$множество всех предельных мер Гиббса. Заметим, что если $H-$непрерывный гамильтониан, то известно, что для каждого $\beta>0$ множество $\mathcal{G}(H)$ является не пустым, выпуклым компактным подмножеством множества всех вероятностных мер, определенных на $(\Omega,\mathbf{B})$.

Основные задачи. В работе рассматриваются следующие две основные задачи:

1) Исследование существования по крайней мере одной меры Гиббса для данного гамильтониана.

2) Изучение структуры множества всех мер Гиббса, соответствующих данному гамильтониану.

Пусть $\Phi=\{0,1\}$ и $\sigma\in\Phi^V$ $-$конфигурация, где $\sigma(x)=1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занята, а $\sigma(x)=0$ означает, что она свободна.

Определение 3. Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y)=0$ для любых соседних $\langle x,y\rangle$ из $V(V_n$, соответственно).

Множество таких конфигураций обозначим через Ω^a ($\Omega^a_{V_n}$) Ясно, что $\Omega^a\subset\Phi^V$.

Гамильтониан НС-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = \begin{cases} J\sum\limits_{x\in V}\sigma(x), \text{ если } \sigma\in\Omega^a, \\ +\infty, \quad \text{ если } \sigma\notin\Omega^a, \end{cases}$$

где $J\in R$.

Для любой допустимой конфигурации $\sigma_n \in \Omega^a_{V_n}$ обозначим

$$\#\sigma_n = \sum_{x\in V_n} \sigma_n(x),$$

т.е. $\#\sigma_n$ – количество единиц (занятых вершин) в V_n.

Пусть $z: x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}) \in R^2_+$ есть векторнозначная функция на V. Для $n = 1, 2, \ldots$ рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на множестве $\Omega^a_{V_n}$, определенное как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x\in W_n} z_{\sigma_n(x),x}. \tag{2}$$

Здесь $\lambda = e^{J\beta} > 0$ – параметр, Z_n – нормирующий делитель:

$$Z_n = \sum_{\varphi_n \in \Omega^a_{V_n}} \lambda^{\#\varphi_n} \prod_{x\in W_n} z_{\varphi_n(x),x}.$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для любого $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega^a_{V_{n-1}}$ верно равенство:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^a_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}),$$

где

$$\mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^a_{V_n}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \ \sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^a_{V_n} \\ 0, \text{ если } \ \sigma_{n-1} \vee \omega_n \notin \Omega^a_{V_n}. \end{cases}$$

В этом случае по теореме Колмогорова существует единственная мера μ на $(\Omega^a, \mathbf{B})$ такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Omega^a_{V_n}$

$$\mu(\{\sigma: \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n).$$

Пусть G^*_k – подгруппа группы G_k.

Определение 4. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется G^*_k-периодической, если $z_{yx} = z_x$ для $\forall x \in G_k, y \in G^*_k$.

G_k-периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными (ТИ).

Для любого $x \in G_k$ множество $\{y \in G_k : \langle x, y\rangle\} \setminus S(x)$ имеет единственный элемент, который обозначим через $x_\downarrow$.

Пусть $G_k/G^*_k = \{H_1, ..., H_r\}$ – фактор группа, где G^*_k – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 5. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется G^*_k-слабо периодической, если $z_x = z_{ij}$ при $x \in H_i$, $x_\downarrow \in H_j$.

Замечание 2. Заметим, что слабо периодическая совокупность z совпадает с обычной периодической, если значение z_x не зависит от $x_\downarrow$.

Определение 6. Мера μ называется G_k^*-(слабо) периодической, если она соответствует G_k^*-(слабо) периодической совокупности величин z.

Известно, что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин $z=\{z_x, x\in G_k\}$ удовлетворяющих

$$z_x^{'} = \prod_{y\in S(x)} \frac{1}{1+\lambda z_y^{'}},$$

где $\lambda = e^{J\beta} > 0 -$ параметр.

Пусть $G_k^{(2)}$-подгруппа группы G_k, состоящая из слов четной длины в G_k, т.е. $G_k^{(2)} = \{x\in G_k : |x| - \text{четное число}\}$.

Из работы Yu. Suhova и U. Rozikova известно, что при $k\geq 2$ и $\lambda > k^k\cdot(k-1)^{-k-1}$ существуют ровно две $G_k^{(2)}$-периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса μ_1 и μ_2.

Справедлива следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $k=2$ ($k=3$). Тогда для НС-модели $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса μ_1 и μ_2 являются крайними при $\lambda>4$ ($\lambda > 27/16$).

Третий параграф первой главы посвящен изучению слабо периодических мер Гиббса (СПМГ) для НС модели с периодом четыре.

Пусть $\varnothing\neq A\subset N_k=\{1,2,...,k+1\}$ и $H_A = \left\{ x\in G_k : \sum_{i\in A} w_x(a_i) - \text{четное число} \right\}$,

где $w_x(a_i) -$число буквы a_i в слове $x\in G_k$, $G_k^{(2)} -$подгруппа G_k, состоящая из слов четной длины и $G_k^{(4)} = H_A \bigcap G_k^{(2)} -$ нормальный делитель индекса четыре.

Рассмотрим инвариантные множества:

$I_1=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4 : z_1=z_2=z_7=z_8\}$, $I_2=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4 : z_1=z_7,\ z_2=z_8\}$,

$I_3=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4 : z_1=z_2, z_7=z_8\}$, $I_4=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4 : z_1=z_8,\ z_2=z_7\}$.

Из работы Р.М. Хакимова и Г.Т. Мадгозиева известно следующее:

1. На I_1 при $k\geq 1, i\leq k$; на I_3 в случаях $k=2, i=2$ и $k\geq 1, i=1$; на I_4 в случаях $k=2, i=1$, $k=3, i=1$ и $k=i$ показано, что СПМГ единственна.

2. В случаях $k=2, i=1$ и $k=2, i=2$ найдено точное критическое значение параметра, при которых СПМГ не единственна на I_2.

3. В случае $k=3, i=1$ доказано существование критического значения параметра, что на I_2 СПМГ не единственна.

Основным результатом третьего параграфа является следующее.

Теорема 2. Для НС-модели в случае нормального делителя индекса четыре верны следующие утверждения:

1. При $k=i$ на I_3 СПМГ единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса (ТИМГ).

2. В случаях 1) $k=3, i=2$, 2) $k=4, i=1$, 3) $k=4, i=2$, 4) $k=4, i=3$ и 5) $k=5,\ i=1$ на I_4 СПМГ единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной ТИМГ.

Теорема 3. Пусть $k=3,\ i=1$ и $\lambda_{cr}=27/16$. Тогда для HC-модели в случае нормального делителя индекса четыре на I_2 при $\lambda \le \lambda_{cr}$ существует одна СПМГ, которая является ТИ, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три СПМГ, одна из которых является ТИ, а две другие слабо периодическими (не периодическими).

Пусть

$$s^{\pm} := s^{\pm}(k) = \frac{k-3 \pm \sqrt{k^2-6k+1}}{4}, \quad \lambda^{\pm} := \lambda^{\pm}(k) = \left(s^{\pm}+1\right)^k s^{\pm}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. При $k \ge 6$, $i=1$ и $\lambda \in \left(\lambda^{-}(k), \lambda^{+}(k)\right)$ для HC-модели в случае нормального делителя индекса четыре на I_4 существуют не менее трех СПМГ. При этом одна из них является ТИ, другие СПМГ (не периодическими).

Вторая глава диссертации, названная **«Меры Гиббса для HC модели со счетным числом состояний»,** посвящена изучению ТИ и два-периодических мер Гиббса для HC-модели со счетным множеством $\mathbb{Z}$ значений спина.

Пусть $\Phi = \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$-множество целых чисел. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}$ как множество вершин некоторого бесконечного графа G. Конфигурация σ называется G-*допустимой конфигурацией* на дереве Кэли (в V_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ – ребро графа G для любой ближайшей пары $\langle x, y \rangle$ из V (из V_n). Обозначим множество G-допустимых конфигураций через Ω^a $\left(\Omega^a_{V_n}\right)$.

Множество активности для графа G есть ограниченная функция $\lambda : G \mapsto \mathbb{R}_+$. Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \mathbb{Z}$ называется ее “активностью”.

Для данных G и λ мы определим гамильтониан G-HC-модели как

$$H_G^{\lambda}(\sigma) = J \sum_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, \quad \text{если } \sigma \in \Omega^a,$$

где $J \in \mathbb{Z}$.

Пусть $z : x \to z_x = \left(\ldots, z_{-1,x}, z_{0,x}, z_{1,x}, \ldots\right) \in \mathbb{R}_+^{\infty}$ есть векторнозначная функция в V. Предположим, что $z_{i,x}$ ограниченная функция относительно обоих аргументов $i \in \mathbb{Z}$ и $x \in V$.

Для $n = 1, 2, \ldots$ и $\lambda > 0$ рассмотрим невероятностную меру $\mu^{(n)}$ на множестве $\Omega^a_{V_n}$, определяемую как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \prod_{x \in V_n} \lambda_{\sigma_n(x)} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma_n(x), x}. \qquad (3)$$

Пусть $L(G)$ – множество ребер графа G, обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ матрицу смежности G, т.е.

$$a_{ij} = a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \in L(G) \\ 0, & \text{если } \{i,j\} \notin L(G). \end{cases}$$

В следующей теореме сформулировано условие на z_x, гарантирующее согласованность меры $\mu^{(n)}(\sigma_n)$.

Теорема 5. Последовательность мер $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, заданная формулой (3), является согласованной тогда и только тогда, когда $\forall x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$z'_{i,x} = \lambda'_i \prod_{y\in S(x)} \frac{a_{i0} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{im} z'_{m,y}}{a_{00} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{0m} z'_{m,y}}, \ i, m \in \mathbb{Z}_0,$$

где $z'_{i,x} = \lambda'_i z_{i,x} / z_{0,x}$, $\lambda'_i = \lambda_i / \lambda_0$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Во втором параграфе второй главы расматривается невероятностные меры Гиббса для HC-модели со счетным числом состояний в случае графа типа “Жезл”. Рассмотрим конкретный граф $G = жезл$, определенный следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \ i = j \ \text{ и } \ i, j \text{ –нечетные}, \\ 1, & \text{если } \ j = i+1 \ \text{ или } \ j = i-1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $i, j \in \mathbb{Z}$.

В случае $G = жезл$ верна следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $k = 2$ $(k = 3,\ k = 4)$ и $\lambda_{cr} = 2\left(\lambda_{cr} = 8/27,\ \lambda_{cr} = 1/24\right)$. Тогда для HC-модели со счетным числом состояний (соответствующей графу $G = жезл$) при $0 < \lambda \le \lambda_{cr}$ существует ровно одна трансляционно-инвариантная невероятностная σ-конечная мера Гиббса (ТИНВМГ) μ_0, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три ТИНВМГ μ_0, μ_1, μ_2.

Для $G_k^{(2)}$-периодических мер Гиббса рассмотрим множества:

$$I_1 = \left\{\left(z_1, z_2, \hat{z}_1, \hat{z}_2\right) \in R^4 : z_1 = z_2 = \hat{z}_1 = \hat{z}_2\right\},\ I_2 = \left\{\left(z_1, z_2, \hat{z}_1, \hat{z}_2\right) \in R^4 : z_1 = \hat{z}_1,\ z_2 = \hat{z}_2\right\},$$

$$I_3 = \left\{\left(z_1, z_2, \hat{z}_1, \hat{z}_2\right) \in R^4 : z_1 = \hat{z}_2,\ z_2 = \hat{z}_1\right\},\ I_4 = \left\{\left(z_1, z_2, \hat{z}_1, \hat{z}_2\right) \in R^4 : z_1 = z_2,\ \hat{z}_1 = \hat{z}_2\right\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Для HC модели со счетным числом состояний (соответствующей графу $G = жезл$) верны следующие утверждения.

1. Пусть $k \ge 2$. Тогда при $\lambda > 0$ на I_3 существует ровно одна $G_k^{(2)}$-периодическая невероятностная σ-конечная мера Гиббса. Более того, эта мера совпадает с единственной ТИНВМГ.

2. Пусть $k=2$ $(k=3)$ и $\lambda_{cr}=2\left(\lambda_{cr}=256/27\right)$. Тогда на I_4 при $\lambda\geq\lambda_{cr}$ существует ровно одна $G_k^{(2)}$-периодическая невероятностная σ-конечная мера Гиббса, которая является ТИ, а при $0<\lambda<\lambda_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$-периодические невероятностные σ-конечные меры Гиббса.

В параграфе 2.3 изучены вероятностные меры Гиббса для НС-модели со счетным числом состояний в случае графа типа “Петля только в нуле”. Рассмотрим конкретный граф $G=\textit{Петля только в нуле}$, определенный следующим образом:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad i\cdot j=0,\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $i,j\in\mathbb{Z}$. В случае $G=\textit{Петля только в нуле}$ верны следующие теоремы.

Теорема 8. Пусть $k=2$. Тогда для НС модели (соответствующей графу $G=\textit{Петля только в нуле}$) справедливы следующие утверждения.

1. Если ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$, полученный из последовательности параметров $\left\{\lambda_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$, сходится, то существует единственная ТИМГ.

2. Если ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$ расходится, то не существует ТИМГ.

Теорема 9. Пусть $k=2$ и $\Lambda_{cr}=4$. Тогда для НС модели (соответствующей графу $G=\textit{Петля только в нуле}$) со счетным числом состояний верны следующие утверждения:

1. Если ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$, полученный из членов последовательности параметров $\left\{\lambda_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$ сходится и его сумма $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j=\Lambda$, то при $0<\Lambda\leq\Lambda_{cr}$ существует ровно одна $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса μ_0, которая является ТИ, а при $\Lambda>\Lambda_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса μ_0,μ_1,μ_2, где меры μ_1 и μ_2 являются $G_k^{(2)}$-периодическими (не ТИ).

2. Если ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\lambda_j$ расходится, то не существует $G_k^{(2)}$-периодической меры Гиббса.

Третья глава диссертации под названием **«Меры Гиббса для модели Поттса»** посвящена изучению трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли.

Пусть $\Phi=\{1,2,\dots,q\}$, $q\geq 2$. Гамильтониан модели Поттса определяется

$$H(\sigma)=-J\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}-\alpha\sum_{x\in V}\delta_{1\sigma(x)},$$

где $J\in R$, $\alpha\in R-$внешнее поле, $\langle x,y\rangle-$ближайшие соседи и $\delta_{ij}-$символ Кронекера.

Известно, что каждой мере Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин $h=\{h_x, x\in G_k\}$ удовлетворяющих

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} F(h_y,\theta,\alpha), \tag{4}$$

где $F: h=(h_1,\dots,h_{q-1})\in R^{q-1}\to F(h,\theta,\alpha)=(F_1,\dots,F_{q-1})\in R^{q-1}$ определяется как:

$$F_i=\alpha\beta\delta_{1i}+\ln\frac{(\theta-1)e^{h_i}+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}+1}{\theta+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}}$$

и $\theta=\exp(J\beta)$, $S(x)-$множество прямых потомков точки x и $h_x=\left(h_{1,x},\dots,h_{q-1,x}\right)$ с $h_{i,x}=\tilde h_{i,x}-\tilde h_{q,x}$, $i=1,\dots,q-1$.

Во втором параграфе третьей главы для модели Поттса с четырьмя состояниями дано полное описание ТИМГ на дереве Кэли порядка три.

Пусть $\alpha=0$. В этом параграфе рассмотрим ТИМГ для модели Поттса, т.е. предположим $h_x=h=(h_1,\dots,h_{q-1})\in R^{q-1}$ для всех $x\in V$. Из уравнения (4) имеем $h=kF(h,\theta)$, т.е.,

$$h_i=k\ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i}+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}+1}{\theta+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}}\right),\ i=1,\dots,q-1. \tag{5}$$

Обозначив $z_i=\exp(h_i)$, $i=1,\dots,q-1$, из (5) получим

$$z_i=\left(\frac{(\theta-1)z_i+\sum_{j=1}^{q-1}z_j+1}{\theta+\sum_{j=1}^{q-1}z_j}\right)^k,\ i=1,\dots,q-1.$$

Известно следующее:

при $J<0\,(\theta<1)$, $k\geq 1$, $q\geq 2$ модель Поттса имеет единственную ТИМГ;

при $J>0$ любая ТИМГ модели Поттса соответствует решению следующего уравнения

$$z=f_m(z)\equiv\left(\frac{(\theta+m-1)z+q-m}{mz+q-m-1+\theta}\right)^k \tag{6}$$

при некотором $m=1,\dots,q-1$.

Известно, что при изучении крайности меры нужен явный вид вектора z. Из уравнения (6) в случаях $k=3$, $q=4$ при $m=1$ и $m=2$ найдены явные виды z_1, z_2 и z_3, z_4, соответственно.

Из работы К. Куелске, У.А. Розикова и Р.М. Хакимова известно, что для модели Поттса при $\theta > \theta_{cr}$ существуют пятнадцать ТИМГ. Заметим, что в силу симметрии области крайности мер, соответствующих решениям $(z_1,1,1)$, $(1,z_1,1)$ и $(1,1,z_1)$ (аналогично $(z_2,1,1)$, $(1,z_2,1)$ и $(1,1,z_2)$; $(1,z_3,z_3)$, $(z_3,1,z_3)$ и $(z_3,z_3,1)$; $(1,z_4,z_4)$, $(z_4,1,z_4)$ и $(z_4,z_4,1)$) будут одинаковыми. Поэтому достаточно изучать крайность мер μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 и μ_6, соответствующих решениям $(1,1,1)$, $(z_1,1,1)$, $(z_2,1,1)$, $(1,z_3,z_3)$, $(1,z_4,z_4)$, (z_1,z_1,z_1) и (z_2,z_2,z_2), соответственно.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 10. Пусть $k=3$, $q=4$, $\theta_1 \approx 2.69994$, $\theta_{cr}=\theta_2=3$ и $J>0$. Тогда для модели Поттса верны следующие утверждения:

1. Мера μ_0 является крайней при $0<\theta<5$ и не крайней при $\theta>3+2\sqrt{3}$.

2. Мера μ_1 является крайней при $\theta>\theta_1$.

3. Мера μ_2 при $\theta_1<\theta<\theta^{(4)}$ является крайней и при $\theta>\theta^{(1)}$ не является крайней, где $\theta^{(4)} \approx 4.506544$ и $\theta^{(1)} \approx 5.259758642$.

4. Меры μ_3 и μ_4 являются крайними при $\theta_{cr}<\theta<\theta^{(7)}$ и не крайними при $\theta>\theta^{(3)}$, где $\theta^{(7)} \approx 3.915695379$ и $\theta^{(3)} \approx 4.055415669$.

5. Мера μ_5 является крайней при $\theta_1<\theta<\theta^{(5)}$ и не крайней при $\theta>\theta^{(2)}$, где $\theta^{(5)} \approx 4.395479909$ и $\theta^{(2)} \approx 5.110182292$.

6. Мера μ_6 является крайней при $\theta_1<\theta<\theta^{(6)}$, где $\theta^{(6)} \approx 4.254583559$.

Третий параграф третьей главы посвящен изучению периодических мер Гиббса для антиферромагнитной модели Поттса с q-состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 3$, улучшен один из ранее известных результатов, т.е. при некоторых условиях указано точное количество $G_k^{(2)}$-периодических (не ТИ) мер Гиббса. Рассмотрим множества

$$I_m = \left\{z=(u,v)\in R^{q-1}\times R^{q-1} : x_i = x,\ y_i = y, i=\overline{1,m},\ x_i = y_i = 1, i=\overline{m+1,q-1}\right\},$$

$$I_m' = \left\{z=(u,v)\in R^{q-1}\times R^{q-1} : x_i = x,\ i=\overline{1,m},\ \ x_i = 1,\ i=\overline{m+1,q-1-m},\right.$$
$$x_i = y,\ i=\overline{q-m,q-1},\ y_i = y,\ i=\overline{1,m},\ y_i=1,\ i=\overline{m+1,q-1-m},$$
$$\left. y_i = x,\ i=\overline{q-m,q-1}\right\},$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 11. Пусть $\theta_{cr} = \dfrac{k-q+1}{k+1}$. Тогда для модели Поттса при $k \geq 3$, $3 \leq q < k+1$ и $0<\theta<\theta_{cr}$ на множествах $\bigcup_{m=1}^{q} I_m$ и $\bigcup_{m=1}^{q} I_m'$ существуют ровно $2\cdot\left(2^q-1+\sum_{m=1}^{[q/2]} C_q^m \cdot C_{q-m}^m\right)$ $G_k^{(2)}$-периодические (не ТИ) меры Гиббса.

Замечания 3. В работе У.А. Розикова, Р.М. Хакимова и Ф.Х. Хайдарова доказано, что для модели Поттса при $k \geq 3$, $3 \leq q < k+1$ и $0 < \theta < \theta_{cr}$ на множествах $\bigcup_{m=1}^{q} I_m$ и $\bigcup_{m=1}^{q} I_m^{'}$ существуют не менее $2 \cdot \left(2^q - 1 + \sum_{m=1}^{[q/2]} C_q^m \cdot C_{q-m}^m \right)$ $G_k^{(2)}$-периодические (не ТИ) меры Гиббса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованиям трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для моделей HC и Поттса с конечным числом состояний, решению проблем крайности таких мер, а также исследованиям трансляционно-инвариантных и периодических вероятностных и невероятностных мер Гиббса для HC-моделей со счетным числом состояний.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

1. Для HC-модели с двумя состояниями получено полное описание периодических мер Гиббса с периодом два на дереве Кэли порядка два, три и доказана крайность этих мер в области их существования.
2. Найдены новые условия единственности слабо периодических мер Гиббса в случае нормального делителя индекса четыре для HC модели с двумя состояниями на дереве Кэли порядка.
3. На дереве Кэли порядка   найдены новые условия существования и неединственности слабо периодических мер Гиббса с периодом четыре для HC модели.
4. Для HC-моделей со счетным числом состояний в случае графа типа “Жезл” при некоторых условиях определены точное количество невероятностных σ-конечных трансляционно-инвариантных мер Гиббса на дереве Кэли порядка 2, 3, 4.
5. Для HC-моделей со счетным числом состояний в случае графа типа “Жезл” при некоторых условиях определены точное количество невероятностных σ-конечных периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка 2, 3.
6. Для HC-моделей со счетным числом состояний в случае графа типа “Петля только в нуле” найдены точные критические значения параметров, при которых существуют ровно три вероятностные трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса на дереве Кэли порядка 2.
7. Найдены условия крайности и некрайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с четырьмя состояниями на дереве Кэли порядка $k=3$.
8. Определено точное количество периодических мер Гиббса, отличных от трансляционно-инвариантных, на некоторых инвариантных множествах для антиферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли порядка $k \geq 3$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS

NAMANGAN STATE UNIVERSITY

MAHAMMADALIEV MUHTORJON TURSUNMUKHAMMAD UGLI

PERIODIC GIBBS MEASURES FOR THE HARD CORE (HC) AND POTTS MODELS ON NON-AMENABLE GRAPHS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Namangan - 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2019.4.PhD/FM426.

Dissertation has been prepared at Namangan state university.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (https://kengash.mathinst.uz) and the "ZiyoNet" information and educational portal (http://www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Khakimov Rustamjon Makhmudovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences
Official opponents:	**Jamilov Uygun Umurovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, senior researcher
	Botirov Golibjon Isroilovich Doctor of Physical and mathematical Sciences, senior researcher
Leading organization:	**National University of Uzbekistan**

Defense will take place on " 01 " August 2023 at 16:00 at the meeting of Scientific Council DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+998 78) 207 91 40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky (registered for No. 163). (Address: University str. 9, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+998 78) 207 91 40).

Abstract of dissertation sent out on " 19 " July 2023 year.
(Mailing report No. 2 on " 19 " July 2023 year).

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
DSc., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
DSc., senior researcher

U.U.Jamilov
Chairman of scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
DSc., senior researcher

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to investigate the existence of limiting Gibbs measures of the Potts and HC models with at most a countable set of spin values and to analyse the structure of the obtained set of the measures.

The object of the research work is the Cayley tree, the two-state HC model, the countably-state HC model, the q-state Potts model, the translation-invariant Gibbs measure, periodic measures, weakly periodic measures, and Gibbs nonprobability measures.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

new uniqueness conditions are found, as well as the existence and non-uniqueness of weakly periodic Gibbs measures for the HC-model with two states in the case of a normal divisor of index four;

the exact number of non-probability translation-invariant and periodic Gibbs measures on the Cayley tree of order 2, 3, 4 and 2, 3, respectively, is determined for HC-models with a countable set of spin values in the case of a “Wand”-type graph;

extremality and non-extremality conditions for the translation-invariant Gibbs measures of the ferromagnetic Potts model with four states on the Cayley tree of order $k=3$ are found;

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research is practiced in the following areas:

The obtained new conditions for the existence and non-uniqueness of weakly periodic Gibbs measures for the HC model were used in the fundamental project YOT-FTEX-2018-154 “Gibbs measures and spectra of Hamiltonians on lattices Z^d and on Cayley trees Γ^k” in the study of translation-invariant Gibbs measures for some classical models of statistical mechanics that with a continuum set of spin values (Certificate of the National University of Uzbekistan dated April 27, 2023, No. 04/11-2400). The application of these scientific results made it possible to describe the set of translation-invariant Gibbs measures for some models of statistical mechanics with a continuum set of spin values.

The found new conditions for the uniqueness of weakly periodic Gibbs measures with a period of four for the HC model were used in the fundamental project № YoFA-Ftex-2018-78 “Dynamical and thermodynamic systems on non-amenable graphs” when studying weakly periodic Gibbs measures for the Potts model (Certificate of the Institute Mathematics of April 28, 2023, No. 02/167). The application of these scientific results made it possible to prove the non-existence of weakly periodic Gibbs measures for some values of the parameters for the Potts model on the Cayley tree of order two.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters which consist of nine paragraphs, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 111 pages.

E’LON QILINGAN ILMIY ISHLAR RO‘YXATI

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Махаммадалиев М.Т. HC-модель: Слабо периодические меры Гиббса на дереве Кэли. // Научный вестник НамГУ. – 2019. № 9.– С. 3–8. (01.00.00; № 14).
2. Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т. Новые условия существования слабо периодических мер Гиббса для Hard-Core модели. // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – 2019. № 5.– С. 11–17. (01.00.00; № 7).
3. Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т. Условия единственности и неединственности слабо периодических мер Гиббса для HC модели. Теоретическая и Математическая Физика. – 2020. Том 204, № 2.– С. 258–279. (3.Scopus IF=0.685).
4. Makhamadaliyev M.T. Periodic Gibbs measures for the antiferromagnetic Potts model on a Cayley tree of order *k*. // Uzbek Mathematical Journal. – 2021. Volume 65, Issue 1. – P. 110–117. (01.00.00; № 6).
5. Розиков У.А., Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т. Периодические меры Гиббса для HC-модели с двумя состояниями на дереве Кэли. // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2022. Том 68, № 1. – С. 95–109, (3. Scopus. IF=0.314).
6. Makhamadaliyev M.T. Extramality of the translation-invariant Gibbs measures for the Potts model with four states on the Cayley tree of order k = 3. // Uzbek Mathematical Journal. – 2022. Volume 66, Issue 1. – P. 117–132. (01.00.00; № 6).
7. Махаммадалиев М.Т**.** О мерах Гиббса для HC-модели со счетным множеством значений спина на дереве Кэли порядка два**.** **//** Бюллетень Института математики. – 2022. №5(1). – С. 66–74. (01.00.00; №17).
8. Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т. Невероятностные меры Гиббса для HC-модели со счетным числом состояний для графа типа “жезл” на дереве Кэли. // Теоретическая и Математическая Физика. – 2022. Том 212, № 3.– С. 429-447. (3. Scopus IF=0.685).

II бўлим (II часть; part II)

9 Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т. О крайности мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли порядка два. // «Новые теоремы молодых математиков-2018». Республиканская научная конференция, Наманган, 18-19 октября 2018 г., – С. 99.

10 Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т., Уктамалиев И.К. О слабо периодических мерах Гиббса для твердых тел. // «Современные проблемы теории вероятности и математической статистики».

Республиканская научная конференция, Ташкент, 30 апреля – 1 мая 2019 г., – С.180-183.
11 Махаммадалиев М.Т. Новые условия единственности слабо периодической меры Гиббса для НС модели. // «Актуальные проблемы и применения анализа». Республиканская научная конференция, Карши, 4-5 октября 2019 г., – С. 80-82.
12 Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т. О существования фазавого перехода для модели жесткой сердцевины. // «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». Узбекская - российская научная конференция, Ташкент, 24–26 октября 2019 г., – С. 237-239.
13 Махаммадалиев М.Т. Условия неединственности слабо периодических мер Гиббса для НС-модели. // «Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения». Международная научная конференция, Ташкент, 21–23 ноября 2019 г., С. 133-134.
14 Розиков У.А., Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т. Крайность периодических мер Гиббса для НС-модели на дереве Кэли порядка два и три. // «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных раз». Международная научная конференция, Фергана, 12-13 марта 2020 г., – С. 91-94.
15 Махаммадалиев М.Т. О периодических мерах Гиббса для модели Поттса с q-состояниями на дереве Кэли. // «Современные проблемы математики». Республиканская научная конференция, Нукус, 20 мая 2020 г., – С.74-75.
16 Махаммадалиев М.Т. О слабо периодических мерах Гиббса на дереве Кэли для НС модели. // «Современные проблемы математики и прикладной математики». Республиканской научной онлайн конференции молодых ученых, Ташкент, 21 мая 2020 г., – С. 61-64.
17 Махаммадалиев М.Т. О крайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса с четырьмя состояниями. // «Современные проблемы стохастического анализа». Республиканской научной онлайн конференции, Ташкент, 21-22 сентября 2020 г., –С. 206-210.
18 Махаммадалиев М.Т., Турсунова Н.У. О периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // «Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар». Республика миқёсидаги илмий онлайн конференция, Термиз, 21-23 октябрь 2020 й., –Б. 259-260.
19 Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т. О полном описании трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса с четырьмя состояниями на дереве Кэли. // «Современные методы математической физики и их приложения». Республиканская научная конференция, Ташкент, 17-18 ноября 2020 г., – С. 58-61.
20 Махаммадалиев М.Т., Иляминов Б. Hard-Core моделларини бири учун Гиббс ўлчовларини ягоналиги // «Инновацион ғоялар, шланмалар

амалиётга: муаммолар, тадқиқотлар ва ечимлар». Халқаро онлайн илмий-амалий анжуман, Андижон, 21 апрель 2021 й., – Б. 87-89.
21 Махаммадалиев М.Т., Холмирзаев Ж. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для HC модели со счетным числом состояний // «Математика ва ахборот тизимларининг долзарб муаммолари». Республика илмий-амалий анжумани, Урганч, 12-13 ноябрь 2021 й., – С. 11-15.
22 Khakimov R.M., Makhammadaliev M.T. Translation-invariant nonprobability Gibbs measures for the HC model with a countable set of spin values // “Limit theorems of probability theory and mathematical statistics” International scientific conference, Tashkent, 26-28 September 2022, – P. 71-73.
23 Khakimov R.M., Makhammadaliev M.T. New class of Gibbs measures for the HC model on a Cayley tree. // “Statistics” International scientific conference Namangan, 19-20 October, 2022, – P. 157-161.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida
2023 yil 3 iyulda tahrirdan o‘tkazildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tobogʻi: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 69/22.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MChJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy koʻchasi, 83-uy.