

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY  
DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI  
ILMIY KENGASH**

---

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI  
TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI**

**MAMADALIYEV BOTIRJON MULLAAMINOVICH**

**BESH O‘LCHOVLI IKKI INDEKSLI PSEVDOYEVKLID FAZODA IKKI  
O‘LCHOVLI SIRTLAR GEOMETRIYASI**

**01.01.04 – Geometriya va topologiya**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)  
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

**Toshkent – 2023**

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi  
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации  
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on  
physical-mathematical sciences**

**Mamadaliyev Botirjon Mullaaminovich**

Besh o'lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazoda ikki o'lchovli sirtlar geometriyasi.....3

**Мамадалиев Ботиржон Муллааминович**

Геометрия двумерных поверхностей в пятимерном псевдоевклидовом пространстве индекса два.....21

**Mamadaliyev Botirjon Mullaaminovich**

Geometry of two-dimensional surfaces in the five-dimensional pseudo-euclidean space of index two.....39

**E'lon qilingan ishlar ro'yxati**

Список опубликованных работ

List of published works.....42

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY  
DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI  
ILMIY KENGASH**

---

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI  
TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI**

**MAMADALIYEV BOTIRJON MULLAAMINOVICH**

**BESH O‘LCHOVLI IKKI INDEKSLI PSEVDOYEVKLID FAZODA IKKI  
O‘LCHOVLI SIRTLAR GEOMETRIYASI**

**01.01.04 – Geometriya va topologiya**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)  
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

**Toshkent – 2023**

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B.2023.2.PhD/FM872 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Farg'ona davlat universiteti va Toshkent davlat transport universitetida bajarilgan.  
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.ik-fizmat.nuu.uz) va "Ziyonet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

**Ilmiy rahbar:** Artikbayev Abdullaaziz  
fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Rasmiy opponentlar:** Narmanov Abdigappar Yakubovich  
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Sultanov Bekzod Maqsud o'g'li  
fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

**Yetakchi tashkilot:** Nizomiy nomidagi Toshkent davlat pedagogika universiteti

Dissertatsiya himoyasi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.3/30.12.2019.FM.01.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil "7" sentyabr soat 14<sup>00</sup> da majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99878) 227-12-24, faks: (+99878) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (126 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99878) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil "22" avgust kuni tarqatildi.  
(2023 yil "22" avgust da 2 raqamli restr bayonnomasi).



**A.Sadullayev**

Ilmiy darajalar beruvchi  
Ilmiy kengash raisi,  
f.-m.f.d., akademik

**R.M.Jo'rayev**

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy  
kengash ilmiy kotibi,  
f.-m.f.d. (PhD)

**R.B.Beshimov**

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy  
kengash huzuridagi ilmiy seminar  
raisi o'rinbosari, f.-m.f.d., professor

## **KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)**

**Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati.** Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab fizika va kvant mexanikasiga doir ilmiy-amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda musbat aniqlanmagan metrikali fazolarning masalalarini tadqiq qilishga keltiriladi. Vaqt va fazo orasidagi munosabatda vaqtni manfiy ishora bilan olish usuli, nisbiylik nazariyasi geometriyasini tadqiq qilishda muhim ahamiyatga ega. Riman metrikasining kanonik ko‘rinishida fazoga o‘xshash koordinatalari musbat, vaqtga o‘xshashlari esa manfiy koeffitsiyentga ega bo‘lishi muhim rol o‘ynaydi. Ko‘plab texnik masalalar musbat aniqlanmagan metrikali fazolarni qo‘llash usuli bilan hal qilinadi. Shuning uchun psevdoyevklid fazoda sirtlar nazariyasi bo‘yicha olingan natijalar ham nazariy, ham tatbiqiy jihatdan ahamiyatli va zamonaviy matematikaning dolzarb yo‘nalishlaridan hisoblanadi.

Hozirgi kunda jahonda psevdoyevklid fazo geometriyasini tadqiq qilish, ayniqsa, bu fazoda sirtlar geometriyasining masalalarini yechish zamonaviy geometriyaning dolzarb masalalardan biri hisoblanadi. Bu borada ko‘plab ilmiy tadqiqotlar psevdoyevklid fazo sirtlari nazariyasi bilan olib borilmoqda va olingan natijalarga tatbiq etilmoqda. Fizika, kvant mexanikasi va dinamik sistemalarga doir masalalar psevdoyevklid fazosining o‘lchovi fazo o‘lchovidan kichik bo‘lgan fazoostilari geometriyasi bilan bog‘liqligi muhim ahamiyatga ega. Shu sababli psevdoyevklid fazolarning fazoostilarining geometriyasiga doir turli masalalarni hal qilish, yangi natijalar olish va ularni amalda qo‘llash maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda, ayniqsa, so‘nggi yillarda fundamental ilmga, xususan, matematika va fizika sohalarining dolzarb yo‘nalishlariga, muhim ilmiy ahamiyatga ega bo‘lgan, gravitatsiya maydonlari, umumiy nisbiylik nazariyasi va geologik tomografiyaga katta e‘tibor qaratilmoqda. Shuningdek, so‘nggi yillarda funksiyalar nazariyasi, geometriya, topologiya va Riman sirtlari nazariyalari kabi yo‘nalishlar rivojiga alohida ahamiyat berilmoqda. Matematika fanlarining ustuvor yo‘nalishlari hisoblangan “algebra va funksional analiz, differensial tenglamalar va matematik fizika, dinamik sistemalar nazariyasi, geometriya va topologiya, ehtimollar nazariyasi va matematik modellashtirish” ixtisosliklar bo‘yicha ilmiy tadqiqotlarni xalqaro standartlar darajasida olib borishning asosiy vazifalari va yo‘nalishlari etib belgilandi<sup>1</sup>. Bu borada differensial tenglamalar, kompleks analiz, geometriya va topologiya masalalarini hal etishda psevdoyevklid fazoda sirtlar nazariyasini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi № PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2017 yil 17 fevraldagi № PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017 yil 20 apreldagi PQ-2909-son “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi

---

<sup>1</sup> O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish to‘g‘risida”gi 292-sonli qarori.

va 2018 yil 27 apreldagi № PQ-3682 “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risidagi”gi, 2019 yil 9 iyuldagi № PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

**Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi.** Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

**Muammoning o‘rganilganlik darajasi.** Ko‘p o‘lchovli sirtlarning differensial geometriyasi bo‘yicha tadqiqotlar 20-asrning birinchi yarmida boshlangan. Yevklid va noyevklid fazolarda differensial geometriya bo‘yicha asosiy ishlarning tadqiqi B.A.Rozenfeldning monografiyasida keltirilgan. Shuni ta’kidlash kerakki, o‘sha davrdagi differensial geometriya bo‘yicha asosiy ishlar chiziqlar va sirtlarni o‘rganish bilan chegaralangan. Umuman, besh o‘lchovli fazoda ikki o‘lchovli sirtga doir ilmiy izlanishlar dastlab N.V.Shirobakinning 1984 yillardagi ilmiy ishlarida paydo bo‘lgan, bu yerda u tashqi differensial formalar yordamida reper qurish usuli bilan besh o‘lchovli yarim Yevklid fazoda ikki o‘lchovli sirt xossasini o‘rgangan.

Ko‘p o‘lchovli fazolar sirtlari geometriyasini o‘rganish fizik masalalar bilan bog‘liq. Odatda, fiziklar sakkiz o‘lchovli fazolardan ko‘proq foydalanadilar. Ba’zan fazo o‘lchovini pasaytirish uchun ikki yoki undan ko‘proq koordinatalarni birlashtirish usulidan foydalaniladi, bu usul Kallusi-Kleyn usuli deb nomlanadi. Shu yo‘l bilan besh o‘lchovli, Kleyn –Foka – Rumeraning kvant mexanikasining geometriyasiga doir, elementar zaryadlar mexanikasini o‘rganuvchi besh o‘lchovli fazo nazariyasi paydo bo‘lgan. N.S.Vladimirovning ishida, gravitatsiya va elektrostatika kuchlarining qonuniyati, uch o‘lchovli fazo koordinatalari bilan bog‘liqligi, (+, +, +, -, -) shakldagi besh o‘lchovli fazoga o‘tish yo‘li bilan hal qilinishi asoslab berilgan.

Bang-Yun Chenning ishlarida o‘lchovlari  $m < n$  bo‘lgan ko‘pxilliklarning  ${}^1R_n$  psevdoyevklid fazolaridagi xossalariga doir bir nechta ishlari paydo bo‘ldi. Bu ishlarda sirtlar Riman fazosida o‘rganilgan, tadqiqotlar tenzorlar yordamida olib borilgan. Yu.A.Aminov va uning shogirdlari besh o‘lchovli Yevklid fazosida chiziq va ba’zi ikki o‘lchovli sirtlar sinfini tadqiq qilgan, xususan, ikki o‘lchovli sirtning sfera va gipertekislikda yotish shartlari aniqlangan. Respublikamizda A.Artikbayev yarim Yevklid fazo geometriyasini o‘rganganda, yarim Yevklid fazolar psevdoyevklid fazolarning qism fazolari bo‘lishini aytib o‘tgan. Besh o‘lchovli psevdoyevklid fazo qism fazolari geometriyasi bilan B.Sultanov, Sh.Ismoilov shug‘ullanganlar. Ular o‘rgangan Galiley va izotrop fazolar  ${}^2R_5$  ning qism fazolari bo‘lib ajraluvchi metrikali fazolardir.

**Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalarini bilan bog‘liqligi.** Dissertatsiya

tadqiqoti Farg‘ona davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq “Matematika” kafedrasining “Xususiy hosilali differensial tenglamalar, algebra, geometriya va analizning masalalari” ilmiy-tadqiqot loyihasi va Toshkent davlat transport universitetining “Funksiyalar nazariyasi, funksional analiz, differensial tenglamalar, extimollar nazariyasi va ularning qo‘llanishining ayrim masalalarini o‘rganish” mavzusidagi dasturi doirasida bajarilgan.

**Tadqiqotning maqsadi** besh o‘lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazoda ikki o‘lchovli sirtlar geometriyasini tadqiq qilishdan iborat.

**Tadqiqot vazifalari:**

besh o‘lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazoda tekislik va gipertekisliklarning ichki geometriyalarini tavsiflash;

psevdoyevklid fazoda chiziq uchun Frene formulasi analogini topish va chiziqni sferada yotish shartini aniqlash;

ikki o‘lchovli sirtning nuqta atrofidagi geometriyasini va shu nuqtadagi normal fazo ichki geometriyasini aniqlash;

maxsus tanlangan ikki o‘lchovli sirtlar sinfida kuzatuvchi bazis topilgan va fazoda ikki o‘lchovli “butun” sirtlarning mavjudligi masalasini hal qilish.

**Tadqiqot obyekti** besh o‘lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazoda tekisliklar, gipertekisliklar, qism fazolar, chiziqlar va ikki o‘lchovli sirtlar hisoblanadi.

**Tadqiqot predmeti** musbat bo‘lmagan metrika, sferalar, izotrop konus, chiziqning vektor tenglamasi, ikki o‘lchovli sirt, qism to‘plamlar geometriyasidan iborat.

**Tadqiqot usullari.** Tadqiqot ishida noyevklid geometriyasining zamonaviy usullari, kompleks analiz, funksional analiz, differensial geometriya va topologiya zamonaviy usullaridan foydalanilgan.

**Tadqiqotning ilmiy yangiligi** quyidagilardan iborat:

besh o‘lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazoda tekislik va gipertekisliklarning ichki geometriyasi Yevklid, Minkovski, izotrop va Galiley geometriyalaridan biri bo‘lishi isbotlangan;

psevdoyevklid fazoda chiziqlar nazariyasining asosiy formulalaridan biri bo‘lgan Frene formulasining analogi aniqlangan va berilgan egrilik funksiyalariga ko‘ra chiziqning mavhum radiusli sferaga tegishli bo‘lish sharti topilgan;

ikki o‘lchovli sirtga tegishli nuqta atrofining geometriyasi urinma tekislik yordamida aniqlangan va urinma tekislikning normallari orqali hosil qilingan fazo har doim uch o‘lchovli Minkovski fazosi ekanligi isbotlangan;

maxsus tanlangan ikki o‘lchovli sirtida kuzatuvchi bo‘lgan uch o‘lchovli fazo qurilgan va ichki geometriyalari bir xil bo‘lgan ikki o‘lchovli “butun” sirtlar uchun mavjudlik teoremlari isbotlangan.

**Tadqiqotning amaliy natijalari** umumiy nisbiylik nazariyasida psevdoyevklid fazoda tekislik va gipertekisliklarning ichki geometriyalarini aniqlash va fizikada qo‘llanilishi ishlab chiqildi.

**Tadqiqot natijalarining ishonchliligi** noyevklid geometriya, kompleks analiz va topologiyaning zamonaviy usullarini qo‘llash bilan asoslanadi.

**Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.** Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati sirtning ikkinchi kvadratik formalarini qurish uchun bazis vektorlarni tanlash imkoniyati isbotlangan bo'lib, ular ikki o'lchovli sirtlar geometriyasini tasvirlashda qo'llanilganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati psevdoyevklid fazoda maxsus tanlangan ikki o'lchovli sirtlar geometriyasi uchun olingan natijalari differensial tenglamalar, kompleks analiz va ayrim to'la geometriya masalalarining yechimi fizika, kvant mexanikasi masalalariga qo'llanilishi mumkinligi bilan izohlanadi.

**Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi.** Besh o'lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazoda ikki o'lchovli sirtlar geometriyasi bo'yicha olingan natijalar asosida:

De-Sitter fazosidagi ikki o'lchovli sirtlar geometrik xarakteristikalariga doir natijalar O'zbekiston Fanlar akademiyasi Astronomiya institutida bajarilayotgan F-FA-2021-432 "Kichik massali rentgen qo'shaloq tizimlaridan olingan sun'iy yo'ldosh ma'lumotlarini tahlil qilish va qayta ishlash" (loyiha rahbari f.-m.f.d., prof. B.J.Ahmedov) loyiha ishini bajarishda gravitatsiya va elektrostatika kuchlarining qonuniyati besh o'lchovli fazoga o'tish yo'li bilan hal qilinishi asoslab berilgan (Milliy tadqiqot universiteti huzuridagi Fundamental va amaliy tadqiqotlar institutining 2023 yil 5 maydagi № 0123-98 raqamli ma'lumotnomasi). Gravitatsion maydon ta'sirini aniqlashda, besh o'lchovli fazoga o'tish va yuzaga kelgan astrofizik jarayonlarning matematik modelini qurish, hamda musbat aniqlanmagan metrikalarga bog'liq differensial tenglamalarini yechishda, yechim xossalarini geometrik usulda aniqlash imkonini bergan.

Besh o'lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazoda ikki o'lchovli sirtlar geometriyasi tadqiqotida olingan ilmiy natijalari № MD-758.2022 1.1-sonli shartnomaga asosan "Prezident granti asosida ilmiy tadqiqot ishlarini bajarishda foydalanildi. Rossiya Federatsiyasi yosh rus olimlari - fan doktorlarini davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash" bo'yicha (2022-2023 yillar uchun FGBOU VO KamDU nomidagi Vitus Bering) mavzusidagi fundamental loyihasida musbat aniqlanmagan metrikalarga bog'liq differensial tenglamalarni yechishda qo'llanilgan (Камчатский государственный университет имени ФГБОУ ВО «КамГУ им. Витуса Беринга» 2023 yil 10 maydagi 04-196/10 raqamli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi bu fazoga tegishli sirtlarning xossalarini ifoda etuvchi differensial tenglamalarini yechishga, yechim xossalarini geometrik usulda aniqlash imkonini bergan.

**Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi.** Mazkur tadqiqot natijalari 11 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 6 ta xalqaro va 5 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokama qilingan.

**Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi.** Tadqiqot mavzusi bo'yicha jami 17 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan, 2 tasi xorijiy va 4 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

**Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi.** Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 79 sahifani tashkil etadi.

## DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

**Kirish** qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, mavzu bo'yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o'rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning " ${}^2R_5$  psevdoyevklid fazosining asosiy tushunchalari" deb nomlanuvchi birinchi bobi uchta paragrafdan iborat. Dissertatsiyaning ushbu bobida fazo ta'rifi,  ${}^2R_5$  fazoning gipertekisliklaridagi geometriya va  ${}^2R_5$  psevdoyevklid fazo sferalari haqida asosiy tushunchalar berilgan. Bundan tashqari, ba'zi olingan natijalar isbotlari bilan taqdim etilgan.

$A_5$  fazoda  $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$  bazis berilgan bo'lsin. Bu fazoda affin koordinatalari bilan berilgan  $\vec{X}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  va  $\vec{Y}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  vektorlarni qaraylik.

**Ta'rif 1.1.1.**  $A_5$  fazoda  $\vec{X}$  va  $\vec{Y}$  vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$(\vec{X}, \vec{Y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5$$

formula bilan aniqlanib, uning bazis vektorlari uchun  $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1$ ,  $(\vec{e}_4, \vec{e}_4) = (\vec{e}_5, \vec{e}_5) = -1$ ,  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$   $i \neq j$  munosabatlar o'rinli bo'lsa,  $A_5$  fazo besh o'lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazo deyiladi va  ${}^2R_5$  ko'rinishda belgilanadi.

Vektor normasi vektorning o'zini-o'ziga skalyar ko'paytmasidan olingan kvadrat ildiz sifatida aniqlanadi

$$|\vec{X}| = \sqrt{(\vec{X}, \vec{X})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2}.$$

Tabiiyki, vektorni o'zini-o'ziga skalyar ko'paytmasi musbat, manfiy yoki nol bo'lishi mumkin.

**Ta'rif 1.1.2.**  ${}^2R_5$  fazoning izotrop vektorlar to'plami izotrop konusni tashkil qiladi. Izotrop konus nuqtalarining koordinatalari quyidagi tenglikni qanoatlantiradi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0.$$

Izotrop konus fazoni ikki qismga, ya'ni haqiqiy va mavhum normal vektorlar to'plamiga ajratadi. Nisbiylik nazariyasida bu vektorlar mos ravishda fazoga o'xshash va vaqtga o'xshash vektorlar deb ataladi.

${}^2R_5$  fazodagi  $A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  va  $B(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  nuqtalar orasidagi masofa  $\overrightarrow{AB}$  vektor normasi sifatida hisoblanadi, ya'ni

$$|AB| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 - (y_4 - x_4)^2 - (y_5 - x_5)^2}.$$

Ikki  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  vektor orasidagi  $\theta$  burchak

$$\cos\theta = \frac{(\vec{X} \cdot \vec{Y})}{|\vec{X}||\vec{Y}|}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar ikkita nolga teng bo'lmagan vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi.

${}^2R_5$  fazoda koordinata boshidan o'tuvchi affin koordinatalarda

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0$$

tenglama bilan berilgan  $\pi$  gipertekislikni qaraylik.

$\vec{N}(a_1, a_2, a_3, -a_4, -a_5)$  vektor  $\pi$  tekislikda yotgan barcha vektorlarga ortogonal bo'lib, tekislikning normal vektori deyiladi.

Koordinata boshi va  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$  bazis vektorlar berilgan bo'lsin,  ${}^2R_5$  fazoning tekislik va gipertekisliklaridagi hosil bo'lgan geometriyalarni aniqlaylik.

Parallel ko'chirishda tekisliklarning ichki geometriyasi o'zgarmaydi. Shuning uchun biz koordinata boshidan o'tuvchi tekisliklarning geometriyasini ko'rib chiqamiz.

Dastlab gipertekisliklarning geometriyasini ko'rib chiqaylik.  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$  bazis vektorlar mavjud bo'lib, ularni ikkita variantda tanlash mumkin bo'lgan to'rtta chiziqli erkli vektor mavjud: ular  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$  yoki  $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$  boshqa variantlar ularga ekvivalent.

Birinchi holda, to'rt o'lchovli faqat bitta mavhum bazisga ega qism fazosini qarasaq, u holda gipertekislikning ichki geometriyasi to'rt o'lchovli  ${}^1R_4$  Minkovski geometriyasi bo'ladi.

Ikkinchi holda, bitta haqiqiy uzunlikdagi bazis vektori bo'lmasa, gipertekislikning geometriyasi  ${}^2R_4$  to'rt o'lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazo bo'ladi. Shuning uchun  ${}^2R_5$  fazoda ikkita to'rt o'lchovli  ${}^1R_4$  va  ${}^2R_4$  qism fazolar mavjud.

Tadqiqot obyekti ikki o'lchovli sirtlardir, shuning uchun biz  ${}^2R_5$  fazoning ikki o'lchovli tekisliklariga alohida e'tibor qaratamiz.  $F^2 \subset {}^2R_5$  sirtlarning urinma tekisliklari ikki o'lchovli tekisliklar bo'ladi. Bundan tashqari,  $F^2 \subset {}^2R_5$  sirtning ichki geometriyasi uning urinma tekisligining geometriyasi bilan belgilanadi.

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$  bazisdagi ikkita bazis vektorga parallel bo'lgan ikki o'lchovli tekislikning geometriyasi bu bazis vektorlarining turi bilan aniqlanadi. Bazis vektorlari  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$  ikkalasi ham haqiqiy (yoki mavhum) normaga ega bo'lsa, tekislikdagi geometriya  $R_2$  Yevklid geometriyasi bo'ladi.

Agar ulardan biri haqiqiy, ikkinchisi mavhum bo'lsa, u holda tekislikdagi geometriya  ${}^1R_2$  Minkovskiy geometriyasi bo'ladi.

Ikki o'lchovli tekislikning bazis vektorlari haqiqiy va izotrop vektorlar bo'lsa, tekislikdagi geometriya  $R_2^1$  Galiley geometriyasi bo'ladi.

Bazis vektorlari ikkalasi ham izotrop bo'lgan alohida holi mavjud bo'lib, bu holda tekislik Minkovskiy tekisligini ifoda etadi.

Sfera deb fazoda berilgan nuqtadan teng masofada joylashgan nuqtalar to'plamiga aytiladi.  ${}^2R_5$  fazoda sfera uch usulda aniqlanadi. Ikki nuqta orasidagi masofa uch xil aniqlangani kabi sferalar ham mos ravishda haqiqiy, mavhum va nol radiusli bo'ladi.

Markazi koordinata boshida joylashgan va radiusi  $r$  bo'lgan haqiqiy radiusli sfera tenglamasi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = r^2. \quad (1.3.1)$$

Bu sfera affin ma'noda giperbolik sirt bo'lib, uning yasovchilari ikki o'lchovli tekisliklardan iborat.

Xuddi shunday, mavhum radiusli sfera ham giperbolik sirt bo'lib, yasovchilari ikki o'lchovli tekisliklardan iborat, uning tenglamasi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = -r^2. \quad (1.3.2)$$

Uchinchi sfera,  ${}^2R_5$  fazoning nol radiusli sferasi bo'lib, u (1.1.2) izotrop konusga mos keladi.

${}^2R_5$  fazo sferasidagi geometriyani ko'rib chiqayotganda, haqiqiy va mavhum radiusli sferalardagi geometriyalarni bir xil deb hisoblash mumkin.

B.A.Rozenfeldning monografiyasida egriligi o'zgarmas giperbolik fazolar, diametral qarama-qarshi nuqtalari psevdoyevklid fazo sferasi nuqtalariga izometrik to'plam sifatida aniqlanadi. Giperbolik fazolar egriligi manfiy va o'zgarmas Riman fazolaridir.

${}^2R_5$  psevdoyevklid fazo sferasidagi geometriya giperbolik fazolarga izometrik ekanligini aniqlaylik.

**Teorema 1.3.1.**  ${}^2R_5$  fazoning mavhum radiusli sferasining diametral qarama-qarshi nuqtalar to'plami  ${}^2S_4$  giperbolik fazoga izometrikdir.

**Ta'rif 1.3.1.** Agar fazoning egriligi  $K < 0$  o'zgarmas bo'lib, uni mavhum radiusli sfera sifatida ifodalash mumkin bo'lsa, u ikkinchi turdagi de-Sitter fazosi deyiladi.

B.A.Rozenfeldning monografiyasida  ${}^2R_5$  fazoning mavhum radiusli sfera nuqtalari to'plami diametral qarama-qarshi nuqtalari bilan aniqlansa  ${}^2S_4$  giperbolik fazo deb ataladi. Bu ta'riflar ekvivalentdir. Demak,  ${}^2S_4$  giperbolik fazo ikkinchi turdagi de-Sitter fazosi ekan.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi, "Besh o'lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazo qism to'plamlari geometriyasi" deb nomlangan bo'lib, to'rtta paragrafdan iborat. " ${}^2R_5$  ning qism fazolaridagi geometriya" to'g'risidagi bandida turli

o‘lchovdagi giperbolik fazolar mavjudligi isbotlangan va de-Sitter fazosining talqini keltirilgan. Bunda Lobachevskiy fazosini Yevklid fazosiga talqin qilish usuli qo‘llanilgan. Ikkinchi bobning uchinchi paragrafi  ${}^2R_5$  da fazoviy chiziqlarni o‘rganishga bag‘ishlangan. Paragraf so‘ngida chiziqning  ${}^2R_5$  fazo sferasiga tegishli bo‘lish shartlari berilgan.

Fizika va kvant mexanikasining geometrlashtirishda o‘lchovlarni pasaytirish usuli qo‘llaniladi. Buning uchun ba‘zi koordinatalar o‘zgarmas yoki bir-biriga chiziqli bog‘liq deb hisoblanadi. Masala fazoda emas, balki uning qism fazosida ko‘rib chiqiladi. Yuqori o‘lchovli Yevklid fazolari geometriyasida o‘lchovning pasayishi fazo geometriyasiga ta‘sir qilmaydi. Ammo psevdoyevklid fazoda o‘lchovni pasaytirish qaralayotgan fazoning geometriyasini o‘zgartiradi. Shuning uchun biz  ${}^2R_5$  fazoning qism fazolarida turli geometriyalar mavjudligini isbotlaymiz. Biz, asosan, uch va to‘rt o‘lchovli qism fazolarni ko‘rib chiqamiz.

B.Sultanov ishida Galiley fazosining geometriyasi  $M(x_1, x_2, x_3, x_2, x_3) \subset {}^2R_5$  qism fazoda hosil bo‘lishi isbotlangan. Ko‘rib chiqilayotgan  $M \subset {}^2R_5$  qism fazoda  $x_2 = x_4$  va  $x_3 = x_5$ .  ${}^2R_5$  fazoda  $M(x_1, x_2, x_3, x_2, x_3)$  qism fazo Galiley geometriyasidan iborat. Galiley fazosi ajraluvchi metrikaga ega va bu geometriya psevdoyevklid fazoning geometriyasidan ancha farq qiladi.

${}^2R_5$  fazoning qism fazolari ichida ajraluvchi metrikalarga ega bo‘lganlarini aniqlaymiz.

**Teorema 2.1.1.**  $I(x_1, x_2, x_3, x_3, x_4)$  qism fazo  ${}^{10}R_4^3$  psevdooizotrop fazo hisoblanadi.

2.1.1-teoremadan quyidagi xulosa kelib chiqadi.

**Natija 2.1.1.**  $x_4 = 0$  shartda,  $I_0(x_1, x_2, x_3, x_3, 0) \subset I(x_1, x_2, x_3, x_3, x_4)$  qism fazo uch o‘lchovli  $R_3^2$  izotrop fazo bo‘ladi.

${}^{10}R_4^3$  –fazo ajraluvchi metrikaga ega bo‘lgan fazo bo‘lib, uning sferasidagi geometriya, 2.1.1 xulosada ko‘rsatilgan.  ${}^{10}S_3^2$  fazo ham ajraluvchi metrikaga ega bo‘lgan giperbolik fazodir. Yarim elliptik yoki yarim giperbolik fazolar ajraluvchi metrikaga ega bo‘lgan fazolar sferalarida paydo bo‘lganligi sababli,  ${}^2R_5$  da barcha uch o‘lchovli yarim elliptik va yarim giperbolik fazolar mavjud.

${}^2R_5$  fazoostlarining geometriyasi sifatida uch o‘lchovli giperbolik fazolarni sanab o‘tamiz.

1.3.1 teoreмага ko‘ra, sferadagi geometriya  ${}^2S_4$  giperbolik fazo bo‘lganligi sababli, uning koordinata tekisliklari bo‘yicha kesimi to‘rt dan kichik o‘lchovdagi giperbolik fazoni hosil qiladi.

$x_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  bo‘lsa, uning sfera bilan kesimida  ${}^2S_3$  giperbolik fazo hosil bo‘ladi.

Shuningdek,  $x_4 = 0$  yoki  $x_5 = 0$  bo‘lganda  ${}^1S_3$  giperbolik fazo, uch o‘lchovli Lobachevskiy fazosini aniqlaydi.

Shunday qilib,  ${}^2R_5$  ning barcha qism fazolari uch o'lchovli giperbolik fazolarni o'z ichiga oladi degan xulosaga kelishimiz mumkin. Ular  ${}^2R_5$  fazo sferasini gipertekislik bilan kesishishidan hosil bo'ladi.

${}^2R_5$  fazo sferasining ajraluvchi metrikaga ega bo'lgan qism fazolarida yarim giperbolik fazolar hosil bo'ladi.

**Lemma 2.1.1.**  ${}^2R_5$  psevdoyevklid fazoning gipertekisliklari psevdoyevklid yoki yarim Yevklid metrikaga ega.

Shunday qilib,  ${}^2R_5$  fazoda Yevklid metrikasi bo'lgan to'rt o'lchovli qism fazo yo'q degan xulosaga kelishimiz mumkin. Uch o'lchovli elliptik fazoning geometriyasi to'rt o'lchovli fazo sferasida talqin qilinganligi sababli,  ${}^2R_5$  ning qism fazolarda uch o'lchovli elliptik fazo mavjud emas degan xulosaga kelamiz.

Biz  ${}^2R_5$  fazoda ikki o'lchovli butun sirtlar mavjudligini isbotladik, ularning urinma tekisliklari Yevklid teksiligidan iborat. Bu esa  ${}^2R_5$  fazodagi ikki o'lchovli ko'pxillikka misol bo'ladi.

Shuning uchun  ${}^2R_5$  fazoda ikki o'lchovli  $M_2$  ko'pxillik borligini ta'kidlashimiz mumkin.

Berilgan masala  ${}^2R_5$  fazodagi qism ko'pxilliklarning maksimal o'lchamini aniqlashni talab qiladi.

**Teorema 2.1.2.**  ${}^2R_5$  fazoda  $M$  ko'pxillikning maksimal o'lchami uchga teng.

${}^2R_5$  fazoda ikki o'lchovli tekisliklardagi geometriyani alohida ko'ramiz. Ikki o'lchovli affin tekisliklarda uch xil geometriya mavjud, ya'ni nuqtalar orasidagi masofani aniqlashning uch xil usuli mavjud bo'lib, ular tekislikning affin almashtirishini saqlaydi. Bu esa uchta tekislik geometriyasini aniqlaydi, ya'ni ular Yevklid, Minkovskiy va Galiley tekisligidan iborat.

Ma'lumki, tekislikdagi kollinear bo'lmagan ikkita vektor tekislikdagi affin koordinatalar sistemasini to'liq aniqlaydi. Lekin bu tasdiq har doim ham to'g'ri emas.

**Teorema 2.2.1.** Minkovskiy fazosida  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar har doim ham bu vektorlarga parallel bo'lgan tekislikning bazis vektorlari bo'la olmaydi.

${}^2R_5$  psevdoyevklid fazoda ixtiyoriy ikki o'lchovli tekislik geometriyasi haqida quyidagicha xulosa qilishimiz mumkin.

**Tasdiq 2.2.1.**  ${}^2R_5$  fazoda aniqlangan ixtiyoriy ikki o'lchovli tekislikdagi geometriya bu tekislikka parallel bo'lgan izotrop vektorlarning mavjudligi bilan aniqlanadi.

1) Agar tekislikka parallel bo'lgan izotrop yo'nalish mavjud bo'lmasa, Yevklid geometriyasi.

2) Tekislikka parallel bo'lgan bitta izotrop yo'nalish mavjud bo'lsa, Galiley geometriyasi.

3) Tekislikka parallel ikkita izotrop yo'nalish mavjud bo'lsa, u holda Minkovskiy geometriyasi hosil bo'ladi.

${}^2S_4$  fazodagi  $X$  – nuqta radius vektori bo‘lsin. U holda  $X^2 = -1$ . Demak, har qanday  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in {}^2S_4$  nuqta uchun (1.3.2) shart bajarilar ekan.

$X$  nuqtaning  $x_5 = 1$  urinma tekislikdagi markaziy proeksiyasini  $T_X$  bilan belgilaymiz.

$$\text{Bundan } T_X = \frac{X - (X \cdot \vec{e}_5)\vec{e}_5}{(X \cdot \vec{e}_5)} \text{ yoki } T_X \text{ } x_5 = 1 \text{ tekislikda } \left( \frac{x_1}{x_5}, \frac{x_2}{x_5}, \frac{x_3}{x_5}, \frac{x_4}{x_5}, 1 \right)$$

koordinatalariga ega.

**Lemma 2.3.1.**  ${}^2S_4$  fazoning  $T_X$  akslantirishi  $i$ –o‘lchovli tekisliklarni  $i$ –o‘lchovli tekisliklarga ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) akslantiradi.

**Teorema 2.3.1.**  $T_X$  – akslantirishda  ${}^2S_4$  fazodagi nuqta,  ${}^1R_4$  fazoning haqiqiy radiusli sferasi ichiga akslanadi.

${}^2R_5$  da tabiiy parametr ga nisbatan vektor tenglamasi bilan berilgan  $\gamma$  chiziqni

$$r(s) = x_1(s)\vec{e}_1 + x_2(s)\vec{e}_2 + x_3(s)\vec{e}_3 + x_4(s)\vec{e}_4 + x_5(s)\vec{e}_5. \quad (2.4.1)$$

ko‘rib chiqaylik.

Biz  ${}^2R_5$  fazoda Frene formulasi ning analogini hosil qildik

$$\begin{cases} \xi'_1 = k_1 \vec{\xi}_2 \\ \xi'_2 = -k_1 \vec{\xi}_1 + k_2 \vec{\xi}_3 \\ \xi'_3 = -k_2 \vec{\xi}_2 + k_3 \vec{\xi}_4 \\ \xi'_4 = k_3 \vec{\xi}_3 + k_4 \vec{\xi}_5 \\ \xi'_5 = k_4 \vec{\xi}_4. \end{cases}$$

Yuqorida ta‘riflanganidek, de-Sitter fazosi  ${}^2R_5$  fazoning mavhum radiusli sferasi ning diametral qarama-qarshi nuqtalarini bitta nuqta deb qarab, shu nuqtalarga izometrik nuqtalar to‘plami sifatida tushunamiz. Demak, chiziq  ${}^2R_5$  fazoning mavhum radiusli sferasida yotsa, u de-Sitter fazosidagi chiziqqa ekvivalent bo‘lar ekan.

${}^2R_5$  dagi  $\gamma$  chiziq vektor tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Agar  ${}^2R_5$  fazoning mavhum radiusli sferasi ning markazi koordinatalar boshida bo‘lsa, (2.4.1) tenglik bilan berilgan  $\gamma$  chiziq  $r^2(s) = -a^2$  tenglikni qanoatlantirsa,  $\gamma$  chiziq sferada yotadi.

**Teorema 2.4.1.**  ${}^2R_5$  fazodagi chiziq mavhum radiusli sferaga tegishli bo‘lishi uchun uning  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – egriliklari

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{k_4} \left[ \frac{d}{ds} \frac{1}{k_3} \left( \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{k_2} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{k_1} \right) \right] + \frac{k_2}{k_1} \right) - \frac{k_3}{k_2} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{k_1} \right) \right] = \frac{k_4}{k_3} \left( \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{k_2} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{k_1} \right) \right] + \frac{k_2}{k_1} \right) d$$

ifferensial tenglamani qanoatlantirishi kerak.

$n$ –o‘lchovli psevdoyevklid fazodagi chiziqlar va sirtlar geometriyasi B.A.Rozenfeld monografiyasida ko‘rilgan. “ko o‘lchovli” sirtlarning geometriyasi

esa, ya'ni  $m$  ( $1 < m < n - 1$ ) o'lchovli sirt qaralmagan. Lekin  $R_5$  Yevklid fazosida  $n - m = 3$  ko o'lchovli bo'lgan  $F^2$  sirt o'rganilgan hamda uning to'rt o'lchovli sfera va gipertekislikka tegishli bo'lish sharti ko'rib chiqilgan.

${}^2R_5$  da ikki o'lchovli sirtlarning umumiy nazariyasini o'rganish juda murakkab. Bu murakkablik  ${}^2R_5$  -fazo metrikasining o'ziga xosligi va ikki o'lchovli sirt yordamchi reporni tanlashning murakkabligi bilan bog'liq.  $R_5$  Yevklid fazosida ham xuddi shunday murakkablik mavjud. Shuning uchun Yu.A.Aminovning monografiyasida  $F^2$  sirt maxsus tanlangan

$$r(u, v) = \rho(u) + v\vec{\xi}_5$$

tenglama bilan berilgan. Bu yerda  $\vec{\xi}_5$  - sirtning normal vektori,  $\rho(u)$  - chiziq tenglamasi. Bu sirt yo'naltiruvchisi  $\vec{\rho}(u)$  bo'lgan chiziqli sirtidir.

${}^2R_5$  da  $O\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$  -koordinatalar sistemasi va ikki o'lchovli regulyar  $F^2$  sirt

$$\vec{r}(u, v) = \sum_{i=1}^5 x_i(u, v)\vec{e}_i, \quad x_i(u, v) \in C^k(D) \quad (3.1.1)$$

vektor tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bu yerda qaralayotgan masalaga qarab  $k = 2$ .

Sirtning birinchi kvadratik formasi  $R_5$  Yevklid fazosining analogi sifatida aniqlanadi.

Shuning uchun biz  ${}^2R_5$  da sirtlarning maxsus sinfini qaraymiz.  ${}^2R_5$  da  $O$  koordinatalar boshi va  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$  bazis vektorlar berilgan bo'lsin. Ushbu koordinatalar sistemasida vektor tenglama bilan berilgan  $F^2 \subset {}^2R_5$  sirtini qaraylik.

$$\vec{r}(u, v) = x_1(u)\vec{e}_1 + x_2(u)\vec{e}_2 + z(u, v)\vec{e}_3 + y_1(v)\vec{e}_4 + y_2(v)\vec{e}_5, \quad (3.1.3)$$

bu yerda  $x_1(u), x_2(u), z(u, v), y_1(v), y_2(v) \in C^2(D)$  ( $u, v$ )  $\in D$  funksiyalar uchun o'rinli.

$F^2$  sirtning tenglamasi (3.1.3) ko'rinishda berilganda, uning birinchi kvadratik formasining diskriminanti

$$EG - F^2 = z_v'^2(x_{1u}'^2 + x_{2u}'^2) - z_u'^2(y_{1v}'^2 + y_{2v}'^2) - (x_{1u}'^2 + x_{2u}'^2)(y_{1v}'^2 + y_{2v}'^2)$$

musbat, manfiy va hatto nolga teng bo'lishi mumkin.

Fizikaning ko'pgina masalalarida besh o'lchovli fazoda sirtning koordinatalari birinchi uchta fazoviy, keyingi ikkitasi vaqtga o'xshash yoki aralash komponentlarga bog'liq tanlanadi. Biz ham  $u$  va  $v$  parametrlarni ushbu yondashuvni hisobga olgan holda tanladik, bu yerda  $u$  fazoviy koordinatalarga,  $v$  esa vaqtga o'xshash koordinatalarga bog'liq.  $z(u, v)$  - ko'rib chiqilayotgan obyektning asosiy funksiyasini ifodalaydi.

$\vec{r}_u$  va  $\vec{r}_v$  vektorlardan foydalanib  $W$  normal fazoning bazis vektorlarini aniqlaymiz.  $\vec{r}_u$  va  $\vec{r}_v$  vektorlarning koordinatalaridan quyidagi vektorlarni tuzamiz.

$$\vec{N}_1 = x_{2u}'\vec{e}_1 - x_{1u}'\vec{e}_2, \quad \vec{N}_2 = y_{2v}'\vec{e}_4 - y_{1v}'\vec{e}_5.$$

$\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{N}_1, \vec{N}_2$  vektorlarning vektorial ko'paytmasini aniqlaymiz:

$$\vec{N}_3 = [\vec{r}_u' \vec{r}_v' \vec{n}_1 \vec{n}_2].$$

**Lemma 3.2.1.**  $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{N}_1, \vec{N}_2$  va  $\vec{N}_3$  vektorlar besh o'lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazoning  $x \in F^2$  nuqtasida bazis tashkil qiladi.

$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$  vektorlar  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  vektorlarga ortogonal bo'lgani uchun ular  $x \in F^2$  nuqtada  $W$  normal fazoga tegishlidir.

**Teorema 3.2.1.**  $F^2 \subset {}^2R_5$  ikki o'lchovli sirtning normal fazosidagi geometriyasi har doim uch o'lchovli Minkovskiy fazosining geometriyasidir.

$F^2 \subset {}^2R_5$  sirt (3.1.3) tenglama bilan berilgan bo'lsin. Har bir  $M \in F^2$  nuqtada har doim  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$  normal vektorlarni aniqlash mumkin. Ushbu normal vektorlardan foydalanib, biz sirtning ikkinchi kvadrat formalarini hisoblaymiz.

$$II_1 = (d^2r \vec{n}_1), II_2 = (d^2r \vec{n}_2), II_3 = (d^2r \vec{n}_3),$$

bu yerda  $d^2r = \vec{r}_{uu} du^2 + 2\vec{r}_{uv} du dv + \vec{r}_{vv} dv^2$ .

$\vec{n}_1$  normal bo'yicha  $F^2$  sirtning ikkinchi kvadratik formasi

$$II_1 = (d^2r \vec{n}_1) = L_1 du^2 + 2M_1 du dv + N_1 dv^2$$

ko'rinishga ega. Sirtning ikkinchi kvadratik formasining ko'rinishi Yevklid fazosidagi kabi aniqlanadi, lekin  $\vec{n}_1$  normal vektorlarni tanlash xususiyatidan ba'zi koeffitsiyentlar nolga teng

$$L_1 = (r_{uu} \vec{n}_1) = \frac{x_{1uu}'' x_{2u}' - x_{1u}' x_{2uu}''}{\sqrt{x_{1u}'^2 + x_{2u}'^2}}, M_1 = (r_{uv} \vec{n}_1) = 0, N_1 = (r_{vv} \vec{n}_1) = 0$$

bo'ladi. Demak, sirtning ikkinchi kvadratik formasining ko'rinishi

$$II_1 = (d^2r \vec{n}_1) = \left[ \frac{x_{1uu}'' x_{2u}' - x_{1u}' x_{2uu}''}{\sqrt{x_{1u}'^2 + x_{2u}'^2}} \right] du^2 = \frac{(x_{1u}'^2 + x_{2u}'^2) \begin{vmatrix} x_{1uu}'' & x_{2uu}'' \\ x_{1u}' & x_{2u}' \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_{1u}'^2 + x_{2u}'^2)^3}} du^2 = \tilde{k}_u ds_1^2$$

bu yerda,  $v = const$   $k_u$  – koeffitsiyent koordinat chizig'ining ikki o'lchovli  $Ox_1x_2$  tekislikdagi proeksiyasining egriligi,  $s_1$  – koordinata chizig'ining yoy uzunligi.

Xuddi shunday,  $\vec{n}_2$  normalga nisbatan  $F^2$  sirtning ikkinchi kvadratik formasini aniqlaymiz

$$II_2 = (d^2r \vec{n}_2) = L_2 du^2 + 2M_2 du dv + N_2 dv^2$$

bu yerda,  $L_2 = (r_{uu} \vec{n}_2) = 0, M_2 = (r_{uv} \vec{n}_2) = 0, N_2 = (r_{vv} \vec{n}_2) = \frac{-y_{1vv}'' y_{2v}' + y_{2vv}'' y_{1v}'}{\sqrt{-y_{1v}'^2 - y_{2v}'^2}}$ .

Bundan,

$$II_2 = (d^2 r \vec{n}_2) = \left[ \frac{-y''_{1v} y'_{2v} + y''_{2v} y'_{1v}}{\sqrt{-y'^2_{1v} - y'^2_{2v}}} \right] dv^2 = - \frac{(y'^2_{1v} + y'^2_{2v}) \begin{vmatrix} y''_{1v} & y''_{2v} \\ y'_{1v} & y'_{2v} \end{vmatrix}}{\sqrt{-(y'^2_{1v} + y'^2_{2v})^3}} dv^2 = \tilde{k}_v ds_2^2$$

bu yerda,  $u = const$   $\tilde{k}_v$  – egrilik ikki o‘lchovli  $Ox_4x_5$  tekislikka proeksiyasining egriligi,  $s_2$  – koordinata chizig‘i yoyi uzunligi.

Ikkinchi kvadratik formalarning uchinchi nolga teng bo‘lmagan koeffitsiyentlarga ega va uning geometrik qiymati sirt nuqtasidan  $\vec{n}_3$  normal yo‘nalishi bo‘yicha urinma tekislikgacha bo‘lgan masofani beradi.

$$II_3 = (d^2 r \vec{n}_3) = Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2$$

$$L = \frac{(y'^2_{1v} + y'^2_{2v})}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -x'_{1u} & x'_{2u} & 0 \\ x'_{2u} & x'_{1u} & z'_u \\ x''_{2uu} & x''_{1uu} & z''_{uu} \end{vmatrix}, \quad M = \frac{(y'^2_{1v} + y'^2_{2v})}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -x'_{1u} & x'_{2u} & 0 \\ x'_{2u} & x'_{1u} & 0 \\ 0 & 0 & z''_{uv} \end{vmatrix},$$

$$N = \frac{(x'^2_{1u} + x'^2_{2u})}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -y'_{1v} & y'_{2v} & 0 \\ y'_{2v} & y'_{1v} & z'_v \\ y''_{2vv} & y''_{1vv} & z''_{vv} \end{vmatrix}.$$

Har bir  $M \in F^2$  nuqtada uch turdagi normal egrilik mavjud, ya’ni

$$K_u = \frac{II_1}{I}, \quad K_v = \frac{II_2}{I}, \quad K_n = \frac{II_3}{I}.$$

$K_u$  va  $K_v$  koordinata chiziqlarining normal egriligi,  $K_n$  normal egrilik deyiladi.  $M \in F^2$  nuqtadagi  $\vec{N}$  vektor

$$\vec{N} = K_u \vec{n}_1 + K_v \vec{n}_2 + K_n \vec{n}_3$$

normal egrilik vektori deb ataladi.

Koordinata boshi  $x \in F^2$  nuqtada  $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{N}_3\}$  – vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan hosil bo‘lgan  ${}^2R_5$  fazoning uch o‘lchovli qism fazosini  $\omega$  deb olamiz.  $x \in F^2$  nuqtani o‘rab turgan uch o‘lchovli soha  $\omega$  uch o‘lchovli qism fazoga mos keladi, uch o‘lchovli aylanani ikki o‘lchovli sirt sifatida qarash mumkin.  $\omega$  qism fazodagi geometriya  $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{N}_3\}$  geometrik qiymatlari bilan aniqlanadi.

**Teorema 3.3.1.** Uch o‘lchovli  $\omega$  fazo har doim Minkovski fazosidir.

**Ta’rif 3.3.1.**  $\omega$  fazo ikki o‘lchovli  $F^2 \subset {}^2R_5$  sirtning uch o‘lchovli kuzatuvchi fazosi deb ataladi.

$\omega$  fazo  $F^2$  sirtning  $W$  normal fazosidan farq qiladi. Lekin  $\omega$  kuzatuvchi fazoda  $F^2 \subset {}^2R_5$  ikki o‘lchovli sirt bir qiymatli aniqlanadi.  $\omega$  kuzatuvchi fazoning afzalligi shundaki, bazis vektorlari koordinata chiziqlariga urinma vektorlardir. Kuzatuvchi fazoni tanlash  $F^2 \subset {}^2R_5$  ikki o‘lchovli sirt geometriyasini o‘rganish imkonini beradi.

Bu holda  $F^2 \subset {}^2R_5$  sirt nuqtalarining klassifikatsiyasi Minkovskiy fazosidagi ma'lum usullarga o'xshash bo'ladi.

${}^2R_5$  besh o'lchovli psevdoyevklid fazoda  $R_3$  uch o'lchovli Yevklid fazo uning qism fazosidir. Shuning uchun uch o'lchovli Yevklid fazosidagi barcha  $F^2$  ikki o'lchovli sirtlar  ${}^2R_5$  da mavjud. Bundan tashqari,  ${}^2R_5$  da to'rt o'lchovli qism fazolarida har xil turdagi ikki o'lchovli sirtlar ham mavjud. Shuning uchun  ${}^2R_5$  da to'rt o'lchovli qism fazolarda ikki o'lchovli sirtlarni o'rganish qiziqish uyg'otmaydi. Tabiiy savol tug'iladi:  ${}^2R_5$  fazoning to'rt o'lchovli qism fazolariga tegishli bo'lmagan ikki o'lchovli sirt mavjudmi?

**Ta'rif 3.4.1.** Agar  $F^2 \subset {}^2R_5$  ikki o'lchovli sirt fazoviy bo'lib, gipertekisliklariga tegishli bo'lmasa, u butun deb ataladi.

**Teorema 3.4.2.** Agar  $M \in F^2$  da

$$z_v^2 > (y_{1v}^2 + y_{2v}^2) \left[ \frac{z_u^2}{x_{1u}^2 + x_{2u}^2} + 1 \right]$$

shart bajarilsa, u holda urinma tekislikdagi geometriya Yevklid bo'ladi.

**Teorema 3.4.3.** Agar  $M \in F^2$  nuqtada  $z_v^2 < y_{1v}^2 + y_{2v}^2$  shart bajarilsa, u holda urinma tekislikdagi geometriya Minkovskiy hisoblanadi.

**Teorema 3.4.4.** Agar  $M \in F^2$  da

$$z_v^2 < (y_{1v}^2 + y_{2v}^2) \left[ \frac{z_u^2}{x_{1u}^2 + x_{2u}^2} + 1 \right]$$

shart mavjud bo'lsa, u holda urinma tekislikdagi geometriya Minkovskiy bo'ladi.

Bu teoremlarda ko'rib chiqilgan hollar alohida, chunki  $\vec{r}_u$ ,  $\vec{r}_v$  vektorlar urinma tekisligining bazis vektorlari emas.

**Teorema 3.4.5.** Psevdoyevklid fazoda (3.1.3) tenglama bilan berilgan butun Yevklid  $F^2$  sirti mavjud.

**Misol 3.4.2.** Urinma tekisligidagi geometriya Minkovskiy geometriyasidan iborat ikki o'lchovli butun  $F^2 \subset {}^2R_5$  sirtga misol:

$$r = (u, v) = u^3 \vec{e}_1 + 3u^3 \vec{e}_2 + (4u^3 - 5v^3) \vec{e}_3 - 2v^3 \vec{e}_4 - 3v^3 \vec{e}_5$$

$$\vec{r}_u = \{3u^2, 9u^2, 12u^2, 0, 0\} \Rightarrow \vec{r}_u^2 > 0,$$

$$\vec{r}_v = \{0, 0, -15v^2, -6v^2, -9v^2\} \Rightarrow \vec{r}_v^2 > 0.$$

$$z_v^2 < (y_{1v}^2 + y_{2v}^2) \left[ \frac{z_u^2}{x_{1u}^2 + x_{2u}^2} + 1 \right] \Rightarrow 225v^2 < (36v^2 + 81v^2) \left[ \frac{144u^2}{9u^2 + 81u^2} + 1 \right].$$

**Misol 3.4.2.** Urinma tekisligidagi geometriya Yevklid geometriyasidan iborat ikki o'lchovli butun  $F^2 \subset {}^2R_5$  sirtga misol:

$$r = (u, v) = 4u^3 \vec{e}_1 + 9u^3 \vec{e}_2 - (6u^3 + 5v^3) \vec{e}_3 + v^3 \vec{e}_4 - 2v^3 \vec{e}_5$$

$$\vec{r}_u = \{12u^2, 27u^2, -18u^2, 0, 0\} \Rightarrow \vec{r}_u^2 > 0,$$

$$\vec{r}_v = \{0, 0, -15v^2, 3v^2, -6v^2\} \Rightarrow \vec{r}_v^2 > 0.$$

$$z_v^2 > (y_{1v}^2 + y_{2v}^2) \left[ \frac{z_u^2}{x_{1u}^2 + x_{2u}^2} + 1 \right] \Rightarrow 225v^2 > (9v^2 + 36v^2) \left[ \frac{324u^2}{144u^2 + 529u^2} + 1 \right].$$

Ushbu ikki o'lovli  $F^2 \subset {}^2R_5$  butun sirtlarning barcha urinma tekisliklaridagi geometriya Yevklid va Minkovskiy tekisligidan iborat.

## XULOSA

Ushbu dissertatsiya besh o'lchovli ikki indeksli psevdoyevklid fazoda ikki o'lchovli sirtlar geometriyasini o'rganishga bag'ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

${}^2R_5$  fazoning ta'rifi, asosiy geometrik tushunchalar berilgan.

Ko'rib chiqilayotgan fazoning gipertekisliklaridagi geometriyalar klassifikatsiya qilingan.

Haqiqiy va mavhum radiusli sferalarning ta'rifi berilgan. Haqiqiy radiusli sferadagi geometriyaning mavhum radiusli sferadagi geometriyaga o'xshashligi isbotlangan.

Sferik va silindrik koordinatalarda mavhum radiusli sfera tenglamasi va sfera bo'yicha tegishli metrikalar berilgan.

${}^2R_5$  fazoning qism fazolarida geometriya o'rganilgan.

Barcha uch o'lchovli giperbolik fazolar mavjudligi isbotlangan.

Ajraluvchi metrikaga ega fazolar qanday paydo bo'lishi isbotlangan.

${}^2R_5$  da uch o'lchovli elliptik fazoning mavjud emasligi isbotlangan.

Uch o'lchovli yarim elliptik fazolar mavjudligi isbotlangan.

Fazo gipertekisligida ikkinchi turdagi de-Sitter fazosining talqini keltirilgan.

Ikkinchi turdagi de-Sitter fazolari to'rt o'lchovli Minkovski fazosining mavhum radiusli sferasi ichiga talqin qilinishi isbotlangan.

${}^2R_5$  da chiziqlarning xossalari o'rganildi va chiziq uchun Frene formulasi hisoblab chiqilgan.

Chiziqning fazo sferasiga tegishli bo'lishi haqidagi teorema isbotlangan.

Ikki o'lchovli sirt differensial geometriyasining asosiy ta'rifi berilgan.

Vektor ko'rinishidagi sirt tenglamasining maxsus holi tanlanib ikki o'lchovli sirtning normal fazosi uchun bazis qurilgan.

Ikki o'lchovli sirtidagi geometriya doimo Minkovski fazosining geometriyasi ekanligi isbotlangan.

Ikki o'lchovli sirtning urinma tekisligidagi geometriyani aniqlash usuli keltirilgan.

Ikki o'lchovli tekislikda bir xil geometriyaga ega bo'lgan ikki o'lchovli butun sirtlarning mavjudligi isbotlangan.

Ikki o'lchovli sirtlar uchun kuzatuvchi uch o'lchovli fazo tushunchasi aniqlanadi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ  
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ  
УЗБЕКИСТАНА**

---

**ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТРАНСПОРТНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

**МАМАДАЛИЕВ БОТИРЖОН МУЛЛАМИНОВИЧ**

**ГЕОМЕТРИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПЯТИМЕРНОМ  
ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИНДЕКСА ДВА**

**01.01.04 – Геометрия и топология**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)  
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Ташкент – 2023**

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за В.2023.2.PhD/FM872.

Диссертация выполнена в Ферганского государственного университет и Ташкентского государственного транспортного университет.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета ([www.ik-fizmat@nuu.uz](http://www.ik-fizmat@nuu.uz)) и на Информационно-образовательном портале «Ziyouneb» ([www.ziyouneb.uz](http://www.ziyouneb.uz)).

**Научный руководитель:** Артикбаев Абдуллаазиз  
доктор физико-математических наук, профессор

**Официальные оппоненты:** Нарманов Абдиганнар Якубович  
доктор физико-математических наук, профессор

Султанов Бекзод Максуд ўгли  
доктор философии физико-математических наук (PhD)

**Ведущая организация:** Ташкентский государственный университет

Защита диссертации состоится «7» сентября 2023 года в 14<sup>00</sup> часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, института Математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №126). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «22» августа 2023 года.  
(протокол рассылки № 2 от «22» августа 2023 года).



**А. Садуллаев**  
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

**Р.М. Жураев**  
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

**Р.Б. Бешимов**  
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

## **ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))**

### **Актуальность и востребованность темы диссертации.**

Многие научно-практические исследования в физике и квантовой механике, проводимые в мировом масштабе, в большинстве случаев сводятся к исследованию задач неположительно определенных метрических пространств. Метод взятия времени с отрицательным знаком в отношениях между временем и пространством очень важен при изучении геометрии теории относительности. В каноническом представлении метрики Римана важную роль играет то, что пространственноподобные координаты имеют положительный коэффициент, а времениподобные координаты имеют отрицательный коэффициент. Многие технические вопросы решаются с помощью применения метода неположительно определенных метрических пространств. Поэтому результаты, полученные по теории поверхностей в псевдоевклидовом пространстве, важны как с теоретической, так и с практической точек зрения и считаются одним из актуальных направлений современной математики.

В настоящее время изучение геометрии псевдоевклидового пространства, особенно решение задач геометрии поверхностей в этом пространстве, является одной из актуальных задач современной геометрии в мире. В связи с этим проводится много научных исследований по теории псевдоевклидовых пространственных поверхностей и приложениям по полученным результатам. Большое значение имеют задачи физики, квантовой механики и динамических систем, связанные с геометрией подпространств, в которых размерность псевдоевклидова пространства меньше размерности пространства. Поэтому изучение подпространств псевдоевклидовых пространств, получение новых результатов и применение их на практике является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране, особенно в последние годы, повышенное внимание обращено к фундаментальным наукам, в частности к математике и физике, и наряду с этим к актуальным направлениям, имеющим научное значение в задачах гравитационных полей общей теории относительности и геологической томографии. В последние годы уделяется особое внимание на развитие теории функций, геометрию, топологию и теорию Римановых поверхностей. Все эти факторы показывают, насколько рассматриваемые задачи являются актуальными необходимостью, проведения научных исследований на уровне международных стандартов по этим приоритетным направлениям. Теории функций динамических систем, геометрии и топологии определены как основные задачи и направления действий предмета математики. Научные исследования по теории поверхностей псевдоевклидовых пространства имеют важное значение и при выполнении правительственных постановлений. Научные исследования по приоритетным направлениям математики на уровне международных стандартов по важным направлениям специальности «Алгебра, теория динамических систем, геометрия и топология и т.д.» рассматриваются в качестве важнейших

фундаментальных.<sup>1</sup> При этом развитие теории поверхностей в псевдоевклидовых пространствах является одним из основных вопросов при решении задач дифференциальных уравнений, комплексного анализа, геометрии и топологии.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

#### **Степень изученности проблемы.**

Исследования дифференциальной геометрии многомерных поверхностей начались в первой половине XX века. Обзор основных работ по дифференциальной геометрии в евклидовом и неевклидовых пространствах представлен в известных монографиях Б.А.Розенфельда. Следует отметить, что основные работы того времени по дифференциальной геометрии ограничивались изучением кривых и поверхностей. При этом под поверхностью понимается многообразие размерностью на единицу меньше пространства. Одним из исследований поверхности второго порядка в пятимерном полуевклидовом пространстве является работа Н.В. Ширабакина от 1984 года, где автором изучена геометрия двумерных поверхностей в пятимерном полуевклидовом пространстве  $R_5^2$ , используя метод построения канонического репера и метод дифференциальных внешних форм.

Вполне очевидно, что изучение геометрии многомерных поверхностей тесно связано с физическими взаимодействиями материй. Зачастую размерность пространства времени и геометризацию физических взаимодействий удобно выразить в восьмимерном пространстве. Понижение размерности осуществляется склейкой двух или большего числа координат методом, названным теорией Каллусы – Клейна. Таким образом, получается пятимерная теория Клейна – Фока – Румера, направленная на геометризацию квантовой механики и описание масс элементарных частиц. В работе Ю.С.Владимирова дано основания перехода к пятимерной теории, где

---

<sup>1</sup> Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «Об организации деятельности вновь создаваемых научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

указано, что законы обратных квадратов для гравитационной и электростатической сил связаны с трехмерностью классического пространства и закономерностью  $(+, +, +, -, -)$ .

Также появилось несколько работ Банг-Юн Чена, посвященных изучению многообразий размерности  $m < n$  в псевдоевклидовых пространствах  ${}^1R_n$ . В этих работах изучены поверхности в римановом пространстве исследование, изложения даны в тензорном виде. Ю.А.Аминов с учениками исследовали кривые и некоторые классы двумерной поверхности в пятимерном пространстве, в частности, ими решена задача принадлежности двумерной поверхности к сферам и гиперболическим плоскостям. У нас в республике А.Артикбаев, изучая геометрию пространств с вырожденной метрикой, указал на то, что эти пространства появляются как подпространства псевдоевклидова пространства, и назвал их полуевклидовыми и полупсевдоевклидовыми подпространствами. Геометрией подмногообразий пятимерного псевдоевклидова пространства занимались Б.Султанов и Ш.Исмоилов. Рассматриваемые ими галилеева и изотропная геометрии имеют вырожденную метрику и являются подпространствами в  ${}^2R_5$ .

**Связь темы диссертации с научно – исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация.**

Диссертация выполнена в соответствии с научно – исследовательскими работами учреждения высшего образования, где она и выполнялась, то есть исследование выполнено в соответствии с планом научно – исследовательского проекта “Дифференциальные уравнения в частных производных и задачи алгебры геометрии и анализа” Ферганского государственного университета по теме “Исследование некоторых задач теории функции, функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и их приложения” Ташкентского государственного транспортного университета.

**Цель исследования.** Изучение геометрии двумерных поверхностей в пятимерном псевдоевклидовом пространстве индекса два.

**Задачи исследования:**

описание внутренних геометрий плоскостей и гиперплоскостей в пятимерном двухиндексном псевдоевклидовом пространстве;

нахождение аналога формулы Френе для прямой в псевдоевклидовом пространстве и определение условия принадлежности прямой сфере;

определение геометрии двумерной поверхности в окрестности точки и внутренней геометрии нормального пространства в этой точке;

построение сопровождающего базиса в классе специально выделенных двумерных поверхностей и решение проблемы существования двумерных «целых» поверхностей в пространстве.

**Объект исследования:** Плоскости, гиперплоскости, подпространства, кривые и двумерные поверхности в пятимерном псевдоевклидовом пространстве индекса два.

**Предмет исследования:** Неположительная определенная метрика, сферы, изотропный конус, векторное уравнение кривой, двумерная поверхность, геометрия подмножеств.

**Методы исследования:** Современные методы неевклидовой геометрии, комплексного анализа, функционального анализа, дифференциальной геометрии и топологии.

**Научная новизна исследования** состоит в следующем:

доказано, что внутренняя геометрия плоскостей и гиперплоскостей в пятимерном двухиндексном псевдоевклидовом пространстве является геометрией Евклида, Минковского, изотропной и галилеевой геометрий;

определен аналог формулы Френе, являющейся одной из основных формул теории прямых в псевдоевклидовом пространстве, и найдено условие принадлежности прямой сфере с абстрактным радиусом по заданным функциям кривизны;

определена геометрия точки окрестности точки, принадлежащей двумерной поверхности с помощью касательной плоскости, и доказано, что пространство, образованное нормальными плоскостями, всегда является трехмерным пространством Минковского;

построено трехмерное пространство, сопровождающее специально выбранную двумерную поверхность и доказаны теоремы существования для двумерных “целых” поверхностей с одинаковой внутренней геометрией.

**Практические результаты исследования:** Разработан метод определения геометрии на плоскости гиперплоскостей в псевдоевклидовом пространстве для применения в общей теории относительности, в физике.

**Достоверность результатов исследования** обосновывается использованием современных методов неевклидовой геометрии, комплексного анализа и дифференциальной геометрии на двумерных поверхностях.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.**

Научное значение результатов исследования заключается в том, что доказана возможность выбора базисных векторов для построения вторых квадратичных форм поверхности, которые дают возможность геометрически представить двумерные поверхности и провести анализ физических характеристик при решении задач общей теории относительности.

**Внедрение результатов исследования.** Результаты исследования геометрических характеристик двумерных поверхностей в пространстве де-Ситтера F-FA-2021-432 «Анализ и обработка спутниковых данных маломассивных рентгеновских двойных систем», (руководитель проекта проф. Б.Ж.Ахмедов), использованы в проектной работе (Справка № 0123-98 от 05.05.2023 г. Института фундаментальных и прикладных исследований Национального исследовательского университета). Применение научных результатов в современных теориях гравитации представлено пространствами с кривизной. При изучении параметров гравитационных компактных объектов и влияния сильного гравитационного поля это

позволило построить математическую модель происходивших астрофизических процессов.

Научные результаты, полученные при исследовании геометрии двумерных поверхностей в пятимерном псевдоевклидовом пространстве индекса два, использованы при выполнении НИР на основании гранта Президента № МД-758.2022 1.1. «Государственная поддержка молодых российских ученых – докторов наук» Российской Федерации (за 2022-2023 годы, он использовался для решения уравнений фундаментального проекта ФГБОУ ВО «КамГУ им. Витуса Беринга» (Камчатский государственный университет имени ФГБОУ ВО «КамГУ им. Витуса Беринга», справочный номер 04-196/ 10 от 10 мая 2023 г.). Применение научных результатов позволило решить дифференциальные уравнения, выражающие свойства поверхностей, относящихся к этому пространству, определить свойства решения геометрическим путем.

**Апробация результатов исследования.** Результаты диссертации обсуждались на 6 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

**Публикация результатов исследования.** По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 2 опубликованы в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 79 стр.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации названа «Основные понятия псевдоевклидова пространства  ${}^2R_5$ » и состоит из трёх параграфов. В этой главе приведены основные сведения о псевдоевклидовом пространстве, теории поверхностей, основные геометрические характеристики поверхностей, рассматриваемых в псевдоевклидовом пространстве. Кроме того, приведены доказательства некоторых утверждений.

Пусть  $A_5$  – пятимерное аффинное пространство и  $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$  – базис этого пространства. Рассмотрим векторы  $\vec{X}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  и  $\vec{Y}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ , заданные аффинными координатами в  $A_5$ .

**Определение 1.1.1.** Если в аффинном пространстве  $A_5$  скалярное произведение векторов  $\vec{X}, \vec{Y}$  определено по формуле

$$(\vec{X}, \vec{Y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5 \quad (1.1.2)$$

и  $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1$ ,  $(\vec{e}_4, \vec{e}_4) = (\vec{e}_5, \vec{e}_5) = -1$ ,  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$   $i \neq j$ , то  $A_5$  называется пятимерным псевдоевклидовым пространством индекса два и обозначается через  ${}^2R_5$ .

Норма вектора в  ${}^2R_5$  определяется как корень из квадратного скалярного произведения.

Очевидно, что норма вектора

$$|\vec{X}| = \sqrt{(\vec{X}, \vec{X})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2} \quad (1.1.3)$$

может быть действительной, мнимой и равной нулю, если сам вектор не нулевой. Векторы, норма которых равна нулю, называются изотропными.

Множество изотропных векторов составляет подпространство пространства  ${}^2R_5$ , которое называется изотропным конусом пространства. Координаты точек изотропного конуса удовлетворяют следующему равенству

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0. \quad (1.1.4)$$

Расстояние между точками  $A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  и  $B(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  в  ${}^2R_5$  определяется равным норме вектора  $\overline{AB}$ . Следовательно, имеем

$d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(\overline{AB}, \overline{AB})}$ , или в координатной форме

$$|AB| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 - (y_4 - x_4)^2 - (y_5 - x_5)^2}. \quad (1.1.5)$$

Изотропный конус пространства (1.1.4) разделяет его на два множества: множество векторов с действительной нормой и множество векторов с мнимой нормой. В теории относительности эти векторы соответственно называют пространство-подобным и времени-подобным векторами.

Угол  $\theta$  между двумя векторами  $\vec{X}, \vec{Y}$  определяется по формуле

$$ch\theta = \frac{(\vec{X}, \vec{Y})}{|\vec{X}| |\vec{Y}|}.$$

Если скалярное произведение не нулевых двух векторов равно нулю, векторы называются ортогональными векторами.

Рассмотрим гиперплоскость  $\pi$ , проходящую через начало координат в  ${}^2R_5$ , заданную уравнением в аффинных координатах

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 = 0.$$

Тогда вектор  $\vec{N}(a_1, a_2, a_3, -a_4, -a_5)$  является ортогональным всем векторам, лежащим на плоскости  $\pi$ , и называется нормалью к плоскости.

Когда выбраны начало координат и базисные векторы  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ , на плоскостях и гиперплоскостях определяется геометрия, порожденная геометрией пространства  ${}^2R_5$ . При параллельном переносе внутренняя геометрия плоскостей не меняется. Поэтому мы, в основном, рассмотрим геометрию плоскостей, проходящих через начало координат.

Прежде всего рассмотрим геометрию четырехмерных гиперплоскостей. Из базисных векторов  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$  линейно независимых четыре вектора, которые можно выбрать в двух вариантах:  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$  или  $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ , другие варианты приводятся к этим. В первом варианте, когда отсутствует один мнимый базисный вектор, геометрия гиперплоскости, базисом которой являются эти векторы, будет геометрией четырехмерным пространством Минковского  ${}^1R_4$ . Во втором варианте, когда отсутствует вектор действительной длины, геометрия гиперплоскости, базисом которой являются эти векторы – псевдоевклидова индекса два  ${}^2R_4$ . Следовательно, в  ${}^2R_5$  имеются четырехмерные подпространства  ${}^1R_4$  и  ${}^2R_4$ .

Объектом данного исследования являются двумерные поверхности, поэтому особое внимание будем уделять двумерным плоскостям пространства  ${}^2R_5$ , так как касательные плоскости поверхностей  $F^2 \subset {}^2R_5$  будут двумерными плоскостями. При этом внутренняя геометрия поверхности  $F^2 \subset {}^2R_5$  определяется геометрией её касательной плоскости.

Геометрия двумерной плоскости, параллельной двум векторам из базиса  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ , определяется типом этих базисных векторов. Когда базисные векторы  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$  оба имеют действительную (мнимую) норму, геометрия плоскости будет евклидовой  $R_2$ . Если один из них действительный, а другой мнимый, то геометрия плоскости будет геометрией Минковского.

Аналогичное утверждение можно сделать в случае, когда рассматриваем пространственную двумерную плоскость, являющуюся линейной комбинацией двух линейно независимых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Однако в  ${}^2R_5$  существуют двумерные плоскости, базисные векторы которых являются действительным и изотропным векторами, в этом случае геометрия на плоскости будет галилеевой.

Но бывает особый случай, когда оба базисных вектора являются изотропными. В этом случае плоскость будет плоскостью Минковского.

Сфера, то есть геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки пространства, в  ${}^2R_5$  определяется тремя способами. Так как расстояние между двумя точками имеет трех типов – действительное, мнимое и равное нулю, соответственно, определяются три вида сферы.

Сфера с центром в начале координат и действительным радиусом  $r$  имеет уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = r^2. \quad (1.3.1)$$

Эта сфера аффинно является гиперболической поверхностью с образующими двумерными плоскостями.

Аналогично, сфера мнимого радиуса также является гиперболической поверхностью с образующими двумерными плоскостями и её уравнение имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = -r^2. \quad (1.3.2)$$

Третья сфера, сфера нулевого радиуса, совпадает с изотропным конусом (1.1.2) пространства  ${}^2R_5$ .

Поэтому при рассмотрении геометрии на сфере в  ${}^2R_5$  геометрии на сферах мнимого и действительного радиусов можно считать одинаковыми.

Гиперболические пространства постоянной кривизны в монографии Б.А.Розенфельда определены как множество, изометричное точкам сферы псевдоевклидовых пространств, с отождествленными диаметрально противоположными точками. Гиперболические пространства – это римановы пространства постоянной отрицательной кривизны.

Выясним, каким гиперболическим пространствам изометрична геометрия на сфере псевдоевклидова пространства  ${}^2R_5$ .

**Теорема 1.3.1.** Множество с отождествленными диаметрально противоположными точками сферы мнимого радиуса пространства  ${}^2R_5$  изометрично гиперболическому пространству  ${}^2S_4$ .

**Определение 1.3.1.** Пространство постоянной кривизны  $K < 0$  называется пространством де-Ситтера 2–го рода.

Это определение пространства де-Ситтера 2–го рода дано в книге Ж.Хокингам.

В монографии Б. А.Розенфельда множество точек сферы мнимого радиуса пространства  ${}^2R_5$  с отождествленными диаметрально противоположными точками названо гиперболическим пространством  ${}^2S_4$ . Эти определения эквивалентны. Гиперболическое пространство  ${}^2S_4$  – это пространство де-Ситтера 2–го рода.

Вторая глава диссертации, названная «Геометрия подмножеств пятимерного псевдоевклидова пространства индекса два», состоит из четырёх параграфов. В параграфе “О геометрии на подпространствах в  ${}^2R_5$ ”, доказано существование различных гиперболических пространств размерности три также трехмерных и четырехмерных пространств с вырожденной метрикой. Приводится интерпретация пространства де-Ситтера. При этом использована метод интерпретации пространства Лобачевского в евклидова пространства. Третий параграф второй главы посвящен изучению кривых пространства  ${}^2R_5$ . В

конце параграфа даны условия принадлежности кривой к сфере пространства  ${}^2R_5$ , которое является пространством де-Ситтера.

В геометризации физических задач или задачах квантовой механики пользуются методом понижения размерности. Для этого некоторые из координат считаются постоянными или линейно зависимыми между собой. Таким образом, задача не рассматривается в первоначальном пространстве, а рассматривается в его подпространстве. В евклидовой многомерной геометрии понижение размерности не влияет на геометрию пространства. Но в псевдоевклидовом пространстве понижение размерности, соответствующее этим физическим методам, часто изменяет геометрию рассматриваемого пространства. Поэтому в «О геометрии на подпространствах в  ${}^2R_5$ » параграфе докажем существование различных геометрий в подпространствах пространства  ${}^2R_5$ . В основном, будем рассматривать трехмерные и четырехмерные подпространства.

Например, Б.Султановым в доказано, что в подпространстве  $M(x_1, x_2, x_3, x_2, x_3) \subset {}^2R_5$  порождается геометрия галилеева пространства. Легко заметить в рассматриваемом подпространстве  $M \subset {}^2R_5$   $x_2 = x_4$  и  $x_3 = x_5$ . Геометрия в  ${}^2R_5$  – псевдоевклидова, а геометрия его подпространства  $M(x_1, x_2, x_3, x_2, x_3)$  – галилеева. Галилеево пространство имеет вырожденную метрику, и эта геометрия вполне отличается от геометрии псевдоевклидова пространства.

Выясним, в каких подпространствах пространства  ${}^2R_5$  появляются пространства с вырожденными метриками.

**Теорема 2.1.1.** Подпространство  $I(x_1, x_2, x_3, x_3, x_4)$  является псевдоизотропным пространством  ${}^{10}R_4^3$ .

Из теоремы 2.1.1 вытекают следующие следствия.

**Следствие 2.1.1.** При условии  $x_4 = 0$  подпространство  $I_0(x_1, x_2, x_3, x_3, 0) \subset I(x_1, x_2, x_3, x_3, x_4)$  будет трехмерным изотропным пространством  $R_3^2$ .

Пространство  ${}^{10}R_4^3$  – пространство с вырожденной метрикой, геометрия на его сфере, то есть пространство  ${}^{10}S_3^2$ , указанное в следствии 2.1.1, также является гиперболическим пространством с вырожденной метрикой. Так как на сферах пространств с вырожденной метрикой появляются полуэллиптические или полугиперболические пространства, то в  ${}^2R_5$  существуют всевозможные трехмерные полуэллиптические и полугиперболические пространства.

Перечислим трехмерные гиперболические пространства, появляющиеся как геометрия в подпространствах  ${}^2R_5$ .

Так как, по теореме 1.3.1, геометрия на сфере является гиперболическим пространством  ${}^2S_4$ , то его сечение координатными плоскостями порождает гиперболическое пространство размерности меньше четырех.

Когда  $x_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , на его сечении со сферой появляется гиперболическое пространство  ${}^2S_3$ .

Также при  $x_4 = 0$  или  $x_5 = 0$  на сечении появляется гиперболическое пространство  ${}^1S_3$ , то есть трехмерное пространство Лобачевского.

Таким образом, можно сделать вывод, что в подпространствах  ${}^2R_5$  имеются все гиперболические пространства третьей размерности. Причем они появляются при пересечении сферы пространства  ${}^2R_5$  гиперплоскостями.

Но в сечениях сферы пространства  ${}^2R_5$  подпространствами с вырожденной метрикой появляются полугиперболические пространства.

**Лемма 2.1.1.** Гиперплоскость псевдоевклидова пространства  ${}^2R_5$  имеет псевдоевклидову или полуевклидову метрику.

Следовательно, можно утверждать, что в пространстве  ${}^2R_5$  существует двумерное многообразие  $M_2$ . Поставленная задача требует определения максимальной размерности подмногообразий в  ${}^2R_5$ .

**Теорема 2.1.2.** Максимальная размерность многообразия  $M$  в  ${}^2R_5$  равна трем.

Мы специально выделяем геометрию на двумерных плоскостях в пространствах  ${}^2R_5$ . На двумерных аффинных плоскостях существуют три вида геометрии, то есть имеются три метода определения расстояния между точками, которые сохраняются при аффинных преобразованиях плоскости. Это, соответственно, определяет три геометрии плоскости: Евклидову, Минковского и Галилееву.

Известно, что два неколлинеарных вектора на плоскости вполне определяют аффинную систему координат на этой плоскости. Оказывается, это тривиальное утверждение не всегда верно.

**Теорема 2.2.1.** В пространстве Минковского два произвольные вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не всегда могут быть базисными векторами плоскости, параллельной им.

Рассматривая всевозможные случаи выбора двух векторов, образующих систему координат, можно сделать вывод о геометрии произвольной двумерной плоскости в псевдоевклидовом пространстве  ${}^2R_5$ .

**Утверждение 2.1.1.** Геометрия на произвольной двумерной плоскости в  ${}^2R_5$  определяется наличием параллельных изотропных векторов этого пространства.

1) Не существует параллельных изотропных векторов – геометрия плоскости Евклидова.

2) Существует единственный изотропный вектор – геометрия Галилеева.

3) Существуют два изотропных вектора – плоскость имеет геометрию Минковского.

Пусть  $X$  – радиус вектора точки в  ${}^2S_4$ . Тогда  $X^2 = -1$ . Следовательно, для любой точки  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in {}^2S_4$  выполняется условие (1.3.2).

Обозначим через  $T_X$  центральную проекцию точки  $X$  на касательной плоскости  $x_5 = 1$ .

$$\text{Тогда } T_X = \frac{X - (X \cdot \vec{e}_5)\vec{e}_5}{(X \cdot \vec{e}_5)}, \text{ или } T_X \text{ имеет координаты } \left( \frac{x_1}{x_5}, \frac{x_2}{x_5}, \frac{x_3}{x_5}, \frac{x_4}{x_5}, 1 \right)$$

на плоскости  $x_5 = 1$ .

**Лемма 2.3.1.** При отображении  $T_X$   $i$ –мерные плоскости пространства  ${}^2S_4$  отображаются на  $i$ –мерных плоскостях ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).

**Теорема 2.3.1.** При отображении  $T_X$  точки пространства  ${}^2S_4$  отображаются внутри сферы действительного радиуса пространства  ${}^1R_4$ .

Рассмотрим кривую  $\gamma$  в  ${}^2R_5$ , заданную векторным уравнением, относительно естественного параметра

$$r(s) = x_1(s)\vec{e}_1 + x_2(s)\vec{e}_2 + x_3(s)\vec{e}_3 + x_4(s)\vec{e}_4 + x_5(s)\vec{e}_5. \quad (2.4.1)$$

Таким образом, получим формулу Френе для кривой в  ${}^2R_5$  в следующем виде:

$$\begin{cases} \xi'_1 = k_1 \vec{\xi}_2 \\ \xi'_2 = -k_1 \vec{\xi}_1 + k_2 \vec{\xi}_3 \\ \xi'_3 = -k_2 \vec{\xi}_2 + k_3 \vec{\xi}_4 \\ \xi'_4 = k_3 \vec{\xi}_3 + k_4 \vec{\xi}_5 \\ \xi'_5 = k_4 \vec{\xi}_4. \end{cases}$$

Как определено выше, пространство де-Ситтера мы понимаем как множество точек, изометричных множеству пар диаметрально противоположных точек сферы мнимого радиуса пространства  ${}^2R_5$ . Следовательно, принадлежность кривой в пространстве де-Ситтера эквивалентна, когда кривая лежит на сфере мнимого радиуса пространства  ${}^2R_5$ .

Пусть кривая  $\gamma$  в  ${}^2R_5$  задана векторным уравнением. Если считать центр сферы мнимого радиуса пространства  ${}^2R_5$  началом координат, то принадлежность кривой  $\gamma$  сфере означает  $r^2(s) = -a^2$ .

**Теорема 2.4.1.** Чтобы кривая в пространстве  ${}^2R_5$  принадлежала сфере мнимого радиуса, ее кривизны  $k_1, k_2, k_3, k_4$  должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{k_4} \left[ \frac{d}{ds} \frac{1}{k_3} \left( \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{k_2} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{k_1} \right) \right] + \frac{k_2}{k_1} \right) - \frac{k_3}{k_2} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{k_1} \right) \right] = \frac{k_4}{k_3} \left( \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{k_2} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{k_1} \right) \right] + \frac{k_2}{k_1} \right).$$

Третья глава названа «Двумерные поверхности в  ${}^2R_5$ ». В этой главе рассмотрим геометрию кривых и поверхностей в  $n$ -мерном псевдоевклидовом пространстве, изученую в монографии Б.А.Розенфельда. Но геометрия поверхностей с коразмерностью, то есть  $m$ -поверхностей, когда  $1 < m < n - 1$ , в этой монографии не рассмотрена. В евклидовом пространстве  $R_5$  изучена поверхность  $F^2$ , где коразмерность  $n - m = 3$ . В частности, рассмотрена задача о принадлежности поверхности  $F^2$  к сфере и четырехмерной плоскости.

Изучение общей теории двумерных поверхностей в  ${}^2R_5$  является достаточно сложным. Эта сложность связана с особенностью метрики пространства  ${}^2R_5$  и трудоемкостью выбора сопровождающего репера к двумерной поверхности. Такая же сложность существует и в евклидовом пространстве  $R_5$ . Поэтому в монографии Ю.А.Аминова рассматривается поверхность  $F^2$ , заданная уравнением

$$r(u, v) = \rho(u) + v \vec{\xi}_5,$$

где  $\vec{\xi}_5$  – специально выбранный нормальный вектор поверхности и  $\rho(u)$  – уравнение кривой. Эта поверхность является линейчатой поверхностью с направляющей  $\vec{\rho}(u)$ .

Пусть  $O\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$  – система координат в  ${}^2R_5$  и двумерная регулярная поверхность  $F^2$  задана векторным уравнением

$$\vec{r}(u, v) = \sum_{i=1}^5 x_i(u, v) \vec{e}_i, \quad x_i(u, v) \in C^k(D), \quad (3.1.1)$$

где  $k = 2$ , в зависимости от рассматриваемых задач.

По аналогии с Евклидовым пространством, определяем первую квадратичную форму поверхности.

Пусть выбрана система координат в  ${}^2R_5$  с началом в точке  $O$  и базисными векторами  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ . В этой системе координат рассмотрим  $F^2 \subset {}^2R_5$ , заданную вектором, уравнения

$$\vec{r}(u, v) = x_1(u) \vec{e}_1 + x_2(u) \vec{e}_2 + z(u, v) \vec{e}_3 + y_1(v) \vec{e}_4 + y_2(v) \vec{e}_5, \quad (3.1.3)$$

где функции  $x_1(u), x_2(u), z(u, v), y_1(v), y_2(v) \in C^2(D)$  ( $u, v \in D$ ).

Когда уравнение поверхности  $F^2$  задано в виде (3.1.3), дискриминант его первой квадратичной формы имеет вид

$$EG - F^2 = z_v'^2 (x_{1u}'^2 + x_{2u}'^2) - z_u'^2 (y_{1v}'^2 + y_{2v}'^2) - (x_{1u}'^2 + x_{2u}'^2) (y_{1v}'^2 + y_{2v}'^2)$$

и может принимать положительные, отрицательные значения и даже может быть равным нулю.

Во многих задачах физики, рассматриваемых в пятимерных пространствах, первые три – пространственные координаты, следующие две временные или

смешенные компоненты, имеющие временноподобные свойства. Учитывая такой подход, мы выбрали параметры  $u$  и  $v$ , где пространственные координаты, в основном, зависят от  $u$ , а временноподобные зависят от  $v$ . Тогда  $z(u, v)$  выражает основную функциональную зависимость рассматриваемого объекта.

С помощью векторов  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  определяем базисные векторы нормального пространства  $W$ . Из координат векторов  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  составим следующие векторы  $\vec{N}_1 = x'_{2u}\vec{e}_1 - x'_{1u}\vec{e}_2$ ,  $\vec{N}_2 = y'_{2v}\vec{e}_4 - y'_{1v}\vec{e}_5$ .

Определяем векторное произведение векторов  $\vec{r}_u$ ,  $\vec{r}_v$ ,  $\vec{N}_1$ ,  $\vec{N}_2$

$$\vec{N}_3 = [\vec{r}'_u \vec{r}'_v \vec{n}_1 \vec{n}_2].$$

**Лемма 3.2.1.** Векторы  $\vec{r}_u$ ,  $\vec{r}_v$ ,  $\vec{N}_1$ ,  $\vec{N}_2$  и  $\vec{N}_3$  образуют базис в точке  $x \in F^2$  в пятимерном псевдоевклидовом пространстве индекса два.

Так как векторы  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$ ,  $\vec{n}_3$  ортогональны векторам  $\vec{r}_u$ ,  $\vec{r}_v$ , то они принадлежат нормальному пространству  $W$  в  $x \in F^2$ .

**Теорема 3.2.1.** Геометрия на нормальном пространстве двумерной поверхности  $F^2 \subset {}^2R_5$  всегда является геометрией трехмерного пространства Минковского.

Пусть поверхность  $F^2 \subset {}^2R_5$  задана уравнением. В каждой точке  $M \in F^2$  всегда можно определить нормальные векторы  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$ ,  $\vec{n}_3$ . С помощью этих нормальных векторов вычислим вторые квадратичные формы поверхности

$$II_1 = (d^2\vec{r}, \vec{n}_1), \quad II_2 = (d^2\vec{r}, \vec{n}_2), \quad II_3 = (d^2\vec{r}, \vec{n}_3),$$

где  $d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu} du^2 + 2\vec{r}_{uv} du dv + \vec{r}_{vv} dv^2$ .

Вторая квадратичная форма поверхности  $F^2$  по нормали  $\vec{n}_1$  имеет вид

$$II_1 = (d^2\vec{r}, \vec{n}_1) = L_1 du^2 + 2M_1 du dv + N_1 dv^2.$$

Формально вид второй квадратичной формы не отличается от евклидовой второй квадратичной формы поверхности, но в связи с выбором нормальных векторов некоторые коэффициенты равняются нулю

$$L_1 = (r_{uu}, \vec{n}_1) = \frac{x''_{1uu}x'_{2u} - x'_{1u}x''_{2uu}}{\sqrt{x'^2_{1u} + x'^2_{2u}}}, \quad M_1 = (r_{uv}, \vec{n}_1) = 0, \quad N_1 = (r_{vv}, \vec{n}_1) = 0.$$

Следовательно,

$$II_1 = (d^2\vec{r}, \vec{n}_1) = \left[ \frac{x''_{1uu}x'_{2u} - x'_{1u}x''_{2uu}}{\sqrt{x'^2_{1u} + x'^2_{2u}}} \right] du^2 = \frac{(x'^2_{1u} + x'^2_{2u}) \begin{vmatrix} x''_{1uu} & x''_{2uu} \\ x'_{1u} & x'_{2u} \end{vmatrix}}{\sqrt{(x'^2_{1u} + x'^2_{2u})^3}} du^2 = \tilde{k}_u ds_1^2,$$

где коэффициент  $k_u$  является кривизной проекции координатной линии  $v = const$  на двумерную плоскость  $Ox_1x_2$  а,  $s_1$  – длина дуги этой координатной линии.

Аналогичным способом определяем вторую квадратичную форму поверхности  $F^2$  относительно нормали  $\vec{n}_2$

$$II_2 = (d^2\vec{r}, \vec{n}_2) = L_2 du^2 + 2M_2 du dv + N_2 dv^2,$$

где  $L_2 = (r_{uu}, \vec{n}_2) = 0$ ,  $M_2 = (r_{uv}, \vec{n}_2) = 0$ ,  $N_2 = (r_{vv}, \vec{n}_2) = \frac{-y''_{1v}y'_{2v} + y''_{2v}y'_{1v}}{\sqrt{-y'^2_{1v} - y'^2_{2v}}}$ .

Окончательно получаем

$$II_2 = (d^2\vec{r}, \vec{n}_2) = \left[ \frac{-y''_{1v}y'_{2v} + y''_{2v}y'_{1v}}{\sqrt{-y'^2_{1v} - y'^2_{2v}}} \right] dv^2 = - \frac{(y'^2_{1v} + y'^2_{2v}) \begin{vmatrix} y''_{1v} & y''_{2v} \\ y'_{1v} & y'_{2v} \end{vmatrix}}{\sqrt{-(y'^2_{1v} + y'^2_{2v})^3}} dv^2 = \tilde{k}_v ds_2^2$$

где  $\tilde{k}_v$  – кривизна проекции кривой  $u = const$  на двумерную плоскость  $Ox_4x_5$ ,  $s_2$  – длина дуги этой координатной линии.

Вычислим третью из вторых квадратичных форм, где имеют место отличные от нуля коэффициенты, а геометрическое значение дает расстояние от точки поверхности до касательной плоскости по направлению нормали  $\vec{n}_3$

$$II_3 = (d^2\vec{r}, \vec{n}_3) = Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2.$$

$$L = \frac{(y'^2_{1v} + y'^2_{2v})}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -x'_{1u} & x'_{2u} & 0 \\ x'_{2u} & x'_{1u} & z'_u \\ x''_{2uu} & x''_{1uu} & z''_{uu} \end{vmatrix}, \quad M = \frac{(y'^2_{1v} + y'^2_{2v})}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -x'_{1u} & x'_{2u} & 0 \\ x'_{2u} & x'_{1u} & 0 \\ 0 & 0 & z''_{uv} \end{vmatrix},$$

$$N = \frac{(x'^2_{1u} + x'^2_{2u})}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -y'_{1v} & y'_{2v} & 0 \\ y'_{2v} & y'_{1v} & z'_v \\ y''_{2vv} & y''_{1vv} & z''_{vv} \end{vmatrix}.$$

В каждой точке  $M \in F^2$  имеем три вида нормальной кривизны

$$K_u = \frac{II_1}{I}, \quad K_v = \frac{II_2}{I}, \quad K_n = \frac{II_3}{I}.$$

Соответственно  $K_u$ ,  $K_v$  назовем нормальными кривизнами координатных линий, а  $K_n$  – третьей нормальной кривизной. С точкой  $M \in F^2$  свяжем вектор  $\vec{N}$

$$\vec{N} = K_u \vec{n}_1 + K_v \vec{n}_2 + K_n \vec{n}_3,$$

называемый вектором нормальной кривизны.

За пространство  $\omega$  принимаем трехмерное подпространство пространства  ${}^2R_5$ , порожденное линейной комбинацией векторов  $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{N}_3\}$  с началом координат в точке  $x \in F^2$ . Можно доказать, что в трехмерной области, окружающей точку  $x \in F^2$ , это подпространство  $\omega$  совпадает с

соответствующей трехмерной окружностью, рассматриваемой в качестве двумерной поверхности в трехмерном пространстве. Геометрия в подпространстве  $\omega$  определяется геометрическими значениями  $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{N}_3\}$ .

**Теорема 3.3.1.** Трехмерное  $\omega$  пространство всегда является пространством Минковского.

**Определение 3.3.1.** Пространство  $\omega$  назовем сопровождающим трехмерным пространством двумерной поверхности  $F^2 \subset {}^2R_5$ .

Очевидно,  $\omega$  вполне отличается от нормального пространства  $W$  поверхности  $F^2$ . Но нормальное пространство  $W$  и сопровождающее пространство  $\omega$  однозначно определяются заданием двумерной поверхности  $F^2 \subset {}^2R_5$ . Сопряженное пространство  $\omega$  имеет преимущество в том, что базисными векторами являются векторы, касательные к координатным линиям. Вариант выбора сопряженного пространства дает возможность изучения геометрии двумерной поверхности  $F^2 \subset {}^2R_5$ . В этом варианте классификация точек поверхности  $F^2 \subset {}^2R_5$  будет аналогичной по известным методам в пространстве Минковского.

**Определение 3.4.1.** Двумерную поверхность  $F^2 \subset {}^2R_5$  назовем целой (полной), если она пространственная, то есть не принадлежит гиперплоскости.

**Теорема 3.4.2.** Если в точке  $M \in F^2$  выполняется условие  $z_v^2 > (y_{1v}^2 + y_{2v}^2) \left[ \frac{z_u^2}{x_{1u}^2 + x_{2u}^2} + 1 \right]$ , то геометрия на касательной плоскости Евклидова.

**Теорема 3.4.3.** Если в точке  $M \in F^2$  выполняется условие  $z_v^2 < y_{1v}^2 + y_{2v}^2$ , то геометрия на касательной плоскости – Минковского.

**Теорема 3.4.4.** Если в точке  $M \in F^2$  выполняется условие  $z_v^2 < (y_{1v}^2 + y_{2v}^2) \left[ \frac{z_u^2}{x_{1u}^2 + x_{2u}^2} + 1 \right]$ , то геометрия на касательной плоскости будет Минковского.

Рассматриваемый в этой теореме случай является особым, потому что векторы  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  не являются базисными векторами на касательной плоскости.

**Теорема 3.4.5.** В псевдоевклидовом пространстве существует целая евклидова  $F_2$  поверхность, заданная уравнением (3.1.3).

**Пример 3.4.2.** Приведем пример: целая двумерная поверхность  $F^2 \subset {}^2R_5$ , все касательные плоскости – Минковского

$$r = (u, v) = u^3 \vec{e}_1 + 3u^3 \vec{e}_2 + (4u^3 - 5v^3) \vec{e}_3 - 2v^3 \vec{e}_4 - 3v^3 \vec{e}_5$$

$$\vec{r}_u = \{3u^2, 9u^2, 12u^2, 0, 0\}, \quad \vec{r}_v = \{0, 0, -15v^2, -6v^2, -9v^2\}, \quad \vec{r}_u^2 > 0, \quad \vec{r}_v^2 > 0.$$

$$z_v^2 < (y_{1v}^2 + y_{2v}^2) \left[ \frac{z_u^2}{x_{1u}^2 + x_{2u}^2} + 1 \right] \Rightarrow 225v^2 < (36v^2 + 81v^2) \left[ \frac{144u^2}{9u^2 + 81u^2} + 1 \right].$$

**Пример 3.4.3.** Целая двумерная поверхность  $F^2 \subset {}^2R_5$ , все касательные плоскости – Евклидовы

$$r = (u, v) = 4u^3\vec{e}_1 + 9u^3\vec{e}_2 - (6u^3 + 5v^3)\vec{e}_3 + v^3\vec{e}_4 - 2v^3\vec{e}_5$$

$$\vec{r}_u = \{12u^2, 27u^2, -18u^2, 0, 0\}, \vec{r}_v = \{0, 0, -15v^2, 3v^2, -6v^2\}, \vec{r}_u^2 > 0, \vec{r}_v^2 > 0.$$

$$z_v^2 > (y_{1v}^2 + y_{2v}^2) \left[ \frac{z_u^2}{x_{1u}^2 + x_{2u}^2} + 1 \right] \Rightarrow 225v^2 > (9v^2 + 36v^2) \left[ \frac{324u^2}{144u^2 + 529u^2} + 1 \right].$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению геометрии двумерных поверхностей в пятимерном псевдоевклидовом пространстве индекса два.

Основные результаты исследования состоят в следующем. Приведены определения пространства, основные геометрические понятия в  ${}^2R_5$ .

Перечислены геометрии на гиперплоскостях рассматриваемого пространства. Дано определение сферы действительного и мнимого радиусов.

Доказана эквивалентность геометрии на сфере действительного радиуса с геометрией на сфере мнимого радиуса.

Приведены уравнение сферы мнимого радиуса в сферических и цилиндрических координатах и соответствующие метрики на сфере. Изучена геометрия на подпространствах пространства  ${}^2R_5$ .

Доказано существование всех трехмерных гиперболических пространств. Доказано, как появляются пространства с вырожденной метрикой. Доказано не существование трехмерного эллиптического пространства в  ${}^2R_5$ .

Доказано существование трехмерных полуэллиптических пространств. Построена интерпретация пространства де-Ситтера второго рода на гиперплоскости пространства. Изучены свойства кривых и вычислена формула Френе кривой в  ${}^2R_5$ . Доказана теорема о принадлежности кривой сфере пространства. Приведено определение основ дифференциальной геометрии двумерной поверхности.

Выбран специальный вид векторного уравнения поверхности. Построен базис нормального пространства двумерной поверхности. Доказано что геометрия на двумерной поверхности всегда является геометрией пространства Минковского. Построен метод определения геометрии на касательной плоскости двумерной поверхности.

Доказано существование двумерных полных поверхностей с неменяющейся геометрией на двумерной плоскости. Определено понятие соприкасающейся трехмерного пространства для двумерных поверхностей.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES  
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

---

**FERGHANA STATE UNIVERSITY  
TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY**

**MAMADALIEV BOTIRJON MULLAAMINOVICH**

**GEOMETRY OF TWO-DIMENSIONAL SURFACES IN A FIVE  
DIMENSIONAL PSEUDO-EUCLIDEAN SPACE OF INDEX TWO**

**01.01.04 – Geometry and topology**

**ABSTRACT  
OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON  
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**Tashkent – 2023**



## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of the research work.** Study of the geometry of two-dimensional surfaces in five-dimensional pseudo-Euclidean space of index two.

**The object of the research work.** Planes, hyperplanes, subspaces, curves and two-dimensional surfaces in a five-dimensional pseudo-Euclidean space of index two.

**Scientific novelty of the research work** consists of the following:

It is proved that the internal geometry of planes and hyperplanes in a five-dimensional two-index pseudo-Euclidean space is the geometry of Euclid, Minkowski, isotropic and Galilean geometries.

An analogue of the Fresnay formula, which is one of the basic formulas of the theory of straight lines in pseudo-Euclidean space, is determined, and the condition of belonging to a straight sphere with an abstract radius by given curvature functions is found.

The geometry of a point in the neighborhood of a point belonging to a two-dimensional surface using a tangent plane is determined, and it is proved that the space formed by the plane normals is always a three-dimensional Minkowski space.

A three-dimensional space accompanying a specially selected two-dimensional surface is constructed and existence theorems for two-dimensional "whole" surfaces with the same internal geometry are proved.

**Implementation of the research results.** Planes, hyperplanes, subspaces, curves and two-dimensional surfaces in a five-dimensional pseudo-Euclidean space of index two:

Results on the geometric characteristics of two-dimensional surfaces in de Sitter space F-FA-2021-432 "Analysis and processing of satellite data of low-mass X-ray binaries", performed in 2021-2026 at the Institute of Astronomy of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (project leader Prof., B.Zh.Akhmedov) used in the project work (Reference No. 0123-98 dated May 5, 2023 from the Institute for Fundamental and Applied Research of the National Research University). The application of scientific results in modern theories of gravity is represented by spaces with curvature. The gravitational field takes the form of a Riemannian space with a positive indefinite metric;

The scientific results obtained in the study of the geometry of two-dimensional surfaces in a five-dimensional pseudo-Euclidean space, index two, were used in the performance of research on the basis of the President's grant No. MD-758.2022 1.1. "State support of young Russian scientists - doctors of sciences" of the Russian Federation (For 2022-2023, it was used to solve the equations of the fundamental project of the Vitus Bering KamGU (Kamchatka State University named after Vitus Bering KamGU) reference number 04-196/10 dated May 10, 2023.

**The structure and volume of the thesis.** The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 79 pages.

**E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI**  
**СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**  
**LIST OF PUBLISHED WORKS**

**I bo'lim (1 часть; part 1)**

1. Artykbayev A., Mamadaliyev B.M. Geometry of Two-Dimensional Surfaces in Space  ${}^2R_5$  // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023. Volume 44, Issue 4. –P. 1243-1247. (3. Scopus Q2, Cite Score IF=0.42).

2. Mamadaliyev B.M. Geometry of complete two-dimensional surfaces in a five-dimensional pseudo-euclidean space of index two // Bulletin of the Institute of Mathematics, 2023. Volume. 6, Issue 2, –P 31-43. (01.00.00. № 6).

3. Artikbayev A., Mamadaliyev B.M. Geometry of two-dimensional surfaces in the five-dimensional pseudo-euclidean space of index two // AIP Conference Proceedings, 2023. Volume 11. Issue 3. – P. 020068-1-020068-4 (3. Scopus, Cite Score IF=0.16).

4. Artykbaev A., Mamadaliyev B.M., Interpretation of de sitter space of second kind// Bulletin of National University of Uzbekistan. Mathematics and Natural Sciences, 2021. Volume 4. Issue 3. – P. 131-141 (01.00.00 №3).

5. Artykbayev A., Mamadaliyev B.M. Geometry on subspaces of space  ${}^2R_5$  // Bulletin of the Institute of Mathematics, 2021. Volume 4. Issue 3. – P. 42-46 (01.00.00. № 6).

6. Mamadaliyev B.M. Full two-dimensional surfaces in  ${}^2R_5$  // Scientific Journal of Samarkand University, 2020. Volume 119. Issue 1. – P. 35-38 (01.00.00 №2).

**II bo'lim (2 часть; part 2)**

7. Мамадалиев Б.М. Псевдоевклид фазода бир хил геометриялик уринма текисликка эга бўлган икки ўлчовли тўла сиртларнинг мавжудлиги // New theorems of young mathematicians-2018, Namangan, October 18-19, – P. 75-77.

8. Мамадалиев Б.М., Геометрии на плоскостях пространства  ${}^2R_5$  // Тезисы докладов международной научной конференции на тему Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики, Фергана, 12-13 март, 2020, – С. 327-329.

9. Мамадалиев Б.М., Полные двумерные поверхности в  ${}^2R_5$  // Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар мавзусидаги республика миқёсидаги илмий онлайн конференция материаллари тўплами, Термиз, 21-23 октябр, 2020, – С. 72.

10. Mamadaliyev B.M., Problems of modern mathematics and its applications. Properties of a spherical curve in space  ${}^2R_5$  // Abstracts of the

International scientific conference “Problems of Modern Mathematics” 70-th anniversary of A.A. Vorubaev, June 16-19, 2021, Bishkek, Kyrgyzstan, – P. 27.

11. Мамадалиев Б.М., Геометрия в подпространствах псевдоевклидова пространства  ${}^2R_5$  // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых Сарымсаковские чтения, Ташкент, Узбекистан, 16–18 сентября 2021, – С. 94.

12. Мамадалиев Б.М., Выбор сопровождающего пятигранника для двумерной поверхности в  ${}^2R_5$  // Классическая и современная геометрия, Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Атанасяна, Москва, Россия, 1–4 ноября, 2021, – С. 107.

13. Artikbaev A., Mamadaliyev B.M., Geometry of two-dimensional surfaces in the five-dimensional pseudo-euclidean space of index two // Modern problems of applied mathematics and information technologies AL-KHWARIZMI 2021, 15-17 November, 2021, Fergana, – P. 248.

14. Artikbayev A., Mamadaliyev B.M., Features of the geometry of the five-dimensional pseudo-euclidean space of index two // Modern Materials Science: Topical Issues, Achievements and Innovations (ISCMMSTIAI-2022) (Tashkent, March 4-5, 2022), – P. 1071-1077.

15. Mamadaliyev B.M., Interpretation of de Sitter space of second kind // Collection materials of the Republican scientific and practical conference “Theoretical foundations and applied problems of modern mathematics”, Andijan, March 28, 2022, – P. 357.

16. Мамадалиев Б.М., Полные линейчатые поверхности в  ${}^2R_5$  // Актуальные вопросы алгебры и анализа сборник материалов республиканской научно-практической конференции, Термиз 18-19 ноября, 2022 года, – С. 188.

17. Мамадалиев Б.М. Геометрия на двумерных плоскостях в  ${}^2R_5$ , Международной научно-практической конференции. Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий. Нукус, 2-3 мая 2023 года, – С. 74-75.

Avtoreferat « FarDU xabarları» jurnali tahririyatida tahrirdan o'tkazilib, o'zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o'zaro muvofiqlashtirildi.

**Bosmaxona litsenziyasi:**



**9338**

Bichimi: 84x60 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. «Times New R» garniturası.  
Raqamli bosma usulda bosildi.  
Shartli bosma tabog'i: 2,75. Adadi 100 dona. Buyurtma № 41/23.

Guvohnoma № 851684.  
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.  
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko'chasi, 83-uy.