

**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI,
VLADIKAVKAZ ILMIY MARKAZI**

TOTIYEVA JANNA DMITRIYEVNA

**IRSIY ELASTIKLIK NAZARIYASINING
DINAMIK TENGLAMALARI UCHUN TESKARI MASALALARNING
GLOBAL YECHILISHI**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

БҲХОРО – 2023

Doktorlik (DSc) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi**Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации****Content of the of Doctoral (DSc) Dissertation Abstract****Totiyeva Janna Dmitriyevna**

Irsiy elastiklik nazariyasining dinamik tenglamalar uchun taskari
masalalarining global yechilishi 3

Тотиева Жанна Дмитриевна

Глобальная разрешимость обратных задач для динамических уравнений
наследственной теории упругости..... 29

Totiyeva Zhanna Dmitriyevna

Global solvability of inverse problems for dynamic equations of memory type
of the elasticity theory..... 57

E'lon qilingan ishlar ro'uxati

Список опубликованных работ
List of published works 61

**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI,
VLADIKAVKAZ ILMIY MARKAZI**

TOTIYEVA JANNA DMITRIYEVNA

**IRSIY ELASTIKLIK NAZARIYASINING
DINAMIK TENGLAMALARI UCHUN TESKARI MASALALARNING
GLOBAL YECHILISHI**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

БҮХОРО – 2023

Fan doktori (Doctor of Science) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.2.DSc/FM218 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Buxoro davlat universitetida va RFA Vladikavkaz ilmiy markazida bajarilgan.
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) va «Ziyonet» ta’lim axborot tarmog‘ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:	Durdiyev Durdimurod Qalandarovich fizika–matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	Ashurov Ravshan Rajabovich fizika–matematika fanlari doktori, professor Sabitov Kamil Basirovich fizika–matematika fanlari doktori, professor Fayozov Qudratillo Sadriddinovich fizika–matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	Belgorod Davlat Milliy tadqiqot universiteti (Rossiya Federatsiyasi)

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil « 12 » sentabr soat 16:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.:(+99871)- 207-91-40, e-mail: uzbmash@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot–resurs markazida tanishish mumkin (166-raqam bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 140104100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.:(+99871) 207-91-40)

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil « 24 » avgust kuni tarqatildi.

(2023 yil « 24 » avgustdagi 2-raqamli reyestr bayonnomasi).

U.A. Roziqov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A.A. Azamov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi Ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., akademik

KIRISH (doktorlik dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko'plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda matematik fizikaning teskari masalalarini o'rganishga olib kelinadi. Ko'pgina muhitlar (materiallar) elastiklik nazariyasi tenglamalarida mavjud bo'lmagan deformatsiya jarayonlarining tezlik va vaqtga bog'liqligi bilan tavsiflanadi. Bu xususiyat xotira deb ataladi. Xotiraga ega muhit elastik jismlar kabi energiyani saqlash va qovishqoq xususiyatlarga ega muhit kabi tarqatish qobiliyatini o'zida birlashtiradi. Elektromagnit, akustik va elastik to'lqinlarning qovishqoq-elastik muhitda tarqalish jarayonini matematik usullardan foydalangan holda aniqroq o'rganish jarayonning xotirasini (oldingi tarixini) hisobga olishni talab qiladi. Matematik nuqtai nazardan, jarayonning o'tmishini hisobga olish, qaralayotgan elastiklik nazariyasining matematik modeliga xotiraga javob beruvchi yadroga ega bo'lgan o'rama ko'rinishdagi integral operatorini kiritish zarurligiga olib keladi. Muhitning o'tmishi yoki xotirasini amaliy o'rganish bugungi kunning muhim vazifalaridan biri bo'lib qolmoqda.

Hozirgi vaqtda matematik fizikaning eng dolzarb muammolaridan biri materiallarning qovishqoq-elastiklik va termo qovishqoq-elastikligini hisobga olgan holda o'zini tutishini tahlil qilishdir. Qovishqoq-elastiklik differensial tenglamalar sistemalari, masalan, seysmik qidiruvda, seysmik to'lqinlar yordamida muhitning xususiyatlarini o'rganganda (teskari dinamik masalalar) paydo bo'ladi. Koeffitsiyentni topish bo'yicha teskari masalalarni yechish, shuningdek, to'lqin maydoni haqidagi ba'zi ma'lumotlardan integral operator yadrosini aniqlash masalalari geologik muhitning tuzilishi va xossalarini o'rganishda muhim rol o'ynaydi. Chiziqli qovishqoq-elastiklik nazariyasi yetarlicha rivojlangan, ammo klassik reologik ta'sirlarni modellashtirish va bu jarayonlarga bevosita bog'liq bo'lgan qovishqoq-elastiklikning chiziqli differensial tenglamalarining ko'plab matematik xususiyatlari hali ham kam ma'lum, chiziqli nazariya imkoniyatlari to'liq ochilmagan, uning muvofiqlik sohasi yetarli darajada aniq va ochiq belgilanmagan, kompyuterda modellashtirish esa ko'pincha zaruriy asossiz bo'lib qolmoqda. Bularning barchasi jarayon o'tmishi (xotira)ni hisobga olish uchun mas'ul bo'lgan integral operatorning yadrosini tajriba natijasida aniqlab bo'lmasligi (yadroni bevosita o'lchash mumkin emas), uni faqat nazariy jihatdan aniqlash mumkinligidadir. Qovishqoq-elastik muhitlarda to'lqin tarqalish jarayonlari nazariyasining teskari masalalarini yechish usullarini ishlab chiqish zarurati dissertatsiya ishi mavzusining dolzarbligini belgilaydi.

O'zbekistonda differensial tenglamalar va matematik fizikaning fundamental fanlarda ilmiy va amaliy tadbiqlariga ega bo'lgan zamonaviy yo'nalishlariga alohida e'tibor qaratilmoqda. Xususan, teskari va nokorrekt qo'yilgan masalalarni o'rganishga alohida e'tibor berilmoqda. Bugungi kunga qadar matematik fizikaning to'g'ri va teskari masalalarini o'rganishda sezilarli natijalarga erishilgan. Matematika fanlarining ustuvor yo'nalishlari, xususan, algebra va funksional analiz, differensial tenglamalar va matematik fizika, dinamik sistemalar nazariyasi

bo'yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish V.I. Romanovskiy¹ nomidagi Matematika Instituti faoliyatidagi asosiy vazifa va yo'nalish hisoblanadi. Mazkur qarorni hayotga tatbiq etishda matematik fizikaning to'g'ri va teskari masalalari bo'yicha tadqiqotlarni rivojlantirish muhim o'rin tutadi. Zilzila kuchining oshishi bilan muhit elastik emas, balki qovishqoq-elastik jism sifatida o'zini tutishi aniqlangan. Shuning uchun ko'p o'lchamli teskari masalalarning global yechilishini o'rganish juda dolzarb muammodir. Ushbu ishga xos bo'lgan asosiy xususiyat to'liq tarqatuvchi fizik manbalarning nuqta yoki qaralayotgan muhitning fazoviy soha chegarasi atrofida joylashgan oniy manbalardan matematik modellarda foydalanish hisoblanadi. Bu o'rganilayotgan masalalarning amaliy ahamiyatini sezilarli darajada oshiradi.

Mazkur dissertatsiya ishining mavzusi va tadqiqot obyekti O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi PF-4979-son Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi "Matematik ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash, shuningdek, Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4387-sonli va 2020-yil 7-maydagi "Matematika sohasida ta'lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4708-sonli Qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga muvofiqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarildi.

Dissertatsiya mavzusi bo'yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi. Integro-differensial tenglamalardan yadrolarni aniqlashning teskari masalalarini ilmiy tadqiq qilish va ularni amaliyotga qo'llash jahonning yirik ilmiy markazlari va oliy o'quv yurtlari, jumladan: Tallin texnologiya universiteti (Estoniya), S.L. Sobolev nomidagi Rossiya Fanlar akademiyasining Sibir bo'limi (Rossiya) Matematika instituti, Frayberg texnika universiteti (Germaniya), Klagenfurt Alp-Adriatika universiteti (Avstriya), Myunxen texnika universiteti (Germaniya), Radboud universiteti (Niderlandiya), Hindistonning Texnologiya Roorkee instituti, Kardiff universiteti (Birlashgan Qirollik), Aberystwyth universiteti (Birlashgan Qirollik), Politecnico di Milano (Italiya), Universite di Bolonya (Italiya), Vichita davlat universiteti (AQSh), Alyaska universiteti (AQSh) va boshqa joylarda olib borilmoqda.

So'nggi yillarda dunyo miqyosida giperbolik tipdagi integro-differensial tenglamalar uchun teskari masalalar bo'yicha bir qator natijalar qo'lga kiritildi, xususan, quyidagi ilmiy natijalarga erishildi: chegaralangan sohalarda

¹ O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi "O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish to'g'risida"gi 292-sonli qarori

taqsimlangan manbalardan to'liq tarqalish jarayonlari uchun qovishqoq-elastiklik va termo qovishqoq-elastiklik tenglamalarining yadrolarini aniqlash masalalari hal etildi (Tallin texnologiya universiteti); yarim fazoda jamlangan manbali to'liqlar uchun tenglamalar koeffitsiyentlari va maxsus ko'rinishga ega ko'p o'lchovli yadrolarni aniqlash bo'yicha teskari masalalar hal qilindi (Rossiya Fanlar akademiyasining Sibir bo'limi S.L.Sobolev nomidagi Matematika instituti); o'zgarmas Lame va o'zgaruvchan matritsali koeffitsiyentlar qatnashgan statsionar elastiklik tenglamalari sistemasi uchun tarqalgan to'liqdan foydalanib yadro va koeffitsiyentlarni aniqlashning teskari masalalari o'rganildi (Vichita davlat universiteti); Hilbert fazolarida relaksatsiya yadrosi spektri tahlil qilingan (Kardiff universiteti); uch o'lchovli muhitda chiziqli qovishqoq-elastiklik yadrosini aniqlashning teskari masalasini sonli tadqiq qilish amalga oshirildi (Myunxen texnika universiteti); Kelvin-Voigt suyuqliklari cheklangan sohalarida harakat qilganda paydo bo'ladigan yopishqoq elastik suyuqlik oqimining uch o'lchovli tenglamalari uchun yadroni aniqlash teskari masalasining lokal yechilishi o'rganildi (Roorki Hindiston texnologiya instituti); ikki chegaraviy o'lchovidan foydalanib, Abel yadrolarining chiziqli kombinatsiya bo'lgan relaksatsiya yadrosini aniqlashning teskari masalasi hal qilindi (Alyaska universiteti).

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Teskari masalalar bo'yicha birinchi nashrlar fizika (kvant sochilish nazariyasi, elektrodinamika, akustika), geofizika (elektr qidiruvi, seysmik, magnit qidiruv), astronomiya va boshqalar bilan bog'liq edi. Buni to'g'ri masalalarda berilganlar deb hisoblangan muhitning xossalari amalda ko'pincha noma'lum bo'lishi bilan izohlash mumkin. Matematik jihatdan bu shuni anglatadiki, tenglamalarning koeffitsiyentlarini, boshlang'ich yoki chegaraviy shartlarni, o'rganilayotgan jarayon sodir bo'lgan sohaning joylashishini, chegaralarini va boshqa xususiyatlarini aniqlash kerak bo'ladi. Shu bilan birga, to'g'ri masalaning yechimi, odatda, noma'lum bo'lib qolaveradi. Shuning uchun, teskari masalalarni qo'yish va tadqiq qilishda muhim jihat – bu to'g'ri masala yechimi haqida qo'shimcha ma'lumotlarga ega bo'lishdir (o'lchashlar, masalan, soha ichidagi yoki uning chegarasidagi o'lchashlar, jarayonning spektral yoki kinematik xossalari, yoki “yakuniy kuzatishlar” va boshqalar).

Teskari masalalar nazariyasining muhim yo'nalishi – qidiruv geofizikasining teskari masalalaridir. Ular ushbu ish mavzusiga yaqin. Bu yo'nalishda A.S.Alekseyev va S.V. Goldinning birinchi nashrlarini eslatib o'tish kerak. Xususan, A.S. Alekseyev birinchi marta yarim fazoda izotrop elastiklik tenglamalari sistemasi uchun zichlikni aniqlashning bir o'lchamli teskari masalasini o'rgandi. Ushbu yo'nalishni rivojlantirib, M.M. Lavrentyev va V.G. Romanov giperbolik tipdagi tenglamalar uchun turli xil teskari masalalarni o'rganish usullarini ishlab chiqdilar. Elastiklik nazariyasining koeffitsiyentli teskari masalalarining turli tadqiqotlari A.S.Blagoveshenskiy, V.G. Romanov, Ye.A. Volkovning asarlarida keltirilgan. Ushbu yo'nalish keyinchalik V.G. Yaxno, T.V. Buguyeva (Melnikova) larning ishlarida rivojlantirildi, xususan, izotrop va anizotrop elastiklik tenglamalari sistemasi uchun zichlik funksiyasini

aniqlashning ko'p o'lchamli masalalari yechimining mavjudligi, yagonaligi va turg'unligi teoremlari isbotlangan. K.B.Sabitov ishlarida matematik fizika tenglamalari uchun teskari masalalarni yechishning yangi usullari keltirilgan, aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar o'rganilgan.

Giperbolik tipdagi integro-differensial tenglamalardan integral operatorning yadrosini (vaqt va fazoviy o'zgaruvchilariga bog'liq) aniqlash masalalari o'tgan asrning 80-yillari oxirida paydo bo'lgan teskari masalalar nazariyasida yosh, tez sur'atlarda rivojlanayotgan yo'nalishdir. Ushbu sohadagi birinchi nashrlar M.Grasselli, D.Q. Durdiyev, S.I. Kabanixin, A. Lorensi, Ye.Paparoni, Ye. Sinestrari kabi olimlarning nomlari bilan bog'liq. Giperbolik tenglamalar uchun xotira funksiyasini aniqlash teskari masalalari A.L. Buxgeym, D.Q. Durdiyev, V.G.Yaxnolarning ishlarida keyinchalik o'z aksini topdi. A.L. Buxgeym, D.Q. Durdiyev, V.G. Romanov, J.Sh. Safarov, Y.Yannolarning ishlarida faqat vaqt o'zgaruvchisiga bog'liq bo'lgan yadroni aniqlash masalalari ko'rib chiqilgan (bir o'lchovli teskari masala). Masala noma'lum funksiyalarga nisbatan Volterra tipidagi integral tenglamalarni yechishga keltirilgan. Keyinchlik, ushbu tenglamalarga tegishli funksional fazolarda siqib akslantirish prinsipi (Banax teoremasi) qo'llanilgan. Mavjudlik, yagonalik teoremlari, shuningdek yechimning berilgan funksiyalarga uzluksiz bog'liqlik baholari olingan. Masalan, D.Q. Durdiyev, J.Sh. Safarovlarning ishlarida chekli sohada qovishqoq-elastiklik tenglamasi uchun bir o'lchovli yadroni aniqlashning teskari masalasi o'rganilgan, integro-differensial akustika tenglamasi uchun yadroni aniqlash teskari masalasining lokal bir qiymatli yechiluvchanligi tadqiq qilingan. Shu bilan birga bir jinsli anizotrop muhit uchun qovishqoq-elastiklik sistemasi matritsaviy yadrosini aniqlash masalasi korrekt qo'yilgan va yechilgan. To'g'ri masala R^3 fazoda umumlashgan Koshi masalasidan iborat.

V.G. Romanovning ishlarida yadroning fazoviy qismini va qovishqoq-elastiklik va elektrodinamikaning integro-differensial tenglamalari uchun ko'effitsiyentlarni aniqlash bo'yicha ko'p o'lchamli teskari masalalar o'rganilgan. D.Q. Durdiyevning monografiyasida ko'p o'lchamli yadrolarning maxsus sinfi uchun (vaqt o'zgaruvchisi bo'yicha silliq va fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha analitik) Banax fazolari shkalasi usuli asosida bir qiymatli yechiluvchanlik teoremlari olingan. Analitik funksiyalarning Banax fazolari shkalasi usulini ko'p o'lchovli teskari masalalarni yechishda qo'llash g'oyasi V.G. Romanovga tegishli. D.Q. Durdiyevning monografiyasi so'nggi yillardagi ta'sirdan keyingi muhitlar uchun teskari masalalarni tadqiq qilish sohasidagi fundamental ishlardan biridir. Unda muhitning ichki xarakteristikalarini ifodalashda vujudga keladigan giperbolik integro-differensial tenglamalar uchun bir va ko'p o'lchamli teskari dinamik masalalarning korrektiligi bo'yicha bir qator tadqiqot natijalari keltirilgan. Qo'yilgan teskari masalalarning bir qiymatli yechilishi haqidagi teoremlar isbotlangan va ushbu masalalar yechimlarining berilganlarga uzluksiz bog'liqlik baholari olingan. A.L. Karchevskiy, Z.R. Bozorov, U.D. Durdiyevlarning ishlarida irsiy elastiklik nazariyasining dinamik tenglamalari uchun teskari masalalar sonli

tadqiqotlari keltirilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Buxoro davlat universiteti ilmiy tadqiqot ishlari rejasidagi M-02.2018 "Matematik fizikaning teskari masalalari" (2020-2022), Rossiya Fanlar akademiyasi Vladikavkaz ilmiy markazi Janubiy matematika institutining "Tutash muhitlar mexanikasi muammolarida matematik modellashirish va singular integral tenglamalarni yechish usullarini takomillashtirish" (2015-2017, ro'yxatga olish №0120.085080) mavzusidagi ilmiy tadqiqot loyihalari doirasida, shuningdek, "Geofizika va muhandislik masalalarida gidrodinamika va issiqlik va massa almashinuvi masalalarini matematik modellashirish va sonli yechish" (2018 yil, AAAA-F18-118032690251-2); "Geofizika va muhandislik masalalarida tutash muhitlar mexanikasi hamda issiqlik va massa almashinuvi masalalarini matematik modellashirish va sonli yechish" (2019-2021, registratsiya raqami AAAA-A19-119032590069-3) davlat topshiriqlariga muvofiq bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi konsentratsiyalangan tebranish manbalariga ega bo'lgan elastiklikning irsiy nazariyasi dinamik tenglamalari uchun bir va ko'p o'lchovli teskari masalalarning global yechilishini qurish usullarini ishlab chiqish, shuningdek, qo'yilgan teskari masalalar turg'unlik baholarini olishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

vertikal bir jinsli bo'lmagan muhitdagi qovishqoq-elastiklik tenglamalari sistemasi uchun bir o'lchovli skalyar va matritsa yadrosini aniqlash muammosining global bir qiymatli yechilishi va turg'unligini o'rganish;

to'g'ri masala yechimi haqidagi ba'zi ma'lumotlardan foydalangan holda, yo'naltirilgan portlash tipidagi manbaga ega vertikal bir jinsli bo'lmagan izotrop muhitdagi qovishqoq-elastiklik tenglamalari sistemasi uchun matritsa yadrosini aniqlash masalasining global bir qiymatli yechilishi shartlarini olish;

berilgan zichlik funksiyalari va Lamé parametrlari hamda issiqlik kengayish koeffitsiyenti uchun termoelastiklik tenglamalar sistemasining bir o'lchovli yadrosini aniqlash masalasining global bir qiymatli yechilishi va turg'unligini tadqiq qilish;

termoelastiklik tenglamasi uchun yarim fazo chegarasida berilgan siljish maydonidan temperaturaga bog'liq bo'lgan issiqlik kengayish koeffitsiyentini aniqlash masalasining yagona yechuvchanligi va turg'unligi masalasini o'rganish.

vertikal bir jinsli bo'lmagan muhitda elastiklikning irsiy nazariyasi dinamik tenglamalari sistemasi uchun fazoviy o'zgaruvchilari bo'yicha analitik va vaqt bo'yicha silliq ko'p o'lchovli yadroni aniqlash masalasining global yagona yechilishi va turg'unligini tadqiq qilish;

ma'lum bo'lgan matritsali xotira yadroli anizotropik qovishqoq-elastiklik nazariyasida koeffitsiyentni topish teskari masalalari uchun yechiluvchanlik shartlarini aniqlash, teskari masalalar yechimlari uchun turg'unlik baholarini olish;

izotropik yopishqoq-elastiklik tenglamalar sistemasi uchun ko'p o'lchovli yadroni aniqlash linerizatsiyalangan teskari masalasining yagona yechilishi va turg'unligi masalasini qo'shimcha shart sifatida chiziqlashtirilgan to'g'ri

masalaning yechimini yarim fazoning chegarasida Furrye almashtirishi (siljish vektor funksiyasining birinchi komponentasi) yordamida berilganda o'rganish;

kuchsiz gorizontali bir jinsli bo'lmagan izotrop muhitda qovishqoq-elastiklik tenglamasi uchun ko'ndalang to'liqlar yadrosi va tarqalish tezligini bir vaqtning o'zida aniqlash ikki o'lchovli muammosining global bir qiymatli yechilishini o'rganish.

Tadqiqot obyekti irsiy elastiklik nazariyasi dinamik tenglamalari uchun boshlang'ich chegaraviy masalalar va ikkinchi turdagi noxiziqli Volterra integral tenglamalaridan iborat.

Tadqiqot predmeti giperbolik integro-differensial tenglamalar nazariyasi va noxiziqli integral tenglamalar, matematik fizika tenglamalari nazariyasi, operatorli tenglamalar nazariyasidan iborat.

Tadqiqot usullari. Masalalarni o'rganishda umumlashgan funksiyalar nazariyasi usullari, integral tenglamalar usuli, xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarni yechish usullari, funksional tahlil usullari, operatorlar nazariyasidan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

konsentratsiyalangan tebranish manbalari hamda yo'naltirilgan portlash manbali, yarim fazodagi izotrop qovishqoq-elastiklik va termoelastiklik tenglamalari sistemasini uchun bir o'lchovli skalyar va matritsali yadrolarni aniqlashning teskari masalalarini hal qilishning global bir qiymatli yechuvchanlik shartlari va turg'unlik baholalari olingan, hamda qidirilayotgan yadroning rezolventasiga o'tishga asoslangan yondashuv ishlab chiqilib, yadro va muhitning integral tenglamalar sistemasidan yadro, rezolventa va siljish funksiyasini bir vaqtning o'zida aniqlash masalalari hal qilingan;

fazoviy o'zgaruvchiga nisbatan analitik va vaqt bo'yicha uzluksiz bo'lgan funksiyalar sinfinda xotirali dinamik tenglamalar yadrolarini aniqlash ko'p o'lchovli masalalarining global bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

yadroning birinchi asimptotikasini va kuchsiz gorizontali bir jinsli bo'lmagan muhitda ko'ndalang elastik to'liqlarning tarqalish tezligini bir vaqtning o'zida aniqlash kvazi ikki o'lchovli muammosining global yagona yechilishi uchun shartlar olingan;

yadroni aniqlash ko'p o'lchovli chiziqli masalasining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan hamda turg'unlik baholari olingan;

ma'lum matritsa xotira yadroli anizotrop qovishqoq-elastiklik tenglamalari sistemasida elastiklik modullarini aniqlash bir o'lchovli masalasining bir qiymatli yechilishi va turg'unligi uchun shartlar olingan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Dissertatsiyada olingan natijalar nazariy xarakterga ega. Dissertatsiya ishining materiali, birinchi navbatda, fundamental tadqiqot bo'lib, aniq hisoblash algoritmlarini shakllantirish va amaliy geofizika, xususan, seysmik qidiruv bilan bog'liq dolzarb amaliy muammolarni hal qilish uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Olingan natijalar va xulosalarning ishonchliligi qat'iy matematik usullardan foydalanish, asosiy qoidalar va

teoremlarni isbotlashda mantiqiy fikrlash ketma-ketligi, matematik tahlil va tadqiqot muammosi bo'yicha fundamental ishlarga tayanish bilan tasdiqlanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati olingan natijalar elastiklikning irsiy nazariyasi dinamik tenglamalari uchun teskari masalalar nazariyasini rivojlantiradi, ko'p o'lchovli teskari masalalarni o'rganishga yordam beradi. Ulardan matematik fizika tenglamalari uchun teskari va nokorrekt qo'yilgan masalalar nazariyasi bo'yicha keyingi tadqiqotlarda foydalanish mumkin.

Dissertatsiya ishi natijalarining amaliy ahamiyati shundan iboratki, ulardan matematik modellashtirish va yopishqoq hamda termoelastik muhitlar xossalarini tahlil qilishda foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi: Elastiklikning irsiy nazariyasi dinamik tenglamalari uchun teskari masalalarning global yechilishiga oid olingan natijalar asosida:

ma'lum matritsa xotira yadroli anizotrop qovishqoq-elastiklik tenglamalari sistemasida elastiklik modullarini aniqlash bir o'lchovli masalasining bir qiymatli yechilishidan "Tarmoqlar, grafiklar va chiziqli guruhlar" mavzusidagi xorijiy kompleks tadqiqotda giperbolik tenglamalar uchun teskari masalalarni yechishda foydalanilgan (Shimoliy Osetiya davlat universiteti Federal davlat byudjeti ta'lim muassasasining, 2023 yil 29 maydagi 1493-sonli ma'lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijaning qo'llanishi giperbolik tipdagi integro-differensial tenglama uchun ikki o'lchamli teskari masalani va gorizontaal bir jinsli bo'lmagan qovishqoq-elastik muhitlar uchun teskari masalalarni sonli usullarda yechish imkonini bergan;

fazoviy o'zgaruvchiga nisbatan analitik va vaqt bo'yicha uzluksiz bo'lgan funksiyalar sinfida xotirali dinamik tenglamalar yadrolarini aniqlash ko'p o'lchovli masalalarining global bir qiymatli yechilishidan OT-F4-02 raqamli "Matematik fizikaning cheksiz holatlar to'plamiga ega modellari termodinamikasi" mavzusidagi fundamental loyihada ko'p o'lchovli teskari masalalarning yagona global yechilishda foydalanilgan (Buxoro Davlat universiteti 2023 yil 02 iyundagi 04/01/1344-son ma'lumotomasi). Ilmiy natijalarni qo'llanishi bir vaqtning o'zida kvazi ikki o'lchovli masala yadrosining birinchi asimptotikasini aniqlash va ularni global yechish uchun shartlarni olish, kuchsiz gorizontaal bir jinsli bo'lmagan muhitda ko'ndalang elastik to'lqinlarning tarqalish tezligini aniqlash, ma'lum matritsa xotira yadrosi bilan anizotropik qovishqoqlik tenglamalari sistemada elastik modullarni aniqlash bir o'lchovli masalasining yagona yechilishi va turg'unligi uchun shartlarni olish imkonini bergan.

yarim fazoda o'zgaruvchan koeffitsiyentli qovishqoq-elastiklik tenglamasi uchun yadroni aniqlash teskari masalalarini chiziqli bo'lmagan integral tenglamalar sistemasiga olib kelish usulidan chet el ilmiy jurnallarida chop etilgan maqolalarida foydalanilgan (Mathematical Notes, 2015, 97(6), 867–877; Theoretical and Mathematical Physics, 2018, 195(3), 491-506; Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2018, 11(6), 753-763). Ushbu ishlab chiqilgan usulni qo'llash akustika integro-differensial tenglamasi va g'ovakli

muhitda qovishqoq-elastiklik tenglamasi uchun yadrolarni aniqlash teskari masalalarini global yechiluvchanligini olish imkonin berdi.

Tadqiqot natijalarining aprobatyasi. Dissertatsiya tadqiqoti natijalari 12 ta xalqaro konferensiyalarda muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha 42 ta ilmiy ish chop etilgan: 22 ta maqola WOS/Scopus ma'lumotlar bazalarida indekslangan ilmiy jurnallarda, shu jumladan 1 ta monografiya (Springer Nature); xususan 16 ta maqola Q1-Q2 kvartiliga ega ilmiy jurnallarda, 19 ta ish konferensiya materiallarida.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, beshta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiya hajmi 190 bet.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida tanlangan dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, mavzu bo'yicha xorijiy va mahalliy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o'rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

Birinchi bobda muhitning ta'sirdan keyingi holatini hisobga oluvchi o'rama tipidagi integral operatorlarning yadrolarini aniqlashning teskari masalalari ko'rib chiqilgan. Berilgan masalani noma'lum funksiyalarga nisbatan Volterra tipidagi chiziqli bo'lmagan integral tenglamalarni yechishga olib kelish usuli ishlab chiqilgan. Keyinchalik bu tenglamalarga mos funksional fazolarda siqib akslantirish prinsipi (Banach teoremasi) qo'llanilgan. Mavjudlik va yagonalik teoremlari, shuningdek, yechimning berilgan funksiyalarga uzluksiz bog'liqligi baholari olingan.

Birinchi paragrafda muhit chegarasida jamlangan to'liq tarqatish manbali qovishqoq-elastiklik tenglamalari sistemasi yadrosini aniqlashning bir o'lchovli masalasining global yagona yechilishi o'rganilgan.

Berilgan $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, x_3 > 0$ sohada integro-differensial tenglamalar sistemasini

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

quyidagi boshlang'ich va chegaraviy

$$u_{it < 0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$T_{3j_{x_3=+0}} = -\delta_{1j} \delta'(t)/2, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

shartlar bilan qaraymiz, bu yerda $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ –

ko‘chish vektori, $\delta'(t)$ – Dirakning delta funksiyasi hosilasi; δ_{ij} – Kroniker simvoli; T_{ij} – kuchlanish tenzori:

$$T_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}[u](x, t) + \int_0^t k(t - \tau) \sigma_{ij}[u](x, \tau) d\tau, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}[u](x, t) = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \operatorname{div} u. \quad (5)$$

$\rho = \rho(x_3), \mu = \mu(x_3), \lambda = \lambda(x_3)$ funksiyalar bir o‘zgaruvchili deb faraz qilinadi, shu bilan birga ular $\rho(x_3) \geq m > 0, \mu(x_3) \geq m > 0, \lambda(x_3) \geq m > 0$ shartlarni qanoatlantiradi, bunda $\rho'(+0) = \mu'(+0) = \lambda'(+0) = 0$.

Qo‘yilgan shartlarga ko‘ra (1)-(3) boshlang‘ich-chegaraviy masalada qidirilayotgan $u(x, t)$ ko‘chishning vektor funksiyasi x_1, x_2 o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lmaydi.

Teskari masala (1)–(5) masala yechimi haqidagi qo‘shimcha

$$u_1(x_3, t)_{x_3=+0} = g(t), t > 0, \quad (6)$$

shartga asoslanib (4) formula orqali (1) tenglamaga kiruvchi $k(t), t > 0$, yadroni aniqlashdan iborat, bu yerda $g(t)$ – berilgan funksiya.

y o‘zgaruvchini quyidagi formula yordamida kiritamiz:

$$y = \psi(x_3) := \int_0^{x_3} \frac{d\xi}{c(\xi)}, c(x_3) := \sqrt{\frac{\mu(x_3)}{\rho(x_3)}}.$$

$\psi^{-1}(y)$ bilan $\psi(x_3)$ ga teskari funksiyani belgilaymiz.

$T^* := 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{\mu(\xi)}} d\xi$ bo‘lsin. $0 < T < T^*$ oraliqdagi ixtiyoriy T uchun $\psi^{-1}(T/2)$ kattalikni aniqlaymiz.

Quyida teskari masala global bir qiymatli yechiluvchanligi va turg‘unligi haqidagi teoremlar keltirilgan.

1-teorema. $g(t)$ funksiya

$$g(t) = \frac{a}{2} \delta(t) + \theta(t) g_0(t), a = [\mu(+0)\rho(+0)]^{-1/2}$$

ko‘rinishda bo‘lsin va $g_0 \in C^2[0, T]$, $\theta(t)$ – Xevisayda funksiyasi. Bundan tashqari $(\rho, \mu) \in C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]$. U holda (1)-(6) teskari masala ixtiyoriy tayinlangan $0 < T < T^*$ larda yagona $k(t) \in C^2[0, T]$ yechimga ega.

Barcha $t \in [0, T]$ larda musbat fiksirlangan h_0 lar uchun $\|k(t)\|_{C^2[0, T]} \leq h_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $k(t) \in C^2[0, T]$ funksiyalar to‘plamini $\Gamma(h_0)$ orqali belgilaymiz.

2-teorema. $k^1(t) \in \Gamma(h_0), k^2(t) \in \Gamma(h_0)$ mos ravishda

$$\{\rho^1(\psi^{-1}(y)), \mu^1(\psi^{-1}(y)), g_0^1(t)\},$$

$$\{\rho^2(\psi^{-1}(y)), \mu^2(\psi^{-1}(y)), g_0^2(t)\},$$

berilganlarga to‘g‘ri keluvchi (1)–(6) teskari masalaning yechimi bo‘lsin. U holda

shunday musbat

$$C = C(h_0, h_{00}, m, T),$$

$$h_{00} = \max \left\{ \|\rho^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(\frac{T}{2})]}, \|\mu^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(\frac{T}{2})]}, \|g_0^1(t)\|_{C^2[0, T]}, \right. \\ \left. \|\mu^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(\frac{T}{2})]}, \|\rho^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(\frac{T}{2})]}, \|g_0^2(t)\|_{C^2[0, T]} \right\},$$

son mavjudki, quyidagi turg'unlik bahosi o'rinli

$$\|k^1 - k^2\|_{C^2[0, T]} \leq \\ \leq C \left[\|\rho^1 - \rho^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(\frac{T}{2})]} + \|\mu^1 - \mu^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|g_0^1 - g_0^2\|_{C^2[0, T]} \right].$$

Ikkinchi paragrafda bu natija yarim fazo chegarasida jamlangan oniy tebranishlar manbali anizotropik qovishqoq-elastiklik sistemasining matritsali yadrosi aniqlash holatiga umumlashtiriladi. Neyman shartlari quyidagi ko'rinishda

$$T_{j3_{x_3=+0}} = \delta'(t)\delta(x_1), j = 1, 2, 3. \quad (3')$$

(4) kuchlanish tenzori quyidagicha:

$$T_{ij} = \sum_{n,l=1}^3 c_{ijnl} \left[S_{nl} + \int_0^t k_i(t-\tau) S_{nl}(x, \tau) d\tau \right], i, j = 1, 2, 3; \quad (7) \\ S_{nl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_n} \right), n, l = 1, 2, 3;$$

$c_{ijnl} = c_{ijnl}(x)$ – elastiklik moduli, $k(t) = (k_1, k_2, k_3)(t)$ – muhit relaksatsiya funksiyasi, ega bo'lsin. Quyidagi ko'rinishdagi mustaqil elastik modullar matritsasi bilan anizotrop muhitni qaraymiz:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & & & \\ & & & O_{(3 \times 3)} & & \\ & & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & c_{44} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

$(c_{11}, c_{12}, c_{44}, \rho)$ vektor-funksiya $\Lambda(m)$ sinfga tegishli, bunda

$$\Lambda(m) = \{(c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), c_{44}(x_3), \rho(x_3))\}:$$

$$c_{11} \geq m > 0, c_{44} \geq m > 0, c_{11} > c_{12}, c_{11} + 2c_{12} > 0, \rho \geq m > 0,$$

$$c'_{11}(+0) = 0, c'_{44}(+0) = 0, \rho'(x_3) = 0, c_{11}, c_{44}, \rho \in C^2.$$

Teskari masala: to'g'ri masala yechimi U vektor-funksiya uchun berilgan quyidagicha berilgan bo'lsin:

$$U_j(x_3, t, v)_{x_3=+0, v=+0} = g_j(t), t > 0, j = 1, 2, 3;$$

bu yerda $g_j(t)$ – berilgan funksiyalar, $U_j(x_3, t, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_3, t) \exp(-ivx_1) dx_1, j = 1, 2, 3$ qo'shimcha ma'lumotga asoslanib, (1) tenglikga (7) orqali kirgan $k(t) = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)(t), t > 0$ yadroni topishdan iborat.

Faraz qilaylik, $a: = [c_{44}(+0)\rho(+0)]^{\frac{-1}{2}}, b: = [c_{11}(+0)\rho(+0)]^{\frac{-1}{2}}$ bo'lsin.

$$T^* := 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{44}(\xi)}} d\xi; T^{**} := 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{11}(\xi)}} d\xi.$$

$0 < T < \min \{T^*, T^{**}\}$ oraliqdan olingan T lar uchun $\psi_1^{-1}(T/2)$ va $\psi_2^{-1}(T/2)$ kattaliklarni aniqlaymiz.

3-teorema. $g_j(t)$ funksiya quyidagi ko'rinishda

$$g_j(t) = A_j \delta(t) + \theta(t) g_{0j}(t), A: = (a, a, b)$$

bo'lsin va $g_{0j}(t) \in C^2[0, T], j = 1, 2, 3; \theta(t) -$ Xevisayd funksiyasi. Bundan tashqari $(\rho, c_{44}) \in C^3[0, \psi_1^{-1}(\frac{T}{2})], c_{11} \in C^3[0, \psi_2^{-1}(\frac{T}{2})]$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy tayin $0 < T < \min \{T^*, T^{**}\}$ lar uchun teskari masalaning yagona $k(t) = \text{diag}(k, k_2, k_3)(t) \in C^2[0, T]$ yechimi mavjud.

4-teorema. $k(t) = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)(t), k^*(t) = \text{diag}(k_1^*, k_2^*, k_3^*)(t)$, $k_j(t) \in \Gamma(h_{0j}), k_j^*(t) \in \Gamma(h_{0j}), j = 1, 2, 3$ – mos ravishda quyidagi berilganlar uchun

$$\begin{aligned} & \{\rho(\psi_1^{-1}(y)), c_{44}(\psi_1^{-1}(y)), c_{11}(\psi_2^{-1}(z)), g_{0j}(t)\}, \\ & \{\rho^*(\psi_1^{-1}(y)), c_{44}^*(\psi_1^{-1}(y)), c_{11}^*(\psi_2^{-1}(z)), g_{0j}^*(t)\} \end{aligned}$$

teskari masalaning yechimi bo'lsin. U holda shunday musbat $C = C(m, h_0, h_{00}, T)$,

$$\begin{aligned} h_0 = \max\{h_{01}, h_{02}, h_{03}\}, h_{00} = \max\{ & \|\rho\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]}, \|c_{44}\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]}, \\ & \|c_{11}\|_{C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]}, \|g_{0j}(t)\|_{C^2[0, T]}, \|\rho^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]}, \|c_{44}^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]}, \\ & \|c_{11}^*\|_{C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]}, \|g_{0j}^*\} \text{ soni topiladiki, quyidagi turg'unlik bahosi o'rinli:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \|k_j - k_j^*\|_{C^2[0, T]} \leq C \left[\|\rho - \rho^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} + \|c_{44} - c_{44}^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} \right. \\ & \left. + \|c_{11} - c_{11}^*\|_{C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]} + \sum_{j=1}^3 \|g_{0j} - g_{0j}^*\|_{C^2[0, T]} \right]. \end{aligned}$$

Uchinchi paragrafda yo'naltirilgan portlash tipidagi manbali izotrop quvishqoq-elastiklik sistemasidan matritsa ko'rinishidagi yadroni aniqlash teskari masalasi qaralgan. Teskari masalaning global bir qiymatli yechiluvchanligi va turg'unligi haqidagi teoremlar isbotlangan. (1) tenglama biroz boshqa ko'rinishda

$$\rho(x_3) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + F_i(x, t), i = 1, 2, 3; \quad (9)$$

va (3) shart bir jinsli deb qaraladi:

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = 0, j = 1, 2, 3; \quad (10)$$

bu yerda

$$T_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}[u](x, t) + \int_0^t k_i(t - \tau) \sigma_{ij}[u](x, \tau) d\tau, \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} F_1(x, t) \\ F_2(x, t) \\ F_3(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \nabla \delta(x) \delta(t).$$

Faraz qilaylik $k_3(t) \equiv k_2(t)$ va

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(x_3, t) &= \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial v_2} \big|_{v_1=v_2=0}, \quad \tilde{v}_2(x_3, t) = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial v_1} \big|_{v_1=v_2=0}, \\ \tilde{v}_3(x_3, t) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial v_1 \partial v_2} \big|_{v_1=v_2=0}, \end{aligned}$$

$\tilde{u}_j(v_1, v_2, x_3, t, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2, x_3, t) \exp(-i(v_1 x_1 + v_2 x_2)) dx_1 dx_2$ bo'lsin.

Teskari masala: (2), (9)–(11) sistema yechimi uchun berilgan

$$\tilde{v}_j(+0, t) = g_j(t), t > 0,$$

(bu yerda $g_j(t), j = 1, 2$ – berilgan funksiyalar) qo'shimcha ma'lumotga asoslanib, (9) tenglikka (11) orqali kirgan $k(t) = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)(t), t > 0$ yadroni topishdan iborat

5-teorema. $g(t) \in C^3[0, T]$, $(\rho, \mu) \in C^3[0, \psi_1^{-1}(T)]$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy tayinlangan $0 < T < T^*$ lar uchun teskari masalaning yagona $\{k_1(t), k_2(t)\} \in C^2[0, T]$ yechimi mavjud.

6-teorema. $k^1(t) \in \Gamma(h_0), k^2(t) \in \Gamma(h_0)$ – mos ravishda

$$\begin{aligned} &\{\rho^1(\psi^{-1}(y)), \mu^1(\psi^{-1}(y)), g^1(t)\}, \\ &\{\rho^2(\psi^{-1}(y)), \mu^2(\psi^{-1}(y)), g^2(t)\}, \end{aligned}$$

berilganlar uchun teskari masalaning yechimi bo'lsin. U holda musbat shunday

$$C = C(h_0, h_{00}, T),$$

$$\begin{aligned} h_{00} &= \max\{\|\rho^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\mu^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|g^1(t)\|_{C^3[0, T]}, \\ &\|\rho^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\mu^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|g^2(t)\|_{C^3[0, T]}\}, \end{aligned}$$

soni topiladiki quyidagi

$$\begin{aligned} &\|k^1 - k^2\|_{C^2[0, T]} \leq \\ &\leq C[\|\rho^1 - \rho^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|\mu^1 - \mu^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|g^1 - g^2\|_{C^3[0, T]}] \end{aligned}$$

turg'unlik bahosi o'rinli.

Ikkinchi bob termoqovushqoqlik sistemasi uchun teskari masalalarning bir qiymatli yechiluvchanligi va turg'unligiga bag'ishlangan.

Ushbu **bobning birinchi paragrafida** bog'lanmagan termoelastik-quvishqoqlikning matematik modeli uchun to'g'ri masalaning qo'yilishi keltirilgan, termoelastik muhit uchun teskari masalalar bo'yicha olingan natijalarning qisqacha sharhi berilgan.

Ikkinchi paragrafda (1) tenglama, (2) boshlang'ich shart uchun dinamik bog'lanmagan termoelastik-quvishqoqlik tenglamalari sistemasiga kirgan yadroni aniqlash muammosining global yagona yechiluvchanligi masalasi quyida keltirilgan termoelastik-quvishqoqlik tengliklari yordamida tadqiq qilingan:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k \Delta H, \quad (12)$$

$$H_{t < 0} \equiv 0, \quad (13)$$

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = \delta_{3j}\delta'(t), j = 1, 2, 3, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_3} - \gamma H \right) \Big|_{x_3=+0} = -\gamma(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\theta_1(t), \quad (15)$$

bu yerda $H(x, t)$ – harorat orttirmasi, $\Delta - x_1, x_2, x_3$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha Laplas operatori; $\tilde{T}_1, \tilde{T}_0, \gamma$ – o‘zgarmaslar, $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$, $\gamma > 0$, k – harorat-o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti, $\theta_1(t) = t\theta(t)$, $\theta(t) = 1$, agar $t \geq 0$ va $\theta(t) = 0$, agar $t < 0$ bo‘lsa, T_{ij} – kuchlanish tenzori:

$$T_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}[u](x, t) + \int_0^t h(t - \tau)\sigma_{ij}[u](x, \tau)d\tau, \quad (16)$$

$$\sigma_{ij}[u](x, t) = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left[\lambda \operatorname{div} u - (3\lambda + 2\mu) \int_0^{H(x,t)} \alpha(z)dz \right]. \quad (17)$$

α – muhitning termal kengayish koeffitsiyenti.

Teskari masala (1), (2), (12)–(17) to‘g‘ri masala yechimi haqidagi qo‘shimcha

$$u_3(x_3, t)_{x_3=+0} = g(t), t > 0, \quad (18)$$

($g(t)$ – berilgan funksiya) shartga asosanib (1)-(2) tengliklarga (16) yordamida kirgan $h(t)$, $t > 0$, yadroni aniqlashdan iborat.

Bu paragrafning asosiy natijalari teskari masalaning bir qiymatli yechiluvchanligi va turg‘unligi haqidagi quyidagi teoremlardan iborat.

7-teorema. $g(t)$ funksiya quyidagi

$$g(t) = -a(0)\delta(t) + \theta(t)g_0(t), a(0) = \{[\lambda(+0) + 2\mu(+0)]\rho(+0)\}^{\frac{-1}{2}}$$

ko‘rinishda bo‘lsin va $g_0(t) \in C^2[0, T]$, bundan tashqari, $(\rho, \lambda, \mu) \in C^3\left[0, \psi^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)\right]$, $\alpha(z) \in C[0, \tilde{H}(T/2, T/2)]$ va $T, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, k, \gamma$ lar – fiksirlangan musbat sonlar bo‘lib $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy fiksirlangan $0 < T < T^*$ lar uchun (1), (2), (12)–(18) teskari masalaning yagona yechimi mavjud.

8-teorema. $h^1(t) \in \Gamma(h_0^*)$, $h^2(t) \in \Gamma(h_0^*)$ – lar teskari masalaning mos ravishda

$$\{\rho^1(\psi^{-1}(y)), \lambda^1(\psi^{-1}(y)), \mu^1(\psi^{-1}(y)), \alpha^1(z), g_0^1(t)\},$$

$$\{\rho^2(\psi^{-1}(y)), \lambda^2(\psi^{-1}(y)), \mu^2(\psi^{-1}(y)), \alpha^2(z), g_0^2(t)\},$$

berilganlar uchun yechimi bo‘lsin. U holda shunday musbat

$$C = C(h_0^*, h_{00}^*, \gamma, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, T),$$

$$h_{00}^* = \max\{\|\rho^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\lambda^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\mu^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]},$$

$$\begin{aligned} & \| \alpha^1(z) \|_{C[0, \tilde{H}(T/2, T/2)]}, \| g_0^1(t) \|_{C^2[0, T]}, \| \rho^2(y) \|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \\ & \| \mu^2(y) \|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \\ & \| \lambda^2(y) \|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \| \alpha^2(z) \|_{C[0, \tilde{H}(T/2, T/2)]}, \| g_0^2(t) \|_{C^2[0, T]} \}, \end{aligned}$$

son topiladiki, quyidagi turg'unlik bahosi o'rinli

$$\begin{aligned} & \| h^1 - h^2 \|_{C^2[0, T]} \leq C [\| \rho^1 - \rho^2 \|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \| \lambda^1 - \lambda^2 \|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} \\ & + \| \alpha^1 - \alpha^2 \|_{C[0, \tilde{H}(T/2, T/2)]} + \| \mu^1 - \mu^2 \|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \| g_0^1 - g_0^2 \|_{C^2[0, T]}]. \end{aligned}$$

Uchinchi paragrafda biroz o'zgartirilgan (14), (15) :

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = 0, j = 1, 2, 3, \quad (14')$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_3} - \gamma H \right) \Big|_{x_3=+0} = -\gamma(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0). \quad (15')$$

shartlar bilan berilgan (1), (2), (12)–(18) termo-qovishqoqlik tenglamalar sistemasidan $\alpha(z)$, $z \in [0, H(0, T)]$, $T > 0$ issiqlik kengayish koeffitsiyentini topish masalasi qo'yilgan va yechilgan. Bu yerdagi shartlar (14), (15) shartlar o'rnida olinadi.

Teskari masala (1), (2), (12)–(17) to'g'ri masala yechimi haqidagi (18) qo'shimcha shartdan foydalanib, (1), (16) tenglikga (17) orqali kiruvchi $\alpha(z)$, $z \in [0, Z]$, $Z = H(0, T)$, issiqlik kengayish koeffitsiyentini topishdan iborat. Teskari masalaning $\alpha(z) \in C[0, Z]$, $Z = H(0, T)$ sinfga tegishli yechimi, $\alpha(z)$ ga nisbatan integral tenglama yechimiga ekvivalent ekanligi ko'rsatiladi.

Quyidagi funksiyalar sinfini kiritamiz:

$$\Lambda_1 = \{ \rho(x_3), \mu(x_3), \lambda(x_3) \in C^2[0, +\infty) |$$

$$\rho(x_3) > 0, \mu(x_3) > 0, \lambda(x_3) + 2\mu(x_3) > 0, \rho'(+0) = \mu'(+0) = \lambda'(+0) = 0 \},$$

$$\Lambda_2 = \{ h(t) \in C^2[0, T] | h(+0) = 0, h'(+0) = 0 \}.$$

9-teorema. $g(t) \in C^2[0, T]$, $g(+0) = 0$, $g'(+0) = 0$, $T > 0$ bo'lsin va $(\rho, \lambda, \mu) \in \Lambda_1$, $h(t) \in \Lambda_2$ ma'lum funksiyalar hamda $T, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, k, \gamma$ – fiksirlangan musbat sonlar bo'lib, $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy fiksirlangan $T > 0$ larda (1), (2), (12)–(18) teskari masalaning yagona $\alpha(z) \in C[0, Z]$, $Z = H(0, T)$ yechimi mavjud.

10-teorema. $\alpha(z), \alpha^*(z)$ – mos ravishda $\{h(t), g(t)\}, \{h^*(t), g^*(t)\}$ berilganlar uchun (1), (2), (12)–(18) teskari masalaning yechimi bo'lsin. U holda shunday musbat

$$\begin{aligned} C &= C(\alpha_{00}, k, \gamma, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, T), \\ \alpha_{00} &= \max \{ \| \rho(y) \|_{C^2[0, \psi^{-1}(T)]}, \| \lambda(y) \|_{C^2[0, \psi^{-1}(T)]}, \| \mu(y) \|_{C^2[0, \psi^{-1}(T)]}, \\ & \| h(t) \|_{C^2[0, T]}, \| h^*(t) \|_{C^2[0, T]} \}, \end{aligned}$$

son topiladiki, quyidagi turg'unlik bahosi o'rinli:

$$\| \alpha - \alpha^* \|_{C[0,H(0,T)]} \leq C [\| h - h^* \|_{C[0,T]} + \| g - g^* \|_{C^2[0,T]}].$$

Uchinchi bobda anizotrop qovishqoq-elastik muhitlar uchun elastiklik modullarini aniqlash bir o'lchovli teskari masalalari o'rganilgan. Qo'yilgan masalalar yechiluvchanligi uchun zaruriy va yetarli shartlar olingan.

Birinchi paragrafda to'g'ri va teskari masalalar qo'yilishi, shu bilan birga asosiy natijalar – teskari masalalar bir qiymatli yechiluvchanligi va turg'unligi haqidagi teoremlar keltirilgan, (1)–(3'), (7), (8) sistema qaralgan.

To'g'ri masala yechimining $U_j, j = 1, 3$ komponentalariga nisbatan $t > 0$ larda

$$U_1(x_3, t, v)|_{x_3=+0, v=+0} = g_1(t), \quad (19)$$

$$U_3(x_3, t, v)|_{x_3=+0, v=+0} = g_3(t), \quad (20)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial v}(x_3, t, v) \Big|_{x_3=+0, v=+0} = g_2(t), \quad (21)$$

(bu yerda $g_j(t), j = 1, 2, 3$ – berilgan funksiyalar) berilgan qo'shimcha ma'lumotga ko'ra elastiklik moduli $c_{44}(x_3), c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), x_3 > 0$ ni aniqlash teskari masalasi tadqiqot predmetini tashkil qiladi (aynan shu ketma-ketlikda ular aniqlanadi).

y, z o'zgaruvchilarni quyidagi formulalar yordamida kiritamiz:

$$y = \psi_1(x_3) := \int_0^{x_3} \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}(\xi)}} d\xi, z = \psi_2(x_3) := \int_0^{x_3} \sqrt{\frac{\rho}{c_{11}(\xi)}} d\xi.$$

$\psi_i^{-1}(\cdot), i = 1, 2$, orqali $\psi_i(x_3)$ funksiyaga teskari funksiyani belgilaymiz.

$$T^* := 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{44}(\xi)}} d\xi; T^{**} := 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{11}(\xi)}} d\xi.$$

$0 < T < \min\{T^*, T^{**}\}$ oraliqdan olingan ixtiyoriy T lar uchun $\psi_1^{-1}(T/2)$ va $\psi_2^{-1}(T/2)$ kattaliklarni aniqlaymiz.

h_0, h_1, X – lar musbat fiksirlangan sonlar, $h_0 < h_1, X = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{h_1}{\rho}}$. Quyidagi $\Lambda_1(h_0, h_1, X) = \{c(x_3) \in C^2[0, X]: \|c\|_{C[0, X]} \leq h_1, c(x_3) \geq h_0\}$ to'plamni kiritamiz.

11-teorema. T –fiksirlangan $(0, \min\{T^*, T^{**}\})$ dan olingan musbat son va $g_1(t) \in C^2[0, T], g_1(+0) > 0, k_1(t) \in C^2[0, T]$ bo'lsin. U holda (1)-(3'), (7), (8), (19) teskari masalaning yagona $c_{44}(x_3) \in C^2[0, X], X \leq \psi_1^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)$ yechimi mavjud.

12-teorema. T, h_0, h_1 – fiksirlangan musbat sonlar, $T < \min\{T^*, T^{**}\}, h_0 \leq h_1, X_0 = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}$ va $c_{44}^{(1)}(x_3), c_{44}^{(2)}(x_3)$ funksiyalar $\Lambda_1(h_0, h_1, X)$ sinfga tegishli

bo'lib $\{g_1^{(1)}(t), k_1^{(1)}(t)\}, \{g_1^{(2)}(t), k_1^{(2)}(t)\}$ mos ravishda ma'lumotlar bilan berilgan (1)-(3'), (7), (8), (19) teskari masalaning yechimi bo'lsin. U holda shunday $C = C(h_0, h_1, M_1, \rho, T), M_1 = \max \left\{ \|g_1^{(1)}(t)\|_{C^2[0,T]}, \|k_1^{(1)}(t)\|_{C^2[0,T]}, \|g_1^{(2)}(t)\|_{C^2[0,T]}, \|k_1^{(2)}(t)\|_{C^2[0,T]} \right\}$ musbat son topiladiki, quyidagi turg'unlik bahosi o'rinli:

$$\|c_{44}^{(1)} - c_{44}^{(2)}\|_{C[0,X_0]} \leq C \left(\|g_1^{(1)} - g_1^{(2)}\|_{C^2[0,T]} + \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_{C^2[0,T]} \right).$$

$\|\cdot\| (T) = \|\cdot\|_{C[0,T]}, \|\cdot\|_k (T) = \|\cdot\|_{C^k[0,T]}, k = 1, 2, \dots$ kabi belgilashlar kiritamiz.

13-teorema. T – fiksirlangan $(0, \min \{T^*, T^{**}\})$ dan olingan musbat son va $g_3(t) \in C^2[0, T], g_3(+0) > 0, k_3(t) \in C^2[0, T]$ bo'lsin. U holda (1)-(3'), (7), (8), (20) masala $c_{11}(x_3) \in C^2[0, X], X \leq \psi_2^{-1}(T/2)$ yagona yechimga ega.

14-teorema. T, h_0, h_1 – fiksirlangan musbat sonlar bo'lsin $T < \min \{T^*, T^{**}\}, h_0 \leq h_1, X_0 = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}$ u $c_{11}^{(1)}(x_3), c_{11}^{(2)}(x_3)$ lar $\Lambda_1(h_0, h_1, X)$ sinfga tegishli bo'lib, mos ravishda $\{g_3^{(1)}(t), k_3^{(2)}(t)\}, \{g_3^{(1)}(t), k_3^{(2)}(t)\}$ berilganlar uchun (1)-(3'), (7), (8), (20) teskari masalaning yechimi. U holda shunday musbat

$$C^* = C^*(h_0, h_1, M_2, \rho, T),$$

$$M_2 = \max \left\{ \|g_3^{(1)}(t)\|_2(T), \|g_3^{(2)}(t)\|_2(T), \|k_3^{(1)}(t)\|_2(T), \|k_3^{(2)}(t)\|_2(T) \right\}$$

son topiladiki, quyidagi turg'unlik bahosi o'rinli

$$\|c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}\| (X_0) \leq C^* \left(\|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}\|_2(T) + \|k_3^{(1)} - k_3^{(2)}\|_2(T) \right).$$

15-teorema. T – fiksirlangan musbat son, $T < \min \{T^*, T^{**}\}, X = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{h_1}{\rho}}$ va $g_2(t) \in C^1[0, T], k_1(t) \in C^2[0, T], g_2(+0) = 0, k_3(t) \equiv 0$ bo'lsin. Bundan tashqari, quyidagi tengsizlik o'rinli bo'lsin:

$$\max[-g'_2(+0), 2g'_2(+0)] < \frac{g_1(+0)}{2\rho[g_1(+0) + g_3(+0)]}.$$

U holda (1)-(3'), (7), (8), (21) teskari masalaning $c_{12}(x_3) \in C[0, X]$ yagona yechimi mavjud.

16-teorema. T, h_0, h_1 – lar fiksirlangan musbat sonlar, $T < \min \{T^*, T^{**}\}, h_0 \leq h_1, X_0 = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}$, $k_3(t) \equiv 0$ va $c_{12}^{(1)}(x_3), c_{12}^{(2)}(x_3)$ ar $\Lambda_2(h_1, X) = \{c(x_3) \in C[0, X]: \|c\| \leq h_1\}$ sinfga tegishli bo'lib, mos ravishda $\{c_{11}^{(1)}(x_3), c_{44}^{(1)}(x_3), g_3^{(1)}(t), k_1^{(1)}(t)\}, \{c_{11}^{(2)}(x_3), c_{44}^{(2)}(x_3), g_3^{(2)}(t), k_1^{(2)}(t)\}$ berilganlar uchun teskari masalaning yechimi bo'lsin. Bunda $\Lambda_1(h_0, h_1, X)$ sinfga

tegishli bo'lgan $c_{44}^{(1)}(x_3), c_{44}^{(2)}(x_3)$ funksiyalar $\{g_1^{(1)}(t), k_1^{(1)}(t)\}, \{g_1^{(2)}(t), k_1^{(2)}(t)\}$ berilganlar uchun (1)-(3'), (7), (8), (19) teskari masalaning yechimi; $\Lambda_1(h_0, h_1, X)$ sinfdan olingan $c_{11}^{(1)}(x_3), c_{11}^{(2)}(x_3)$ funksiyalar mos ravishda $\{g_3^{(1)}(t), k_3^{(1)}(t)\}, \{g_3^{(2)}(t), k_3^{(2)}(t)\}$ berilganlar uchun $t \in [0, T]$ bo'lganda (1)-(3'), (7), (8), (20) teskari masala yechimi bo'lsin. U holda shunday musbat

$$C^{**}(h_0, h_1, M_3, \rho, T),$$

$$M_3 = \max \left\{ \|g_3^{(1)}(t)\|_2(T), \|g_2^{(1)}(t)\|_1(T), \|k_1^{(1)}(t)\|_2(T), \|g_3^{(2)}(t)\|_2(T), \right. \\ \left. \|g_2^{(2)}(t)\|_1(T), \|k_1^{(2)}(t)\|_2(T) \right\}$$

son topiladiki, quyidagi turg'unlik bahosi o'rinli

$$\|c_{12}^{(1)} - c_{12}^{(2)}\|(X_0) \leq C^{**}(\|c_{44}^{(1)} - c_{44}^{(2)}\|_2(X_0) + \|c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}\|_2(X_0) + \\ + \|g_1^{(1)} - g_1^{(2)}\|_2(T) + \|g_2^{(1)} - g_2^{(2)}\|_1(T) + \|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}\|_2(T) + \\ \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_2(T)).$$

Ikkinchi paragrafda elastiklik moduli matritsalarining muhitning elastiklik xossalari xarakterlovchi c_{44}, c_{11} koeffitsiyentlari aniqlanadi. Qo'yilgan masala yordamchi teskari masalaga keltirilib, yechiluvchanligi tadqiq qilinadi. Shundan so'ng asosiy natija-yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlaniladi, turg'unlik baholari keltiriladi.

Uchinchi paragrafda c_{44}, c_{11} koeffitsiyentlar ma'lum deb qaralib c_{12} ni aniqlash masalasi qaralgan. Bu teskari masalani tadqiq qilishda xotirali giperbolik operatorlardan birining fundamental yechimi qurilib, yechimning xossalari keltirib o'tilgan.

To'rtinchi paragrafda ko'p o'lchovli xotira yadrolari bir qiymatli yechiluvchanligining zaruriy va yetarli shartlari keltirilgan. Bu natija bir o'zgaruvchi bo'yicha analitik, boshqa o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz-differensiallanuvchi funksiyalar sinfida olingan. Oldingi masalalarda lokal yechiluvchanlikni tadqiq qilishda ba'zi modifikatsiyalar bilan qo'llanilgan banax fazosi shkalasi metodidan foydalanilgan. Bu metod va vaznli normalar metodi kombinatsiyasini qo'llash o'rama integral operatorlar yadrosini aniqlash teskari masalasining global yechiluvchanligini olish imkonini bergan. Ishlab chiqilgan yondashuvni noxiziqiligi o'rama ko'rinishida bo'lgan teskari masalalarga qo'llash mumkin.

To'rtinchi bobning birinchi paragrafida integro-differensial to'lqin tenglamasining integral hadidagi yadrosini aniqlash ko'p o'lchovli teskari masalasi o'rganilgan. To'g'ri masala boshlang'ich sharti nol va Dirakning delta funksiasi ko'rinishidagi Neyman chegaraviy shartidan iborat bo'lgan umumlashgan boshlang'ich-chegaraviy masaladan iborat. Teskari masalani yechish uchun to'g'ri masala yechimining $(x, t) \in \mathbb{R}^{m+1}, z > 0$ soha chegarasidagi izi haqidagi qo'shimcha shartlar beriladi. Bu paragrafning asosiy natijasi – vaqt o'zgaruvchisi t bo'yicha uzluksiz va $x \in \mathbb{R}^m$ fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha analitik bo'lgan funksiyalar sinfida global bir qiymatli yechiluvchanlik haqidagi teoremdan iborat.

Teoremani isbotlashda uzluksiz funksiyalar sinfida vaznli normalar va haqiqiy o'zgaruvchili analitik funksiyalar uchun banax fazosi shkalasi metodlari qo'llanilgan.

$z > 0$ larda quyidagi tengliklarni qanoatlantiruvchi

$$u_{tt} - u_{zz} - \Delta u = \int_0^t k(x, \tau) u(x, z, t - \tau) d\tau, (x, t) \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad (22)$$

$$u_{t<0} \equiv 0, u_{z=+0} = \delta'(t) + h(x, t)\theta(t), (x, t) \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad (23)$$

$$u_{z=+0} = -\delta(t) + f(x, t)\theta(t), (x, t) \in \mathbb{R}^{m+1}. \quad (24)$$

$u(x, z, t)$ va $k(x, t)$ funksiyalarni aniqlash masalasini qaraymiz. Bu yerda $\Delta - (x_1, x_2, \dots, x_m) = x$ o'zgaruvchilar bo'yicha Laplas operatori, h, f — lar berilgan silliq funksiyalar. Koordinata boshi atrofida analitik bo'lgan va

$$\| \varphi \|_s(r) := \sup_{|x| < r} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{s^{|\alpha|}}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \alpha! = (\alpha_1)! \dots (\alpha_m)!$$

shartni qanoatlantiruvchi $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ funksiyalar $A_s(r)$, $s > 0$ banax fazosini kiritamiz.

Keyingi hisoblashlarda $r > 0$ parametrni fiksirlangan, bir vaqtda s parametrni esa o'zgaruvchi sifatida qaraymiz. Bunda $A_s(r)$, $s > 0$ banax fazosi shkalasi hosil bo'ladi. Agar $\varphi(x) \in A_s(r)$ bo'lsa barcha $s' \in (0, s)$ lar uchun $\varphi(x) \in A_{s'}(r)$ bo'ladi, shu bilan birga $s' \in (0, s)$ bo'lsa $A_s(r) \subset A_{s'}(r)$ bo'ladi va c_α faqat α ga bog'liq bo'lgan o'zgarmas ixtiyoriy α uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\| D^\alpha \varphi \|_{s'}(r) \leq c_\alpha \frac{\| \varphi \|_s(r)}{(s - s')^{|\alpha|}}.$$

r parametr fiksirlangan ekanligidan keyingi yozuvlarda uni tushirib qoldiramiz va $\| \varphi \|_s(r)$, $A_s(r)$ o'rniga $\| \varphi \|_s, A_s$ ishlatamiz.

$$D_T = G_T \times \mathbb{R}^m, G_T = \{(z, t) \vee 0 \leq z \leq t \leq T - z\}, T > 0$$

bo'lsin. $C(A_{s_0}; G_T)$ orqali G_T sohada (z, t) o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz, qiymatlari A_{s_0} da bo'lgan funksiyalar sinfini belgilaymiz.

Fiksirlangan (z, t) larda $g(x, z, t)$ funksiyaning A_{s_0} dagi normasini $\|g\|_{s_0}(z, t)$ orqali belgilaymiz. g funksiyaning $C(A_{s_0}; G_T)$ normasi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\|g\|_{C(A_{s_0}; G_T)} = \sup_{(z, t) \in G_T} \|g\|_{s_0}(z, t).$$

$C(A_{s_0}; [0, T])$ — t o'zgaruvchisi bo'yicha uzluksiz va qiymatlari A_{s_0} da

bo'ldan funksiyalar sinfi bo'lsin.

(22) masalani D_T sohadan tor sohada, aynan $D_T^\varepsilon = G_T^\varepsilon \times \mathbb{R}^m$, $G_T^\varepsilon = \{(z, t) | 0 \leq z \leq t \leq \frac{T}{1+\varepsilon} - z\}$ sohada qaraymiz (ba'zi fiksirlangan $\varepsilon > 0$ larda).

$C_\sigma(A_{s_0}; G_T^\varepsilon)$ orqali G_T^ε sohada (z, t) o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz, qiymatlari A_{s_0} da bo'lgan funksiyalar fazosini belgilaymiz, bunda $\sigma \geq 0, 0 < s < s_0$ lar uchun vaznli normani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\|g\|_{C_\sigma(A_s; G_T^\varepsilon)} = \sup_{(z,t) \in G_T^\varepsilon} \|g\|_s(z, t) e^{-\frac{\sigma t}{T-t-z}}.$$

17-teorema. $T > 0, s_0 > 0, \varepsilon > 0$ - fiksirlangan sonlar bo'lsin, $f(x, +0) = 0$. Shu bilan birga,

$$\max_{t \in [0, T]} \left\{ \|h\|_{s_0}(t), \|f_t\|_{s_0}(t), \frac{1}{4} \|f_{tt}\|_{s_0}(t), \frac{1}{4} \|h_t\|_{s_0}(t) \right\} = R,$$

bo'lsin, $R > 0$ — ma'lum son. U holda $a \left(a \in \left(0, \frac{T}{s_0}\right) \right)$ va $s \left(s \in (0, s_0) \right)$ lar uchun

$\Gamma_{sT}^\varepsilon = D_T^\varepsilon \left\{ (x, z, t) \vee 0 \leq t < \frac{1}{1+\varepsilon} a(s_0 - s) \right\}$ sohada (22)–(24) tenglamalar sistemasining yagona yechimi mavjud bo'lib,

$$(u(x, z, t), u_t(x, z, t)) \in C(A_s; P_{sT}^\varepsilon), k(x, t) \in C\left(A_{s_0}; \left[0, \frac{1}{1+\varepsilon} a(s_0 - s)\right]\right),$$

bo'ladi, bundan tashqari,

$$\|u - u_0\|_{C(A_s; P_{sT}^\varepsilon)} \leq \tilde{R}, \|u_t - u_{t0}\|_{C(A_s; P_{sT}^\varepsilon)} \leq \frac{\tilde{R}}{s_0 - s},$$

$$\|k - k_0\|_{C(A_s; P_{sT}^\varepsilon)} \leq \frac{\tilde{R}}{(s_0 - s)^2},$$

$P_{sT}^\varepsilon = G_T^\varepsilon \cap \left\{ (z, t) | 0 \leq z \leq t < \frac{1}{1+\varepsilon} a(s_0 - s) \right\}$, (bu yerda $u_0 = 0$), $u_{t0}(x, z, t) = \frac{1}{2} f_t(x, t - z) - \frac{1}{2} h(x, t - z)$, $k_0(x, t) = 2f_{tt}(x, t) + 2h_t(x, t)$, $\tilde{R} = Re^{\sigma/\varepsilon}$, $\sigma > 0$ bo'ladi.

Fiksirlangan R, T, s_0, ε lar 17-teorema shartini qanoatlantiruvchi $C(A_{s_0}; [0, T])$, $s_0 > 0$ fazoning elementi bo'lgan (f, h) funksiyalar juftliklaridan iborat bo'lgan Γ to'plamni qaraymiz. Quyidagi turg'unlik haqidagi teorema o'rinli:

18-teorema. $(f, h) \in \Gamma$, $(\bar{f}, \bar{h}) \in \Gamma$ bo'lsin. U holda (u, k, u_t) , $(\bar{u}, \bar{k}, \bar{u}_t)$ yechimlarga mos ravishda

$$\|u - \bar{u}\|_s \leq cM, \quad \|k - \bar{k}\|_s \leq \frac{cM}{(s_0 - s)^2},$$

$$\|v - \bar{v}\|_s \leq \frac{cM}{s_0 - s}, \quad (z, t) \in P_{sT}^\varepsilon, 0 < s < s_0,$$

baholar o'rinli bo'lib, bu yerda

$$M = \max \left[\max \|h\| - \|\bar{h}\|_{s_0}(t), \max \|f_t\| - \|\bar{f}_t\|_{s_0}(t), \right.$$

$\max \|h_t\| - \|\bar{h}_t\|_{s_0}(t), \max \|f_{tt}\| - \|\bar{f}_{tt}\|_{s_0}(t)], t \in [0, T],$
 va c o'zgarmas $R, T, s_0, \sigma, \varepsilon$ larga bog'liq.

Ikkinchi paragrafda (1)–(3) qovishqoq-elastiklik tenglamalar sistemasi uchun $k = k(x_2, t)$ bo'lganda ikki o'lchamli teskari masalaning global bir qiymatli yechiluvchanligi isbotlangan. Birinchi paragrafda qo'llanilgan usul yordamida qo'yilgan masala ikkinchi tur Volterra yopiq chiziqli bo'lmagan integral tenglamalar sistemasiga olib kelinadi. Shundan so'ng global bir qiymatli yechiluvchanlik teoremasi isbotlanilgan.

Beshinchi bob vertikal-bir jinsli bo'lmagan muhit uchun izotropik yopishqoq-elastiklik tenglamasining noma'lum koeffitsiyentini va o'rama ko'rinishidagi noma'lum yadrosini aniqlashning ko'p o'lchovli teskari masalalariga bag'ishlangan. Asimptotik yondashuv qo'llaniladi, ya'ni linerizatsiyalash prinsipi, noma'lum koeffitsiyent va yadroning fazoviy koordinatasiga chiziqli bog'liqlik gipotezasi qo'llaniladi.

Beshinchi bobning birinchi paragrafida kuchsiz gorizont-al-bir jinsli bo'lmagan muhitlarda qovishqoq-elastiklikning kvazi-ikki o'lchovli teskari masalalari o'rganilgan. Bir vaqtning o'zida ikkita noma'lum aniqlanadi - ikki o'lchovli yadro va ko'ndalang elastik to'lqinlarning tarqalish tezligi. Bu yerda, biz ikki o'lchovli masalani bir o'lchovli teskari masalalarga olib kelish usulidan foydalanamiz, ular uchun global ma'nodagi bir qiymatli yechiluvchanlik teoremlari isbotlangan va teskari masalalar uchun turg'unlik baholari olingan. Shunday qilib, koeffitsiyent va yadroning dastlabki asimptotikalarini bir vaqtning o'zida aniqlash imkonini beruvchi konstruktiv algoritmi qurildi.

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, x_3 > 0$ uchun quyidagi integro-differensial tenglamani

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \\ & + \int_0^t k(x_1, t - \tau) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, \tau) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (25)$$

boshlang'ich va chegaraviy shartlar

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} a(x_2, 0) \left[\frac{\partial u}{\partial x_3}(x, t) + \int_0^t k(x_1, t - \tau) \frac{\partial u}{\partial x_3}(x, \tau) d\tau \right] \Big|_{x_3=+0} = \\ = -\delta(x_1) \delta(x_2) \delta'(t), \end{aligned} \quad (27)$$

bilan qaraymiz. $u(x, t)$ – ko'chish funksiyasi, $a(x_2, x_3)$ – muhitda to'lqin tarqalish tezligini ifodalovchi koeffitsiyent.

Teskari masala: (25)–(27) masala yechimi haqidagi

$$\begin{aligned} F_{x_1, x_2}[u](x_3, t, \nu, \lambda)|_{x_3=+0} = g(t, \nu, \lambda), \quad t > 0, \quad \nu, \lambda \in \mathbb{R}, \\ (g(t, \nu, \lambda) - \text{berilgan funksiya}, F_{x_1, x_2}[u](x_3, t, \nu, \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i(\nu x_1 + \lambda x_2)} dx_1 dx_2 - \text{esa} \end{aligned} \quad (28)$$

$u(x, t)$ funksiyaning x_1, x_2 o'zgaruvchilar bo'yicha Fur'ye obrazi) qo'shimcha ma'lumotdan foydalanib $a(x_2, x_3)$ koeffitsiyentni va (25) tenglamaga kiruvchi integral operatorning $k(x_1, t), t > 0$ yadrosi aniqlansin.

Faraz qilamiz $k(x_1, t), a(x_2, x_3)$ funksiyalar x_1, x_2 gorizontal o'zgaruvchilardan kuchsiz bog'liq bo'lsin:

$$\begin{aligned} a(x_2, x_3) &= a_0(x_3) + \varepsilon x_2 a_1(x_3) + O(\varepsilon^2), \\ k(x_1, t) &= k_0(t) + \varepsilon x_1 k_1(t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (29)$$

bu yerda ε – kichik parametr.

(29) tengliklarda $a_0(x_3)$ ni berilgan funksiya deb olamiz va $a_0(x_3) \geq m > 0$.

$k_0(t)$ va $a_1(x_3), k_1(t)$ larni $O(\varepsilon^2)$ aniqlikgacha topish usuli qurilgan. Buning uchun nol bo'lmagan almashtirish $(v_j, \lambda_j), j = 1, 2$ parametrlari to'plami uchun $g(t, v, \lambda)$ funksiyaning berilishi yetarli.

(25)-(27) to'g'ri masala yechimini ε darajalari bo'yicha qator ko'rinishida izlaymiz:

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x, t). \quad (30)$$

U holda

$$F_{x_1, x_2}^{-1}[u](x_3, t, v, \lambda)|_{x_3=+0} := U(x_1, x_2, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j U_j(x_1, x_2, t),$$

bo'ladi. u_j (shu bilan birga U_j) lar – juft j lar uchun x_1, x_2 lar bo'yicha juft, va toq j larda – toq bo'ladi. Shunday qilib ma'lum $U(x_1, x_2, t)$ funksiyaga ko'ra $U_0(x_1, x_2, t)$ va $U_1(x_1, x_2, t)$ funksiyalarni $O(\varepsilon^2)$ aniqlikgacha topish mumkin.

Keltirilgan usul $O(\varepsilon^2)$ aniqlikda $a_1(x_3), k_0(t), k_1(t)$ larni topishni o'z ichiga olgani uchun, (29), (30) ni (25) ga qo'yib $k_0(t)$ va $a_1(x_3), k_1(t)$ larni ketma-ket aniqlash bo'yicha ikkita bir o'lchovli teskari masalalarga ega bo'lamiz:

(I)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= a_0(x_3) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a_0(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \right) \\ &+ \int_0^t k_0(t - \tau) \left(a_0(x_3) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a_0(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \right) \right) (x, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$u_0|_{t < 0} \equiv 0,$$

$$a_0(+0) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_3} (x, t) + \int_0^t k_0(t - \tau) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} (x, \tau) d\tau \right] \Big|_{x_3=+0} = -\delta(x_1) \delta(x_2) \delta'(t),$$

$F_{x_1, x_2}[u_0](x_3, t, v, \lambda)|_{x_3=+0} = F_{x_1, x_2}[U_0](t, v, \lambda) := g_0(t, v, \lambda), t > 0$.
tengliklardan $k_0(t)$ va $u_0(x, t)$ funksiyalarni aniqlash masalasi;

(II)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = & L[k_0, \frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_2 a_1(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} + a_0(x_3) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2 a_1(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) \\ & + a_0(x_3) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right] + x_2 a_1(x_3) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}] \\ & + \int_0^t x_1 k_1(\tau) \left(a_0(x_3) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a_0(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \right) \right) (x, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$u_1|_{t < 0} \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} L \left[k_0, x_2 a_1(+0) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} + a_0(+0) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right] + a_0(+0) x_1 \int_0^t k_1(t - \tau) \frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x, \tau) d\tau \Big|_{x_3 = +0} \\ = 0, \end{aligned}$$

$F_{x_1, x_2}[u_1](x_3, t, v, \lambda)|_{x_3 = +0} = F_{x_1, x_2}[U_1](t, v, \lambda) := g_1(t, v, \lambda), \quad t > 0.$
tengliklardan $a_1(x_3), k_1(t)$ va $u_1(x, t)$ funksiyalarni aniqlash masalasi.

(I), (II) teskari masalalarning global yagona yechilishi va turg'unligi haqidagi quyidagi teoremlar o'rinli.

19-teorema. v, λ nol bo'lmagan fiksirlangan parametrlar uchun $g_{00}(t, v, \lambda) \in C^3[0, T], a_0(x_3) \in C^4[0, \psi^{-1}(T/2)]$ bo'lsin. U holda (I) teskari masalaning ixtiyoriy musbat $0 < T < T^*$ larda yagona $k_0(t) \in C^3[0, T]$ yechimi mavjud.

20-teorema. 19-teorema shartlari bajarilsin va (v, λ) nol bo'lmagan fiksirlangan parametrlar uchun $g_1(0, v, \lambda) \equiv 0, g'_0(0, v, \lambda) \equiv \frac{i\lambda a_1(0)}{2a_0(0)}, a'_0(x_3) \leq 0$ bo'lsin. U holda (II) teskari masalaning ixtiyoriy musbat $T < T^*$ larda yagona $a_1(x_3) \in C^1[0, \psi^{-1}(T/2)], k_1(t) \in C[0, T]$ yechimi mavjud.

Ikkinchi paragrafda tenglamaning o'rama yadrosini aniqlashning chiziqli ko'p o'lchovli masalasi qo'yilgan va yechilgan. Teskari masala yechiluvchanligining zaruriy va yetarli shartlari olingan, turg'unlik teoremasi, dastlabki nokorrekt masalaning regulyarizatsiyalangan korrekt masalalar oilasi yechimga yaqinlashuvchiligi haqidagi teorema isbotlanilgan. To'g'ri masala (1)-(3) ko'rinishida qaralgan.

Faraz qilaylik $k(x_2, t)$ yadro quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$k(x_2, t) = k_0(x_2, t) + k_1(x_2, t),$$

bu yerda $k_0(x_2, t)$ berilgan funksiya, $k_1(x_2, t)$ – absolyut qiymati kichik bo'lgan noma'lum funksiya. Formal ravishda ε parametрни kiritamiz:

$$k(x_2, t) = k_0(x_2, t) + \varepsilon k_1(x_2, t), \quad (31)$$

$k_0(x_2, t) \equiv k_0(t)$ deb faraz qilamiz.

(30) ni hisobga olgan holda qo'yilgan masalani $u_0(x, t)$ ni topish bo'yicha to'g'ri masalaga va $u_1(x, t) \equiv u_1(x_2, x_3, t), k_1(x_2, t)$ larni aniqlash bo'yicha

teskari masalaga keltiramiz. Birinchi masala muallif tomonidan 2008 yilda o'rganilgan. Masalaning bir qiymatli yechiluvchanligi haqidagi teoremlar isbotlangan. Ikkinchi (teskari) masala integro-differensial tenglamalarning chiziqli sistemasi uchun bo'lib, unga Fur'ye almashtirishi qo'llaniladi.

Teskari masala chiziqli holga keltirilgan to'g'ri masala yechimi u_1 haqidagi

$$u_1|_{x_3=+0} = g(x_2, t),$$

($g(x_2, t)$ – berilgan funksiya) qo'shimcha shartga asoslanib (1) tenglamaga (31) orqali kirgan $k_1(x_2, t)$, $t > 0$ yadroni topishdan iborat.

Faraz qilaylik ixtiyoriy fiksirlangan $t \in [0, T]$ $\text{supp } \tilde{k}_1(v, t) \subset [-\lambda, \lambda]$ lar uchun faqat va faqat $\tilde{k}_1(v, t) \in C_t^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ bo'lgandagina $\tilde{k}_1(v, t) = F_{x_2}[k_1](v, t) \in \tilde{\Lambda}(\lambda, T)$ bo'ladi. Mos ravishda faqat va faqat $\tilde{k}_1(v, t) = F_{x_2}[k_1](v, t) \in \tilde{\Lambda}(\lambda, T)$ bajarilgandagina $\tilde{k}_1(v, t) = F_{x_2}[k_1](v, t) \in \tilde{\Lambda}(\lambda, T)$ bo'ladi. Bu paragrafning asosiy natijasi $\tilde{k}_1(v, t)$ ni aniqlash teskari masalasining bir qiymatli global yechiluvchanligi va turg'unligi haqidagi quyidagi teoremlardan iborat:

21-teorema. λ, T – fiksirlangan musbat son bo'lib, $T < T^*$ bo'lsin. Teskari masala $k_1(x_2, t) \in \Lambda(\lambda, T)$ yechimining mavjud va yagona bo'lishi uchun ixtiyoriy fiksirlangan $t \in [0, T]$, $\text{supp } \tilde{g}(v, t) \subset [-\lambda, \lambda]$ larda $k_0(t) \in C^3[0, T]$, $\tilde{g}(v, t) \in C_t^2(\mathbb{R} \times [0, T])$, $\tilde{g}(v, 0) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

22-teorema. $k_1^{(1)}(x_2, t), k_1^{(2)}(x_2, t) \in \Lambda(\lambda, T)$ lar mos ravishda $g^{(1)}(x_2, t), g^{(2)}(x_2, t)$ ma'lumotlar bilan teskari masalaning yechimlari bo'lsin. U holda 21-teorema shartlari bajarilganda quyidagi turg'unlik bahosi o'rinli:

$$\int_R \int_{-\lambda}^{\lambda} \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_{C[0, T]}^2(x_2) dx_2 \leq C \int_{-\lambda}^{\lambda} \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|_{C^2[0, T]}^2(v) dv.$$

Bu yerda $C - \lambda, T$ kattaliklardan va $\mu(x_3), \rho(x_3), k_0(t)$ funksiyalar qiymatlaridan bog'liq o'zgarmas.

$\tilde{g}(v, t)$ ma'lumotga mos $k_1(x_2, t) \in C_t^1(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}))$ yechim mavjud bo'lsin.

$\tilde{g}_\lambda(v, t)$ funksiyalar to'plamini quyidagi:

$$\tilde{g}_\lambda(v, t) := \theta(\lambda - |v|) \tilde{g}(v, t),$$

qoidaga ko'ra aniqlaymiz.

Teskari masalalar oilasini ajratamiz: $\tilde{g}_\lambda(v, t)$ ma'lumotga ko'ra $k_1^\lambda(x_2, t) = F_v^{-1}[\tilde{k}^\lambda(v, t)]$ funksiyani toping.

23-teorema. Berilgan teskari masalalar oilasi regulyarizatsiyalangan, ya'ni:

- 1) har bir $\lambda > 0$ da teskari masala korrekt;
- 2) berilganlar shunday bo'lsaki, dastlabki (korrekt) masala yechimi mavjud bo'lsa, u holda bu berilganlar uchun masalalar oilasining yechimlari ketma-ketligi $\lambda \rightarrow \infty$ dastlabki (nokorrekt) masala yechimiga yaqinlashadi.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishida quyidagi natijalarga erishildi:

1. vertikal bir jinsli bo'lmagan muhitda tebranish manbalari uchun $\mathbb{R}_+^3$ yarim fazodagi qovishqoq-elastiklik va termoelastiklik-qovishqoqlik tenglamasining bir o'lchovli skalyar yadrosini aniqlash usuli ishlab chiqilgan, global yagona yechiluvchanlik shartlari olingan, teskari masala yechimining zichlikka, Lamé parametrlariga va to'g'ri masala yechimi haqidagi qo'shimcha shartlarga uzluksiz bog'liqligi ko'rsatilgan;

2. $\mathbb{R}_+^3$ yarim fazodagi yo'naltirilgan portlash tipidagi manba uchun yopishqoq-elastiklik tenglamasining bir o'lchovli matritsa yadrosining global yagona yechiluvchanligi haqidagi teoremlar isbotlangan, teskari masala yechimlari uchun turg'unlik baholari olingan;

3. Banach fazosi shkalasi metodi va vaznli norma metodlarining kombinatsiyasiga asoslangan yondashuv ishlab chiqildi, bu esa fazoviy o'zgaruvchisi bo'yicha analitik, vaqt o'zgaruvchisi bo'yicha uzluksiz bo'lgan funksiyalar sinfida xotiraga ega dinamik tenglamalarning ko'p o'lchovli yadrolari uchun global bir qiymatli yechiluvchanlik teoremlarini olish imkonini berdi;

4. yadroning dastlabki asimptotikalarini va kuchsiz gorizont-al-bir jinsli bo'lmagan muhitda ko'ndalang elastik to'lqinlarning tarqalish tezligini bir vaqtning o'zida aniqlashning kvazi ikki o'lchovli masalasining global bir qiymatli yechiluvchanligi va turg'unligi uchun shartlar olingan;

5. yadroni aniqlash bo'yicha ko'p o'lchovli chiziqli holga keltirilgan masala yechimining mavjud va yagonaligi haqidagi teoremlar isbotlangan, turg'unlik baholari olingan;

6. oldindan ma'lum matritsali xotira yadrosi bilan berilgan anizotropik qovishqoq-elastiklik tenglamalari sistemasidan elastiklik modullarini aniqlash bir o'lchovli masalasining global bir qiymatli yechiluvchanligi va turg'unlik shartlari aniqlangan;

7. xotira yadrosi ma'lum bo'lgan bog'lanmagan termoqovishqoq-elastiklikning issiqlik kengayish koeffitsiyentini topish teskari masalasining yechiluvchanligi va turg'unligi tadqiq qilingan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО**

**БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР**

ТОТИЕВА ЖАННА ДМИТРИЕВНА

**ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ
ДОКТОРСКОЙ (DSc) ДИССЕРТАЦИИ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ
НАУКАМ**

БУХАРА – 2023

Тема докторской (Doctor of Science) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за B2023.2.DSc/FM218.

Диссертация выполнена в Бухарском государственном университете и Владикавказском научном центре Российской академии наук.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:

Дурдиев Дурдимурод Каландарович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Ашуров Равшан Ражабович
доктор физико-математических наук, профессор

Сабитов Камиль Басирович
доктор физико-математических наук, профессор

Фаязов Кудратилло Садриддинович
доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация:

Белгородский государственный национальный исследовательский университет (Россия)

Защита диссертации состоится « 12 » сентября 2023 года в « 16:00 » часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathins.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 166). (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел. (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 24 » августа 2023 года.

(протокол рассылки № 2 от « 24 » августа 2023 года).

У.А.Розиков

Председатель научного совета по
присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев

Ученый секретарь научного совета по
присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.А.Азамов

Председатель научного семинара при
научном совете по присуждению
научных степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во всем мире многие научные и практические исследования в большинстве случаев сводятся к исследованию обратных задач математической физики. Многим физическим средам (материалам) свойственна зависимость процессов деформирования от скорости и времени, которая отсутствует в уравнениях теории упругости. Это свойство называют памятью. В средах с памятью сочетаются способности запасать энергию подобно упругим телам и рассеивать подобно средам с вязкими свойствами. Более точное исследование с помощью математических методов процесса распространения электромагнитных, акустических и упругих волн в вязкоупругих средах требует учета памяти (предыдущей истории) процесса. В математическом плане учет предыстории приводит к необходимости введения в рассматриваемую математическую модель упругости дополнительного интегрального слагаемого типа оператора свертки с ядром, отвечающим за предысторию или память среды. Практические исследования предыстории или памяти среды остаются одной из важных задач сегодняшнего дня.

В настоящее время одной из наиболее актуальных проблем математической физики является анализ поведения материалов с учетом вязкоупругости и термовязкоупругости. Системы дифференциальных уравнений вязкоупругости возникают, например, в сейсморазведке, когда свойства среды исследуются при помощи сейсмических волн (обратные динамические задачи). Решение коэффициентных обратных задач, а также задач определения ядра интегрального оператора по некоторой информации о волновом поле играет важную роль при изучении строения и свойств геологической среды. Сама теория линейной вязкоупругости достаточно развита и доступна для широкого применения, но многие математические свойства линейного определяющего соотношения вязкоупругости, напрямую связанные с моделированием классических реологических эффектов и типичных кривых поведения материалов – еще малоизвестны, полный арсенал возможностей линейной теории не выявлен, область ее адекватности до сих пор не очерчена достаточно четко и явно, а компьютерное моделирование нередко остается без необходимого фундамента. Все это связано с тем, что ядро интегрального оператора, отвечающего за учет предыстории процесс (памяти), невозможно определить в результате эксперимента (ядро не поддается непосредственному измерению), его можно определить только теоретически. Необходимость разработки методов решения обратных задач теории волновых процессов в вязкоупругих средах обуславливает актуальность темы диссертационной работы.

В Узбекистане уделяется особое внимание современным направлениям дифференциальных уравнений и математической физики, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В том числе особое внимание уделяется изучению обратных и некорректных задач. На

сегодняшний день достигнуты значительные результаты по прямым и обратным задачам математической физики. Проведение на уровне международных стандартов научных исследований по приоритетным направлениям математических наук, в частности, алгебре и функциональному анализу, дифференциальным уравнениям и математической физике, теории динамических систем, является основной задачей и направлением в деятельности Института математики имени В.И. Романовского ¹. Развитие исследований прямых и обратных задач математической физики играет важную роль в реализации указанного постановления. Установлено, что при увеличении силы землетрясения, среда ведет себя не как упругое, а как вязкоупругое тело. Поэтому весьма актуальной представляется задача исследования глобальной разрешимости многомерных обратных задач. Основной чертой, присущей настоящей работе, является использование в математических моделях локализованного в точке или на границе рассматриваемой пространственной области источника, инициирующего физический процесс распространения волн. Это существенно повышает прикладную значимость изучаемых задач.

Тема и объект исследования настоящей диссертации соответствуют задачам, обозначенным в Указе Президента Республики Узбекистан №УП 4979 от 7 февраля 2017 года “О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан” и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”, и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан: “Математика, механика и информатика”.

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации. Научные исследования обратных задач определения ядер в интегро-дифференциальных уравнениях и их применение ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в таких как: Талинский технологический университет (Эстония), Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН (Россия), Технический университет Фрайберга (Германия), Alpen-Adria-Universitat Klagenfurt (Австрия), Technical University of Munich (Германия), Radboud University (Нидерланды), Indian Institute of Technology Roorkee (Индия), Cardiff

¹ Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

University (Великобритания), Aberystwyth University (Великобритания), Politecnico di Milano (Италия), Universite di Bologna (Италия), Wichita State University (США), University of Alaska (США).

В последние годы в мировом масштабе получен ряд результатов по обратным задачам для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа, в частности, получены следующие научные результаты: для распределенных источников возмущений в ограниченных областях решены задачи определения ядер уравнения вязкоупругости и термовязкоупругости (Таллинский технологический университет); для сосредоточенных источников возмущений для полупространства решены обратные задачи по определению коэффициентов и многомерных ядер специального вида (Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН); исследованы обратные задачи определения ядер и коэффициента по рассеянной волне для стационарной системы уравнений теории упругости с постоянными коэффициентами Ламе и переменным матричным коэффициентом, зависящим от пространственных переменных и частоты (Wichita State University); проведен анализ спектра ядра релаксации в гильбертовых пространствах (Cardiff University); проведено численное исследование обратной задачи определения ядра линейной вязкоупругости в трехмерной среде (Technical University of Munich); исследована локальная разрешимость обратной задачи определения ядра для трехмерных уравнений течения вязкоупругой жидкости, которая возникает при движении жидкостей Кельвина-Фойгта в ограниченных областях (Indian Institute of Technology Roorkee); с помощью двух граничных измерений решена обратная задачам идентификации ядра релаксации, которое представляет собой линейную комбинацию ядер Абеля (как часто предполагается в приложениях) (University of Alaska).

Степень изученности темы. Первые публикации по обратным задачам были связаны с физикой (квантовой теорией рассеяния, электродинамикой, акустикой), геофизикой (электроразведкой, сейсмикой, магниторазведкой), астрономией и др. Это можно объяснить тем, что свойства среды, которые в прямых задачах считаются заданными величинами, на практике довольно часто оказываются неизвестными. Математически это означает, что требуется определить либо коэффициенты уравнений, либо начальные или граничные условия, либо местоположение, границы и другие свойства области, в которой идет изучаемый процесс. Вместе с тем, решение прямой задачи, как правило, остается также неизвестным. Поэтому важным моментом в постановке и решении обратных задач является возможность иметь некоторую дополнительную информацию о решении прямой задачи (измерения), например, измерения внутри области или на ее границе, спектральные либо кинематические характеристики процесса или так называемые "финальные наблюдения").

Значимое направление в теории обратных задач – обратные задачи разведочной геофизики. Здесь следует упомянуть первые публикации

А. С. Алексеева и С. В. Гольдина. В частности, А. С. Алексеев впервые исследовал одномерную обратную задачу определения плотности для системы уравнений изотропной упругости в полупространстве. Развивая данное направление, М. М. Лаврентьев и В. Г. Романов разработали методы исследований различных постановок обратных задач для уравнений гиперболического типа. Различные постановки коэффициентных обратных задач теории упругости представлены в работах А. С. Благовещенского, В. Г. Романова, Е. А. Волковой. Развитие исследований данных авторов нашло отражение в работах В. Г. Яхно, Т. В. Бугуевой (Мельниковой). Ими доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости многомерных задач определения функции плотности для системы уравнений изотропной и анизотропной упругости. В работах К. Б. Сабитова представлены новые постановки и методы решения обратных задач для уравнений математической физики, исследованы прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. Задачи определения ядра (зависящего от временной и пространственных переменных) интегрального оператора в интегро-дифференциальных уравнениях гиперболического типа — молодое интенсивно развивающееся направление в теории обратных задач, возникшее в конце 80-тых годов прошлого столетия. Первые публикации в этой области, встречающиеся в литературе, связаны с именами М. Граселли, Д. К. Дурдиева, С. И. Кабанихина, А. Лоренци, Е. Папарони, Е. Синестрари. Дальнейшие исследования обратных задач с памятью для гиперболических уравнений отражены в работах А. Л. Бухгейма, Д. К. Дурдиева, В. Г. Яхно.

В работах А. Л. Бухгейма, Д. К. Дурдиева, У. Д. Дурдиева, В. Г. Романова, Ж. Ш. Сафарова, Я. Янно рассмотрены задачи определения ядра, зависящего только от временной переменной (одномерная обратная задача) для случая распределенных и сосредоточенных источников возбуждения в полупространстве и в ограниченных областях. Задачи сводятся к решению интегральных уравнений Вольтерровского типа относительно неизвестных функций. Далее к этим уравнениям применяется принцип сжатых отображений (теорема Банаха) в соответствующих функциональных пространствах. Получены теоремы существования, единственности, а также оценки непрерывной зависимости решения от заданных функций. Например, в работах Д. К. Дурдиева, Ж. Ш. Сафарова изучена обратная задача определения одномерного ядра для уравнения вязкоупругости в ограниченной области, исследована локальная однозначная разрешимость обратной задачи определения ядра для интегро-дифференциального уравнения акустики. Также корректно поставлена и решена задача определения матричного ядра для системы вязкоупругости для однородной анизотропной среды. Прямая задача представляет собой обобщенную задачу Коши для пространства $\mathbb{R}^3$.

В работах В. Г. Романова изучены многомерные обратные задачи об определении пространственной части ядра и коэффициентов для интегро-

дифференциальных уравнений вязкоупругости и электродинамики. В монографии Д. К. Дурдиева для специального класса многомерных ядер (гладких по временной переменной и аналитических по части пространственных переменных) на основе метода шкал банаховых пространств установлены теоремы однозначной локальной разрешимости. Отметим, что идея применения метода шкал банаховых пространств аналитических функций к решению многомерных обратных задач принадлежит В. Г. Романову. Монография Д. К. Дурдиева является одной из последних фундаментальных работ в области исследования обратных задач для сред с последствием. В ней представлены результаты исследования корректности ряда постановок одномерных и многомерных обратных динамических задач для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений, возникающих при описании внутренних характеристик сред с последствием по измерениям волнового поля в доступных областях. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости поставленных обратных задач, а также получены оценки непрерывной зависимости решений этих задач от входных данных. В работах А.Л. Карчевского, З.Р. Бозорова, У.Д. Дурдиева представлены численные исследования обратных задач для динамических уравнений наследственной теории упругости.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ. Диссертационная работа выполнена в соответствии с государственными заданиями Южного математического института Владикавказского научного центра РАН: “Математическое моделирование в задачах механики сплошной среды и совершенствование методов решения сингулярных интегральных уравнений” (2015-2017 гг., № регистрации 0120.085080); “Математическое моделирование и численное решение задач гидродинамики и тепломассообмена в геофизических и инженерных задачах” (2018 г., АААА-F18-118032690251-2); “Математическое моделирование и численное решение задач механики сплошной среды и тепломассообмена в геофизических и инженерных задачах” (2019-2021 гг., № регистрации АААА-A19-119032590069-3).

Цель работы состоит в построении методов исследования глобальной разрешимости одномерных и многомерных обратных задач для динамических уравнений наследственной теории упругости с сосредоточенными источниками возмущений, а также в исследовании устойчивости решения поставленных обратных задач.

Задачи исследования:

исследовать глобальную однозначную разрешимость и устойчивость задачи определения одномерного скалярного и матричного ядра для системы уравнений вязкоупругости в вертикально-неоднородной среде;

получить условия глобальной однозначной разрешимости задачи определения матричного ядра для системы уравнений вязкоупругости в вертикально-неоднородной изотропной среде с источником типа направленного взрыва по некоторой информации о решении прямой задачи;

исследовать глобальную однозначную разрешимость и устойчивость задачи определения одномерного ядра системы уравнения термовязкоупругости при заданных функциях плотности, параметрах Ламэ и коэффициента теплового расширения;

изучить вопрос об однозначной разрешимости и устойчивости задачи определения коэффициента теплового расширения как функции температуры по заданному полю смещений на границе полупространства для уравнения термовязкоупругости.

исследовать глобальную однозначную разрешимость и устойчивость задачи определения многомерного ядра, аналитического по пространственным переменным и гладкого по временной переменной, для системы динамических уравнений наследственной теории упругости в вертикально-неоднородной среде;

определить условия разрешимости обратных коэффициентных задач анизотропной вязкоупругости для известного матричного ядра памяти, получить оценки устойчивости решений обратных задач;

изучить вопрос однозначной разрешимости и устойчивости обратной линейаризованной многомерной задачи определения ядра для системы уравнений изотропной вязкоупругости при условии, если в качестве дополнительной информации задается преобразование Фурье решения прямой линейаризованной задачи (первой компоненты вектор-функции смещения) на границе полупространства;

исследовать глобальную однозначную разрешимость двумерной задачи одновременного определения ядра и скорости распространения поперечных волн для уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной изотропной среде.

Объект исследования. Начально-краевые задачи для динамических уравнений наследственной теории упругости и нелинейные интегральные уравнения Вольтерра второго рода.

Предмет исследования. теория гиперболических интегродифференциальных уравнений и нелинейных интегральных уравнений, теория уравнений математической физики, теория операторных уравнений.

Методы исследования. При изучении задач использовались методы теории обобщенных функций, метод интегральных уравнений, методы решений начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, методы функционального анализа, теория операторов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

получены условия глобальной однозначной разрешимости и оценки устойчивости решений обратной задачи определения одномерного скалярного и матричного ядра для системы уравнений изотропной вязкоупругости и термовязкоупругости в полупространстве для сосредоточенных источников возмущений и источника типа направленного взрыва, а также разработан подход на основе перехода к резольвенте искомого ядра и далее одновременного определения ядра, резольвенты и

функции смещения среды из системы интегральных уравнений;

доказана глобальная однозначная разрешимость многомерных задач определения ядер для динамических уравнений с памятью в классе функций, аналитических по пространственной переменной и непрерывных по временной;

получены условия глобальной однозначной разрешимости квазидвумерной задачи одновременного определения первых асимптотик ядра и скорости распространения поперечных упругих волн в слабо горизонтально-неоднородной среде;

доказаны существование и единственность многомерной линеаризованной задачи определения ядра и получены оценки устойчивости;

получены условия однозначной разрешимости и устойчивости одномерной задачи определения модулей упругости в системе уравнений анизотропной вязкоупругости с известным матричным ядром памяти.

Практические результаты исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Материал диссертационной работы, будучи в первую очередь фундаментальным исследованием, является основой для формулировки конкретных вычислительных алгоритмов и решения актуальных практических задач, связанных с прикладной геофизикой, в частности, с сейсмической разведкой.

Достоверность результатов исследования. Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается использованием строгих математических методов, последовательностью логических рассуждений при доказательствах основных положений и теорем, математическим анализом и опорой на фундаментальные работы по проблеме исследования.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость работы выражается в том, что полученные результаты развивают теорию обратных задач для динамических уравнений наследственной теории упругости, вносят вклад в исследование многомерных обратных задач. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории обратных и некорректных задач для уравнений математической физики. Практическая значимость результатов диссертационной работы состоит в том, что они могут быть использованы при математическом моделировании и анализе свойств вязкоупругих и термовязкоупругих сред.

Внедрение результатов исследования: На основе полученных результатов глобальной разрешимости обратных задач для динамических уравнений наследственной теории упругости:

методы исследования глобальной разрешимости обратных задач для системы уравнений вязкоупругости были использованы для исследования разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений при выполнении зарубежной комплексной научно-исследовательской темы «Сети (ковры), графы и линейные группы». «Исследование нелинейных операторов, дифференциальных и интегральных уравнений и их

приложения». «Разностные операторы в банаховом пространстве» и для исследования коэффициентных обратных задач для вязкоупругих сред при выполнении зарубежного грантового проекта Российского научного фонда на тему «Математическое моделирование обвалов и вязкоупругих сред с горизонтальными неоднородностями» № 23-27-00264 (справка Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Северо-Осетинский государственный университет имени Коста Левановича Хетагурова» №1493 от 29 мая 2023 г., Россия). В частности, была исследована разрешимость двумерной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа и реализованы численные методы решения обратных задач для вязкоупругих сред с горизонтальными неоднородностями;

теоремы об однозначной глобальной разрешимости многомерных обратных задач были использованы в рамках Государственной научно-технической Программы фундаментальном проекте ОТ - Ф4 – 02 «Термодинамика моделей математической физики с бесконечным множеством состояний» (справка Бухарского государственного университета №04/01/1344 от 02 июня 2023 г.). Применение научных результатов позволило одновременно определить первые асимптотики ядра квазидвумерной задачи и получить для них условия разрешимости в глобальном смысле; определить скорости распространения поперечных упругих волн в слабой горизонтальной неоднородной среде; получить условия однозначной разрешимости и устойчивости одномерной задачи определения модулей упругости в системе уравнений анизотропной вязкоупругости с известным матричным ядром памяти;

разработанная техника сведения обратных задач определения ядер для уравнения вязкоупругости с переменными коэффициентами в полупространстве к системе нелинейных интегральных уравнений была использована в статьях, опубликованных в зарубежных научных журналах (Mathematical Notes, 2015, 97(6), 867–877; Theoretical and Mathematical Physics, 2018, 195(3), 491-506; Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2018, 11(6), 753-763). Применение этой техники дало возможность получить глобальную разрешимость обратных задач определения ядер для интегро-дифференциального уравнения акустики и для уравнения вязкоупругости в пористой среде.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 12 международных конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 42 научных работ: 22 статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах WOS/Scopus, из них 1 монография (Springer Nature); 16 статей, имеющих квартиль Q1-Q2; 19 статей в сборниках конференций.

Структура и объем диссертации. Содержание диссертации состоит из введения, 5 глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 190 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, проведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и отражена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, представлен объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первом главе рассмотрены обратные задачи определения сверточных ядер интегральных операторов, описывающих явление последствия среды. Разработана техника, с помощью которой задачи сводятся к решению нелинейных интегральных уравнений Вольтерровского типа относительно неизвестных функций. Далее к этим уравнениям применяется принцип сжатых отображений (теорема Банаха) в соответствующих функциональных пространствах. Получены теоремы существования, единственности, а также оценки непрерывной зависимости решения от заданных функций.

В первом параграфе исследована глобальная однозначная разрешимость одномерной задачи определения ядра системы уравнений вязкоупругости с локализованным на границе среды источником возбуждения волн.

Рассмотрим при $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, x_3 > 0$ систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u_i|_{t < 0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = -\delta_{1j} \delta'(t)/2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ – вектор смещений, $\delta'(t)$ – производная дельта-функции Дирака; δ_{ij} – символ Кронекера; T_{ij} – тензор напряжений:

$$T_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}[u](x, t) + \int_0^t k(t - \tau) \sigma_{ij}[u](x, \tau) d\tau, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}[u](x, t) = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \operatorname{div} u. \quad (5)$$

Предполагается, что $\rho = \rho(x_3), \mu = \mu(x_3), \lambda = \lambda(x_3)$ являются функциями одной переменной, удовлетворяющими условиям $\rho(x_3) \geq m > 0, \mu(x_3) \geq m > 0, \lambda(x_3) \geq m > 0$, причем $\rho'(+0) = \mu'(+0) = \lambda'(+0) = 0$.

При сделанных предположениях прямая задача определения вектор-функции смещения $u(x, t)$ для начально-краевой задачи (1)–(3) не зависит от переменных x_1, x_2 .

Обратная задача заключается в определении ядра $k(t), t > 0$, входящего в (1) посредством формулы (4), если относительно решения задачи (1)–(5) известна дополнительная информация

$$u_1(x_3, t)|_{x_3=+0} = g(t), t > 0, \quad (6)$$

$g(t)$ – заданная функция.

Введем в рассмотрение переменную y по формуле

$$y = \psi(x_3) := \int_0^{x_3} \frac{d\xi}{c(\xi)}, c(x_3) := \sqrt{\frac{\mu(x_3)}{\rho(x_3)}}.$$

Через $\psi^{-1}(y)$ обозначим функцию, обратную к $\psi(x_3)$.

Пусть $T^* := 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{\mu(\xi)}} d\xi$. Для любого T из промежутка $0 < T < T^*$ определим величину $\psi^{-1}(T/2)$.

Основные результаты этой статьи составляют следующие теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 1. Пусть функция $g(t)$ представима в виде

$$g(t) = \frac{a}{2} \delta(t) + \theta(t) g_0(t), a = [\mu(+0)\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}$$

и $g_0 \in C^2[0, T]$, $\theta(t)$ – функция Хевисайда. Кроме того, $(\rho, \mu) \in C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)–(6) $k(t) \in C^2[0, T]$ при любом фиксированном $0 < T < T^*$.

Пусть $\Gamma(h_0)$ – множество функций $k(t) \in C^2[0, T]$, удовлетворяющих для $t \in [0, T]$ неравенству $\|k(t)\|_{C^2[0, T]} \leq h_0$ с фиксированной положительной постоянной h_0 .

Теорема 2. Пусть $k^1(t) \in \Gamma(h_0), k^2(t) \in \Gamma(h_0)$ – решения обратной задачи (1)–(6) с набором данных

$$\{\rho^1(\psi^{-1}(y)), \mu^1(\psi^{-1}(y)), g_0^1(t)\},$$

$$\{\rho^2(\psi^{-1}(y)), \mu^2(\psi^{-1}(y)), g_0^2(t)\},$$

соответственно. Тогда найдется такое положительное число

$$C = C(h_0, h_{00}, m, T), h_{00} = \max \left\{ \|\rho^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(\frac{T}{2})]}, \|\mu^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(\frac{T}{2})]}, \right. \\ \left. \|g_0^1(t)\|_{C^2[0, T]}, \|\mu^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\rho^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|g_0^2(t)\|_{C^2[0, T]} \right\},$$

что справедлива оценка устойчивости

$$\|k^1 - k^2\|_{C^2[0, T]} \leq C [\|\rho^1 - \rho^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|\mu^1 - \mu^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|g_0^1 - g_0^2\|_{C^2[0, T]}].$$

Во втором параграфе данный результат обобщается на случай матричного ядра для системы анизотропной вязкоупругости для случая шнурового мгновенного источника возмущений на границе полупространства. Условие Неймана здесь имеет вид

$$T_{j3}|_{x_3=+0} = \delta'(t)\delta(x_1), \quad j = 1, 2, 3. \quad (3')$$

Тензор напряжений в (1) имеет представление:

$$T_{ij} = \sum_{n,l=1}^3 c_{ijnl} \left[S_{nl} + \int_0^t k_i(t-\tau) S_{nl}(x, \tau) d\tau \right], \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (7)$$

$$S_{nl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_n} \right), \quad n, l = 1, 2, 3;$$

$c_{ijnl} = c_{ijnl}(x)$ — модули упругости, $k(t) = (k_1, k_2, k_3)(t)$ — функция релаксации среды. Рассматриваются анизотропные среды с матрицей независимых модулей упругости следующего вида:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & & & \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & 0 & c_{44} & 0 \\ & & & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Вектор-функция $(c_{11}, c_{12}, c_{44}, \rho)$ принадлежит классу $\Lambda(m)$,

$$\Lambda(m) = \{(c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), c_{44}(x_3), \rho(x_3)):$$

$$c_{11} \geq m > 0, c_{44} \geq m > 0, c_{11} > c_{12}, c_{11} + 2c_{12} > 0, \rho \geq m > 0,$$

$$c'_{11}(+0) = 0, c'_{44}(+0) = 0, \rho'(+0) = 0,$$

$$c_{11}, c_{44}, \rho \in C^2(R_+), c_{12} \in C(R_+)\}, R_+ = [0, \infty).$$

Обратная задача: Определить ядро $k(t) = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)(t), t > 0$, входящее в равенства (1) посредством (7), если относительно вектор-функции U решения прямой задачи известна дополнительная информация

$$U_j(x_3, t, v)|_{x_3=+0, v=+0} = g_j(t), t > 0, j = 1, 2, 3;$$

где $g_j(t)$ — заданные функции,

$$U_j(x_3, t, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_3, t) \exp(-ivx_1) dx_1, j = 1, 2, 3.$$

$$\text{Пусть } a := [c_{44}(+0)\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}, b := [c_{11}(+0)\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}.$$

$$T^* := 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{44}(\xi)}} d\xi; T^{**} := 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{11}(\xi)}} d\xi.$$

Для любого T из промежутка $0 < T < \min \{T^*, T^{**}\}$ определим величины $\psi_1^{-1}(T/2)$ и $\psi_2^{-1}(T/2)$.

Теорема 3. Пусть функция $g_j(t)$ представима в виде

$$g_j(t) = A_j \delta(t) + \theta(t) g_{0j}(t), A_j = (a, a, b)$$

и $g_{0j}(t) \in C^2[0, T], j = 1, 2, 3$; $\theta(t)$ — функция Хевисайда. Кроме того, $(\rho, c_{44}) \in C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)], c_{11} \in C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]$. Тогда существует единственное решение обратной задачи $k(t) = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)(t) \in C^2[0, T]$ при любом фиксированном $0 < T < \min \{T^*, T^{**}\}$.

Теорема 4. Пусть $k(t) = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)(t), k^*(t) = \text{diag}(k_1^*, k_2^*, k_3^*)(t), k_j(t) \in \Gamma(h_{0j}), k_j^*(t) \in \Gamma(h_{0j}), j = 1, 2, 3$ — решения обратной задачи с набором данных

$$\left\{ \rho(\psi_1^{-1}(y)), c_{44}(\psi_1^{-1}(y)), c_{11}(\psi_2^{-1}(z)), g_{0j}(t) \right\}, \\ \left\{ \rho^*(\psi_1^{-1}(y)), c_{44}^*(\psi_1^{-1}(y)), c_{11}^*(\psi_2^{-1}(z)), g_{0j}^*(t) \right\}$$

соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C = C(m, h_0, h_{00}, T), h_0 = \max \{h_{01}, h_{02}, h_{03}\}, h_{00} = \max \{ \|\rho\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]},$

$$\|c_{44}\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]}, \|g_{0j}(t)\|_{C^2[0, T]}, \|\rho^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]}, \|c_{44}^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]},$$

$\|c_{11}^*\|_{C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]}, \|g_{0j}^*(t)\|_{C^2[0, T]} \}$, что справедлива оценка устойчивости

$$\sum_{j=1}^3 \|k_j - k_j^*\|_{C^2[0, T]} \leq C \left[\|\rho - \rho^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} + \|c_{44} - c_{44}^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} \right. \\ \left. + \|c_{11} - c_{11}^*\|_{C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]} + \sum_{j=1}^3 \|g_{0j} - g_{0j}^*\|_{C^2[0, T]} \right].$$

В третьем параграфе рассматривается обратная задача определения матричного ядра для системы изотропной вязкоупругости с источником типа направленного взрыва. Доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости обратной задачи. Уравнение (1) будем иметь несколько иной вид

$$\rho(x_3) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + F_i(x, t), \quad i = 1, 2, 3; \quad (9)$$

и условие (3) будет однородным:

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = 0, j = 1, 2, 3; \quad (10)$$

где

$$T_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}[u](x, t) + \int_0^t k_i(t - \tau) \sigma_{ij}[u](x, \tau) d\tau, \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} F_1(x, t) \\ F_2(x, t) \\ F_3(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \nabla \delta(x) \delta(t).$$

Будем полагать, что $k_3(t) \equiv k_2(t)$. Пусть

$$\tilde{v}_1(x_3, t) = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial v_2} \big|_{v_1=v_2=0}, \quad \tilde{v}_2(x_3, t) = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial v_1} \big|_{v_1=v_2=0},$$

$$\tilde{v}_3(x_3, t) = \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial v_1 \partial v_2} \big|_{v_1=v_2=0},$$

$$\tilde{u}_j(v_1, v_2, x_3, t, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2, x_3, t) \exp(-i(v_1 x_1 + v_2 x_2)) dx_1 dx_2.$$

Обратная задача заключается в определении ядра $k(t) = \text{diag}(k_1, k_2, k_2)(t)$, $t > 0$, входящего в (1), посредством формулы (11), если относительно решения системы (2), (9)–(11) известна дополнительная информация

$$\tilde{v}_j(+0, t) = g_j(t), \quad t > 0,$$

$g_j(t)$, $j = 1, 2$ – заданные функции.

Теорема 5. Пусть $g(t) \in C^3[0, T]$, $(\rho, \mu) \in C^3[0, \psi^{-1}(T)]$. Тогда существует единственное решение обратной задачи $\{k_1(t), k_2(t)\} \in C^2[0, T]$ при любом фиксированном $0 < T < T^*$.

Теорема 6. Пусть $k^1(t) \in \Gamma(h_0)$, $k^2(t) \in \Gamma(h_0)$ – решения обратной задачи с набором данных

$$\{\rho^1(\psi^{-1}(y)), \mu^1(\psi^{-1}(y)), g^1(t)\},$$

$$\{\rho^2(\psi^{-1}(y)), \mu^2(\psi^{-1}(y)), g^2(t)\},$$

соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C = C(h_0, h_{00}, T)$, $h_{00} = \max\{\|\rho^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\mu^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\rho^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\mu^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|g^1(t)\|_{C^3[0, T]}, \|g^2(t)\|_{C^3[0, T]}\}$, что справедлива оценка устойчивости

$$\begin{aligned} & \|k^1 - k^2\|_{C^2[0, T]} \leq \\ & \leq C[\|\rho^1 - \rho^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|\mu^1 - \mu^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|g^1 - g^2\|_{C^3[0, T]}]. \end{aligned}$$

Глава два посвящена вопросам однозначной разрешимости и устойчивости обратных задач термовязкоупругости.

В первом параграфе этой главы приведена постановка прямой задачи для математической модели несвязной термовязкоупругости, приведен краткий обзор публикаций по обратным задачам для термоупругой среды.

Во втором параграфе исследован вопрос глобальной однозначной разрешимости задачи определения ядра, входящего в систему уравнений

динамической несвязной термовязкоупругости для уравнения (1), начального условия (2) и последующих равенств системы термовязкоупругости

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k\Delta H, \quad (12)$$

$$H|_{t<0} \equiv 0, \quad (13)$$

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = \delta_{3j}\delta'(t), j = 1, 2, 3, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_3} - \gamma H\right)|_{x_3=+0} = -\gamma(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\theta_1(t), \quad (15)$$

где $H(x, t)$ – приращение температуры, Δ – оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, x_3 ; $\tilde{T}_1, \tilde{T}_0, \gamma$ – постоянные, $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$, $\gamma > 0$, k – коэффициент температуропроводности, $\theta_1(t) = t\theta(t)$, $\theta(t) = 1$, при $t \geq 0$, $\theta(t) = 0$, при $t < 0$, T_{ij} – тензор напряжений:

$$T_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}[u](x, t) + \int_0^t h(t - \tau)\sigma_{ij}[u](x, \tau)d\tau, \quad (16)$$

$$\sigma_{ij}[u](x, t) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\left[\lambda \operatorname{div} u - (3\lambda + 2\mu) \int_0^{H(x,t)} \alpha(z)dz\right]. \quad (17)$$

α – коэффициент теплового расширения среды.

Обратная задача заключается в определении ядра $h(t), t > 0$, входящего в (1)–(2), посредством формулы (16), если относительно решения прямой задачи (1), (2), (12)–(17) известна дополнительная информация

$$u_3(x_3, t)|_{x_3=+0} = g(t), \quad t > 0, \quad (18)$$

$g(t)$ – заданная функция.

Основные результаты этого параграфа составляют следующие теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 7. Пусть функция $g(t)$ представима в виде

$$g(t) = -a(0)\delta(t) + \theta(t)g_0(t), a(0) = \{[\lambda(+0) + 2\mu(+0)]\rho(+0)\}^{-\frac{1}{2}}$$

и $g_0(t) \in C^2[0, T]$, $\theta(t)$ – функция Хевисайда. Кроме того, $(\rho, \lambda, \mu) \in C^3\left[0, \psi^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)\right]$, $\alpha(z) \in C[0, \tilde{H}(T/2, T/2)]$ и $T, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, k, \gamma$ – фиксированные положительные числа, причем $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1), (2), (12)–(18) $h(t) \in C^2[0, T]$ при любом фиксированном $0 < T < T^*$.

Теорема 8. Пусть $h^1(t) \in \Gamma(h_0^*)$, $h^2(t) \in \Gamma(h_0^*)$ – решения обратной задачи с набором данных

$$\{\rho^1(\psi^{-1}(y)), \lambda^1(\psi^{-1}(y)), \mu^1(\psi^{-1}(y)), \alpha^1(z), g_0^1(t)\},$$

$$\{\rho^2(\psi^{-1}(y)), \lambda^2(\psi^{-1}(y)), \mu^2(\psi^{-1}(y)), \alpha^2(z), g_0^2(t)\},$$

соответственно. Тогда найдется такое положительное число

$$C = C(h_0^*, h_{00}^*, \gamma, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, T),$$

$$h_{00}^* = \max \{ \|\rho^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\lambda^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\mu^1(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]},$$

$$\|\alpha^1(z)\|_{C[0, \tilde{H}(T/2, T/2)]}, \|g_0^1(t)\|_{C^2[0, T]}, \|\rho^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]},$$

$$\|\mu^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]},$$

$$\|\lambda^2(y)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|\alpha^2(z)\|_{C[0, \tilde{H}(T/2, T/2)]}, \|g_0^2(t)\|_{C^2[0, T]} \},$$

что справедлива оценка устойчивости

$$\|h^1 - h^2\|_{C^2[0, T]} \leq C [\|\rho^1 - \rho^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|\lambda^1 - \lambda^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}$$

$$+ \|\alpha^1 - \alpha^2\|_{C[0, \tilde{H}(T/2, T/2)]} + \|\mu^1 - \mu^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|g_0^1 - g_0^2\|_{C^2[0, T]}].$$

В третьем параграфе поставлена и решена задача определения коэффициента теплового расширения $\alpha(z)$, $z \in [0, H(0, T)]$, $T > 0$, для системы уравнений термовязкоупругости (1), (2), (12)–(18) с несколько видоизмененными условиями (14) и (15):

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = 0, j = 1, 2, 3, \quad (14')$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_3} - \gamma H \right) |_{x_3=+0} = -\gamma(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0). \quad (15')$$

Будем предполагать, что данные условия подразумеваются вместо предшествующих равенств (14) и (15).

Обратная задача заключается в определении коэффициента теплового расширения $\alpha(z)$, $z \in [0, Z]$, $Z = H(0, T)$, входящего в (1), (16) посредством формулы (17), если относительно решения прямой задачи (1), (2), (12)–(17) известна дополнительная информация (18). Показывается, что решение обратной задачи в классе функций $\alpha(z) \in C[0, Z]$, $Z = H(0, T)$ эквивалентно решению интегрального уравнения относительно $\alpha(z)$.

Введем классы функций

$$\Lambda_1 = \{\rho(x_3), \mu(x_3), \lambda(x_3) \in C^2[0, +\infty)\}$$

$$\rho(x_3) > 0, \mu(x_3) > 0, \lambda(x_3) + 2\mu(x_3) > 0, \rho'(+0) = \mu'(+0) = \lambda'(+0) = 0\},$$

$$\Lambda_2 = \{h(t) \in C^2[0, T] | h(+0) = 0, h'(+0) = 0\}.$$

Теорема 9. Пусть $g(t) \in C^2[0, T]$, $g(+0) = 0$, $g'(+0) = 0$, $T > 0$.

Известные функции $(\rho, \lambda, \mu) \in \Lambda_1$, $h(t) \in \Lambda_2$ и $T, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, k, \gamma$ – фиксированные положительные числа, причем $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1), (2), (12)–(18) $\alpha(z) \in C[0, Z]$, $Z = H(0, T)$ при любом фиксированном $T > 0$.

Теорема 10. Пусть $\alpha(z), \alpha^*(z)$ – решения обратной задачи (1), (2), (12)–(18) с набором данных $\{h(t), g(t)\}, \{h^*(t), g^*(t)\}$ соответственно. Тогда найдется такое положительное число

$$C = C(\alpha_{00}, k, \gamma, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, T),$$

$$\alpha_{00} = \max\{\|\rho(y)\|_{C^2[0, \psi^{-1}(T)]}, \|\lambda(y)\|_{C^2[0, \psi^{-1}(T)]}, \|\mu(y)\|_{C^2[0, \psi^{-1}(T)]}, \\ \|\hbar(t)\|_{C^2[0, T]}, \|h^*(t)\|_{C^2[0, T]}\},$$

что справедлива оценка устойчивости

$$\|\alpha - \alpha^*\|_{C[0, H(0, T)]} \leq C[\|h - h^*\|_{C[0, T]} + \|g - g^*\|_{C^2[0, T]}].$$

В третьей главе изучены одномерные обратные задачи определения модулей упругости для анизотропной вязкоупругой среды. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости поставленных задач.

В первом параграфе сформулированы постановка прямой и обратных задач, приведены основные результаты – теоремы однозначной разрешимости и устойчивости обратных задач. Рассматривается система (1)–(3'), (7), (8).

Предметом исследования является **обратная задача** определения модулей упругости $c_{44}(x_3), c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), x_3 > 0$ (именно в этой последовательности они будут определяться), входящих в равенства (1)–(3') посредством формулы (7), (8), если относительно компонент $U_j, j = 1, 3$ решения прямой задачи известна дополнительная информация при $t > 0$

$$U_1(x_3, t, \nu)|_{x_3=+0, \nu=+0} = g_1(t), \quad (19)$$

$$U_3(x_3, t, \nu)|_{x_3=+0, \nu=+0} = g_3(t), \quad (20)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \nu}(x_3, t, \nu)|_{x_3=+0, \nu=+0} = g_2(t), \quad (21)$$

где $g_j(t), j = 1, 2, 3$ – заданные функции.

Введем в рассмотрение новые переменные y, z по формулам

$$y = \psi_1(x_3) := \int_0^{x_3} \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}(\xi)}} d\xi, \quad z = \psi_2(x_3) := \int_0^{x_3} \sqrt{\frac{\rho}{c_{11}(\xi)}} d\xi.$$

Через $\psi_i^{-1}(\cdot), i = 1, 2$, обозначим функцию, обратную к $\psi_i(x_3)$. Пусть

$$T^* := 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{44}(\xi)}} d\xi; \quad T^{**} := 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{11}(\xi)}} d\xi.$$

Для любого T из промежутка $0 < T < \min\{T^*, T^{**}\}$ определим величины

$$\psi_1^{-1}(T/2) \text{ и } \psi_2^{-1}(T/2).$$

Пусть h_0, h_1, X – фиксированные положительные числа, $h_0 < h_1$,

$$X = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{h_1}{\rho}}, \Lambda_1(h_0, h_1, X) = \{c(x_3) \in C^2[0, X] : \|c\|_{C[0, X]} \leq h_1, c(x_3) \geq h_0\}.$$

Теорема 11. Пусть T – фиксированное положительное число из $(0, \min\{T^*, T^{**}\})$. Функция $g_1(t) \in C^2[0, T], g_1(+0) > 0$, $k_1(t) \in C^2[0, T]$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(3'), (7), (8), (19) $c_{44}(x_3) \in C^2[0, X], X \leq \psi_1^{-1}(T/2)$.

Теорема 12. Пусть T, h_0, h_1 – фиксированные положительные числа, $T < \min\{T^*, T^{**}\}$, $h_0 \leq h_1, X_0 = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}$ и функции $c_{44}^{(1)}(x_3), c_{44}^{(2)}(x_3)$, принадлежащие классу $\Lambda_1(h_0, h_1, X)$, являются решениями обратной задачи (1)-(3'), (7), (8), (19) с наборами данных $\{g_1^{(1)}(t), k_1^{(1)}(t)\}, \{g_1^{(2)}(t), k_1^{(2)}(t)\}$ соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C = C(h_0, h_1, M_1, \rho, T)$,

$$M_1 = \max \left\{ \|g_1^{(1)}(t)\|_{C^2[0, T]}, \|k_1^{(1)}(t)\|_{C^2[0, T]}, \|g_1^{(2)}(t)\|_{C^2[0, T]}, \right. \\ \left. \|k_1^{(2)}(t)\|_{C^2[0, T]} \right\},$$

что справедлива оценка устойчивости

$$\|c_{44}^{(1)} - c_{44}^{(2)}\|_{C[0, X_0]} \leq C \left(\|g_1^{(1)} - g_1^{(2)}\|_{C^2[0, T]} + \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_{C^2[0, T]} \right).$$

Введем обозначения $\|\cdot\| (T) = \|\cdot\|_{C[0, T]}, \|\cdot\|_k (T) = \|\cdot\|_{C^k[0, T]}, k = 1, 2, \dots$

Теорема 13. Пусть T – фиксированное число из $(0, \min\{T^*, T^{**}\})$. Функция $g_3(t) \in C^2[0, T], g_3(+0) > 0$, $k_3(t) \in C^2[0, T]$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(3'), (7), (8), (20) $c_{11}(x_3) \in C^2[0, X], X \leq \psi_2^{-1}(T/2)$.

Теорема 14. Пусть T, h_0, h_1 – фиксированные положительные числа, $T < \min\{T^*, T^{**}\}$, $h_0 \leq h_1, X_0 = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}$ и $c_{11}^{(1)}(x_3), c_{11}^{(2)}(x_3)$, принадлежащие классу $\Lambda_1(h_0, h_1, X)$, являются решениями обратной задачи (1)-(3'), (7), (8), (20) с наборами данных $\{g_3^{(1)}(t), k_3^{(2)}(t)\}, \{g_3^{(1)}(t), k_3^{(2)}(t)\}$ соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C^* = C^*(h_0, h_1, M_2, \rho, T)$,

$$M_2 = \max \{ \|g_3^{(1)}(t)\|_2 (T), \|g_3^{(2)}(t)\|_2 (T), \|k_3^{(1)}(t)\|_2 (T), \|k_3^{(2)}(t)\|_2 (T) \},$$

что справедлива оценка устойчивости

$$\|c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}\| (X_0) \leq C^* \left(\|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}\|_2 (T) + \|k_3^{(1)} - k_3^{(2)}\|_2 (T) \right).$$

Теорема 15. Пусть T – фиксированное положительное число, $T <$

$\min\{T^*, T^{**}\}, X = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{h_1}{\rho}}$. Функции $g_2(t) \in C^1[0, T], k_1(t) \in C^2[0, T], g_2(+0) = 0, k_3(t) \equiv 0$. Кроме того, справедливо следующее неравенство:

$$\max [-g'_2(+0), 2g'_2(+0)] < \frac{g_1(+0)}{2\rho[g_1(+0) + g_3(+0)]}.$$

Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(3'), (7), (8), (21) $c_{12}(x_3) \in C[0, X]$.

Теорема 16. Пусть T, h_0, h_1 – фиксированные положительные числа, $T < \min\{T^*, T^{**}\}$, $h_0 \leq h_1, X_0 = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}$, $k_3(t) \equiv 0$ и $c_{12}^{(1)}(x_3), c_{12}^{(2)}(x_3)$, принадлежащие классу $\Lambda_2(h_1, X) = \{c(x_3) \in C[0, X]: \|c\| \leq h_1\}$, являются решениями обратной задачи с наборами данных $\{c_{11}^{(1)}(x_3), c_{44}^{(1)}(x_3), g_3^{(1)}(t), k_1^{(1)}(t)\}, \{c_{11}^{(2)}(x_3), c_{44}^{(2)}(x_3), g_3^{(2)}(t), k_1^{(2)}(t)\}$ соответственно. При этом функции $c_{44}^{(1)}(x_3), c_{44}^{(2)}(x_3)$ из класса $\Lambda_1(h_0, h_1, X)$ являются решениями обратной задачи (1)-(3'), (7), (8), (19), отвечающими информациям $\{g_1^{(1)}(t), k_1^{(1)}(t)\}, \{g_1^{(2)}(t), k_1^{(2)}(t)\}$; функции $c_{11}^{(1)}(x_3), c_{11}^{(2)}(x_3)$ из класса $\Lambda_1(h_0, h_1, X)$ являются решениями обратной задачи (1)-(3'), (7), (8), (20), отвечающими информациям $\{g_3^{(1)}(t), k_3^{(1)}(t)\}, \{g_3^{(2)}(t), k_3^{(2)}(t)\}$ соответственно при $t \in [0, T]$. Тогда найдется такое положительное число $C^{**}(h_0, h_1, M_3, \rho, T)$,

$$M_3 = \max \left\{ \|g_3^{(1)}(t)\|_2(T), \|g_2^{(1)}(t)\|_1(T), \|k_1^{(1)}(t)\|_2(T), \|g_3^{(2)}(t)\|_2(T), \right. \\ \left. \|g_2^{(2)}(t)\|_1(T), \|k_1^{(2)}(t)\|_2(T) \right\},$$

что справедлива оценка устойчивости

$$\|c_{12}^{(1)} - c_{12}^{(2)}\|(X_0) \leq C^{**}(\|c_{44}^{(1)} - c_{44}^{(2)}\|_2(X_0) + \|c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}\|_2(X_0) + \\ + \|g_1^{(1)} - g_1^{(2)}\|_2(T) + \|g_2^{(1)} - g_2^{(2)}\|_1(T) + \|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}\|_2(T) + \\ \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_2(T)).$$

Во втором параграфе определяются коэффициенты, характеризующие упругие свойства среды, c_{44}, c_{11} матрицы модулей упругости. Приводится постановка вспомогательной обратной задачи, которая исследуется на разрешимость. Затем доказывается основной результат о существовании и единственного решения, приводятся оценки устойчивости.

В третьем параграфе изучена задача определения c_{12} при условии, что коэффициенты c_{44}, c_{11} являются уже известными. При исследовании обратной задачи строится фундаментальное решение одного гиперболического оператора с памятью, выводятся свойства этого решения.

В четвертой главе сформулированы необходимые и достаточные условия глобальной однозначной разрешимости задачи определения

многомерных ядер памяти. Данный результат получен в классе функций, аналитических по одним переменным и непрерывно-дифференцируемым — по другим. Используется метод шкал банаховых пространств, который ранее с некоторой модификацией применялся для исследования локальной разрешимости. В комбинации этого метода с методом весовых норм удалось получить разрешимость в глобальном смысле обратных задач определения ядер интегральных операторов свертки. Разработанный подход можно применять для обратных задач, нелинейность в которых носит сверточный характер. Получены оценки устойчивости решения обратных задач.

В первом параграфе изучается многомерная обратная задача определения свёрточного ядра интегрального члена в интегродифференциальном волновом уравнении. Прямую задачу представляет обобщенная начально-краевая задача для этого уравнения с нулевыми начальными данными и граничным условием Неймана в виде дельта-функции Дирака. Для решения обратной задачи в качестве дополнительного условия задаются следы решения прямой задачи на границе области $(x, t) \in \mathbb{R}^{m+1}, z > 0$. Основным результатом параграфа — теорема глобальной однозначной разрешимости обратной задачи в классе функций, непрерывных по временной переменной t и аналитических по пространственным переменным $x \in \mathbb{R}^m$. Для доказательства применяются методы шкал банаховых пространств вещественных аналитических функций действительного переменного и весовых норм в классе непрерывных функций.

Рассматривается задача об определении пары функций $u(x, z, t)$ и $k(x, t)$, удовлетворяющих равенствам для $z > 0$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{zz} - \Delta u &= \int_0^t k(x, \tau) u(x, z, t - \tau) d\tau, (x, t) \\ &\in \mathbb{R}^{m+1}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad u_z|_{z=+0} = \delta'(t) + h(x, t)\theta(t), (x, t) \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad (23)$$

$$u|_{z=+0} = -\delta(t) + f(x, t)\theta(t), (x, t) \in \mathbb{R}^{m+1}. \quad (24)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по переменным $(x_1, x_2, \dots, x_m) = x$; h, f — заданные гладкие функции. Введем в рассмотрение банахово пространство $A_s(r)$, $s > 0$, функций $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, аналитических в окрестности начала координат, для которых справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_s(r) &:= \sup_{|x|<r} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{s^{|\alpha|}}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(x)| < \infty. \\ D^\alpha &:= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \end{aligned}$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \alpha! := (\alpha_1)! \dots (\alpha_m)!.$$

В дальнейшем параметр $r > 0$ будет считаться фиксированным, в то время как параметр s рассматривается как переменный параметр. При этом возникает шкала банаховых пространств $A_s(r), s > 0$. Очевидно следующее свойство: если $\varphi(x) \in A_s(r)$, то $\varphi(x) \in A_{s'}(r)$ для всех $s' \in (0, s)$, следовательно, $A_s(r) \subset A_{s'}(r)$, если $s' \in (0, s)$ и справедливо неравенство

$$\|D^\alpha \varphi\|_{s'}(r) \leq c_\alpha \frac{\|\varphi\|_s(r)}{(s - s')^{|\alpha|}}$$

для любого α с постоянной c_α , которая зависит только от α . Так как параметр r фиксирован, будем в дальнейшем опускать его и использовать $\|\varphi\|_s, A_s$ вместо $\|\varphi\|_s(r)$ и $A_s(r)$.

Пусть

$$D_T = G_T \times \mathbb{R}^m, G_T = \{(z, t) | 0 \leq z \leq t \leq T - z\}, \quad T > 0.$$

Через $C(A_{s_0}; G_T)$ обозначим класс функций, непрерывных по переменным (z, t) в области G_T со значениями в A_{s_0} .

При фиксированных (z, t) норму функции $g(x, z, t)$ в A_{s_0} будем обозначать через $\|g\|_{s_0}(z, t)$. Норма функции g в $C(A_{s_0}; G_T)$ определяется равенством

$$\|g\|_{C(A_{s_0}; G_T)} = \sup_{(z, t) \in G_T} \|g\|_{s_0}(z, t).$$

Пусть $C(A_{s_0}; [0, T])$ — класс непрерывных функций по переменной t со значениями в A_{s_0} .

Будем рассматривать уравнение (22) в более узкой области, чем область D_T , а именно, в области $D_T^\varepsilon = G_T^\varepsilon \times \mathbb{R}^m$, $G_T^\varepsilon = \{(z, t) | 0 \leq z \leq t \leq \frac{T}{1+\varepsilon} - z\}$ при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$.

Через $C_\sigma(A_{s_0}; G_T^\varepsilon)$ обозначим пространство функций, непрерывных по переменным (z, t) в области G_T^ε со значениями в A_{s_0} и порожденное семейством весовых норм для $\sigma \geq 0, 0 < s < s_0$:

$$\|g\|_{C_\sigma(A_s; G_T^\varepsilon)} = \sup_{(z, t) \in G_T^\varepsilon} \|g\|_s(z, t) e^{-\frac{\sigma t}{T-t-z}}.$$

Теорема 17. Пусть $T > 0, s_0 > 0, \varepsilon > 0$ — фиксированные числа и $f(x, +0) = 0$. Кроме того,

$$\max_{t \in [0, T]} \left\{ \|h\|_{s_0}(t), \|f_t\|_{s_0}(t), \frac{1}{4} \|f_{tt}\|_{s_0}(t), \frac{1}{4} \|h_t\|_{s_0}(t) \right\} = R,$$

$R > 0$ — известное число. Тогда для любых a и s , таких, что $a \in (0, T/s_0)$, $s \in (0, s_0)$ в области $\Gamma_{sT}^\varepsilon = D_T^\varepsilon \cap \{(x, z, t) | 0 \leq t < \frac{1}{1+\varepsilon} a(s_0 - s)\}$ существует единственное решение системы уравнений (22)–(24), для которого

$$(u(x, z, t), u_t(x, z, t)) \in C(A_s; P_{sT}^\varepsilon),$$

$$k(x, t) \in C \left(A_{s_0}; \left[0, \frac{1}{1+\varepsilon} a(s_0 - s) \right) \right),$$

кроме того,

$$\| u - u_0 \|_{C(A_s; P_{sT}^\varepsilon)} \leq \tilde{R}, \| u_t - u_{t0} \|_{C(A_s; P_{sT}^\varepsilon)} \leq \frac{\tilde{R}}{s_0 - s},$$

$$\| k - k_0 \|_{C(A_s; P_{sT}^\varepsilon)} \leq \frac{\tilde{R}}{(s_0 - s)^2},$$

$$P_{sT}^\varepsilon = G_T^\varepsilon \cap \left\{ (z, t) \mid 0 \leq z \leq t < \frac{1}{1+\varepsilon} a(s_0 - s) \right\}, \quad \text{где } u_0 = 0, \quad u_{t0}(x, z, t) = \frac{1}{2} f_t(x, t - z) - \frac{1}{2} h(x, t - z), k_0(x, t) = 2f_{tt}(x, t) + 2h_t(x, t), \tilde{R} = Re^{\sigma/\varepsilon}, \sigma > 0.$$

Рассмотрим множество Γ всех пар функций (f, h) являющихся элементами $C(A_{s_0}; [0, T])$, $s_0 > 0$, для которых выполнены условия теоремы 17 с фиксированными R, T, s_0, ε . Имеет место следующая теорема устойчивости:

Теорема 18. Пусть $(f, h) \in \Gamma, (\bar{f}, \bar{h}) \in \Gamma$. Тогда для соответствующих решений $(u, k, u_t), (\bar{u}, \bar{k}, \bar{u}_t)$ справедливы оценки

$$\| u - \bar{u} \|_s \leq cM, \| k - \bar{k} \|_s \leq \frac{cM}{(s_0 - s)^2},$$

$$\| v - \bar{v} \|_s \leq \frac{cM}{s_0 - s}, (z, t) \in P_{sT}^\varepsilon, 0 < s < s_0,$$

где

$$M = \max \left[\max \| h \| - \| \bar{h} \|_{s_0}(t), \max \| f_t \| - \| \bar{f}_t \|_{s_0}(t), \right.$$

$$\left. \max \| h_t \| - \| \bar{h}_t \|_{s_0}(t), \max \| f_{tt} \| - \| \bar{f}_{tt} \|_{s_0}(t) \right], t \in [0, T],$$

постоянная c зависит от $R, T, s_0, \sigma, \varepsilon$.

Во **втором параграфе** получена глобальная однозначная разрешимость двумерной обратной задачи определения ядра для системы уравнений вязкоупругости (1)–(3) для случая когда $k = k(x_2, t)$. С помощью техники, разработанной в первой главе, задача сводится к замкнутой системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Далее, используя рассуждения из первого параграфа, доказывается теорема глобальной однозначной разрешимости.

Пятая глава посвящена многомерным обратным задачам одновременного определения коэффициента и сверточного ядра уравнения изотропной вязкоупругости для вертикально-неоднородной среды. Применяется асимптотический подход, а именно, используются принцип линеаризации и гипотеза о линейной зависимости от пространственной координаты искомых коэффициента и ядра.

В первом параграфе пятой главы представлен результат по изучению квазидвумерных обратных задач вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородных средах. Одновременно определяются две величины – двумерное ядро и двумерная скорость распространения поперечных упругих

волн. Здесь используется подход, основанный на сведении двумерной задачи к серии одномерных обратных задач, для которых доказаны теоремы однозначной разрешимости в глобальном смысле и получены оценки устойчивости обратных задач. Таким образом, построен конструктивный алгоритм, позволяющий корректно определять первые асимптотики коэффициента и ядра.

Для $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, x_3 > 0$ рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \int_0^t k(x_1, t - \tau) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, \tau) \right) d\tau, \quad (25)$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (26)$$

$$a(x_2, 0) \left[\frac{\partial u}{\partial x_3}(x, t) + \int_0^t k(x_1, t - \tau) \frac{\partial u}{\partial x_3}(x, \tau) d\tau \right] \Big|_{x_3=+0} = -\delta(x_1) \delta(x_2) \delta'(t), \quad (27)$$

$u(x, t)$ – функция смещения, $a(x_2, x_3)$ – коэффициент, описывающий скорость распространения волн в среде.

Обратная задача: определить коэффициент $a(x_2, x_3)$ и ядро интегрального оператора $k(x_1, t), t > 0$, входящих в (25), если относительно решения задачи (25)–(27) известна дополнительная информация

$$F_{x_1, x_2}[u](x_3, t, \nu, \lambda)|_{x_3=+0} = g(t, \nu, \lambda), \quad t > 0, \quad \nu, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

$g(t, \nu, \lambda)$ – заданная функция, $F_{x_1, x_2}[u](x_3, t, \nu, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i(\nu x_1 + \lambda x_2)} dx_1 dx_2$ – образ Фурье функции $u(x, t)$ по переменным x_1, x_2 .

Предполагается, что $k(x_1, t), a(x_2, x_3)$ слабо зависят от горизонтальных переменных x_1, x_2 соответственно:

$$\begin{aligned} a(x_2, x_3) &= a_0(x_3) + \varepsilon x_2 a_1(x_3) + O(\varepsilon^2), \\ k(x_1, t) &= k_0(t) + \varepsilon x_1 k_1(t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (29)$$

где ε – малый параметр.

В равенствах (29) будем считать $a_0(x_3)$ заданной величиной, причем $a_0(x_3) \geq m > 0$.

Строится метод нахождения $k_0(t)$ и $a_1(x_3), k_1(t)$ с точностью до величины $O(\varepsilon^2)$. Для этого достаточно задать функцию $g(t, \nu, \lambda)$ для различных ненулевых наборов значений преобразования $(\nu_j, \lambda_j), j = 1, 2$.

Решение прямой задачи (25)-(27) ищется в виде ряда по степеням ε

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x, t). \quad (30)$$

Тогда

$$F_{x_1, x_2}^{-1}[u](x_3, t, v, \lambda)|_{x_3=+0} := U(x_1, x_2, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j U_j(x_1, x_2, t).$$

Нетрудно проверить, что u_j (следовательно и U_j) – четные по совокупности x_1, x_2 при четных j и нечетные – при нечетных j . Тем самым, по известной функции $U(x_1, x_2, t)$ можно найти $U_0(x_1, x_2, t)$ и $U_1(x_1, x_2, t)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Так как метод предполагает определение $a_1(x_3), k_0(t), k_1(t)$ с точностью до поправки порядка $O(\varepsilon^2)$, то в этом случае, подставляя (29), (30) в (1), получаем две обратные одномерные задачи последовательного определения $k_0(t)$ и $a_1(x_3), k_1(t)$:

(I) Задача определения функций $k_0(t)$ и $u_0(x, t)$ из равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= a_0(x_3) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a_0(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \right) \\ &+ \int_0^t k_0(t - \tau) \left(a_0(x_3) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a_0(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \right) \right) (x, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$u_0|_{t < 0} \equiv 0,$$

$$a_0(+0) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_3} (x, t) + \int_0^t k_0(t - \tau) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} (x, \tau) d\tau \right] \Big|_{x_3=+0} = -\delta(x_1) \delta(x_2) \delta'(t),$$

$$F_{x_1, x_2}[u_0](x_3, t, v, \lambda)|_{x_3=+0} = F_{x_1, x_2}[U_0](t, v, \lambda) := g_0(t, v, \lambda), \quad t > 0.$$

(II) Задача определения функций $a_1(x_3), k_1(t)$ и $u_1(x, t)$ из равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= L[k_0, \frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_2 a_1(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} + a_0(x_3) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2 a_1(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) \\ &+ a_0(x_3) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right] + x_2 a_1(x_3) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}] \\ &+ \int_0^t x_1 k_1(\tau) \left(a_0(x_3) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a_0(x_3) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \right) \right) (x, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$u_1|_{t < 0} \equiv 0,$$

$$L \left[k_0, x_2 a_1(+0) \frac{\partial u_0}{\partial x_3} + a_0(+0) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right] + a_0(+0) x_1 \int_0^t k_1(t-\tau) \frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x, \tau) d\tau \Big|_{x_3=+0} = 0,$$

$$F_{x_1, x_2}[u_1](x_3, t, \nu, \lambda)|_{x_3=+0} = F_{x_1, x_2}[U_1](t, \nu, \lambda) := g_1(t, \nu, \lambda), \quad t > 0.$$

Справедливы следующие теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости обратных задач (I), (II).

Теорема 19. Пусть для ненулевых фиксированных параметров ν, λ функция $g_{00}(t, \nu, \lambda) \in C^3[0, T]$, $a_0(x_3) \in C^4[0, \psi^{-1}(T/2)]$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (I) $k_0(t) \in C^3[0, T]$ при любом положительном $0 < T < T^*$.

Теорема 20. Пусть выполнены условия теоремы 19 и $g_1(t, \nu, \lambda) \in C^2[0, T]$ при фиксированных ненулевых (ν, λ) , и $g_1(0, \nu, \lambda) \equiv 0$, $g'_0(0, \nu, \lambda) \equiv \frac{i\lambda a_1(0)}{2a_0(0)}$, $a'_0(x_3) \leq 0$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (II) $a_1(x_3) \in C^1\left[0, \psi^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)\right]$, $k_1(t) \in C[0, T]$ для любого положительного $T < T^*$.

Во втором параграфе поставлена и решена линеаризованная многомерная задача определения сверточного ядра уравнения. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи, доказана теорема устойчивости и теорема о сходимости регуляризованного семейства корректных задач к исходной некорректной задаче. В качестве прямой задачи рассматривается задача (1)–(3).

Предполагаем, что ядро $k(x_2, t)$ можно представить в виде:

$$k(x_2, t) = k_0(x_2, t) + k_1(x_2, t),$$

где функция $k_0(x_2, t)$ является заданной, а $k_1(x_2, t)$ – неизвестная, малая по абсолютной величине, добавка. Формально вводится параметр ε :

$$k(x_2, t) = k_0(x_2, t) + \varepsilon k_1(x_2, t), \quad (31)$$

Положим $k_0(x_2, t) \equiv k_0(t)$.

В предположении (30) мы сводим исходную задачу к прямой задаче определения $u_0(x, t)$ и к обратной задаче определения $u_1(x, t) \equiv u_1(x_2, x_3, t)$ и $k_1(x_2, t)$. Первая задача исследована автором в 2008 году. Были доказаны теоремы однозначной разрешимости задачи. Вторая задача (обратная) представляет собой задачу для линейной системы интегро-дифференциальных уравнений, к которой применяется преобразование Фурье.

Обратная задача заключается в определении ядра $k_1(x_2, t)$, $t > 0$, входящего в (1) посредством представления (31), если относительно решения прямой линеаризованной задачи u_1 известна дополнительная информация

$$u_1|_{x_3=+0} = g(x_2, t),$$

$g(x_2, t)$ – заданная функция.

Будем считать, что $\tilde{k}_1(v, t) = F_{x_2}[k_1](v, t) \in \tilde{\Lambda}(\lambda, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{k}_1(v, t) \in C_t^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ и для любого фиксированного $t \in [0, T]$ $\text{supp } \tilde{k}_1(v, t) \subset [-\lambda, \lambda]$. Соответственно, $k_1(x_2, t) \in \Lambda(\lambda, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{k}_1(v, t) = F_{x_2}[k_1](v, t) \in \tilde{\Lambda}(\lambda, T)$.

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы однозначной глобальной разрешимости и устойчивости обратной задачи определения $\tilde{k}_1(v, t)$.

Теорема 21. Пусть λ, T – фиксированные положительные числа, $T < T^*$. Для существования и единственности решения обратной задачи $k_1(x_2, t) \in \Lambda(\lambda, T)$ необходимо и достаточно, чтобы $k_0(t) \in C^3[0, T]$, $\tilde{g}(v, t) \in C_t^2(\mathbb{R} \times [0, T])$, $\tilde{g}(v, 0) = 0$, и для любого фиксированного $t \in [0, T]$ $\text{supp } \tilde{g}(v, t) \subset [-\lambda, \lambda]$.

Теорема 22 Пусть $k_1^{(1)}(x_2, t), k_1^{(2)}(x_2, t) \in \Lambda(\lambda, T)$ – решения обратной задачи, отвечающие информации $g^{(1)}(x_2, t), g^{(2)}(x_2, t)$ соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 21 имеет оценка устойчивости

$$\int_R \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_{C[0, T]}^2 dx_2 \leq C \int_{-\lambda}^{\lambda} \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|_{C^2[0, T]}^2 dv.$$

где C – некоторая константа, зависящая от величин λ, T и значений функций $\mu(x_3), \rho(x_3), k_0(t)$.

Пусть существует решение $k_1(x_2, t) \in C_t^1(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}))$, отвечающее информации $\tilde{g}(v, t)$.

Определим множество функций $\tilde{g}_\lambda(v, t)$ по правилу:

$$\tilde{g}_\lambda(v, t) := \theta(\lambda - |v|)\tilde{g}(v, t).$$

Выделим семейство обратных задач: определить функцию $k_1^\lambda(x_2, t) = F_v^{-1}[\tilde{k}^\lambda(v, t)]$ по информации $\tilde{g}_\lambda(v, t)$.

Теорема 23. Данное семейство является регуляризованным, то есть:

- 1) для каждого $\lambda > 0$ обратная задача корректна;
- 2) если данные таковы, что решение исходной (корректной) задачи существует, то при $\lambda \rightarrow \infty$ последовательность решений семейства задач с этими данными стремится к решению исходной (некорректной) задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследований, представленных в диссертационной работе, были получены следующие результаты:

1. разработан метод определения одномерного скалярного ядра уравнения вязкоупругости и термовязкоупругости в полупространстве $\mathbb{R}_+^3$ для сосредоточенных источников возмущений в вертикально-неоднородной среде, получены условия глобальной однозначной разрешимости, показана непрерывная зависимость решения обратной задачи от плотности, упругих параметров Ламэ и дополнительной информации о решении прямой задачи.

2. доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости одномерного матричного ядра уравнения вязкоупругости для источника типа направленного взрыва в полупространстве $\mathbb{R}_+^3$, получены оценки устойчивости решений обратной задачи;

3. разработан подход, основанный на комбинации метода шкал банаховых пространств и метода весовых норм, позволяющий получить теоремы глобальной однозначной разрешимости многомерных ядер для динамических уравнений с памятью в классе функций, аналитических по пространственной переменной и непрерывных по временной;

4. получены условия глобальной однозначной разрешимости и устойчивости квазидвумерной задачи одновременного определения первых асимптотик ядра и скорости распространения поперечных упругих волн в слабо горизонтально-неоднородной среде;

5. доказаны теоремы существования и единственности многомерной линейаризованной задачи определения ядра, получены оценки устойчивости;

6. определены условия однозначной разрешимости и устойчивости одномерной задачи определения модулей упругости в системе уравнений анизотропной вязкоупругости с известным матричным ядром памяти.

7. исследована разрешимость и устойчивость обратной задачи коэффициента теплового расширения несвязной термовязкоупругости при известной функции ядра памяти.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF
MATHEMATICS**

**BUKHARA STATE UNIVERSITY AND
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER**

TOTIEVA ZHANNA DMITRIEVNA

**GLOBAL SOLVABILITY
OF INVERSE PROBLEMS FOR DYNAMIC EQUATIONS OF
MEMORY TYPE OF THE ELASTICITY THEORY**

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

**DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL
AND MATHEMATICAL SCIENCES**

BUKHARA – 2023

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2023.2.DSc/FM218.

Dissertation has been prepared at the Bukhara State University and the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website <http://kengash.mathinst.uz> and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal <http://www.ziynet.uz>.

Scientific consultant:

Durdiev Durdimurod Kalandarovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor

Official opponents:

Ashurov Ravshan Radjabovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor

Sabitov Kamil Basirovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor

Fayazov Kudratillo Sadridinovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor

Leading organization:

Belgorod State National Research University (Russia)

Defense will take place on “ 12 ” September at 16:00 the meeting of Scientific council number DSc.02130.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) - 207-9140). E-mail: uzbmash@umail.uz, Website: www.mathiflst.uz.

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered No. 166) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) - 207-91-40. E-mail: uzbmash@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Abstract of dissertation sent out on “ 24 ” August 2023 year.
(mailing report № 2 on “ 24 ” August 2023 year).

U.A.Rozikov

Chair of Scientific Council on award
scientific degrees, DSc., professor

J.K.Adashev

Scientific secretary of Scientific Council on
award of scientific degrees, DSc., senior
researcher

A.Azamov

Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, DSc., academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of the research work is to construct methods for studying the global solvability of one-dimensional and multidimensional inverse problems for dynamic equations of memory type of the elasticity theory with concentrated sources of disturbances, as well as in the study of the stability of the solution of the inverse problems.

The subject of the study. Initial-boundary value problems for dynamical equations of memory type of the elasticity theory and nonlinear Volterra integral equations of the second kind..

Scientific novelty of the research work is as follows:

the conditions of global unique solvability and stability estimation of inverse problems of determining one-dimensional scalar and matrix kernels for a system of equations of isotropic viscoelasticity and thermoviscoelasticity in the half-space for concentrated sources of disturbances and a source of the explosive type are obtained; new approach is developed based on the transition to the kernel resolvent and then simultaneous determination of the kernel, resolvent and displacement function of the medium from the system of nonlinear integral equations;

the global unique solvability of multidimensional kernel determination problems for dynamic equations of memory type in the class of functions analytic in spatial variable and continuous in time is proved;

the conditions of global unique solvability of the quasi-two-dimensional problems of simultaneous determination of the first asymptotic of the kernel and the velocity in a weakly horizontally inhomogeneous viscoelastic medium are obtained;

the existence and uniqueness of a multidimensional linearized kernel determination problem are proved and stability estimates are obtained;

the conditions of unique solvability and stability of the one-dimensional problem of determining elastic modulus in a system of anisotropic viscoelasticity equations with a known matrix kernel are obtained.

Implementation of the research results. Based on the results obtained for dynamic equations of memory type of the elastic theory:

research techniques of the global solvability of inverse problems for a system of viscoelasticity equations were used in the foreign comprehensive study "Networks (carpets), graphs and linear groups". "Investigation of nonlinear operators, differential and integral equations and their applications" and in the foreign project of a grant on the topic "Mathematical modeling of landslips and viscoelastic media with horizontal inhomogeneities" No. 23-27-00264 (reference of the of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «North Ossetian State University named after K.L.Khetagurov» number 1493 dated May 29, 2023, Russia). The application of this scientific result made it possible to study the solvability of a two-dimensional inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type and to develop numerical methods for solving inverse problems for viscoelastic media with horizontal

inhomogeneities;

the theorems on the unique global solvability of multidimensional inverse problems were used within the framework of the State Scientific and Technical Program of the fundamental project OT - F4 - 02 "Thermodynamics of mathematical physics models with an infinite set of states" (reference of Bukhara State University No. 04/01/1344 dated June 02, 2023). The application of scientific results made it possible to simultaneously determine the first asymptotics of the core of a quasi-two-dimensional problem and obtain solvability conditions for them in a global sense; determine the propagation velocities of elastic waves in a weak horizontal inhomogeneous medium; obtain conditions for unique solvability and stability of a one-dimensional problem of determining elastic modulus in a system of equations of anisotropic viscoelasticity with a known matrix memory kernel;

the technique of reducing inverse problems of determining kernels for the viscoelasticity equation with variable coefficients in half-space to a system of nonlinear integral equations has been used in paper of foreign scientific journals (Mathematical Notes, 2015, 97(6), 867–877; Theoretical and Mathematical Physics, 2018, 195(3), 491-506; Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2018, 11(6), 753-763). The application of this technique made it possible to obtain global solvability of inverse problems of determining kernels for the integro-differential equation of acoustics and for the viscoelasticity equation in a porous medium.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, five chapters, conclusion and titles of used literature. The full volume of the thesis is 190 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'XATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (1 часть; part 1)

1. Durdiev D.K., Totieva Z.D. Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations, Springer Nature Singapore Pte Ltd, Series title «Infosys Science Foundation Series in Mathematical Sciences», 2023, P. 368.
2. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. – 2013. –Т. 16, No 2. –С. 72-82. (3. Scopus, IF=0.42).
3. Тотиева Ж.Д. О фундаментальном решении задачи Коши для одного гиперболического оператора // Владикавказский математический журнал. – 2012. –Т.14, No 2. –С. 45-49. (3. Scopus, IF=0.28).
4. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавказский математический журнал. – 2015. – Т. 17. –No 4. –С. 18-43. (3. Scopus, IF=0.28).
5. Тотиева Ж.Д. Многомерная задача об определении функции плотности для системы уравнений вязкоупругости //Сибирские электронные математические известия. –2016. –Т. 13. –С. 635-644. (3. Scopus, IF=0.42).
6. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сибирский математический журнал. – 2017. – Т. 58. –No 3. –С. 553-572. (3. Scopus, IF=0.4).
7. Тотиева Ж.Д. Задача об определении коэффициента теплового расширения уравнения термовязкоупругости // Сиб. электрон. матем. изв. – 2017. – Т. 14. –С. 1108-1119. (3. Scopus, IF=0.42).
8. Тотиева Ж.Д., Дурдиев Д. К. Задача об определении одномерного ядра уравнения термовязкоупругости // Математические заметки. – 2018. –Т. 103, No 1. –С. 129-146. (3. Scopus, IF=0.49).
9. Durdiev D.K., Totieva Zh.D. The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. –2018. –V.41, No 17. –P. 8019-8032. (3. Scopus, IF=0.63).
10. Totieva Zh.D. The problem of determining the piezoelectric module of electroviscoelasticity equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2018. –Vol. 44, No. 16. –P. 6409-6421. (3. Scopus, IF=0.63).
11. Durdiev U.D., Totieva Zh.D. A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Math. Methods of the Applied Sciences. –2019. –V. 42, Issue 18. –P. 7440-7451. (3. Scopus, IF=0.63).
12. Тотиева Ж.Д. К вопросу исследования задачи определения матричного ядра системы уравнений анизотропной вязкоупругости // Владикавказский математический журнал. –2019. –Т. 21, No 2. –С. 58–66. (3. Scopus, IF=0.28).

13. Тотиева Ж.Д. Одномерные обратные коэффициентные задачи анизотропной вязкоупругости // Сибирские электрон. матем. изв. –2019. –Т. 16. –С. 786-811. (3. Scopus, IF=0.42).

14. Тотиева Ж.Д. Определение ядра уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде // Сибирский математический журнал. – 2020. –Т. 61, No 2. –С. 453-475. (3. Scopus, IF=0.4).

15. Durdiev D.K., Totieva Zh.D. Inverse problem for a second-order hyperbolic integro-differential equation with variable coefficients for lower derivatives // Siberian Electronical Mathematical Reports. –2020. –V. 17. –С. 1106-1127. (3. Scopus, IF=0.42).

16. Durdiev D.K., Totieva Zh.D. The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. –2020. –V. 28, No 1. –P. 43-52. (3. Scopus, IF=0.43).

17. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью // Сиб. матем. журн. –2021. –Т. 62, No 2. –С. 269-285. (3. Scopus, IF=0.4).

18. Тотиева Ж.Д. Линеаризованная двумерная обратная задача определения ядра уравнения вязкоупругости // Владикавказский математический журнал. –2021. –Т. 23, No 2. –С. 87-103. (3. Scopus, IF=0.28)

19. Ахматов З.А., Тотиева Ж.Д. Квазидвумерная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде с памятью // Владикавказский математический журнал. – 2021. –Т. 23, No 4. –С. 15-27. (3. Scopus, IF=0.28).

20. Totieva Zh.D. A global solvability of a two-dimensional kernel determination problem for a viscoelasticity equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. –2022. –Vol. 45, No 12. –P. 7555-7575. (3. Scopus, IF=0.63).

21. Тотиева Ж.Д. Двумерная коэффициентная обратная задача для уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде // Теоретическая и математическая физика. –2022. –Т. 213, No 2. –С. 193-213. (3. Scopus, IF=0.32).

22. Durdiev D.K., Totieva Z.D. Determination of Non-Stationary Potential Analytical with Respect to Spatial Variables // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2022. –Т. 15, No 5. –С. 565-576. (3. Scopus, IF=0.3).

23. Durdiev D.K., Totieva Z.D. Determination of a Non-Stationary Adsorption Coefficient Analytical in Part of Spatial Variables // Siberian Advances in Mathematics. –2023. –Vol. 33, No 1. –P. 1-14. (3. Scopus, IF=0.19).

II bo‘lim (II часть; II Part)

24. Туаева Ж.Д. Многомерная математическая модель сейсмики с памятью. Сборник докладов VI Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». –Владикавказ, 62

2008. –С. 297-306.

25. Тотиева Ж.Д. Исследование прямой задачи в первом приближении для системы дифференциальных уравнений упругости с памятью. Материалы международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». –Владикавказ, 2010. –С. 235-236.

26. Тотиева Ж.Д. Задача определения функции плотности для системы уравнений вязкоупругости. Материалы международной научной конференции «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа». –Бухара, 2015. –С. 271-273.

27. Тотиева Ж.Д. Об одной обратной задаче для уравнения электровязкоупругости. Материалы международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». –Владикавказ, 2017. –С. 119-122.

28. Дурдиев У.Д., Тотиева Ж.Д. Численное решение обратной задачи определения ядра уравнения вязкоупругости. Тезисы докладов Всероссийской конференции "Современные методы в теории обратных задач и смежные вопросы". –Теберда, 20-23 сентября 2017, –С. 31-33.

29. Тотиева Ж.Д. Об одной обратной задаче для уравнения термовязкоупругости. Материалы Всероссийской конференции «Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования». –Владикавказ, 2017. –С. 83-85.

30. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. Определение одномерного ядра уравнения вязкоупругости с источником типа взрыва. труды XIX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018): в 2 т.– Таганрог, 2018. – С. 99-104.

31. Тотиева Ж.Д. Введение в теорию обратных задач // Математический форум (Итоги науки. Юг России). – 2018. – Т. 12. – С. 319-344.

32. Durdiev D.K., Totieva Z.D. The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type. Abstracts of the VI International Scientific Conference “Modern Problems of the Applied Mathematics and Information Technology”. –Tashkent, 2018. –P. 192-193.

33. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. Определение матричного ядра системы уравнений вязкоупругости. Материалы V Международной научной конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». –Нальчик, 2018. –С. 71-72.

34. Durdiev U.D., Totieva Z.D A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-diffeerential hyperbolic equation. Сборник тезисов докладов XV Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». –Владикавказ, 2019. –С. 119-122.

35. Тотиева Ж.Д. Обратная задача системы уравнений вязкоупругости

для слабо горизонтально-неоднородной среды. Сборник тезисов докладов XV Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». –Владикавказ, 2019. – С. 51-153.

36. Ахматов З.А., Тотиева Ж.Д. Квазидвумерная обратная задача для уравнения с памятью. Сборник тезисов докладов XVI Международной конференции “Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения”. – Владикавказ, 2021. –С. 66-67.

37. Тотиева Ж.Д. A Global Solvability of a Two-Dimensional Kernel Determination Problem for a Viscoelasticity Equation. Сборник тезисов докладов XVI Международной конференции “Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения”. –Владикавказ, 2021. –С. 124-125.

38. Тотиева Ж.Д. A Global Solvability of a Multidimensional Kernel Determination Problem for a Viscoelasticity Equation. Сборник материалов международной конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы». –Белгород, 25-29 октября 2021. –С. 338.

39. Ахматов З.А., Тотиева Ж.Д. Коэффициентная обратная задача для волнового уравнения с памятью для слабо горизонтально-неоднородной среды. Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа». –Бухара, 2021. –С. 200-202.

40. Ахматов З.А., Тотиева Ж.Д. Двумерная задача определения скорости распространения волн для уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде. Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. –Владимир, 2022. –С. 86-87.

41. Тотиева Ж.Д. Квазидвумерная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения вязкоупругости. Материалы Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа-2022», том 2. –Уфа, 2022. –С. 114-115.

42. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. Determination of non-stationary adsorption coefficient analytical in part of spatial variables. «Современные методы теории краевых задач»: материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXXIII». –Воронеж, 2022. – С. 291-293.

Avtoreferat « _____ » jurnali tahririyatida
tahrirdan o'tkazilib, o'zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o'zaro
muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:



9338

Bichimi: 84x60 ¹/₁₆. «Times New Roman» garniturası.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog'i: 3,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 49/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko'chasi, 83-uy.