**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.07.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ**

САФАРОВ АКБАР РАХМАНОВИЧ

УМУМЛАШГАН ТЕБРАНУВЧАН ИНТЕГРАЛЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 –Математик анализ

**ФИЗИКА–МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И**

Самарқанд - 2023

УДК: 517.518

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Contents of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

САФАРОВ АКБАР РАХМАНОВИЧ

УМУМЛАШГАН ТЕБРАНУВЧАН ИНТЕГРАЛЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 –Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Самарқанд - 2023

Фан доктори (Doctor of Sciences) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2023.2. DSc/FM___ рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университети ва В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус (резюме)) Илмий кенгашнинг веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Икромов Исроил Акрамович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Халмухамедов Алимджан Рахимович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Имомқулов Севдиёр Акрамович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Мўминов Захриддин Эшқобилович физика-математика фанлари доктори, доцент
Етакчи ташкилот:	**Урганч давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2023 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2023 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2023 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

С.Н. Лакаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, физика-математика фанлари доктори, академик

КИРИШ (Докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳонда олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда тебранувчан интегралларнинг текис баҳосини тадқиқ қилишга олиб келинади. Бу албатта, ушбу мавзу бўйича мавжуд бўлган кенг қамровли адабиётларда ўз аксини топган. XX асрнинг олтмишинчи йилларида киритилган тригонометрик йиғиндилар усули ҳамда бу йиғиндиларнинг асимптотик характерини тригонометрик интеграллар орқали ифодаланиши тебранувчан интеграллар назариясининг ривожланишига асос бўлди. Тебранувчан интегралларнинг яна бир муҳим жиҳатларидан бири уларнинг аналитик сонлар назариясига татбиғи ҳисобланади. Бундай интегралларнинг характерини тадқиқ этишнинг икки жиҳати мавжуд бўлиб, улардан бири тригонометрик йиғиндилар билан, бошқаси тригонометрик интеграллар билан боғлиқ. Тебранувчан интегралларнинг характерини тадқиқ қилишга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Жаҳонда фундаментал фанларнинг амалий татбиқига эга бўлган математик анализнинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, тебранувчан интегралларнинг характерини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Евклид фазосининг қаварик гиперсиртларида мужассамланган силлиқ Борел ўлчовларининг Фурье алмаштиришларини тадқиқ қилиш ҳамда гиперсиртларда Фурье алмаштиришларининг чегараланганлик муаммоси бўйича салмоқли натижаларга эришилди. Алгебра ва математик анализ, динамик тизимлар назарияси, амалий математика ва математик модделлаштириш математика фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланиши амалий-назарий жиҳатдан муҳим илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Республикамизда илмий ва амалий аҳамиятга эга бўлган фундаментал фанларга катта эътибор берилмоқда, ҳусусан, гармоник анализ назарияси масалаларини ривожлантиришга алоҳида эътибор берилмоқда. “Алгебра ва унинг татбиқлари, дифференциал тенгламалар ва уларнинг татбиқлари, чизиқсиз тизимлар, динамик тизимлар ва уларнинг татбиқларини математик моделлаштириш, стохастик таҳлил, тиббий-биологик информатика, ҳисоблаш математикаси[1]” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Бу қарор ижросини таъминлашда гармоник анализ масалаларининг спектрал назариясини ривожлантириш муҳим илмий аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарори

ҳаракатлар стратегияси тўғрисида» Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Ушбу тадқиқот Ўзбекистон Республикаси фан ва техникасининг IV, “Математика, механика ва информатика” устувор йўналишларига мувофиқ бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2]. Умумлашган тебранувчан интеграллар ва уларнинг татбиқларига оид тадқиқотлар ва илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг олий таълим муассалари ва илмий-тадқиқот марказлари, жумладан, Ghent Analysis & PDE Center (Бельгия), School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London (Англия), Christian-Albrechts-Universität zu Kiel (Германия), Ganja State University (Озарбайжон), Москва давлат университети (Россия) да кенг қамровли излинишлар олиб борилмоқда.

Умумлашган тебранувчан интеграллар ва уларнинг татбиқларига оид дунёда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: бир ўзгарувчили умумлашган тебранувчан интегралларнинг баҳолари олинган (Ghent Analysis & PDE Center (Бельгия), School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London (Англия)); тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳолари топилган (Москва давлат университети (Россия)); Фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар учун жамлаш кўрсаткичлари хусусий ҳолда топилган Ganja State University (Озарбайжон)).

Дунё миқёсида бугунги кунда умумлашган тебранувчан интеграллар ва уларнинг татбиқларини тадқиқ этиш бўйича бир қатор, жумладан: фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳоларини олиш, фазаси махсус кўринишли кўп каррали тебранувчан интегралларнинг текис баҳолари олиш, фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг йиғиш кўрсаткичини топиш, Миттаг-Леффлер функцияси билан боғланган тебранувчан интегралларнинг баҳоларини олиш, Миттаг-Леффлер функцияси билан боғланган тебранувчан интегралларнинг асимптотикасини топиш каби устувор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: https://www.springer/com/gp/mathematics; https://onlinelibrary.wiley.com/; www.mathnet.ru; www.scholar.google.com; www.elsevier.com/locate/camw ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Тебранувчан (тригонометрик) интеграллар дастлаб 1818 йил Френелнинг ёруғликнинг интенсивлигини ўрганиш билан боғлиқ ишларида вужудга келган. У бундай интеграллардан фойдаланиб четлардаги, экрандаги, кичик туйнук дифракциялари масалаларини ечган. 1838 йилда Эйри тригонометрик интеграллардан каустиканинг атрофида ёруғликнинг интенсивлигини ўрганишда фойдаланди. Каустика – бу ёруғликнинг интенсивлиги бошқа одатдаги нуқталардагидан анча юқори бўлган тўпламидир. Кейинчалик, 1887 йилда Кельвин ва Риманнинг тадқиқотларида тебранувчан интегралларнинг характерини ўрганиш учун стационар фаза усули қўлланила бошланди. 1891-1892 йилларда Пуанкаре изланишларида ёруғликнинг интенсивлигини ўрганишда тебранувчан интеграллардан кенг фойдаланди. Хусусан, у ёруғлик каустикадан ўтаётганда фазали силжишни $\frac{\pi}{2}$ га суришини исботлади. Олдинроқ бу тасдиқ Гуи томонидан тажрибавий усул билан аниқланган.

Кейинги тадқиқотларда Пирси, Людвиг, Урселла, Коннор ва бошқа олимларнинг A_n махсусликка эга бўлган тебранувчан интегралларнинг математик физикада тадбиқлари пайдо бўлди. 1974 йилда Ж.Дюстерматнинг ишида умумлашган Эйри функциялари, аниқроғи Арнольднинг эллиптик махсусликлари билан боғлиқ функциялар тадқиқ қилинди. 1973 йилда В.И.Арнольд томонидан қуйидаги гипотеза илгари сурилди. Фараз қилайлик, тебранувчан интегралнинг фаза функцияси бирор параметрларга боғлиқ бўлсин. Албатта, фаза функцияси параметрлар ва “асосий” ўзгарувчилар(интеграл ўзгарувчилари)нинг силлиқ (ҳатто аналитик) функцияси бўлиши мумкин. Яъни, биз фаза функциялари оиласига эга бўлайлик. Айтайлик, бу параметрлар тайинланган қийматларда нол нуқтанинг бирор атрофида ўзгарсин. Шунинг учун уларни баъзан “кичик” параметрлар деб аташади. Бизга тебранувчан интегралнинг (яъни фаза функцияси параметрнинг нол нуқтасида бўлган ҳолдаги қиймати билан аниқланган) тебраниш кўрсаткичи маьлум бўлсин. У ҳолда параметрлар нол нуқтанинг етарли кичик атрофида ўзгарганда параметрларга боғлиқ тебранувчан интеграл шу тебраниш кўрсаткичидан ихтиёрий кичикроқ бўлган катта параметрнинг даражаси орқали баҳоланади. Бошқача айтганда, тебраниш кўрсаткичи фазанинг кичик параметрларининг ярим узлуксиз функцияси бўлади. Бу масала “Arnol’d’s Problems” номли китобда ҳам келтирилган (бу китобнинг тўлдирилган инглизча нашри 2004 йилда чоп қилинган).

Арнольднинг гипотезаси В.Н.Карпушкин томонидан исботланди. Аниқроғи, фаза функцияси аналитик бўлган ҳолда икки каррали тебранувчан интегралларнинг текис (фаза функциясининг етарли кичик «силжишига» нисбатан) баҳолари олинди. Бошқача айтганда, В.Н.Карпушкин В.И.Арнольднинг гипотезаси аналитик фазали тебранувчан интеграллар учун ўринли бўлишини исботлади. Кейинчалик бу натижа силлиқ функцияларнинг баъзи хусусий деформациялари учун Хасановнинг номзодлик диссертациясида исботланди.

Тебранувчан интегралларни ўрганиш учун яна бир муҳим соҳалардан бири аналитик сонлар назариясига тадбиғи ҳисобланади. Маълумки, И.М.Виноградовнинг тадқиқотларида диофант тенгламалари ечимининг сони билан мос келувчи интеграл (Виноградов интеграли деб аталувчи) муҳим ўрин эгаллайди. Бироқ бундай интегралларнинг характерини тадқиқ этишнинг икки жиҳати мавжуд бўлиб, улардан бири тригонометрик йиғиндилар билан, бошқаси тригонометрик интеграллар билан боғлиқ. 1949 йилда хитой математиги Хуа Ло Ген томонидан тригонометрик интегралнинг мос $L^p(R^n)$ фазога тегишли бўлган энг минимал p ни топиш муаммосини қўйди, бунда $n-$фазадаги кўпҳад коэффициентлари фазосининг ўлчови. Ушбу масала бир қатор ишларда қаралган бўлиб, Виноградов томонидан олинган баҳолар умумлашган Ван дер Корпут леммасига асосланган. Мазкур масала бир каррали тебранувчан интеграллар учун Архипов Г.И., В.Н.Чубариков, А.А.Карацубаларнинг 1979 йилдаги ишида ўз ечимини топган ва улар томонидан кўп каррали тригонометрик интеграллар учун юқори баҳо топилган. Бироқ бу масала умумий ҳолда ҳалигача очиқ турибди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд Давлат университетининг ОТ-Ф4-69 - «Гармоник анализ, даражали геометрия ва уларнинг математик физика масалаларига татбиқлари» илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади умумлашган тебранувчан интегралларнинг баҳоларини олиш ва ҳамда аниқ жамлаш кўрсаткичини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

амплитуда функцияси узилишга эга бўлган тебранувчан интегралларнинг текис баҳоларини ε аниқлигида ўтиш методини қўллаш орқали олиш;

фаза функцияси D_∞, $D_4^\pm$ ва A_r махсусликларга эга бўлган Миттаг-Леффлер функцияси билан боғланган умумлашган тебранувчан интегралларни баҳолаш;

фаза функцияси кўпҳад бўлган икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер функцияси билан боғланган умумлашган ва классик тебранувчан интегралларнинг текис баҳоларини олиш;

фазаси учинчи даражали кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар учун Евклид текислигидаги классик ҳаракатлар группасининг инвариантлари орқали баҳоларини олиш;

фаза функцияси иккинчи ва учинчи даражали кўпҳад бўлган классик тебранувчан интегралларнинг коэффициентлар фазосидаги аниқ жамлаш кўрсаткичини топиш.

Тадқиқотнинг объекти фазаси кўпҳад бўлган умумлашган тебранувчан интеграллардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети фаза функциясининг коэффициентлари чексизга интилгандаги тебранувчан интегралларнинг ҳолати аниқлаш, тебранувчан интегралларнинг инвариант классик группалар орқали баҳосини олишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида дифференциал акслантириш-ларнинг махсусликлар назарияси, аналитик функциялар назарияси, анализнинг асимптотик усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

амплитуда функцияси узилишга эга бўлган тебранувчан интегралларнинг текис баҳоларини ε аниқлигида ўтиш методини қўллаш орқали олинган;

фаза функцияси D_∞, $D_4^\pm$ ва A_r махсусликларга эга бўлган Миттаг-Леффлер функцияси билан боғланган умумлашган тебранувчан интеграллар баҳоланган;

фаза функцияси кўпҳад бўлган икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер функцияси билан боғланган умумлашган ва классик тебранувчан интегралларнинг текис баҳолари олинган;

фазаси учинчи даражали кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар учун Евклид текислигидаги классик ҳаракатлар группасининг инвариантлари орқали баҳолари олинган;

фаза функцияси иккинчи ва учинчи даражали кўпҳад бўлган классик тебранувчан интегралларнинг коэффициентлар фазосидаги аниқ жамлаш кўрсаткичи топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг аниқ йиғилиш кўрсаткичини топишга имкон беради;

фазаси икки ва ундан кўп ўзгарувчили кўпҳад бўлган умумлашган тебранувчан интеграллар учун Ван дер Корпут леммасининг исботини олишда фойдаланиш мумкин;

умумлашган тебранувчан интегралларнинг баҳолари каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ечимини баҳолашда қўлланилиши мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ, функционал анализ, математик физика, дифференциал тенгламалар, гармоник анализ назарияси усулларидан фойдаланганлиги ҳамда қатъий математик мулоҳазаларни қўллаш орқали, математик исботлашлар билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти фазаси учинчи даражали кўпҳад бўлган умумлашган тебранувчан интеграллар инвариант баҳоларининг мавжудлигини кўрсатилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти, гиперболик тенгламалар-нинг фундаментал ечимларининг характерини тадқиқ қилишда асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Умумлашган тебранувчан интегралларнинг баҳолари ва уларнинг татбиқларига оид натижалар асосида:

фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳоларига оид илмий натижалардан етакчи хорижий журналларда (Nonlinear Analysis, Volume 207, June 2021, 112292, Analysis and Mathematical Physics volume 12, Article number: 130 (2022), Journal of Siberian Federal university. mathematics and physics 15.4 (2022): 459-466.) баъзи ночизиқли дифференциал тенгламаларга мос масалаларни тадқиқ қилишда фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши қаралаётган масалаларнинг спектрлари дискрет бўлишини исботлаш имконини берган;

умумлашган тебранувчан интегралларнинг баҳоларидан Бельгия республикаси Гент университетининг махсус тадқиқот фондининг Анализ ва хусусий дифференциал тенгламалар ҳамда Медусалам программасининг № 01M01021 сонли тадқиқот лойиҳасида (Гент университетининг 2023 йил 18 апрелдаги маълумотномаси) Миттаг-Леффлер функцияси билан боғланган умумлашган тебранувчан интегралларнинг хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ечимини баҳолашда фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши каср ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ечимининг априор баҳоларини олиш имконини берган;

фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг баҳосига оид натижалар Қозоғистон республикаси Математика институти ва математик моделлаштириш илмий-тадқиқот институтининг №AP08052046 сонли “Баъзи локал бўлмаган ночизиқли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар” мавзусидаги лойиҳада (Қозоғистон республикаси Математика институти ва математик моделлаштириш илмий-тадқиқот институтининг 2023 йил 17 апрелдаги 01-06/060 сон маълумотномаси) Миттаг-Леффлер функцияси билан боғланган умумлашган тебранувчан интегралларнинг баҳоларини тадқиқ қилишда фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши каср ҳосилали дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ечимининг дастлабки баҳоларини олиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Тадқиқотнинг асосий натижалари 14 илмий ва илмий-амалий анжуманларда, шулардан 8 та халқаро ва 6 та республика илмий ва илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 28 та илмий иш чоп этилган бўлиб, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациясилари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 14 та мақола, жумладан, 6 таси ҳорижий ва 8 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 167 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертация ишининг **“Ёрдамчи мулоҳазалар”** деб номланган биринчи бобида биз керакли таърифлар, белгилар ва диссертация давомида фойдаланиладиган баъзи натижаларни белгилаб берамиз. Шунингдек, баъзи дастлабки тушунчалар ҳақидаги маълумотларни ҳам тақдим этамиз. Хусусан, координаталарни чизиқли алмаштириш орқали оддий махсусликларга эга бўлган функцияларнинг нормал шаклига келтирамиз. Бундан ташқари, фазаси аналитик функция ва амплитудаси узилиш нуқталари тўпламига эга бўлган тебраниш интегралларини кўриб чиқамиз. Бунда мусбат $\varepsilon > 0$ аниқлигида бундай интеграллар учун аниқ баҳоларни оламиз.

Икки ўлчовли ҳолни қарайлик, яъни $n = 2$. Силлиқ амплитудали компакт ташувчига эга бўлган тебранувчан интегрални қарайлик:

$$J_0(\lambda, s) = \int_{\mathrm{R}^2} a(x,s) e^{i\lambda\Phi(x,s)} dx.$$

Асосий шарт:

Фараз қилайлик, $s \in K$ ва (η_1, η_2) учун қуйидаги янги фаза функцияни қараб чиқайлик

$$\Phi_1(x,s,\eta) = \Phi(x,s) + x_1\eta_1 + x_2\eta_2.$$

Фараз қилайлик, $\Phi(x,s)$ аналитик функция бўлиб, $\Phi_1(x,s^0,\eta^0)$ функциянинг ихтиёрий критик нуқтаси учун бунда $(s^0,\eta^0) \in K \times R^2$ ва унинг тебраниш кўрсаткичи $\beta \le \beta_0$ бўлсин. Қуйидаги тасдиқ ўринли.

1-Теорема. *Агар фаза функция учун асосий шарт ўринли бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $\varepsilon > 0$ *учун қуйидаги баҳо ўринли*

$$|J(\lambda,s)| \le \frac{c_\varepsilon \|a(\bullet,s)\|_{C^3}}{\lambda^{\beta_0-\varepsilon}}.$$

Қуйидаги тебранувчан интегрални қарайлик

$$J(\lambda,s) = \int_{R^2} \chi_{D(s)}(x) a(x,s) e^{i\lambda\Phi(x,s)} dx, \qquad (1)$$

бунда $D(s)$ – R^2 даги соҳалар оиласи ва $\{F_1(x,s) > 0, F_2(x,s) > 0\} \subset D(s)$, бундан ташқари $\gamma_1, \gamma_2 \subset \partial D(0)$ бўлсин, бунда $\gamma_j = \{x : F_j(x,0) = 0\}, j = 1,2.$

Қуйидаги теорема ўринли.

2-Теорема. $\Phi(x,0)$ *функциянинг* $x = 0$ *критик нуқтадаги тебраниш кўрсаткичи* β *бўлсин, у ҳолда нол нуқтанинг шундай* $U \times V \subset R^2 \times R^m$ *атрофи мавжуд бўлиб, ихтиёрий тайинланган мусбат* $\varepsilon > 0$ *ва ихтиёрий* $a \in C_0^\infty(U \times V)$ *амплитуда функция учун, қуйидаги баҳо ўринли:*

$$\left|J(\lambda,s)\right| \leq \frac{A_{\varepsilon}\|a\|_{C^3}}{\lambda^{\beta-\varepsilon}}.$$

“Миттаг-Леффлер функцияси билан боғланган тебранувчан интеграллар” деб номланувчи диссертациянинг иккинчи бобида, фазаси f ва амплитудаси ψ бўлган қуйидаги шаклдаги интегрални қараймиз:

$$I_{\alpha,\beta} = \int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda f(x))\psi(x)dx, \tag{2}$$

бунда $0<\alpha<1,\ \beta>0$, U координалар бошининг етарлича кичик атрофи ва $\lambda>0$.

“Силлиқ фазали содда махсусликга эга бўлган Миттаг-Леффлер функцияларнинг баҳолари” номли параграфда фаза функцияси иллиқ бўлиб, D_∞, $D_4^{\pm}$ ва A_r махсусликларга эга бўлган Миттаг-Леффлер функцияларнинг баҳоларини қараймиз. Тебранувчан интегралларнинг экспоненциал функциялари ўрнига Миттаг-Леффлер функциясини қўйиш орқали умумлаштирамиз.

Бир жинсли учинчи даражали икки ўзгарувчили кўпҳадни қарайлик. Ушбу параграфнинг асосий натижаси қуйидагидан иборат.

3-Теорема. *Фараз қилайлик $-\infty<a<b<\infty$ ва фаза функция икки ўзгарувчили бир жинсли кўпҳад бўлиб ҳамда $\psi\in L^p[a,b]^2$, $1<p\leq\infty$ бўлсин. Агар $0<\alpha<1$, $\beta>0$ ва $\lambda>0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги баҳо ўринли*

$$\left|\int_{[a,b]^2} E_{\alpha,\beta}(i\lambda x_1^2x_2)\psi(x)dx\right| \leq \frac{C|\psi|_{L^p}}{\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}}, \tag{3}$$

$$\left|\int_{[a,b]^2} E_{\alpha,\beta}(i\lambda(x_1^2x_2 \pm x_2^3))\psi(x)dx\right| \leq \frac{C|\psi|_{L^p}}{\lambda^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3p}}}, \tag{4}$$

$$\left|\int_{[a,b]^2} E_{\alpha,\beta}(i\lambda x_1^3)\psi(x)dx\right| \leq \frac{C|\psi|_{L^p}}{\lambda^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3p}}}, \tag{5}$$

бунда C константа фақатгина p га боғлиқ.

“Фазаси кўпҳад бўлган умумлашган тебранувчан интегралларнинг баҳолари” номли параграфда, фазаси бир жинсли кўпҳад бўлган Миттаг-Леффлер функцияси билан боғланган умумлашган тебранувчан интегралларнинг текис баҳоларини қараймиз.

Риччи-Стейн лемманинг аналогини ва қуйидаги интегралнинг инвариант баҳосини оламиз.

Қуйидаги интегрални қарайлик

$$I_{\alpha,\beta}(a) = \int_{Q^n} E_{\alpha,\beta}(iP(a,x))\psi(x)dx, \tag{6}$$

бунда $0<\alpha<1$, $\beta>0$, $P(a,x)$ фаза функция, $\psi\in C^\infty(R^n)$ амплитуда ва $Q^n:=[0,1]^n$ n ўлчовли кубдан иборат.

4-Теорема. *Фараз қилайлик $0<\alpha<1$, $\beta>0$ бўлсин. Шундай мусбат C_d топилиб, фазаси $P(a,x)$ бўлган (6) интеграл учун қуйидаги баҳо ўринли*

$$\left|I_{\alpha,\beta}\right| \leq \frac{C_d}{\|a\|^{\frac{1}{d}}}, \tag{7}$$

бунда $\|a\| = \sum_{|\lambda|\leq d}|a_\lambda|$.

1-Эслатма. *4-теорема Риччи-Стейн леммасининг аналогидир.*

1-Тасдиқ. Фараз қилайлик $P: R^n \to R$ *даражаси* $\leq d$ *бўлган кўпҳад ва* $|a| = \max\{|a_\lambda|, |\lambda| \leq d\}$ *бўлсин. Шундай мусбат* $C_{d,n}$ *ўзгармас топилиб, агар* $a^0 \in S^N$ *(бу ерда* $N+2$ *энг юқори даражаси* d *бўлган кўпҳадлар фазосидаги ўлчови) тайинланган нуқта ва* $|D^\alpha P(a^0, x)| \geq \delta > 0$, $\forall x \in [0,1]^n$ *(бунда* $\alpha \in Z_+^n$ *ҳамда* $|\alpha| \geq 2$*), бўлса у ҳолда қуйидаги баҳо ўринли*

$$\left|I_{\alpha,\beta}(\mu a^0)\right| \leq \frac{C_{d,n}}{|\mu|^{\frac{1}{|\alpha|}}},$$

бу ерда $S^N = \{|a| = 1\}$ *бирлик сфера ва* $\mu > 0$.

"Фазаси бир жинсли кўпҳад бўлган умумлашган тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳолари" номли параграфда, биз фазаси қуйидаги кўринишдаги умумлашган тебранувчан интегралларнинг баҳоларини қараймиз

$$P_3(a, x, y) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3, \tag{8}$$

бу ерда $a := (a_0, a_1, a_2, a_3) \in R^4$ коэффициентлар. Қуйидаги интегрални қарайлик

$$I_{\alpha,\beta}(a) = \int_{R^2} E_{\alpha,\beta}(iP_3(a, x, y))\psi(x, y)dxdy, \tag{9}$$

бунда ψ компакт ташувчили силлиқ функция.

Биз (9) интегрални коэффициентлари чексизга интилгандаги характерини ўрганамиз. Эвклид текислигининг ҳаракатлар гуруҳининг инвариантлари бўйича (9) интеграл учун баҳоларини оламиз. Бу кўпҳаднинг дискриминанти қуйидаги формула билан аниқланади:

$$D = 3a_1^2 a_2^2 + 6a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 - 4a_1^3 a_3 - a_0^2 a_3^2.$$

Бу $SL(2, \mathbb{C})$ гуруҳда инвариант.

5-Теорема. *(8) фазали (9) интеграл учун қуйидаги баҳо ўринли*

$$\left|I_{\alpha,\beta}(a)\right| \leq \frac{c\|\psi\|_{L^\infty}}{|D|^{\frac{1}{6}}}.$$

Бунда c ўзгармас a га боғлиқ ва $D \neq 0$ $P_3(a, x, y)$ *кўпҳаднинг дискриминанти.*

Энди бир ўлчовли интегрални қараймиз. Қуйидаги баҳо ёрдамчи натижа бўлиб, кейинги параграфда инвариант баҳони олиш учун муҳим ҳисобланади.

$0 < \delta < 1$ бўлсин. Қуйидаги интегрални қараймиз

$$J_{\alpha,\beta}(p, q) = \int_{\mathbb{R}} E_{\alpha,\beta}(i(x^3 + px + q))dx, \tag{10}$$

бунда $0 < \alpha < 1, \ \beta > 0$.

6-Теорема. *1) Фараз қилайлик* $\frac{1}{3} < \delta < \frac{1}{2}$. *бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $(p, q) \neq (0,0)$ *учун*

$$\left|J_{\alpha,\beta}(p, q)\right| \leq \frac{c_\delta}{\left(\frac{|p|^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)^{\frac{3\delta-1}{6}}}. \tag{11}$$

2) Фараз қилайлик $\frac{1}{2} < \delta < 1$. *У ҳолда*

$$\left|J_{\alpha,\beta}(p, q)\right| \leq \frac{c_\delta}{|D|^{\delta-\frac{1}{2}}\left(\frac{|p|^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)^{\frac{2-3\delta}{6}}}, \tag{12}$$

бунда $D=\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}\neq 0$ x^3+px+q *кўпҳаднинг дискриминанти ва* $c_\delta>0$ *фақатгина* δ *га боғлиқ бўлган мусбат сон.*

“Икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер функциясининг баҳолари” параграфида биз фазаси икки ўзгарувчили силлиқ функция бўлган умумлашган тебранувчан интегралларнинг баҳоларини қараймиз. Фазаси экспоненциал функция ўрнига икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер бўлган функцияни қўйиб умумлаштирамиз.

Ушбу параграфнинг асосий натижаси қуйидаги ҳисобланади.

7-Теорема. *Фараз қилайлик* f *координаталар бошининг етарлича кичик атрофида аниқланган икки ўзгарувчили силлиқ функция ва* $\psi\in C_0^\infty(U)$ *бўлсин.*

Агар $0<\alpha<1$, $\beta>0$, $h>1$ *ва* $\lambda>2$ *бўлса, у ҳолда қуйидаги баҳо ўринли*

$$\left|\int_U E_{\alpha,\beta}\big(i\lambda f(x_1,x_2)\big)\psi(x)dx\right|\leq \frac{C|\ln\lambda|^m\|\psi\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda^{\frac{1}{h}}}, \tag{13}$$

бунда h *функциянинг баландлиги ва* $m=0{,}1$ *Ньютон кўпёқлигининг карралиги.*

Агар $0<\alpha<1$, $\beta>0$, $h=1$ *ва* $\lambda>2$ *бўлса, у ҳолда қуйидаги баҳо ўринли*

$$\left|\int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda(x_1^2+x_2^2))\psi(x)dx\right|\leq \frac{C|\ln\lambda|\|\psi\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda} \tag{14}$$

ва

$$\left|\int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda(x_1^2-x_2^2))\psi(x)dx\right|\leq \frac{C|\ln\lambda|^2\|\psi\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda}, \tag{15}$$

бунда C *фаза ва амплитудага боғлиқ бўлмаган константа.*

2-Тасдиқ. *Фараз қилайлик* $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *ўлчовли функция бўлиб, барча нолдан фарқли ҳақиқий* $\lambda>2$ *лар ва барча мусбат* $\delta\neq 1$ *учун, қуйидаги ўринли бўлса*

$$\left|\int_\Omega e^{i\lambda f(x)}dx\right|\leq C|\lambda|^{-\delta}|\ln\lambda|^m, \tag{16}$$

бунда $m\geq 0$. *У ҳолда ушбу баҳо ўринли*

$$\left|x\in\Omega: |f(x)|\leq\varepsilon\right|\leq C_\delta\varepsilon^\delta\left|\ln\varepsilon\right|^m,\ \ \delta<1 \text{ учун}$$
$$\text{ва } \ \delta>1, \text{учун } \ |x\in\Omega: |f(x)|\leq\varepsilon|\leq C_\delta\varepsilon|,$$

бу ерда C_δ *фақатгина* δ *га боғлиқ.*

1-Натижа. *Фараз қилайлик* $a(x)=\begin{cases}1, \text{ when}|x|\leq\sigma,\\ 0, \text{ when}|x|\geq 2\sigma\end{cases}$ *ва* $a(x)\geq 0$ *ҳамда* $a\in C_0^\infty(R^2)$ *бўлсин. У ҳолда барча нолдан фарқли* $\lambda>2$ *ва мусбат* h *учун, қуйидаги баҳо ўринли*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda f(x)}a(x)dx\right|\leq C|\lambda|^{-\frac{1}{h}}|\ln\lambda|^m, \tag{17}$$

бунда $m\geq 0$, f *координаталар бошидаги силлиқ финит функция,* h *эса* f *функциянинг баландлиги ва* m *Ньютон кўпёқлигининг карралиги.*

2-Натижа. Фараз қилайлик $f(x_1,x_2)$ *силлиқ функция ва* $\overline{\Omega}$ *координаталар бошининг етарлича кичик атрофидаги компакт тўплами бўлса у ҳолда нолдан фарқли ихтиёрий ҳақиқий* $\varepsilon>2$ *сон учун қуйидаги баҳо ўринли*

$$|x\in\Omega: |f(x)|\leq\varepsilon|\leq C\varepsilon^{\frac{1}{h}}|\ln\varepsilon|^m,$$

бунда h f *функциянинг баландлиги ва* m *карралиги.*

2-Тасдиқ. *Ихтиёрий силлиқ, компакт ташувчига эга* $a(x,y)$ *ва* $h>1$ *учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\int_{\{|f(x,y)|\geq \frac{M}{\lambda}\}} \frac{a(x,y)}{1+\lambda|f(x,y)|}dxdy \leq \frac{C|\ln\lambda|}{\lambda^{\frac{1}{h}}}. \qquad (18)$$

бу ерда $f(x,y)$ *силлиқ функция.*

3-Эслатма. *Агар* $h=1$ *ва* $f(x,y)$ *силлиқ функция учун* $\nabla f(0,0)=0$ *бўлиб. Морс леммасини қўллаб* $f: x^2 \pm y^2$ *га эга бўламиз. У ҳолда биз қуйидаги иккита тўпламларни баҳолаймиз* $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, *бунда* $\Delta_1 := \{(x,y): |x^2 \pm y^2| \leq M\lambda, |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$ *ва* $\Delta_2 := \{(x,y): |x^2 \pm y^2| > M\lambda, |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$.

“Фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг баҳолари” номли бобда фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар ҳақидаги жамлаш масаласи қаралади.

Фараз қилайлик $\mathrm{P}(x,a)\in \mathrm{R}[x]$, $x\in \mathrm{R}^n$ ҳақиқий $a \in R^m$ коэффициентли кўпҳад бўлсин. Қуйидаги интегрални қарайлик

$$J(a) = \int_Q \exp\{2\pi i \mathrm{P}(x,a)\}dx,$$

бунда $Q=\{x\in \mathrm{R}^n : 0\leq x_l \leq 1, l=1,\dots,n\}$ n- ўлчовли бирлик куб. Бу функциянинг аҳамияти шундаки, у қуйидаги шаклнинг махсус интегралларида намоён бўлади

$$I_p := \int_{\mathrm{R}^m} |J(a)|^p \, da \qquad (19)$$

(19) Терри муаммосида, диофант системасининг бир қатор бутун сонли ечимлари учун асимптотик тасвир коэффициенти сифатида юзага келади. Шунинг учун (19) интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун p параметрнинг минимал қийматини топиш масаласи муҳим.

Муаммо: *Аниқ қийматини топинг* $\gamma = \inf\{p\geq 1: J\in \mathrm{L}^p(\mathrm{R}^m)\}$.

γ сонга тригонометрик интеграллар учун жамлаш кўрсаткичи деб аталади.

Ушбу бобда фазаси кўпҳад бўлган тригонометрик интеграллар учун γ сонни топиш масаласини кўрамиз. Фараз қилайлик, $P(x,s)\in \mathrm{R}[x]$ $x\in \mathrm{R}^k$ даги $s\in \mathrm{R}^N$ коэффициентли кўпҳад бўлсин. Q орқали R^k даги компакт тўпламни белгилаймиз.

“Фазаси тўла квадратик кўпҳад бўлмаган тригонометрик интегралларнинг баҳолари” номли параграфда $k=3$ ҳолдаги тригонометрик интегралларнинг жамлаш масаласини қараймиз ва жамлаш кўрсаткичини $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}]^{\boldsymbol{3}}$ учун аниқ топамиз.

P кўпҳад қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$P(x,A,b) = (Ax,x) + (\beta,x),$$

бу ерда $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$ ҳақиқий симметрик матрица, $\beta:=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ ва $(\cdot,\cdot)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси. Қуйидаги тригонометрик интегрални қарайлик

$$T(A,\beta)=\int_{[0,1]^3} exp(\, iP(x,A,\beta))dx. \tag{20}$$

Қуйидаги интегрални қарайлик

$$\theta=\int_{\mathsf{R}^6} |T(A,\beta)|^p\, d\beta d\alpha,$$

бунда $d\beta=d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3$ ва $d\alpha=d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$.

Ушбу тасдиқ ўринли:

8-Теорема. *θ интеграл $p>4$ учун яқинлашувчи ва $p\le 4$ учун узоқлашувчи. Хусусан бунда жамлаш кўрсаткичи $p_0=4$ га тенг.*

Қуйидаги мулоҳаза билан танишайлик:

$$\theta_\infty=\int_{\mathsf{R}^6} |T_\infty(A,\beta)|^p\, d\beta d\alpha.$$

3-Тасдиқ. *θ_∞ интеграл $p>4$ да яқинлашувчи ва $p\le 4$ да узоқлашувчи.*

Фараз қилайлик $Q:=[0,1]^3$ R^3 даги куб бўлсин ва

$$h(\beta)=\int_{R^3} e^{|x|^2}\chi_Q(x)e^{-2\pi i(\beta,x)}dx,$$

бунда $\chi_Q(x)$ Q тўпламнинг характеристик функцияси.

4-Тасдиқ. *Ихтиёрий мусбат ε сон учун, қуйидаги тасдиқ ўринли $h\in L_{1+\varepsilon}(\mathsf{R}^3)$.*

“Фазаси квадратик функциядан иборат тригонометрик интегралларнинг баҳолари” номли параграфда классик қўйилган масалани фазаси P квадратик кўпҳад ва $Q=[0,1]^k$ бирлик куб бўлганда қараймиз.

Фараз қилайлик P кўпҳад қуйидаги кўринишда бўлсин

$$P(x,A,b)=(Ax,x)+(b,x),$$

бу ерда $A=(a_{lm})^k{}_{l,m=1}$ симметрик $k\times k$ ўлчамли ҳақиқий матрица, $b:=(b_1,b_2,...,b_k)\in\mathsf{R}^k$ ва $(\cdot,\cdot)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси. Қуйидаги тригонометрик интегрални қарайлик

$$T(A,b)=\int_{\mathsf{R}^k} \exp(iP(x,A,b))\chi_K(x)dx,$$

бунда K компакт тўплам ва $\chi_K(x)$ унинг характеристик функцияси.

$$\theta=\int_{\mathsf{R}^N} |T(A,b)|^p\, dbda,$$

интегрални қарайлик, бунда $db=db_1 db_2...db_k$ and $da=\prod_{1\le l\le m\le k} da_{lm}$.

Қуйидаги тасдиқ ўринли:

9-Теорема. Фараз қилайлик *K компакт тўплам бўлсин, у ҳолда θ интеграл $p>2k+2$ яқинлашувчи ва агар K ички x^0 нуқтага эга бўлиб ва x^0 нуқтадан ўтувчи l тўғри чизиқ мавжуд бўлиб, $\{l\cap K\}$ тўплам фақатгина* *чекли нуқталарни сақласа, у ҳолда интеграл* $p \le 2k+2$ *да узоқлашади. Шундай қилиб, агар* K *компакт тўплам бўш бўлмаган ички нуқтадан иборат бўлса, у ҳолда жамлаш кўрсаткичи* $p_0 = 2k+2$ *га тенг.*

P **иккинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган ҳол**

$P(x,A)=(Ax,x)$ бўлсин.

10-Теорема. *Агар* $P(x,A)=(Ax,x)$ *ва* Q *кўпбурчак бўлсин, у ҳолда* $p>2k$ *да* θ *интеграл яқинлашувчи. Агар* $Q=[0,1]^k$, *бўлса, у ҳолда* $p \le 2k$ *да* θ *интеграл узоқлашувчи бўлади.*

Кўпбурчаклар маъносида биз махсусмас симплекслар бирлашмасини тушунамиз.

3-Эслатма. Бу ҳолда биз [Jong-Guk Bak, Sanghyuk Lee, 2004, "Restriction of the Fourier transform to a quadratic surface in $\mathbb{R}^n$". *Mathematische Zeitschrift* No.247, pp.409-422.] ишнинг натижаларини $\{x_i x_j\}_{i\le j=1}^{n}$ силлиқ сирт бўлмаганлиги туфайли қўллай олмаймиз.

4-Эслатма. Q тўпламга боғлиқ ҳолда, p кўрсаткич $2k$ дан кичик бўлиши ҳам мумкин. Масалан, агар $k=2$ ва Q маркази $(1,1)$ нуқтада бўлган етарлича кичик айланадан иборат бўлса, у ҳолда $p>3$ да θ интеграл яқинлашувчи бўлади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\theta_\infty = \int_{\mathbb{R}^N} |T_\infty(A,b)|^p \, dbda,$$

бунда

$$N=\frac{k(k+2)}{2}.$$

5-Тасдиқ. θ_∞ *интеграл* $p>2k+2$ *да яқинлашувчи ва* $p \le 2k+2$ *да узоқлашувчи.*

11-Теорема. *Фараз қилайлик* D *компакт соҳа* $\hat{\chi}_D \in L_q(R^2)$ *ва* $T(A)=\int_D e^{i(Ax,x)}dx$ *бўлсин. У ҳолда* $p>6-\frac{2}{q}$ *да* $T \in L^p(\mathbb{R}^3)$. *Бундан ташқари, агар* $\hat{\chi}_D \in L_{1+0}(R^2)$ *бўлса, у ҳолда* $p>4$ *да* $T \in L^p(\mathbb{R}^3)$ *ўринли.*

5-Эслатма. [V. V.Lebedev, 2013, "On the Fourier transform of the characteristic functions of domains with C^1 boundary". *Func. anall. and its appl.* vol. 47, no. 1. pp. 33-46.] ишнинг натижасидан шундай кўпбурчакдан фарқли шундай D тўплам мавжудки, ушбу $\hat{\chi}_Q \in L_{1+0}(R^2)$ ўринли.

3-Натижа. Агар D$\subset R^2$ компакт тўплам ва $\partial D \subset C^1$ бўлса, у ҳолда $p>4.5$ учун ушбу $T \in L^p(\mathbb{R}^3)$ муносабат ўринли.

“Тригонометрик интеграллар учун L^p **– чегараланганлик” номли** параграфида фазаси учинчи даражали бир жинсли ва чизиқли қисмлар йиғиндисидан иборат кўпҳад бўлган тригонометрик интеграллар учун жамлаш масаласи қаралади. Тригонометрик интегралларни баҳолаб, жамлаш кўрсаткичининг аниқ қиймати топилади.

Биз амплитуда функцияси ψ ҳам, фаза функцияси F ҳам параметрга боғлиқ бўлган ҳолат учун масалани кўриб чиқамиз. Аввал оддий фазали тебраниш интеграллари учун жамлаш масаласини ҳал қиламиз. Бундан ташқари, биз қутб типидаги махсусликни ўз ичига олган амплитудали бир ўлчовли тригонометрик интегралларнинг характерларини ўрганамиз. Ниҳоят, биз узлуксиз амплитудали ва алгебраик (лекин кўпҳад бўлмаган) фазали функцияли тригонометрик интегралларнинг жамлаш масаласини кўриб чиқамиз. Олинган натижалар икки ўлчовли тригонометрик интегралларни жамлаш масаласини ечишда қўлланилади.

$F(x,y,a)$ икки ўзгарувчининг кўпҳад функцияси бўлсин:

$$F(x,y,a) := P_3(x,y,a_3) + P_1(x,y,a_1), \tag{21}$$

бунда $P_3(x,y,a_3) = a_{30}x^3 + 3a_{31}x^2y + 3a_{32}xy^2 + a_{33}y^3,$ $P_1(x,y,a_1) = a_{10}x + a_{11}y.$ $a_3 := (a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}),$ $a_1 := (a_{10}, a_{11})$ лар $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^2$ даги мос равишдаги векторлар.

Параграфнинг асосий натижалари қуйидаги теоремалардир.

12-Теорема. *Фараз қилайлик* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ *ва*

$$J(a,\psi) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{iF(x,y,a)}\psi(x,y)dxdy. \tag{22}$$

бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $p > 8$ *учун* $J(\cdot,\psi) \in L^p(\mathbb{R}^6)$ *ўринли. Бундан ташқари, агар* $\psi(\cdot,\cdot)$ *координаталар бошининг етарли кичик атрофидаги* $\psi(0,0) \neq 0$ *бўлган силлиқ функция бўлса, у ҳолда* $p \leq 8$ *учун* $J(\cdot,\psi) \notin L^p(\mathbb{R}^6)$.

Энди фаза функцияси (21) ва $\psi(x,y)\chi_Q(x,y)$ узилишга эга амплитуда функцияли қуйидаги тебранувчан интегрални кўриб чиқамиз

$$J(a,\psi,\chi_Q) := \int_Q e^{iF(x,y,a)}\psi(x,y)dxdy, \tag{23}$$

бу ерда $\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ ва $Q := [0,1]\times[0,1]$.

13-Теорема. *Агар* $J(\cdot,\psi,\chi_Q)$ *(23) кўринишдаги интеграл бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $p > 8$ *учун* $J(\cdot,\psi,\chi_Q) \in L^p(\mathbb{R}^6)$. *Бундан ташқари, агар* $\psi(\cdot,\cdot)$ *координаталар бошининг етарли кичик атрофидаги* $\psi(0,0) \neq 0$ *бўлган силлиқ функция бўлса, у ҳолда* $p \leq 8$ *учун* $J(\cdot,\psi,\chi_Q) \notin L^p(\mathbb{R}^6)$.

4-Натижа. $J(a,\chi_Q) = \int_Q e^{iF(x,y,a)}dxdy$ интеграл учун $p > 8$ да $J(\cdot,\chi_Q) \in L^p(R^6)$ муносабат ўринли ва агар $p \leq 8$ бўлса, у ҳолда $J(\cdot,\chi_Q) \notin L^p(R^6)$. Бошқача айтганда, жамлаш кўрсаткиичи $\gamma = 8$.

Амплитудаси параметрга боғлиқ бир ўзгарувчили тебранувчан интегралларни жамлаш

$B \subset \mathbb{R}^3$ маркази координаталар бошида бўлган ёпиқ куб бўлиб, $\mathcal{A}_B$ орқали қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times B \times \mathbb{R})$ функциялар синфини белгилаймиз:

• ихтиёрий $\phi \in \mathcal{A}_B$ учун, шундай $K_\phi \subset \mathbb{R}^2$ компакт тўплам мавжуд бўлиб, ихтиёрий $(\xi,b) \in B \times R$ учун $supp\phi(\cdot,\xi,b) \subset K_\phi$ бўлсин;

• ихтиёрий $\phi \in A_B$ ва $N \geq 0$ учун $C = C(N,\phi) > 0$ мавжуд бўлиб $(\xi, b) \in B \times R$ учун

$$\|\varphi(\cdot,\xi,b)\|_{C^N(R^2)} \leq C$$

бўлсин.

$$R^2 \times R^3 \times R = \{(a_1,a_2,\eta,b): \eta \in R^3, a_1,a_2,b \in R\},$$

фазодаги R^6 да Лебег ўлчовига нисбатан абсолют узлуксиз бўлган, $\mu = b^3 da_1 da_2 d\eta db$ ўлчов билан танишамиз. μ-ўлчовли $X \subset R^2 \times R^3 \times R$ қисм тўпламдаги p-даражаси билан интегралланувчи барча μ-ўлчовли функциялар синфини $L^p(X,\mu)$ орқали белгилаймиз.

$\phi \in A_B$ учун қуйидаги тебранувчан интегрални қараймиз

$$J^1(a_1,a_2,\eta,b) := \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}} \int_R \varphi(y, b^{\frac{2}{3}}|\eta_3 y^2 + \eta_1|, \eta, b) e^{i(a_2 y^3 + a_1 y)} dy, \qquad (24)$$

бунда $\eta = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, $b \neq 0$.

Ушбу тўпламни қарайлик

$$X := \{(a_1,a_2,\eta,b) \in R^2 \times R^3 \times (R \backslash [-1,1]): |a_1|,|a_2| \leq |b|, \eta \in B\}.$$

6-Тасдиқ. *Ихтиёрий $\phi \in A_B$ ва $p > 8$ учун $J^1 \in L^p(X,\mu)$ ўринли.*

Кичик амплитудали тебранувчан интегралларнинг баҳолари

Бунда $\frac{\psi(y,\eta,b)}{b|\eta_3 y^2 + \eta_1|}$, шаклдаги тебранувчан интегралларининг баҳосини қараймиз, бунда $\psi(y,\eta,b)$ силлиқ ва $\sup\psi(\cdot,\eta,b) \subset [-d,d] \cap \{b^{\frac{2}{3}}|\eta_3 y^2 + \eta_1| > 1\}$ шартни қаноатлантирувчи функция ҳамда $V_{-d}^{d}[\psi] \lesssim 1$, бу ерда d мусбат ҳақиқий сон. Тушунарлики, $\frac{\psi(y,\eta,b)}{b|\eta_3 y^2 + \eta_1|}$ функция $\boldsymbol{b^{\frac{2}{3}}|\eta_3 y^2 + \eta_1| > 1}$ маъносидаги кичик амплитуда функция.

Қуйидаги тебранувчан интегрални қарайлик

$$J^2(a_1,a_2,\eta,b) := \int_R \frac{\psi(y,\eta,b) e^{i(a_2 y^3 + a_1 y)}}{b|\eta_3 y^2 + \eta_1|} dy.$$

7-Тасдиқ. *Ихтиёрий $p > 8$ учун $J^2 \in L^p(X,\mu)$ ўринли.*

Узилишга эга бўлган амплитуда функцияли тебранувчан интегралларнинг баҳолари

Ушбу тебранувчан интегрални қараймиз

$$J^3(a_1,a_2,\eta,b) := \int_R \frac{\psi(y,a,\eta,b) e^{iF_2(y,a,\eta,b)}}{b^{\frac{1}{2}} |\eta_3 y^2 + \eta_1|^{\frac{1}{4}}} dy, \qquad (25)$$

бунда $sup\,\psi(\cdot,a,\eta,b) \in [-d,d] \cap \left\{b^{\frac{2}{3}}|\eta_3 y^2 + \eta_1| > 1\right\}$, $F_2(y,a,\eta,b) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} b|\eta_1|^{\frac{3}{2}}|\sigma y^2 + 1|^{\frac{3}{2}} + a_2 y^3 + a_1 y$ ва $\sigma = \frac{\eta_3}{\eta_1}$.

Агар $\eta_3\eta_1 < 0$ бўлса, у ҳолда y ёпиқ нуқтани сақловчи амплитуда функцияни сақлайди. Бу тебранувчан интегралларни ўрганиш жараёнидаги нозик масала ҳисобланади.

8-Тасдиқ. *Ихтиёрий $p > 8$ учун $J^3 \in L^p(X,\mu)$ ўринли.*

Натижанинг аниқлиги

$|a_{30}| = \max\{|a_{3i}|, i=\overline{0,3}\}$ ва $|a_{11}| \le 1$, шартларда $p \le 8$ учун $J \notin L^p(\mathsf{R}^6)$ ни қаноатлантирувчи (21) шаклдаги кўпҳадни қарайлик.

(21) кўпҳадни қуйидаги шаклда ифодалаймиз

$$F(x,y,a) = a_{30}\left(x_1^3 + \xi_2 x_1 y_1^2 + \xi_3 y_1^3\right) + a_{10}x + a_{11}y,$$

бунда $\xi_2 = \frac{3a_{30}a_{32} - 3a_{31}^2}{a_{30}^2}$ ва $\xi_3 = \frac{a_{30}^2 a_{33} + 2a_{31}^3 - 3a_{30}a_{31}a_{32}}{a_{30}^3}$ ҳамда $|\xi_2| \le 6$, $|\xi_3| \le 6$.

9-Тасдиқ. *Координаталар бошининг атрофида $\psi(0,0) \ne 0$ бўлиб, ҳар бир силлиқ $\psi \in C_0^1(\mathsf{R}^2)$ функция учун, шундай $\lambda_0, \varepsilon, a_1$ сонлар топилиб, $|\xi_2 a_{30}|^{\frac{2}{3}}| < \varepsilon$, $|a_{10}| \le \varepsilon a_{30}|^{\frac{1}{3}}$ шартлар бажарилганда қуйидаги баҳо ўринли*

$$|J(a)| \ge C/|a_{30}|^{1/3}.$$

“Фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг текис ва инвариант баҳолари” номли бобида фазаси D_∞ махсусликга эга бўлган силлиқ функцияли тебранувчан интегралларнинг текис баҳолари ва фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳоларини қараймиз. [E. M. Stein, D. H. Phong, J. A. Sturm *On the growth and stability of real-analytic functions*, Amer. Journal of Math. 121 (1999), no.3, 519–554.] ишда кичик деформацияларда ҳам интеграл ҳақиқий аналитиклик масаласи қаралган. Бир ўзгарувчили интегралларнинг баҳолари тўлиқ қаралган. В.Н.Карпушкиннинг ишида фаза функцияси икки ўзгарувчили аналитик функция бўлган ҳолда қаралган. Уч ўлчовли ҳолда Варченконинг мисоли умумий ҳолда ўринли эмаслигини кўрсатди.

“Фазаси силлиқ бўлган тебранувчан интегралларнинг баҳолари” номли параграфда фазаси D_∞ махсусликга эга бўлган тебранувчан интегралларнинг текис баҳоси қаралади. Ушбу баҳо аниқ ва В.Н.Карпушкин ишининг аналоги ҳисобланади.

Фараз қилайлик $U \subset V \subset \mathsf{R}^2$ координаталар бошининг атрофи, $\overline{U}(\overline{V})$ эса $U(V)$ ёпиғи бўлсин. $f : \overline{V} \to \mathsf{R}$ функциянинг кўриниши қуйидагича (бунда $f \in C^N(\overline{V})$, $(N \ge 8)$) бўлсин

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + g(x_1, x_2), \tag{26}$$

бу ерда $g \in C^N(V)$, барча $\alpha_1 + \alpha_2 \le 3$ учун $D^\alpha g(0,0) = 0$, ҳамда $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \in Z_+^2$ мултииндекс, $Z_+ = \{0\} \cup \mathsf{N}$ номанфий бутун сонлар.

Фараз қилайлик $\vartheta_{C^8(\overline{V})}(\varepsilon) := \{F \in C^8(\overline{V}), \|F\|_{C^8(\overline{V})} < \varepsilon\}$ бўлсин.

Ушбу параграфнинг асосий натижаси қуйидагидан иборат.

14-Теорема. $f \in C^8(\overline{V})$ *(26) шаклдан иборат бўлсин. У ҳолда шундай мусбат ε сон ва $U \subset V$ координаталар бошининг шундай атрофи мавжуд бўлиб $a \in C_0^1(U)$ ва $F \in C^8(\overline{V})$, $\|F\|_{C^8(\overline{V})} < \varepsilon$, функциялар учун қуйидаги баҳо ўринли:*

$$\left|\int_U e^{i\lambda(f+F)} a(x)dx\right| \frac{C\|a\|_{C^1}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

“Фазаси тўртинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг текис баҳолари” номли параграфда фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг текис баҳоларини қараймиз.

Фараз қилайлик, $U \subset V \subset \mathbb{R}^2$ координаталар бошининг чегараланган атрофи, $\overline{U}(\overline{V})$ эса $U(V)$ нинг ёпиғи бўлсин. $f : \overline{V} \to \mathbb{R}$ қуйидаги кўринишда берилган (бу ерда $f \in C^N(\overline{V})$, $(N \geq 8)$) бўлсин:

$$f(x_1, x_2) = f_\pi(x_1, x_2) + g(x_1, x_2), \tag{27}$$

бунда $f_\pi(x_1, x_2)$ $f_\pi(0,0)$ карралиги 2 (масалан $f_\pi(x)$ тўртинчи даражали кўпҳад маркази координалар бошида бўлган бирлик айланада иккитадан ортиқ илдизга эга эмас) бўлган илдизга эга бўлган тўртинчи даражали бир жинсли кўпҳад ва $g \in C^N(V)$ шундайки, ихтиёрий $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 4$ учун $D^\alpha g(0,0) = 0$ ҳамда $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ мултииндекс, $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ номанфий бутун сонлар.

Параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат.

15-Теорема. $f \in C^8(\overline{V})$ *(27) шаклдан иборат бўлсин. У ҳолда шундай мусбат* ε *сон ва координаталар бошида атроф мавжудки* $U \subset V$, $a \in C_0^1(U)$ *ва* $F \in C^8(\overline{V})$, $\|F\|_{C^8(\overline{V})} < \varepsilon$ *функциялар учун қуйидаги баҳо ўринли:*

$$\left| \int_U e^{i\lambda(f+F)} a(x) dx \right| \leq \frac{C \|a\|_{C^1} \ln(2 + |\lambda|)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

“Икки ўзгарувчили тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳолари” номли параграфида фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳоларини қараймиз. Олинган баҳолар Поповнинг тригонометрик интегралларнинг ўзгармас баҳолари бўйича натижаларини фазаси учинчи даражали кўпҳад бўлган ҳолда яхшилайди.

$W_1^n(\mathbb{R}^n)$ орқали Соболев фазосини белгилаймиз ва унда нормани қуйидагича аниқлаймиз

$$\|\phi\|_{W_1^n(R^n)} = \int_{R^n} \left(\sum_{|\alpha| \leq n} |D^\alpha \phi| \right) dx, \tag{28}$$

бунда $D^\alpha \varphi$ φ дан олинган умумлашган маънодаги ҳосила.

P кўпҳад қуйидагича берилган бўлсин

$$\mathrm{P}(x_1, x_2, a) = P_3(x_1, x_2, a_3) + P_2(x_1, x_2, a_2) + P_1(x_1, x_2, a_1),$$

бунда $P_3(x_1, x_2, a_3) := a_{30} x_1^3 + 3a_{31} x_1^2 x_2 + 3a_{32} x_1 x_2^2 + a_{33} x_2^3$, $P_2(x_1, x_2, a_2) := a_{20} x_1^2 + 2a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$ ва $P_1(x_1, x_2, a_1) := a_{10} x_1 + a_{11} x_2$.

Қуйидаги интегрални қараймиз

$$J = \int_{R^2} e^{iP(x_1, x_2, a)} \phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \tag{29}$$

бу урда $\varphi \in W_1^2(\mathbb{R}^2)$. Шубҳасиз, охирги интеграл одатдаги Лебег маъносида яқинлашади.

Параграфнинг асосий натижаси қуйидагидан иборат.

16-Теорема. *Шундай мусбат* C *мусбат сони мавжудки, ихтиёрий* $\varphi \in W_1^2(\mathbb{R}^2)$ *учун ушбу баҳо ўринли*

$$|J| \leq \frac{C \|\phi\|_{W_1^2(R^2)}}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}}}, \tag{30}$$

бунда $D(P_3) := 3a_{31}^2 a_{32}^2 + 6a_{30}a_{31}a_{32}a_{33} - 4a_{30}a_{32}^3 - 4a_{31}^3 a_{33} - a_{30}^2 a_{33}^2$ $P_3(x_1, x_2, a_3)$ *кўпҳаднинг дискриминанти.*

Ушбу 16-теоремани ва [I.A. Ikromov, Invariant estimates of two-dimensional trigonometric integrals. Math. USSR Sb. Vol. 76 (1990), No. 2: 473-488.] ишнинг 4-теоремасини билан бирлаштириб, қуйидаги натижани оламиз.

17-Теорема. *(29) интеграл учун қуйидаги баҳо ўринли:*

$$|J| \leq \frac{C\|\phi\|_{W_1^2(R^2)}}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}} + |H|^{\frac{1}{4}} + N^{\frac{1}{6}}}, \tag{31}$$

бунда $N := a_{30}^2 + 3a_{31}^2 + 3a_{32}^2 + a_{33}^2$, $H := a_{31}^2 + a_{32}^2 - a_{30}a_{32} - a_{31}a_{33}$.

Қуйидаги мулоҳаза Дюстермаат теоремасининг умумлашган Эйри функциясининг $D_4^{\pm}$ махсусликларга боғлиқ бўлган чегараланганлик ҳақидаги аналоги ҳисобланади.

18-Теорема. *Шундай мусбат* C *константа топилиб, ихтиёрий компакт* T *учбурчак учун қуйидаги баҳо ўринли*

$$\left|\int_T e^{i\mathrm{P}} dx_1 dx_2\right| \leq \frac{C}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}}}.$$

6-Эслатма. [I.A. Ikromov, Invariant estimates of two-dimensional trigonometric integrals. Math. USSR Sb. Vol. 76 (1990), No. 2: 473-488.] *ишнинг 4-теоремаси қуйидаги натижани беради*

$$|J| \leq \frac{C\|\phi\|_{W_1^2(R^2)}}{\frac{|D(P_3)|^{\frac{2}{3}}}{N} + N^{\frac{1}{6}} + |H|^{\frac{1}{4}}}.$$

Шубҳасиз, $\frac{|D(P_3)|^{\frac{2}{3}}}{N}$ махражнинг бош ҳади бўлган вақтда бизнинг (31) баҳодан ёмонроқлиги кўринади. Олинган баҳо T учбурчакга боғлиқ эмаслигини эслатамиз.

7-Эслатма. [D. A. Popov, Remarks on uniform combined estimates of oscillatory integrals with simple singularities Izvestiya: Mathematics (2008),72(4): 793.], *да умумийроқ бўлган қуйидаги кўриниш берилган бўлиб*

$$\mathrm{P}(x,a) = P_3(x, a_3) + P_2(x, a_2) + P_1(x, a_1) + R(x),$$

бунда $R(x) = O(|x|^4)$, *ҳамда (31) баҳо ўринли эмас. Бу ҳолда тебранувчан интегралларнинг характерини ўрганиш мураккаброқдир.*

ХУЛОСА

Диссертация иши тебранувчан интегралларнинг текис, классик группалар инвариантлари орқали ифодаланган баҳолари, фазаси учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган икки каррали тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳолари, бу интеграллар учун йиғиш масаласи, ҳамда фазаси учинчи даражали ва биринчи даражали кўпҳадларнинг йиғиндиси бўлган икки каррали тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳолари масалаларига бағишланган.

Диссертацияда олинган илмий натижалар асосида қуйидаги хулосаларга келинди:

1) D_∞ махсусликга эга бўлган Миттаг-Леффлер функцияси учун баҳолар олинган.

2) Фазаси $D_4^\pm$ ва A_∞^2 махсусликларга эга бўлган умумлашган тебранувчан интегралларнинг баҳолари олинган.

3) Умумлашган тебранувчан интеграллар учун Риччи-Стейн леммасининг аналоги исботланган.

4) Фазаси икки ўзгарувчили бир жинсли учинчи даражали кўпҳад бўлган умумлашган тебранувчан интеграллар учун инвариант баҳолар олинган.

5) Фазаси бир ўзгарувчили учинчи даражали кўпҳад учун инвариант баҳо олинган.

6) Икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер функцияси учун баҳо олиган.

7) Фазаси тўла квадрат бўлмаган икки ўзгарувчили тебранувчан интегралларнинг аниқ жамлаш кўрсаткичи топилган.

8) Фазаси тўла квадрат бўлган кўп ўзгарувчили тебранувчан интегралларнинг аниқ жамлаш кўрсаткичи топилган.

9) Фазаси бир жинсли учинчи даражали ва чизиқли функциялар йиғиндисидан иборат икки ўзгарувчили тебранувчан интегралларнинг аниқ жамлаш кўрсаткичи топилган.

10) Фазаси D_∞ махсусликга эга бўлган силлиқ функция бўлган тебранувчан интеграллар учун текис баҳо олинган.

11) Фазаси тўртинчи даражали бир жинсли икки ўзгарувчили силлиқ функция бўлган тебранувчан интеграллар учун текис баҳолар олинган.

12) Фазаси учинчи даражали икки ўзгарувчили кўпҳад учун инвариант баҳо олинган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY
INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKY

SAFAROV AKBAR RAKHMANOVICH

GENERILIZED OSCILLATORY INTEGRALS AND THEIR APPLICATIONS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand – 2023

The theme of the dissertation of doctor of sciences (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestetion Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2023.2. DSc/FM___.

The dissertation was completed at Samarkand State University and Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky.

The dissertation abstract in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) is posted on the web page of the Scientific Council (www.samdu.uz) and on the Information and Educational Portal «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Scientific advisor:	**Ikromov Isroil Akramovich** doctor physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Khalmukhamedov Alimdjan Rakhimovich** doctor physical and mathematical sciences, professor
	Imomkulov Sevdiyar Akramovich doctor physical and mathematical sciences, professor
	Muminov Zahriddin Eshqobilovich doctor physical and mathematical sciences, dotsent
Lead organization:	**Urgench state university**

The dissertation will be defended on "____" ______ 2023 at ____ hours at the meeting of the Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: 140104, Samarkand, University Boulevard, 15. Tel.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

The dissertation can be found at the Information and Resource Center of Samarkand State University (registered under No. _____). (Address: 140104, Samarkand, University Boulevard, 15. Tel.: (+99866) 231-06-32, fax: (99866) 235-19-38).

The dissertation abstract has been sent out «____» _______________2023 year.
(mailing protocol registry №________ from «____» _______________2023 year).

A.S. Soleev
Chairman of the Scientific Council for the award of academic degrees, D.Ph.M.S., professor

A.M. Khalkhuzhaev
Scientific Secretary of the Scientific Council for the award of academic degrees, D.Ph.M.S.

S.N.Lakaev
Chairman of the Scientific Seminar under Scientific Council on award of scinetific degrees, D.Ph.M.S., professor

ITRODUCTION (abstract of DSc dissertation)

Actuality and demand of the theme of dissertation. Many scientific and practical researches carried out on a global scale are mostly focused on the study of uniform estimates for oscillattory integrals. This is certainly reflected in the extensive literature available on the subject. The method of trigonometric sums introduced in the twenth of the 20th century and the expression of the asymptotic character of these sums through trigonometric integrals became the basis for the development of the theory of oscillatory integrals. Thus, important area for the study of oscillatory integrals is their application to analytic number theory. There are two aspects to the study of the nature of such integrals, one of which is related to trigonometric sums and the other to trigonometric integrals. One of the important issue remains the development of research on the behavior of oscillatory integrals.

In world science, attention was paid to the current directions of mathematical analysis with practical application of fundamental sciences. In particular, special attention was paid to the study of the character of oscillatory integrals. Remarkable results were obtained on the study of Fourier transforms of smooth Borel measures supported to hypersurfaces of Euclidean space and the Restriction problem of Fourier transforms to hypersurfaces. Algebra and mathematical analysis, theory of dynamical systems, applied mathematics and mathematical modeling are important scientific researches from a practical-theoretical point of view.

In our republic, great attention is paid to fundamental sciences of scientific and practical importance, in particular, special attention is paid to the development of the theory of harmonic analysis. Conducting scientific research at the level of international standards in the priority areas of "Algebra and its applications, differential equations and their applications, mathematical modeling of nonlinear systems, dynamic systems and their applications, stochastic analysis, medical-biological informatics, computational mathematics[3]" are the main tasks of mathematics and were defined as the directions of activity. The development of the theory of oscillatory integrals of harmonic analysis issues is considered to be of great scientific importance in ensuring the implementation of this decision.

Conducting research at the level of international standards in the priority areas of "Algebra and its applications, differential equations and their applications, linear systems, dynamic systems and mathematical modeling of their applications, stochastic analysis, medical-biological informatics, computational mathematics" is identified as one of the main tasks of the scientific researches. To ensure the implementation of the decision, it is important to develop theory of oscillatory integrals and estimates for convolution operators.

The subject and object of our dissertation are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February

---

[3] Decision of the President of the Republic of Uzbekistan No. PQ-4387 of July 9, 2019 "On state support for the further development of mathematics education and sciences, as well as measures to fundamentally improve the activities of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan named after V.I. Romanovsky"

7, 2017, PF-4947, "On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan", PQ-4387 dated July 9, 2019 "On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan" and PQ-4708 of May 7, 2020 "On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics" as well as in other regulations related to this activity.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of the Republic of Uzbekistan, IV, "Mathematics, Mechanics and Computer Science".

Review of foreign research on the topic of the dissertation.[4] The scientific research on generalized oscillatory integrals and their applications in higher education institutions and scientific research centers of leading foreign countries, including Ghent Analysis and PDE Center (Belgium), School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London (England), Christian- Extensive research is being conducted at Albrechts-Universitat zu Kiel (Germany), Ganja State University (Azerbaijan), Moscow State University (Russia).

As a result of research conducted in the world on generalized oscillatory integrals and their applications, a number of topical issues were solved, including the following scientific results: estimates of one-variable generalized oscillatory integrals were obtained (Ghent Analysis and PDE Center (Belgium), School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London (England)); found invariant estimates of oscillatory integrals (Moscow State University (Russia)); Summation exponents for polynomial phase oscillatory integrals partially were found (Ganja State University (Azerbaijan)).

Today, there are a number of researches on generalized oscillatory integrals and their applications, including: obtaining invariant estimates of oscillating integrals with phase polynomials, obtaining uniform estimates of oscillatory integrals with special polynomials phase, summation of oscillatory integrals with homogeneous third-order polynomials with phase two variables scientific research works are being carried out in the priority areas such as finding the oscillating index, obtaining estimates of the oscillatory integrals associated with the Mittag-Leffler function, and finding the asymptotics of the oscillatory integrals associated with the Mittag-Leffler function.

The degree of scrutiny of the problem. Oscillatory (trigonometric) integrals first appeared in 1818 in Fresnel’s work related to the study of light intensity. Using such integrals, he solved the problems of edge, screen, and small-hole diffraction. In 1838, Airy used trigonometric integrals to study the intensity of light around caustics. A caustic is a collection of light whose intensity is much higher than at other ordinary points. Later, in 1887, in the studies of Kelvin and Riemann, the

[4] Review of foreign research on the topic of the dissertation: https://www.springer/com/gp/mathematics; https://onlinelibrary.wiley.com/; www.mathnet.ru; www.scholar.google.com; Developed from www.elsevier.com/locate/camw and other sources.

stationary phase method was used to study the character of oscillatory integrals. In 1891-1892, Poincare made extensive use of oscilatory integrals in his research on the intensity of light. In particular, he proved that when light passes through a caustic, the phase shifts to $\frac{\pi}{2}$. This assertion was previously confirmed experimentally by Gui. In the later researches, Pearce, Ludwig, Ursell, Connor and other scientists appeared in mathematical physics applications of oscillatory integrals with special phases. In 1974, in the work of J. Dustermat, generalized Airy functions, more precisely, functions related to Arnold's elliptic singularities, were studied.

In 1973, V. I. Arnold proposed the following hypothesis. Suppose that the phase function of the oscillatory integral depends on some parameters. Of course, the phase function can be a smooth (even analytic) function of parameters and "basic" variables (integral variables). That is, let us have a family of phase functions. Let these parameters vary around the zero point at the assigned values. Therefore, they are sometimes called small parameters. Let us know the oscillation index of the oscillatory integral (that is, the phase function is determined by the value of the parameter at the zero point). Then, when the parameters change around the zero point sufficiently small, the oscillatory integral depending on the parameters is evaluated by the level of a large parameter arbitrarily smaller than this oscillatory index. In other words, the oscillation index is a semi-continuous function of the "subparameters" of the phase. This issue is also covered in Arnold's Problems (an expanded English edition of this book was published in 2004).

Arnold's hypothesis was proved by V. N. Karpushkin. More specifically, smooth (with respect to a sufficiently small "shift" of the phase function) estimates of the double oscillatory integrals were obtained, with the phase function being analytic. In other words, V. N. Karpushkin proved that V. I. Arnold's hypothesis is valid for oscillatory integrals with analytic phase. This result was later proved in Hasanov's PhD thesis for some special deformations of smooth functions.

The important area for the study of oscillatory integrals is their application to analytic number theory. It is known that in the studies of I.M. Vinogradov, the integral corresponding to the number of solutions of Diophantine equations (the so-called Vinogradov integral) occupies an important place. However, there are two aspects of investigating the behavior of such integrals, one of which is related to trigonometric sums and the other to trigonometric integrals. In 1949, the Chinese mathematician Hua Lo Gen posed the problem of finding the minimum exponent of the trigonometric integral belonging to a suitable space. This issue has been considered in a number of works, and estimates obtained by Vinogradov are based on variant of classical Van der Korput lemma. This problem was solved in 1979 by G.I. Arkhipov, V.N. Chubarikov, and A.A. Karatsuba for one-dimensional oscillatory integrals, and they found an upper boun for multiple trigonometric integrals. However, this issue is still open in general.

After the works of J. Mokenhoupt, interest in this issue increased. It turns out that this problem is related to the Restriction problem of Fourier transforms of integrable functions. More specifically, it becomes clear that the lower bound for the summation exponent is the same as that obtained for the bounded operator. It should be noted that the estimate obtained by G.I. Arkhipov, V.N.Chubarikov and A.A.Karatsubas allows to obtain the sharp lower estimate for the index of the space of integrable functions with some degree. In this case, the Restriction problem on model curves with torsion is considered. However, the boundedness problem for curves of finite order and the Restriction problem of the Fourier transform in Euclidean space are still open.

The connection of the topic of the dissertation with the research work of the higher educational institution, in which the dissertation is carried out. The dissertation was done in accordance with the planned theme of scientific research of fundamental project OT-F4-69 "Harmonic analysis, power geometry and their applications to the problems of mathematical physics" (OT-F4-69, Samarkand State University, 2017-2020).

The aim of the research is to obtain estimates of generalized oscillatory integrals and to find an exact summation index.

Research tasks:

obtain smooth estimates for oscillatory integrals with a discontinuity of the amplitude function using the transition method in accuracy ε;

estimation for generalized oscillatory integrals associated with the Mittag-Leffler function, whose phase function has singularities D_∞, $D_4^\pm$ and A_r;

obtain smooth estimates for the generalized and classical oscillatory integrals associated with the two-variable Mittag-Leffler function, the phase function of which is polynomial;

for oscillating integrals whose phase is a third-order polynomial, obtaining estimates of the group of classical actions in the Euclidean plane through invariants;

to find the exact summation exponent in the coefficient space of the classical oscillatory integrals where the phase function is a polynomial of the second and third order.

The research object. Consists of generalized oscillatory integrals whose phase is polynomial.

The research subject. State of oscillating integrals when the coefficients of the phase function tend to infinity, estimation of oscillatory integrals by means of invariants of classical groups

Research methods. The theory of singularities of differential maps, the theory of analytic functions, and asymptotic methods of analysis were used in the thesis work.

The scientific novelty of the research is as follows:

it is obtained smooth estimates for oscillatory integrals with a discontinuity of the amplitude function using the transition method in accuracy ε;

it is estimated for generalized oscillatory integrals associated with the Mittag-Leffler function, whose phase function has singularities D_∞, $D_4^\pm$ and A_r;

it is obtained smooth estimates for the generalized and classical oscillatory integrals associated with the two-variable Mittag-Leffler function, the phase function of which is polynomial;

for oscillating integrals whose phase is a third-order polynomial is obtained estimates of the group of classical actions in the Euclidean plane through invariants;

it is finded the exact summation exponent in the coefficient space of the classical oscillatory integrals where the phase function is a polynomial of the second and third order.

The practical results of the research are as follows:

it consists in the fact that the exact summation exponent of the oscillatory integrals whose phase is a third-order polynomial in two variables is found;

it can be used to obtain the proof of Van der Korput's lemma for generalized oscillatory integrals whose phase is a polynomial in two or more variables;

estimates of generalized oscillating integrals can be used to estimate solutions of partial differential equations of fractional order.

The reliability of the results is based on the use of methods of mathematical analysis, functional analysis, mathematical physics, differential equations, harmonic analysis theory, as well as mathematical proofs by applying rigorous mathematical considerations.

Scientific and practical significance of research results. The scientific significance of the research results is explained by the fact that the existence of invariant estimates of the generalized oscillatory integrals, which is a third-order polynomial phase, is shown.

The practical importance of the research results is determined by the fact that they serve as a basis for researching the nature of the fundamental solutions of hyperbolic equations.

Implementation of research results. Based on the estimations of the generalized oscillatory integrals and the results related to their applications:

scientific results on invariant estimates of oscillatory integrals with polynomial phase in leading foreign journals (Nonlinear Analysis, Volume 207, June 2021, 112292, Analysis and Mathematical Physics volume 12, Article number: 130 (2022), Journal of Siberian Federal university. mathematics and physics 15.4 (2022): 459-466.) have been used in the study of problems corresponding to some nonlinear differential equations. Application of scientific results made it possible to prove that the spectra of the considered issues are discrete;

Generalized oscillatory integrals and their applications have been used in the research project number 01M01021 by the FWO Odysseus 1 grant G.0H94.18N: Analysis and Partial Differential Equations and by the Methusalem programme of the Ghent University Special Research Fund (BOF) (reference of Ghent University dated Aprel 18, 2023). The application of scientific results made aprior solution to partial differential equations with fractional derivatives;

Results of estimates for generalized oscillatory integrals with polynomial phase in the project number AP08052046 "Some non-local analogs of non-linear partial differential equations" (reference number 01-06/060 of Institute of Mathematics and mathematical modelling dated Aprel 17, 2023) estimates for generalized oscillatory integrals with Mittag-Leffler functions. Application of scientific results made it possible to estimated solution to Koshi problem for partial differential equations with fractional derivatives.

Approval of research results. The main results of the research were discussed at 14 scientific and scientific-practical conferences, including 8 international and 6 national scientific and scientific-practical conferences.

Publication of research results. A total of 28 scientific works were published on the topic of the dissertation, of which 14 articles were published in scientific publications, including 6 foreign and 8 republic journals, in which the main scientific results of doctoral dissertations of the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan were recommended for publication.

The structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation was 167 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In the introduction is given the actuality and relevance of the thesis topics are described, the appropriate research priority areas of science and technology of the Republic are determined. Moreover, we give a review of international research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem, formulate goals and objectives, identify the object and subject of study. The scientific novelty and practical results of the research, the theoretical and practical importance of the obtained results, information on the implementation of the research results about the published works and the structure of dissertation are also presented in this chapter.

In the first chapter of the thesis, titled **"Pleminaries",** we define necessary definitions, notations and some results which will be used through the thesis. Also, we provide proofs of some preliminary statements. In particular, we reduce normal form of functions, with respect to linear change of coordinates, having simple singularities. Further, we consider oscillatory integrals with analytic phase function and amplitude having set of discontinuity points. We obtain estimates for such integrals which are sharp up to a positive number $\varepsilon > 0$.

We will restrict ourselves to the two-dimensional case, i.e. $n = 2$. Let us consider the corresponding oscillatory integral with a smooth amplitude having a compact support:

$$J_0(\lambda, s) = \int_{\mathrm{R}^2} a(x,s) e^{i\lambda\Phi(x,s)} dx.$$

The basic condition:

Let $s \in K$ and for (η_1, η_2) consider a new phase function

$$\Phi_1(x,s,\eta) = \Phi(x,s) + x_1\eta_1 + x_2\eta_2.$$

Main assuption: suppose that $\Phi(x,s)$ is an analytic function such that for any critical point of the function $\Phi_1(x,s^0,\eta^0)$ where $(s^0,\eta^0) \in K \times R^2$, and its oscillation exponent $\beta \le \beta_0$. We have the following statement.

Theorem 1. *If the phase function satisfies the main condition, then for any positive number $\varepsilon > 0$ the following estimate is valid*

$$|J(\lambda, s)| \le \frac{c_\varepsilon \|a(\bullet, s)\|_{C^3}}{\lambda^{\beta_0 - \varepsilon}}.$$

Consider the oscillatory integral

$$J(\lambda, s) = \int_{R^2} \chi_{D(s)}(x) a(x,s) e^{i\lambda\Phi(x,s)} dx, \tag{1}$$

where $D(s)$ – family of regions in R^2 and $\{F_1(x,s) > 0, F_2(x,s) > 0\} \subset D(s)$, furthermore $\gamma_1, \gamma_2 \subset \partial D(0)$, where $\gamma_j = \{x : F_j(x,0) = 0\}, j = 1,2.$

The following theorem is true.

Theorem 2. *If the oscillation index of the critical point $x = 0$ of the function $\Phi(x,0)$ is β, then there exists a neighborhood of zero $U \times V \subset R^2 \times R^m$ such that, for any fixed positive number $\varepsilon > 0$, for any amplitude function $a \in C_0^\infty(U \times V)$ the following estimate is valid:*

$$|J(\lambda, s)| \le \frac{A_\varepsilon \|a\|_{C^3}}{\lambda^{\beta - \varepsilon}}.$$

In the second chapter of the thesis, titled **“Oscillatory integrals with Mittag-Leffler functions”,** we consider the following integral with phase f and amplitude ψ is an integral of the form:

$$I_{\alpha,\beta} = \int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda f(x))\psi(x)dx \tag{2}$$

where $0<\alpha<1$, $\beta>0$, U is a sufficiently small neighborhood of the origin and $\lambda>0$.

In **“Estimates for Mittag-Leffler functions with smooth phase having simple singularities”** section we consider the problem on uniform estimates for Mittag-Leffler functions with the smooth phase functions having singularities D_∞, $D_4^\pm$ and A_r. The generalisation is that we replace the exponential function with the Mittag-Leffler-type function, to study oscillatory type integrals.

Let we consider homogenous polynomial third degree with two variables. The main result of the section is the following.

Theorem 3. *Let* $-\infty<a<b<\infty$. *Let phase function has the a homogenous polynomial third degree with two variables and let* $\psi\in L^p[a,b]^2$, $1<p\le\infty$. *If* $0<\alpha<1$, $\beta>0$ *and* $\lambda>0$ *then we have following estimates*

$$\left|\int_{[a,b]^2} E_{\alpha,\beta}(i\lambda x_1^2x_2)\psi(x)dx\right| \le \frac{C|\psi|_{L^p}}{\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}}, \tag{3}$$

$$\left|\int_{[a,b]^2} E_{\alpha,\beta}(i\lambda(x_1^2x_2\pm x_2^3))\psi(x)dx\right| \le \frac{C|\psi|_{L^p}}{\lambda^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3p}}}, \tag{4}$$

$$\left|\int_{[a,b]^2} E_{\alpha,\beta}(i\lambda x_1^3)\psi(x)dx\right| \le \frac{C|\psi|_{L^p}}{\lambda^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3p}}}, \tag{5}$$

where constant C is depend only p.

In **“Estimates for generalizated oscillatory integrals with polynomial phase”** section we consider the problem on uniform estimates for generalized oscillatory integrals given by Mittag- Leffler functions with the homogeneous polynomial phase.

We obtain a variant of the Ricci-Stein lemma and invariant estimates for corresponding integrals.

Let

$$I_{\alpha,\beta}(a) = \int_{Q^n} E_{\alpha,\beta}(iP(a,x))\psi(x)dx, \tag{6}$$

where $0<\alpha<1$, $\beta>0$, $P(a,x)$ is a phase, $\psi\in C^\infty(R^n)$ is an amplitude and $Q^n:=[0,1]^n$ is n dimensional cube.

Theorem 4. *Let* $0<\alpha<1$, $\beta>0$. *There exists positive number* C_d *such that for the integral (6) with phase* $P(a,x)$ *following inequality holds*

$$\left|I_{\alpha,\beta}\right| \le \frac{C_d}{\|a\|^{\frac{1}{d}}}, \tag{7}$$

where $\|a\| = \sum_{|\lambda|\le d}|a_\lambda|$.

Remark 1. *Theorem 4 is an analog of the Ricci-Stein lemma.*

Proposition 1. *Let* $P: R^n\to R$ *be a polynomial of degree* $\le d$ *and* $|a|=\max\{|a_\lambda|,|\lambda|\le d\}$. *There exists a constant* $C_{d,n}$ *such that if* $a^0\in S^N$ *(where* $N+2$ *is the dimension of space of polynomials of degree at most* d*) is a fixed point and*

$|D^{\alpha}P(a^0,x)| \geq \delta > 0$, $\forall x \in [0,1]^n$ *(where $\alpha \in Z_+^n$ with $|\alpha| \geq 2$), then the following inequality holds*

$$\left|I_{\alpha,\beta}(\mu a^0)\right| \leq \frac{C_{d,n}}{|\mu|^{\frac{1}{|\alpha|}}},$$

here $S^N = \{|a|=1\}$ is the unit sphere and $\mu > 0$.

In **"Invariant estimates for homogeneous polynomial phase"** section, we consider generalized oscillatory integrals with phase function which is a homogeneous polynomial of degree three in two variables

$$P_3(a,x,y) = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3, \tag{8}$$

here $a := (a_0, a_1, a_2, a_3) \in R^4$ are coefficients. Consider

$$I_{\alpha,\beta}(a) = \int_{R^2} E_{\alpha,\beta}(iP_3(a,x,y))\psi(x,y)dxdy, \tag{9}$$

where ψ is a smooth function of compact support.

We study the behavior of integral (9) in the case when the coefficients of the polynomial tend to infinity. Let us obtain estimates for integral (9) in terms of the invariants of the group of motions of the Euclidean plane. Note that, the discriminant of a polynomial denoted by D is defined by the formula:

$$D = 3a_1^2a_2^2 + 6a_0a_1a_2a_3 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 - a_0^2a_3^2.$$

It is the invariant of the group $SL(2,\mathbb{C})$.

Theorem 5. *For the integral (9) with phase (8) following inequality*

$$\left|I_{\alpha,\beta}(a)\right| \leq \frac{c\|\psi\|_{L^\infty}}{|D|^{\frac{1}{6}}}$$

holds. Here c is a constant independent of a and $D \neq 0$ is discriminant of the polynomial $P_3(a,x,y)$.

Then we consider one-dimensional integrals. The results of this section will be used in the next section to get invariant estimates. Now we consider the following example for $d = 3$.

Let $0 < \delta < 1.$ We consider the integral

$$J_{\alpha,\beta}(p,q) = \int_{\mathbb{R}} E_{\alpha,\beta}(i(x^3 + px + q))dx, \tag{10}$$

where $0 < \alpha < 1,\ \ \beta > 0$.

Theorem 6. *1) Let $\frac{1}{3} < \delta < \frac{1}{2}$. Then*

$$\left|J_{\alpha,\beta}(p,q)\right| \leq \frac{c_\delta}{\left(\frac{|p|^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)^{\frac{3\delta-1}{6}}}, \tag{11}$$

for any $(p,q) \neq (0,0)$.

2) Let $\frac{1}{2} < \delta < 1.$ Then

$$\left|J_{\alpha,\beta}(p,q)\right| \leq \frac{c_\delta}{|D|^{\delta-\frac{1}{2}}\left(\frac{|p|^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)^{\frac{2-3\delta}{6}}}, \tag{12}$$

where $D=\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}\neq 0$ *is discriminant of polynomial* x^3+px+q *and* $c_\delta>0$ *a positive number depending only on* δ.

In **"Estimates for Mittag-Leffler functions with two variables"** section we consider the problem estimates for Mittag-Leffler functions with two variables. The generalisation is that we replace the exponential function with the Mittag-Leffler-type function, to study oscillatory type integrals.

The main result of this section is the following.

Theorem 7. *Let* f *be a smooth finite type function with two variables defined in a sufficiently small neighborhood of the origin and let* $\psi\in C_0^\infty(U)$.

If $0<\alpha<1$, $\beta>0$, $h>1$ and $\lambda>2$ then we have following estimate

$$\left|\int_U E_{\alpha,\beta}\big(i\lambda f(x_1,x_2)\big)\psi(x)dx\right|\leq\frac{C|\ln\lambda|^m\|\psi\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda^{\frac{1}{h}}},\tag{13}$$

where h *is a height of the function also* $m=0,1$ *multiplicity of the Newton polyhedron.*

If $0<\alpha<1$, $\beta>0$, $h=1$ *and* $\lambda>2$ *then we have following estimate*

$$\left|\int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda(x_1^2+x_2^2))\psi(x)dx\right|\leq\frac{C|\ln\lambda|\|\psi\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda}\tag{14}$$

and

$$\left|\int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda(x_1^2-x_2^2))\psi(x)dx\right|\leq\frac{C|\ln\lambda|^2\|\psi\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda},\tag{15}$$

where constant C *is independent of the phase and amplitude.*

Proposition 2. *Let* $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *be a measurable function such that for all real* $\lambda>2$ *and for any positive* $\delta\neq 1$, *we have*

$$\left|\int_\Omega e^{i\lambda f(x)}dx\right|\leq C|\lambda|^{-\delta}|\ln\lambda|^m,\tag{16}$$

with $m\geq 0$. *Then, we have*

$$\left|x\in\Omega:|f(x)|\leq\varepsilon\right|\leq C_\delta\varepsilon^\delta|\ln\varepsilon|^m,\text{for }\delta<1,$$

$$\textit{and for }\ \delta>1, |x\in\Omega:|f(x)|\leq\varepsilon|\leq C_\delta\varepsilon|,$$

where C_δ *depends only on* δ.

Corollary 1. *Let* $a(x)=\begin{cases}1, \text{ when}|x|\leq\sigma,\\ 0, \text{ when}|x|\geq 2\sigma\end{cases}$ *and* $a(x)\geq 0$ *with* $a\in C_0^\infty(R^2)$. *Then for all real* $\lambda>2$ *and for any positive* h, *we have*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}e^{i\lambda f(x)}a(x)dx\right|\leq C|\lambda|^{-\frac{1}{h}}|\ln\lambda|^m,\tag{17}$$

where $m\geq 0$, f is a smooth finite type function at the origin, h is the height of the function f and m is the multiplicity of the Newton polygon.

Corollary 2. *Let* $f(x_1,x_2)$ *be a smooth function and* $\overline{\Omega}$ *is a sufficiently small compact set of the origin that for all real* $\varepsilon>2$ *we have*

$$|x\in\Omega:|f(x)|\leq\varepsilon|\leq C\varepsilon^{\frac{1}{h}}|\ln\varepsilon|^m,$$

where h *is the height of* f *and* m *is a multiple.*

Proposition 2. *For any smooth function with compact support* $a(x,y)$ *and for* $h>1$ *the following inequality holds*

$$\int_{\{|f(x,y)|\geq \frac{M}{\lambda}\}} \frac{a(x,y)}{1+\lambda|f(x,y)|}dxdy \leq \frac{C|\ln\lambda|}{\lambda^{\frac{1}{h}}}. \tag{18}$$

where $f(x,y)$ is smooth function.

Remark 2. *If* $h=1$ *and as* $f(x,y)$ *is smooth function with* $\nabla f(0,0)=0$. *Using Morse lemma we have* $f: x^2 \pm y^2$. *So in this case we estimate two sets* $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, *where* $\Delta_1 := \{(x,y): |x^2 \pm y^2| \leq M\lambda, |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$ *and* $\Delta_2 := \{(x,y): |x^2 \pm y^2| > M\lambda, |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$.

In **"Estimates for oscillatory integrals with polynomial phase"** chapter it is considered the summation problem for trigonometric integrals with polynomial phase.

Let $\mathrm{P}(x,a)\in \mathrm{R}[x],\ x\in \mathrm{R}^n$ be a polynomial with real coefficients $a\in \mathrm{R}^m$. We consider the trigonometric integral given by

$$J(a)=\int_Q \exp\{2\pi i \mathrm{P}(x,a)\}dx,$$

where $Q=\{x\in \mathrm{R}^n: 0\leq x_l \leq 1, l=1,\dots,n\}$ is an n-dimensional unit cube. Importance of this function is that it appears in the special integrals of the form

$$I_p := \int_{\mathrm{R}^m} |J(a)|^p\, da \tag{19}$$

in Tarry's problem, arising as a coefficient of an asymptotic representation for a number of integer solutions of a Diophantine system. Therefore, it is important to find a minimal value of the parameter p such that the integral (19) is convergent.

Problem: *Find the number* $\gamma = \inf\{p\geq 1: J\in \mathrm{L}^p(\mathrm{R}^m)\}$.

The number γ is called to be the sharp convergence exponent for the trigonometric integrals.

In this chapter, we find the number γ for trigonometric integrals with polynomial phase function. Let $P(x,s)\in \mathrm{R}[x]$ be a polynomial of $x\in \mathrm{R}^k$ with coefficients $s\in \mathrm{R}^N$. By Q we denote the compact set in R^k.

In **"Estimates for trigonometric integrals with incomplete quadratic phase"** section we consider the summability problem of trigonometric integrals when $k=3$ and obtain the exact convergence index p_0 in the case when $Q=[0,1]^3$.

In the case when P is a homogeneous polynomial of degree two, we obtain the exact value p_0.

Let polynomial P be given by:

$$P(x,A,b)=(Ax,x)+(\beta,x),$$

where $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$ is a real symmetric matrix, $\beta := (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ and $(\cdot,\cdot)$ the inner product of vectors. The following trigonometric integral

$$T(A,\beta)=\int_{[0,1]^3} \exp(iP(x,A,\beta))dx, \tag{20}$$

arises in the study of analytic number theory (see [1]).

We consider the following integral

$$\theta = \int_{\mathbb{R}^6} |T(A,\beta)|^p \, d\beta d\alpha,$$

where $d\beta = d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3$ and $d\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$.

The following is true:

Theorem 8. *The integral θ converges for $p > 4$ and for $p \le 4$ it diverges. In particular in this case $p_0 = 4$.*

Let us introduce the following notation:

$$\theta_\infty = \int_{\mathbb{R}^6} |T_\infty(A,\beta)|^p \, d\beta d\alpha.$$

Proposition 3. *The integral θ_∞ converges at $p > 4$ and diverges at $p \le 4$.*

Let $K := [0,1]^3$ be cube in $\mathbb{R}^3$ and

$$h(\beta) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{|x|^2} \chi_K(x) e^{-2\pi i(\beta,x)} dx,$$

where $\chi_K(x)$ is the characteristic function of the set K.

Proposition 4. *For any positive number ε, the following inclusion holds true $h \in L_{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$.*

In **"On estimates for trigonometric integrals with quadratic phase"** section we study the problem by considering the classical setting. In other words, P is a quadratic polynomial function and $Q = [0,1]^k$ is a unit cube. It should be noted that the condition of Makenhaupt does not hold for this case. When P is a homogeneous polynomial of degree two, we obtain the exact value of p_0.

Let polynomial P be given by

$$P(x, A, b) = (Ax, x) + (b, x),$$

where $A = (a_{lm})^k{}_{l,m=1}$ is a symmetric $k \times k$ matrix with real entries, $b := (b_1, b_2, ..., b_k) \in \mathbb{R}^k$ and $(\cdot,\cdot)$ is the inner product of vectors. Consider the trigonometric integral

$$T(A,b) = \int_{\mathbb{R}^k} \exp(iP(x, A, b)) \chi_K(x) dx,$$

where K is a compact set and $\chi_K(x)$ is its characteristic function.

Consider the trigonometric integral

$$\theta = \int_{\mathbb{R}^N} |T(A,b)|^p \, dbda,$$

where $db = db_1 db_2 ... db_k$ and $da = \prod_{1 \le l \le m \le k} da_{lm}$.

The following is true:

Theorem 9. *Let K be a compact set, then the integral θ converges at $p > 2k+2$ and if K contains an interior point x^0 and there exists a line l passing through point x^0 such that the set $\{l \cap K\}$ contains only a finite number of points, then at $p \le 2k+2$ the integral diverges. Thus, if K is a compact set with a non-empty interior, then $p_0 = 2k+2$.*

The case when P is a homogeneous polynomial of the second degree

Now suppose that $P(x,A)=(Ax,x)$.

Theorem 10. *If* $P(x,A)=(Ax,x)$ *and* Q *is a polyhedron, then for* $p>2k$ *the integral* θ *converges. If* $Q=[0,1]^k$, *then at* $p\le 2k$ *the integral* θ *diverges.*

By polyhedron we mean the finite union of nondegenerate simplexes.

Remark 3. In this case, we cannot apply the results of [Jong-Guk Bak, Sanghyuk Lee, 2004, "Restriction of the Fourier transform to a quadratic surface in $\mathbb{R}^n$". *Mathematische Zeitschrift* No.247, pp.409-422.] as the corresponding set $\{x_i x_j\}_{i\le j=1}^n$ is not a smooth surface.

Remark 4. Depending on the set Q, the exponent p may be smaller than $2k$. For example, if $k=2$ and Q is a sufficiently small square centered at $(1,1)$, then it can be proved that for $p>3$ the integral θ converges.

Let us introduce the following notation:

$$\theta_\infty = \int_{\mathbb{R}^N} |T_\infty(A,b)|^p \, dbda,$$

where

$$N=\frac{k(k+2)}{2}.$$

Proposition 5. *The integral* θ_∞ *converges when* $p>2k+2$ *and diverges when* $p\le 2k+2$.

Theorem 11. *Let* D *be a compact domain such that* $\hat{\chi}_D \in L_q(R^2)$ *and* $T(A)=\int_D e^{i(Ax,x)}dx$. *Then* $T\in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^3)$ *at* $p>6-\frac{2}{q}$. *Moreover, if* $\hat{\chi}_D \in L_{1+0}(R^2)$, *then, for any* $p>4$, *the inclusion* $T\in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^3)$ *is valid.*

Remark 5. From the results [V. V.Lebedev, 2013, "On the Fourier transform of the characteristic functions of domains with C^1 boundary". *Func. anall. and its appl.* vol. 47, no. 1. pp. 33-46.] given in it follows that there exists a set D other than a polygon such that $\hat{\chi}_Q \in L_{1+0}(R^2)$.

Corollary 3. If $\subset \mathbb{R}^2$ is a compact set such that $\partial D\subset C^1$, then for $p>4.5$ the relation $T\in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^3)$ holds.

In **"On the L^p-bound for trigonometric integrals"** section we consider the summation problem for two-dimensional trigonometrical integrals with a third-order polynomial phase, which is sum of homogeneous polynomials of degree three and one. We find the sharp convergence exponent using the estimates for trigonometric integrals.

We consider the problem for the case when both the amplitude function ψ and the phase function F depend on parameter a. First we solve the summation problem for oscillatory integrals with a simple phase. Further, we investigate the behavior of the one-dimensional trigonometric integrals with an amplitude containing a pole-type singularity. Finally, we consider more difficult summation problem of the trigonometric integrals with a discontinuous amplitude function and with an algebraic (but not a polynomial) phase function. The obtained results will be applied to the solution of the summation problem for two-dimensional trigonometric integrals.

Let $F(x,y,a)$ be a polynomial function of two variables:

$$F(x,y,a) := P_3(x,y,a_3) + P_1(x,y,a_1), \tag{21}$$

where $P_3(x,y,a_3) = a_{30}x^3 + 3a_{31}x^2y + 3a_{32}xy^2 + a_{33}y^3,$ $P_1(x,y,a_1) = a_{10}x + a_{11}y.$ $a_3 := (a_{30},a_{31},a_{32},a_{33}),$ $a_1 := (a_{10},a_{11})$ are vectors in R^4, R^2 respectively.

The main results of the section are the following theorems.

Theorem 12. *Let* $\psi \in C_0^\infty(\mathsf{R}^2)$ *and*

$$J(a,\psi) := \int_{\mathsf{R}^2} e^{iF(x,y,a)}\psi(x,y)dxdy. \tag{22}$$

Then $J(\cdot,\psi) \in \mathsf{L}^p(\mathsf{R}^6)$ for any $p > 8.$ Moreover, if $\psi(\cdot,\cdot)$ is a smooth function supported in a sufficiently small neighborhood of the origin with $\psi(0,0) \neq 0,$ then $J(\cdot,\psi) \notin \mathsf{L}^p(\mathsf{R}^6)$ for all $p \le 8.$

Now we consider the oscillatory integral with the phase function (21) and a discontinuous amplitude function $\psi(x,y)\chi_Q(x,y)$ so that

$$J(a,\psi,\chi_Q) := \int_Q e^{iF(x,y,a)}\psi(x,y)dxdy, \tag{23}$$

where $\psi \in C_0^1(\mathsf{R}^2)$ and $Q := [0,1]\times[0,1].$

Theorem 13. *If* $J(\cdot,\psi,\chi_Q)$ *is the trigonometrical integral given by (23), then* $J(\cdot,\psi,\chi_Q) \in \mathsf{L}^p(\mathsf{R}^6)$ *for all* $p > 8.$ *Moreover, if* $\psi(\cdot,\cdot)$ *is a smooth function, concentrated in a neighborhood of the origin with* $\psi(0,0) \neq 0,$ *then* $J(\cdot,\psi,\chi_Q) \notin \mathsf{L}^p(\mathsf{R}^6)$ *for all* $p \le 8.$

Corollary 4. *For the integral*

$$J(a,\chi_Q) = \int_Q e^{iF(x,y,a)}dxdy,$$

the relation $J(\cdot,\chi_Q) \in L^p(R^6)$ holds for all $p > 8,$ and if $p \le 8$ then $J(\cdot,\chi_Q) \notin L^p(R^6)$. In other words we have $\gamma = 8.$

Summation of the one dimensional oscillatory integrals with amplitude depending on parameters

We introduce a class of amplitudes and obtain estimates for corresponding one-dimensional oscillatory integrals which will be used in the proofs of main results in general case.

Given a closed cube $B \subset \mathsf{R}^3$ centered at the origin, denote by A_B the class of functions $\phi \in C^\infty(\mathsf{R}^2 \times B \times \mathsf{R})$ satisfying the following conditions:

• for any $\phi \in \mathsf{A}_B$ there exists a compact set $K_\phi \subset \mathsf{R}^2$ such that $supp\phi(\cdot,\xi,b) \subset K_\phi$ for any $(\xi,b) \in B\times\mathsf{R}$;

• for any $\phi \in \mathsf{A}_B$ and $N \ge 0$ there is $C = C(N,\phi) > 0$ such that

$$\|\varphi(\cdot,\xi,b)\|_{C^N(R^2)} \le C$$

for any $(\xi,b) \in B\times\mathsf{R}.$

We introduce the measure $\mu = b^3da_1da_2d\eta db$ in

$$R^2 \times R^3 \times R = \{(a_1,a_2,\eta,b) : \eta \in R^3, a_1,a_2,b \in R\},$$

which is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure in R^6. Given a μ -measurable subset $X \subset R^2 \times R^3 \times R$ we denote by $L^p(X,\mu)$ the class of all μ-measurable functions whose p-th power is μ-integrable. For $\phi \in A_B$ consider the following oscillatory integral

$$J^1(a_1,a_2,\eta,b) := \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}} \int_R \varphi(y, b^{\frac{2}{3}}|\eta_3 y^2 + \eta_1|, \eta, b) e^{i(a_2 y^3 + a_1 y)} dy, \qquad (24)$$

where $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3),\ b \neq 0.$

Set

$$X := \{(a_1,a_2,\eta,b) \in R^2 \times R^3 \times (R \backslash [-1,1]) : |a_1|, |a_2| \leq |b|, \eta \in B\}.$$

Proposition 6. *For any $\phi \in A_B$ and $p > 8$ the inclusion $J^1 \in L^p(X,\mu)$ holds.*

Estimates for oscillatory integrals with small amplitude function

We will estimate the oscillatory integral with amplitude of the form $\frac{\psi(y,\eta,b)}{b|\eta_3 y^2 + \eta_1|}$, where $\psi(y,\eta,b)$ be a smooth function satisfying conditions $\sup \psi(\cdot,\eta,b) \subset [-d,d] \cap \{b^{\frac{2}{3}} |\eta_3 y^2 + \eta_1| > 1\}$ and also $V_{-d}^{d}[\psi] \lesssim 1$, where d is a positive real number. It is clear that, $\frac{\psi(y,\eta,b)}{b|\eta_3 y^2 + \eta_1|}$ is of a small amplitude function in some sense for $\boldsymbol{b^{\frac{2}{3}}|\eta_3 y^2 + \eta_1| > 1}$.

Consider the oscillatory integral given by

$$J^2(a_1,a_2,\eta,b) := \int_R \frac{\psi(y,\eta,b) e^{i(a_2 y^3 + a_1 y)}}{b|\eta_3 y^2 + \eta_1|} dy.$$

Proposition 7. *For any $p > 8$ the inclusion $J^2 \in L^p(X,\mu)$ holds true.*

Estimates for oscillatory integrals with discontinuous amplitude function

We consider the oscillatory integral

$$J^3(a_1,a_2,\eta,b) := \int_{R} \frac{\psi(y,a,\eta,b) e^{iF_2(y,a,\eta,b)}}{b^{\frac{1}{2}} |\eta_3 y^2 + \eta_1|^{\frac{1}{4}}} dy, \qquad (25)$$

where $sup\, \psi(\cdot,a,\eta,b) \in [-d,d] \cap \left\{b^{\frac{2}{3}}|\eta_3 y^2 + \eta_1| > 1\right\}$, $F_2(y,a,\eta,b) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} b|\eta_1|^{\frac{3}{2}}|\sigma y^2 + 1|^{\frac{3}{2}} + a_2 y^3 + a_1 y$ and $\sigma = \frac{\eta_3}{\eta_1}$.

If $\eta_3\eta_1 < 0$ then the amplitude contains a function, which is discontinuous at some point and can be big when y close to that point. This is more subtle case in the investigations of behavior of the oscillatory integrals.

Proposition 8. *For any $p > 8$ the inclusion $J^3 \in L^p(X,\mu)$ holds.*

The sharpness of the result

Take any polynomial of the form (21) satisfying $|a_{30}| = \max\{|a_{3i}|, i = \overline{0,3}\}$, and $|a_{11}| \leq 1$, such that $J \notin L^p(R^6)$ for all $p \leq 8$.

We represent the polynomial (21) in the form

$$F(x,y,a)=a_{30}\left(x_1^3+\xi_2x_1y_1^2+\xi_3y_1^3\right)+a_{10}x+a_{11}y,$$

where $\xi_2=\frac{3a_{30}a_{32}-3a_{31}^2}{a_{30}^2}$ and $\xi_3=\frac{a_{30}^2a_{33}+2a_{31}^3-3a_{30}a_{31}a_{32}}{a_{30}^3}$. Notice that $|\xi_2|\le 6,\ |\xi_3|\le 6.$

Proposition 9. *For every smooth function* $\psi\in C_0^1(\mathrm{R}^2)$ *supported in a neighborhood of* $(0,0)$ *with* $\psi(0,0)\neq 0$ *there exist positive numbers* $\lambda_0,\varepsilon,a_1$ *such that in the region* $|\xi_2a_{30}|^{\frac{2}{3}}|<\varepsilon,\ |a_{10}|\le\varepsilon a_{30}|^{\frac{1}{3}}$ *the following estimate holds for integral (25):*

$$|J(a)|\ge C/|a_{30}|^{1/3}.$$

In **"Uniform and invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phases"** chapter we consider the uniform estimates of oscillatory integrals with smooth phase functions in the case when the phase function has singularity of type D_∞ and in the case when the phase function is a homogeneous polynomial of degree four in two variables also we obtain invariant estimate for oscillatory integrals with polynomial phase third degree of two variables. The issue of whether integrals of real-analytic functions remain finite under small deformations was considered in [E. M. Stein, D. H. Phong, J. A. Sturm *On the growth and stability of real-analytic functions*, Amer. Journal of Math. 121 (1999), no.3, 519–554.]. An approach based on uniform estimates for certain classes of one-dimensional integrals is introduced. It is strong enough to recover the stability properties of real integrals in two dimensions which follow from the work of V. N. Karpushkin, and to obtain new results in higher dimensions. In dimension three, the new stability results in general can not be true, as shown by the well-known example of Varchenko.

In section **"Uniform estimates oscillatory integrals with smooth phase"** we consider the problem on uniform estimates for oscillatory integrals with the smooth phase functions having singularities of type D_∞. The estimate is sharp and analogy to estimates of the work by V.N.Karpushkin.

Let $U\subset V\subset\mathrm{R}^2$ be bounded neighborhoods of the origin, $\overline{U}(\overline{V})$ the closure of $U(V)$, respectively. Suppose that the function $f:\overline{V}\to\mathrm{R}$ (where $f\in C^N\left(\overline{V}\right),\ (N\ge 8)$) has the form

$$f\left(x_1,x_2\right)=x_1x_2^2+g\left(x_1,x_2\right), \tag{26}$$

where $g\in C^N(V)$, such that $D^\alpha g(0,0)=0$ for all $\alpha_1+\alpha_2\le 3$, where D^α is $D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha:=(\alpha_1,\alpha_2)\in Z_+^2$ is a multi-index, $Z_+=\{0\}\cup\mathrm{N}$ are the non-negative integers.

Let $\vartheta_{C^8(\overline{V})}(\varepsilon):=\{F\in C^8\left(\overline{V}\right),\|F\|_{C^8(\overline{V})}<\varepsilon\}$.

The main result of this section is the following.

Theorem 14. *Let* $f\in C^8(\overline{V})$ *have the form (26). Then there exists a positive number* ε *and a neighborhood* $U\subset V$ *of the origin such that for any functions* $a\in C_0^1(U)$ *and* $F\in C^8\left(\overline{V}\right),\ \|F\|_{C^8(\overline{V})}<\varepsilon$, *the following estimate holds:*

$$\left|\int_U e^{i\lambda(f+F)}a(x)dx\right|\frac{C\|a\|_{C^1}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

In section **“Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4”** we consider the problem on uniform estimates for oscillatory integrals with the homogeneous polynomial phases of degree 4.

Let $U \subset V \subset \mathbb{R}^2$ be bounded neighborhoods of the origin, $\overline{U}(\overline{V})$ the closure of $U(V)$, respectively. Suppose that the function $f:\overline{V} \to \mathbb{R}$ (where $f \in C^N(\overline{V})$, $(N \geq 8)$) has the form:

$$f(x_1, x_2) = f_\pi(x_1, x_2) + g(x_1, x_2), \tag{27}$$

where $f_\pi(x_1, x_2)$ is a homogeneous polynomial of degree 4 having the root $f_\pi(0,0)$ of multiplicity at most 2 (e.g. polynomial $f_\pi(x)$ of order 4 has at most two roots of multiplicity two on the unit circle in $\mathbb{R}^2$ centered at the origin), and $g \in C^N(V)$ is such that $D^\alpha g(0,0)=0$ for all $\alpha_1+\alpha_2 \leq 4$, where D^α is $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ is a multi-index, $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ are the non-negative integers.

The main result of this section is the following.

Theorem 15. *Let $f \in C^8(\overline{V})$ have the form (27). Then there exists a positive number ε and a neighborhood $U \subset V$ of the origin such that for any functions $a \in C_0^1(U)$ and $F \in C^8(\overline{V})$, $\|F\|_{C^8(\overline{V})} < \varepsilon$, the following estimate holds:*

$$\left|\int_U e^{i\lambda(f+F)}a(x)dx\right| \leq \frac{C\|a\|_{C^1}\ln(2+|\lambda|)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

In **“Invariant estimates of two-dimensional oscillatory integrals”** section we consider invariant estimates of oscillatory integrals with polynomial phase. The obtained estimates improve Popov’s well-known results on invariant estimates of trigonometric integrals in the case where the phase function is a third-degree polynomial.

Let $W_1^n(\mathbb{R}^n)$ denote the Sobolev space whose norm is defined by

$$\|\phi\|_{W_1^n(R^n)} = \int_{R^n}\left(\sum_{|\alpha|\leq n}|D^\alpha \phi|\right)dx, \tag{28}$$

here $D^\alpha\varphi$ is the derivative of φ in the sense of distributions. It is known that the Sobolev space can be defined as the completion of the class $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ of infinitely smooth compactly supported functions in the norm (28).

Let P be a polynomial of the form

$$\mathrm{P}(x_1, x_2, a) = P_3(x_1, x_2, a_3) + P_2(x_1, x_2, a_2) + P_1(x_1, x_2, a_1),$$

where $P_3(x_1, x_2, a_3) := a_{30}x_1^3 + 3a_{31}x_1^2x_2 + 3a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3$, $P_2(x_1, x_2, a_2) := a_{20}x_1^2 + 2a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ and $P_1(x_1, x_2, a_1) := a_{10}x_1 + a_{11}x_2$.

Consider the intergal

$$J = \int_{R^2} e^{iP(x_1,x_2,a)}\phi(x_1, x_2)dx_1dx_2, \tag{29}$$

where $\varphi \in W_1^2(\mathbb{R}^2)$. Obviously, the last integral converges in the usual Lebesgue sense.

The main result of this section is the following statement.

Theorem 16. *There exists a positive number C such that, for any element* $\varphi \in W_1^2(\mathbb{R}^2)$

$$|J| \le \frac{C\|\phi\|_{W_1^2(R^2)}}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}}}, \tag{30}$$

where $D(P_3) := 3a_{31}^2a_{32}^2 + 6a_{30}a_{31}a_{32}a_{33} - 4a_{30}a_{32}^3 - 4a_{31}^3a_{33} - a_{30}^2a_{33}^2$ is the discriminant of the polynomial $P_3(x_1, x_2, a_3)$.

Combining this Theorem 16 with Theorem 4 of [I.A. Ikromov, Invariant estimates of two-dimensional trigonometric integrals. Math. USSR Sb. Vol. 76 (1990), No. 2: 473-488.], we obtain the following result.

Theorem 17. *For the integral (29), the following estimate holds:*

$$|J| \le \frac{C\|\phi\|_{W_1^2(R^2)}}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}} + |H|^{\frac{1}{4}} + N^{\frac{1}{6}}}, \tag{31}$$

where $N := a_{30}^2 + 3a_{31}^2 + 3a_{32}^2 + a_{33}^2$, $H := a_{31}^2 + a_{32}^2 - a_{30}a_{32} - a_{31}a_{33}$.

The following statement is an analog of Duistermaat's theorem on the boundedness of generalized Airy functions associated with singularities of type $D_4^{\pm}$.

Theorem 18. *There exists a constant C such that, for an arbitrary compact triangle T*

$$\left|\int_T e^{i\mathrm{P}} dx_1 dx_2\right| \le \frac{C}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}}}.$$

Remark 6. *Theorem 4 of* [I.A. Ikromov, Invariant estimates of two-dimensional trigonometric integrals. Math. USSR Sb. Vol. 76 (1990), No. 2: 473-488.] *gives the estimate*

$$|J| \le \frac{C\|\phi\|_{W_1^2(R^2)}}{\frac{|D(P_3)|^{\frac{2}{3}}}{N} + N^{\frac{1}{6}} + |H|^{\frac{1}{4}}}.$$

Obviously, in the case where $\frac{|D(P_3)|^{\frac{2}{3}}}{N}$ is the dominant term of the denominator, this estimate is much worse than (31). Note that, the estimate does not depend on the triangle T.

Remark 7. *As mentioned in* [D. A. Popov, Remarks on uniform combined estimates of oscillatory integrals with simple singularities Izvestiya: Mathematics (2008),72(4): 793.], *for a more general phase function of the form*

$$\mathrm{P}(x, a) = P_3(x, a_3) + P_2(x, a_2) + P_1(x, a_1) + R(x),$$

where $R(x) = O(|x|^4)$, an estimate of the form (31) does not hold. In this case, the study of the behavior of oscillatory integrals is substantially more difficult.

CONCLUSION

Generally the results obtained in the thesis allow us to speak about the achievement of the goal of the thesis work. All main results are new and together they make a certain contribution to the theory of oscillatory integrals and harmonic analysis. This dissertation is devoted to the study of estimates of oscillator integrals and invariant estimates of oscillator integral with polynomial phase, summability of oscillator integral with phase, which is a polynomial of the third degree of two variables. The main results of the study are as follows:

1) It is obtained estimates for Mittag-Leffler functions with singularities of type D_∞.

2) It is proved that estimates for generalized oscillatory integrals with singularities of type $D_4^\pm$ and A_∞^2.

3) It is proved analogous of Ricci-Stein Lemma for generalized oscillatory integrals.

4) It is given that invariant estimates for generalized oscillatory integrals with homogeneous phase.

5) We obtained the estimates for one-dimensional oscillatory integrals with simple phase functions.

6) It is obtained estimates for integrals with Mittag-Leffler functions with two variables.

7) We found sharp convergent exponent for trigonometric integrals with incomplete quadratic phase.

8) We found sharp convergent exponent for trigonometrical integrals with quadratic phase.

9) We proved the problem summation for oscillatory integrals with polynomial phase third degree and showed sharpness of the obtained estimates.

10) We obtain estimate for oscillatory integrals with smooth phase having singularities of type D_∞.

11) We obtain uniform estimates for oscillatory integrals with the phase function is a smooth perturbation of homogeneous polynomial of degree four in two variables.

12) We obtain invariant estimates for oscillatory integrals with the polynomial phase of degree four in two variables.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. В.И.РОМАНОВСКОГО**

САФАРОВ АКБАР РАХМАНОВИЧ

ОБОБЩЕННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 – Математический анализ

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Самарканд – 2023

Тема диссертации доктора наук (DSc) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2023.2. DSc/FM___

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете и Институте Математике им. В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Икромов Исроил Акрамович** доктор физико-математических наук, профессор,
Официальные оппоненты:	**Халмухамедов Алимджан Рахимович** доктор физико-математических наук, профессор
	Имамкулов Севдиёр Акрамович доктор физико-математических наук, профессор
	Муминов Захриддин Эшкобилович доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2023 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2023 года.
(реестр протокол рассылки №________ от «____» _______________2023 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук

С.Н.Лакаев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора наук (DSc))

Цель исследования – получить оценку для обобщенного осцилляторного интегралов и найти точную показатель суммируемости.

Объект исследования. Обобщенные осцилляторные интегралы с полиномиальной фазой.

Научная новизна исследования определяется следующими пунктами:

получены гладкие оценки осциллирующих интегралов с разрывом амплитудной функции методом перевала с точностью ε;

оценивается для обобщенных осцилляторных интегралов, связанных с функцией Миттаг-Леффлера, фазовая функция которой имеет особенности D_∞, $D_4^{\pm}$ и A_r;

получены гладкие оценки для обобщенного и классического осцилляторного интегралов, связанных с функцией Миттаг-Леффлера от двух переменных, фазовая функция которой полиномом;

для осцилляторных интегралов, фаза которых является полиномом третьего порядка, оценка получается через инварианты классической группы движений на евклидовой плоскости;

найден точный показатель суммирования в пространстве коэффициентов классических осцилляторных интегралов, где фазовая функция является полиномом второго и третьего порядка.

Внедрение результатов исследования. По результатам оценок обобщенных осцилляторных интегралов и результатов, связанных с их приложениями:

научные результаты по инвариантным оценкам колебательных интегралов с полиномиальной фазой в ведущих зарубежных журналах (Nonlinear Analysis, том 207, июнь 2021, 112292, Analysis and Mathematical Physics, том 12, Номер статьи: 130 (2022), Журнал Сибирского федерального университета. физика 15.4 (2022): 459-466.) использовались при оценить решение частных дифференциальным уравнениям.

оценки обощенных осцилляторных интегралов были применены в проекте №01M01021 «Анализ и частный дифференциальный уравнение а также Мезусаламским программе Гентского университета» (справка №01M01021 Гентского университета от 18 апреля 2023 года) были применены в исследованиях осцилляторных интегралов зависящих от функции Миттаг-Леффлера. Применение научных результатов получено априорных оценках решений дифференциальных уравнений с дробными производными;

оценки осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой, а также утверждение о точном показателе суммируемости были применены в проекте №AP08052046 «Некоторые нелокальные аналоги нелинейных дифференциальных уравнении в частных производных» (справка №01-06/060 Института математики и математического моделирования от 17 апреля 2023 года) были применены в исследованиях осцилляторных интегралов зависящих от функции Миттаг-Леффлера. Применение научных результатов позволило оценочно решить задачу Коши для уравнений в частных производных с дробными производными.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четрех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составил 167 страницы.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (Part I; Часть I)

1. I.Ikromov, A.R.Safarov, Estimates for oscillatory integrals with discontinuous amplitude // Scientific reports of Samarkand state university. - Samarkand, 2015.-Vol. 89.-No 1.-P.28-32. (01.00.00; №02).
2. A.Safarov, On the L^p-bound for trigonometric integrals // Analysis mathematica.- Hungary, 2019.-Vol. 45.-P.153-176. (№3, Scopus, IF=1.2).
3. A.Safarov, Invariant estimates of two-dimensional oscillatory integrals // Math. Notes.-Russia, 2018.-Vol. 104.-P.293–302. (№3, Scopus, IF=0.864).
4. A.Safarov, On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface // Russian Mathematics.-Russia, 2019.-Vol. 63.-No 4.-P.57-63. (№3, Scopus, IF=0.8).
5. M.Ruzhansky, A.R.Safarov, G.A.Khasanov, Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4 // Analysis and Mathematical Physics.-USA, 2022.-Vol. 12.-No 130.-P.1-15. (№3, Scopus, IF=2.4).
6. A.R.Safarov, Estimates for Mittag-Leffler Functions with Smooth Phase Depending on Two Variables // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.-Russia, 2022.-Vol. 15.-No 4.-P.459-466. (№3, Scopus, IF=0.9).
7. A.Safarov, Invariant estimates for two-dimensional oscillatory integrals with polynomial phase third order // Reports of Academy of Sciences of Uzbekistan.-Tashkent, 2017.-No 3.-P.15-19. (01.00.00; №07).
8. A.Safarov, About uniform estimates for model trigonometrical integrals with discontinuous amplitude // Uzbek Mathematical Journal.-Tashkent, 2016.-No 1.-P. 123-134. (01.00.00; №06).
9. I.Ikromov, A.Safarov, About estimates for duble trigonometrical integrals // Uzbek Mathematical Journal.-Tashkent, 2013.-No 4.-P.7-16. (01.00.00; №06).
10. A.Safarov, Normal forms of some types of Arnold singularities // Scientific reports of Samarkand state university.-Samarkand, 2021.-Vol. 125.-No 1.-P.11-16. (01.00.00; №02).
11. I.Ikromov, A.Safarov, D.Vakhabova, Estimates for trigonometric integrals with incomplete quadratic phase // Scientific reports of Samarkand state university.-Samarkand, 2022.-Vol.133.-No 3.-P.74-81. (01.00.00; №02).
12. I.Ikromov, A.Safarov, Uniform estimates for oscillatory integrals with smooth phase, Bulleten of the Institut of Mathematics.-Tashkent, 2022.-No 5(3).-P. 211-219. (01.00.00; №04).
13. I.A.Ikromov, A.R.Safarov, A.T.Absalamov, On the convergence exponent of the special integral of the Tarry problem for a quadratic polynomial // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.-Russia, 2023.-Vol. 16.-No 4.-P.1-10, (No3, Scopus, IF=0.9). (in press)

14. I.A.Ikromov, A.R.Safarov, D. Khudoyberdiev, Invariant estimates for generalized oscillatory integrals with polynomial phase // Scientific reports of Samarkand state university.-Samarkand, 2023.-Vol.139.-No 3.-P.122-127. (01.00.00; №02).

II бўлим (Part II; Часть II)

15. A.R.Safarov, Invariant estimates duble oscillatory integrals, International scientific conference of students, Phd students and young scientists "Lomonosov-2017", Conference Proceedings, Moscow, 10-14 Aprel, 2017.

16. I.Ikromov, A.R.Safarov, On estimates for trigonometric integrals with quadratic phase, International conference "P. Chebyshev Mathematical Ideas and Their Applications to Natural Sciences" commemorating the 200th anniversary of P. Chebyshev, the great Russian mathematician, Conference Proceedings, Kaluga, 14-18 may, 2021.

17. I.Ikromov, A.R.Safarov, Estimates for two-dimensional integrals with Mittag-Leffler functions International scientific and practical conference "Modern problems of applied mathematics and information technologies", Bukhara, 11-12 may, 2022.

18. I.Ikromov, A.R.Safarov, Estimates for generalizated oscillatory integrals with polynomial phase Scientific conference "Operator algebras, non-associative structures and related problems", Tashkent, 14-15 september, 2022.

19. M.Ruzhansky, A.R.Safarov, G.A.Khasanov, Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4, International conference "Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics", Samarkand, 23-24 September, 2022.

20. I.Ikromov, A.R.Safarov, Uniform estimates for oscillatory integrals, International scientific and practical conference "XII Lomonosov’s readings", Conference Proceedings, Dushanbe, 29-30 Aprel, 2022.

21. A.Safarov, Invariant estimates for trigonometric integrals with polynomial phase, Scientific and practical conference "The 21 st century is the century of the intellectual generation", Samarkand, 2-3 June, 2016.

22. A.Safarov, Estimates generelized function of Airy, The international scientific conference "Modern problems of applied mathematics and information technologies - Al-Khorezmiy 2014", Tashkent, 15-17 September, 2014.

23. A.Safarov, On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface, The Republic scientific conference "New results on mathematics and their apllications", Samarkand, 14-15 May, 2018.

24. A.Safarov, On an analogue of V.N. Karpushkin’s theorem on uniform estimates in the three-dimensional case, The international scientific conference "Modern problems of applied mathematics and information technologies - Al-Khorezmiy 2014", Tashkent, 19-22 December, 2012.

25. A.Safarov, Uniform estimates of oscillatory integrals and invariant of Aronkhold, Scientific and practical conference "Ill-posed and non-classical problems of mathematical physics and analysis", Samarkand, 5-6 July, 2012.

26. A.Safarov, Invariant estimates oscillatory integrals with polynomial phase, The international scientific conference "Modern problems of applied mathematics and information technologies - Al-Khorezmiy 2014", Tashkent, 9-10 November, 2016.

27. A.Safarov, Invariant estimates duble oscillatory integrals with polynomial phase third degree The republician scientific conference with participiation of foreign scientists "Modern problems of dynamical systems and their applications", Tashkent, 1-3 May, 2017.

28. A.Safarov, Summation of oscillatory integrals with polynomial phase of third degree, The republician scientific conference "Modern problems of analysis", Karshi, 22-23 Aprel, 2016.