**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

XASANOV JAMSHID OZODOVICH

IKKI KOMPONENTALI MUHITLARDA NODIVERGENT KROSS-DIFFUZIYA MASALALARINI SONLI MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2023

UDK: 519.957

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

XASANOV JAMSHID OZODOVICH

IKKI KOMPONENTALI MUHITLARDA NODIVERGENT KROSS-DIFFUZIYA MASALALARINI SONLI MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Toshkent – 2023

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.2.PhD/FM902 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Urganch davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz) va “Ziyonet” Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Aripov Mersaid Mirsiddiqovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Uteuliev Nietboy Uteulievich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Xaydarov Abdugappar fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Qarshi davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning “___”________ 2023-yil soat _____dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4- uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24.

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil “___”___________ kuni tarqatildi.
(2023-yil “____”___________dagi ________ raqamli reyestr bayonnomasi).

B.F.Abduraximov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash raisi o‘rinbosari, f.-m.f.d., professor

Z.R.Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.

A.S.Matyakubov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash huzuridagi ilmiy seminar
raisi, f.-m.f.d., dotsent

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Bugungi kunda jahon miqyosida diffuziya jarayonini ifodalovchi tenglama va tenglamalar sistemalariga oid tadqiqotlar dolzarb hamda zarur hisoblanib, fan-texnikaning ko‘plab sohalariga, xususan, mexanika, fizika, texnologiya, ekologiya, biofizika, biologiya, tibbiyot va boshqa turli sohalariga keng tatbiq etilmoqda. Ularni turli xil murakkab matematik tenglamalar va tenglamalar sistemasi yordamida ifodalab matematik modellarini qurish mumkinligi olimlarimiz tomonidan keltirib o‘tilgan. Jarayonlarning ko‘pchiligi nochiziqli parabolik tipdagi xususiy hosilali nochiziqli differensial tenglamalar va tenglamalar sistemalari yordamida ifodalalanadi hamda tuz-chang ko‘chishi jarayonlari, issiqlik tarqalishi jarayonlari, g‘ovak tuproqdagi filtrlash, mayda qon tomirlarida qonning harakatlanishi, chiqindilarning bug‘lanib tarqalishi, biologik populyatsiyaning o‘sishi va ko‘chishi kabi jarayonlarning tadqiqot obyekti hisoblanadi. Shu sababli ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya jarayonlarining nochiziqli matematik modellarini tadqiq etish, samarali sonli yechish sxemalari va algoritmlarini qurish hamda ularning dasturiy ta’minotini yaratish amaliy matematikaning muhim vazifalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda butun dunyoda nodivergent parabolik tipdagi tenglama va tenglamalar sistemalari bilan tavsiflanuvchi kross-diffuziya jarayonlarning matematik modellari keng tadqiq etilmoqda. Bunga asosiy sabablardan biri sifatida yuqorida ta’kidlab o‘tilgan jarayonlar va boshqa ko‘plab jarayonlarni nodivergent tenglama hamda tenglamalar sistemalari orqali yanada aniqroq tasvirlashga erishish mumkinligi sababli, bu jarayonlarning matematik modellari keng tadqiq etilmoqda. Bunday kross-diffuziya jarayonlarining matematik modellari nochiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik, gaz va suyuqliklar filtratsiyasi, biologik populyatsiya jarayonlari va boshqa ko‘plab diffuziya koeffitsiyentlari o‘zaro bog‘liq bo‘lgan jarayonlarni ifodalashda keng qo‘llanib kelinmoqda. Shu sababli ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya jarayonlarining nochiziqli matematik modellarini sifat xossalarini tadqiq etish orqali sonli yechish sxemalari va algoritmlarini qurish hamda ularning dasturiy ta’minotini yaratish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan kimyoviy, seysmologik, biologik va biofizik jarayonlarni matematik modellashtirish, sonli usullarini ishlab chiqish kabi dolzarb yo‘nalishlariga katta e’tibor qaratib kelinmoqda. Bu borada atrof-muhitda tuz-chang ko‘chishi, mexanikada g‘ovak tuproqdagi filtrlash, tibbiyotda mayda qon tomirlarida qonning harakatlanishi, issiqlik tarqalishi, biologik populyatsiya kabi jarayonlarni matematik modellashtirish, nochiziqli matematik modellarning sifat xossalarini aniqlash va sonli-analitik yechish usullarini ishlab chiqish bo‘yicha salmoqli natijalarga erishildi. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”[1] kabi ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish vazifalari belgilab berildi. Ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya jarayonlarining nochiziqli matematik modellarining sifat xossalarini tadqiq qilish va amaliyotga tadbiq qilishda: manba hamda o‘zgaruvchan zichlikka ega va ega bo‘lmagan hollarda nodivergent kross-diffuziya jarayonini ifodalovchi tenglamalar sistemasining bir hamda ko‘p o‘lchovli hollarda avtomodel yechimlar asimptotikasining bosh hadini topish, yechim baholarini aniqlash, chiziqsiz jarayonlarning matematik modellarini o‘rganishga yordam beruvchi amaliy dasturlar majmuini yaratish muhim ahamiyatga ega. Bu esa qaralayotgan dissertatsiya mavzusining dolzarbligini izohlaydi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”, 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-sonli “2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmonlari, 2017-yil 17-fevraldagi PQ-2789-sonli “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2018-yil 27-apreldagi PQ-3682-sonli “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-sonli “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Dissertatsiya O‘zbekiston Respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Parabolik tipdagi nodivergent nochiziqli tenglamani o‘rganish va yechimlari xossalarini tadqiq etish Fridman hamda Makleod tomonidan boshlangan. Keyinchalik Deng W., Li Y., Xie Ch., Lu H., Duan Z., Zhou L., Wang M., Wei Y., Sun Y., Shi Y., Wu M., Huiling Li, Yang Zhang, Koichi Anadaa, Juntang Ding, Shengjia Li va boshqalar bu yo‘nalishda maktabni davom ettirishdi. Ilmiy tadqiqotlarida asosiy e’tibor global yechimning mavjudligi, chekli vaqtda chegaralanmagan yechim xossalarini o‘rganishga qaratilgan edi. Bunga misol А.А.Самарский, А.С.Калашников, В.А.Галактионов, А.П.Михайлов, Б.И.Баренблатт, J.L.Lions, Daniela Giachetti, Pan Zheng, J.Vazgues, Ansgar Jüngel, L.Rossi, Juntang Dinglarni ishlarini misol qilishimiz mumkin. Ulardan tashqari Wiegner M., Winkler M., Gage E., Angenent S., Jin Ch.,

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli qarori (Manba: https://lex.uz/docs/4807552).

Yin J., Yunzhu Gao, Qiu Meng, Yingjia Guo, Zhi-wen Duan, Li Zhou tomonidan yechimlarning asimptotikasi, uning chegaralanmaganligi, chekli tezlikda tarqalish effekti va issiqlik tarqalishining fazoviy lokallashishi, manba yoki yutilishga ega nochiziqli muhitlarda ta’sirlanish jarayonining chekli vaqtda mavjud bo‘lishi kabilar aniqlandi.

O‘zbekistonda nochiziqli diffuziya masalalari bilan N.Muhitdinov, B.M.Xujayarov, A.S.Rasulov, M.Aripov, N.Ravshanov, J.Toxirov, Korteweg-de Vries tenglamalar uchun turli masalalar bilan O.Hasanov, G.O‘rozboyev, B.Babajanov va ularning shogirdlari shug‘ullanishgan. Ularning asosiy ishlari divergent tenglama va tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadigan nochiziqli diffuziya masalasi yechimlari xossalarini sonli o‘rganishga bag‘ishlanadi hamda bu metodlarni filtratsiya, diffuziya, issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayonlarini modellashtirishga qo‘llash mumkin. Nodivergent tenglama va tenglamalar sistemasiga oid ilmiy ishlar bilan M.Aripov, A.A.Matyakubov, Sh.Sadullayeva, D.Muxammadiyeva, Z.R.Rahmanov, J.Raimbekov, M.Xojimurodovalar shug‘ullanishgan. Ular tomonidan avtomodel tahlil asosida tabiatshunoslikning turli sohalarida uchraydigan jarayonlarni ifodalovchi nochiziqli masalalar yechimlarining sifat xossalari tadqiq etildi va sonli natijalar olib tahlillar keltirildi.

O‘zbekistonda turli xil nochiziqli diffuzion, filtratsiya, issiqliq tarqalish jarayonlarini ifodalaydigan matematik modellarning yangi xossalarini tadqiq qilish va sonli yechish bilan F.B.Abutaliyev, N.Muxitdinov, M.M.Aripov, B.X.Xujayorov, A.S.Rasulov, N.Ravshanov, J.Toxirov, N.Uteuliyev, A.S.Matyakubov, Sh.A.Sadullayeva, Z.R.Raxmonov, D.K.Muxamediyeva va boshqa olimlar shug‘ullanishgan. Ularning asosiy ishlarini diffuziya nochiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasini sonli tadqiq etishga bag‘ishlangan bo‘lib, issiqlik o‘tkazuvchanlik, filtratsiya, kross-diffuziya, biologik populyatsiya jarayonlarini modellashtirish masalalariga tadbiq etish mumkin. M.M.Aripovning ishlarida nochiziqli masalalarni tadqiq etishning samarali usullari sifatida nochiziqli parchalash algoritmi va etalon tenglamalar usullari asoslangan. Bu ishlarda avtomodel tahlil asosida tabiatshunoslikning turli sohalarida uchraydigan jarayonlarni ifodalovchi nochiziqli masalalar yechimlarining sifat xossalari tadqiq etilgan va sonli yechilgan. Nochiziqli kross-diffuziya jarayonlarni modellashtirish, yechimlarni o‘rganish bo‘yicha olingan natijalar hamda mavjud usul va algoritmlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, nochiziqli jarayonlarni modellashtirish nazariy va amaliy masalalarini yanada chuqurroq hamda to‘liq tadqiq etish usullarini ishlab chiqishni talab qiladi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti ilmiy tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq, OT-F4-30 “Ikki marta nochiziqli kross sistemaning konvektiv ko‘chish, o‘zgaruvchan zichlik, manba yoki yutish ta’siridagi sifat xossalarini tadqiq qilish” (2017-2020-yillar) mavzularidagi ilmiy tadqiqot loyihalari doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya masalalarini sonli-analitik yechish usullari va algoritmlarini qurish hamda dasturiy ta'minotini yaratishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

manba va o'zgaruvchan zichlikka ega hamda ega bo'lmagan hollarda nodivergent kross-diffuziya jarayonini ifodaluvchi nochiziqli modelining sekin va tez diffuziya holida yechimlarining vaqt bo'yicha globallik hamda global bo'lmaslik shartlarini topish;

nodivergent kross-diffuziya jarayonini ifodalovchi nochiziqli matematik modelining avtomodel yechimlari asimptotikasining bosh hadlarini topish;

manba va o'zgaruvchan zichlikka ega nodivergent kross-diffuzion jaryonlarni ifodalovchi nochiziqli masalalarni sonli hisoblash uchun zarur bo'lgan boshlang'ich yaqinlashishni topish;

manba va o'zgaruvchan zichlikka ega nodivergent kross-diffuziya jarayonlarining nochiziqli matematik modellari sifat xossalarini o'rganish uchun sonli hisoblash sxemalarini qurish;

manba va o'zgaruvchan zichlikka ega nodivergent kross-diffuziya masalasini yechish uchun dasturiy vositalar majmuini ishlab chiqish hamda olingan yechimlarni vizuallashtirish.

Tadqiqotning obyekti sifatida ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya jarayonlari olingan.

Tadqiqotning predmeti. Ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya jarayonlarining matematik modellari, sonli sxemalar va sonli yechish algoritmi hamda dasturiy ta'minotlaridan iborat.

Tadqiqotning usullari. Mazkur dissertatsiya ishida nochiziqli parchalash algoritmi, avtomodel va taqribiy avtomodel hamda asimptotik usullar, etalon tenglamalar usuli, yechimlarni taqqoslash teoremalari, iteratsiya, haydash usullaridan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

manba va o'zgaruvchan zichlikka ega hamda ega bo'lmagan hollarda nodivergent kross-diffuziya jarayonini ifodalovchi nochiziqli matematik modelining sekin va tez diffuziya holida yechimlarining vaqt bo'yicha globallik hamda global bo'lmaslik shartlari topilgan;

nodivergent kross-diffuziya jarayonini ifodalovchi nochiziqli matematik modelining avtomodel yechimlar asimptotikasining bosh hadlari topilgan;

manba va o'zgaruvchan zichlikka ega nodivergent kross-diffuziya jaryonlarni ifodalovchi nochiziqli masalalarni sonli hisoblash uchun zarur bo'lgan boshlang'ich yaqinlashishni topish masalasi hal qilingan;

manba va o'zgaruvchan zichlikka ega nodivergent kross-diffuziya jarayonlarining nochiziqli matematik modellari sifat xossalarini o'rganish uchun sonli hisoblash sxemalari qurildi;

kritik hollarda manba va o'zgaruvchan zichlikka ega nodivergent kross-diffuziya jarayonini ifodalovchi nochiziqli matematik modelining sekin hamda tez diffuziya holida yechimlarining vaqt bo‘yicha globallik va global bo‘lmaslik shartlari topilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari:

manba va o‘zgaruvchan zichlikka ega hamda ega bo‘lmagan nodivergent kross-diffuziya jarayonlarini tasvirlovchi masalalarning global yechimlari va avtomodel yechimlari asimptotikalari olingan;

manba va o‘zgaruvchan zichlikka ega hamda ega bo‘lmagan nodivergent kross-diffuziya jarayonlarini tasvirlovchi masalalar uchun sonli yechimlar qurilgan va dasturlar majmui yaratilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiya ishida olingan tasdiqlar solishtirish teoremalari va maksimum prinsipi asosida qat’iy isbotlangan hamda hisoblash eksperimenti natijalari bilan tasdiqlangan, olingan natijalarning saqlanish qonunlariga muvofiqligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati avtomodel yechimni qurish usullari, asimptotik formulalar, sonli yechish sxemalari va algoritmlaridan viruslarning tarqalishi, gaz va suyuqliklar filtratsiyasi, diffuziya, issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayonlari modellarini sonli va analitik yechishda qo‘llanilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati iteratsion jarayonlar qurilganligi, sonli hisoblash sxemasi va dasturiy ta’minot yaratilganligi, ulardan nochiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik, gaz va suyuqliklar filtratsiyasi, diffuziya, viruslar tarqalishi, biologik populyatsiya masalalari uchun samarali hisoblash tajribalarini o‘tkazishga imkon berishi bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya masalalarini sonli modellashtirish bo‘yicha olingan ilmiy natijalar amaliyotda quyidagi yo‘nlishlarda joriy etilgan:

ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya masalalarini sonli va analitik yechish algoritmlari hamda global yechimning mavjudlik shartlaridan OT-Atex-2O18-340 ‘‘Ikki tezlikli muhit dinamikasining amaliy geofizik masalalarini nazariy va sonli tadqiq etish” grant loyihasida ikki tezlikli muhit dinamikasining amaliy geofizik masalalarini global yechimining mavjudlik shartlarini olishda va sonli modellashtirishda foydalanilgan (Qarshi davlat universitetining 2023-yil 05-maydagi 03/1884-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, ikki tezlikli muhit dinamikasining amaliy geofizik masalalarini global yechimining mavjudlik shartlarini olishga va sonli modellashtirish uchun amaliy dasturlar paketini yaratishga imkon bergan;

ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya masalalarini sonli va analitik yechish algoritmlari, avtomodel yechimlar asimptotikasining bosh hadlarini topish usullaridan BV-Atex-2018(399+487) “Ikki komponentli muhitda diffuzion jarayonlarni sonli modellashtirish uchun amaliy dasturlar paketini yaratish” grant loyihasida ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuzion jarayonlarini sonli modellashtirishda foydalanilgan (Belarus-O‘zbekiston qo‘shma tarmoqlararo amaliy texnik malaka institutining 2023-yil 19-maydagi 01-194/23-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, ikki komponentali muhitda diffuziya jarayonlarini sonli modellashtirish uchun amaliy dasturlar paketini yaratishga xizmat qilgan;

manba va o‘zgaruvchan zichlikka ega nodivergent kross-diffuziya jaryonlarini ifodalovchi nochiziqli masalalarni sonli hisoblash uchun zarur bo‘lgan boshlang‘ich yaqinlashishni topish metodidan Rossiya Federatsiyasi Udmurt davlat universiteti RFFI-20-01-00293-sonli grant loyihasida ikki tezlikli muhit dinamikasining amaliy geofizik masalalarini nazariy va sonli yechishda foydalanilgan (Rossiya Federatsiyasi Udmurt davlat universiteti 2023-yil № 7873-3980/32-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, ikki tezlikli muhit dinamikasining amaliy geofizik masalalarini nazariy va sonli yechishda qo‘llaniladigan iteratsion jarayon uchun boshlang‘ich yaqinlashish masalasini hal qilishga imkon yaratgan.

Tadqiqot natijalarining aprobasiyasi. Mazkur tadqiqot ishi natijalari 9 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 7 ta xalqaro va 2 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Tadqiqot mavzusi bo‘yicha jami 16 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta maqola, jumladan, 3 tasi xorijiy (2 ta Scopus) va 4 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan. Shuningdek, EHM uchun yaratilgan dasturning rasmiy ro‘yxatdan o‘tkazilganligi to‘g‘risida 2 ta mualliflik guvohnomasi olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 107 betdan tashkil topgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Disseratatsiyaning **“Nodivergent kross-diffuziya jarayonining matematik modellari”** deb nomlangan birinchi bobida umumiy holda masalaning qo‘yilishi, nodivergent kross-diffuziya jarayonining matematik modeli xususiyatlarini o‘rganishga hamda mahalliy, xalqaro tadqiqotlar natijalari sharhiga bag‘ishlangan. 1.2-paragrafida asosiy ta’riflar va yordamchi tasdiqlar keltirilgan.

1.3-paragrafda $Q=\{(t,x):t>0,x\in R\}$ sohada quyidagi o‘zgaruvchan zichlik va manba ta’sirida nodivergent diffuziya jarayonini ifodalovchi parabolik tenglama uchun Koshi masalasining yechimlari sifat xossalari keltirilgan:

$$|x|^{-l}\frac{\partial u}{\partial t}=u^{q}\frac{\partial}{\partial x}\left(|x|^{n}u^{m-1}\left|\frac{\partial u^{k}}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+|x|^{-l}u^{\beta}\tag{1}$$

$$u(0,x)=u_0(x)\ge 0,\ x\in R.\tag{2}$$

Bu yerda $n,l,k,q,\beta>0, p\ge 2, m\ge 1$ sonli parametrlar, $u=u(t,x)\ge 0$ izlanayotgan nomanfiy yechim, $u_0(x)$ chegaralangan, uzluksiz, nomanfiy funksiya. Ma'lumki, (1) tenglama buziluvchan bo'lib, $u(t,x)=0$ yoki $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|=0$ bo'lganda klassik ma'noda yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Shuning uchun (1),(2) masalaning yechimini $\left(|x|^{n}u^{m-1}\left|\frac{\partial u^{k}}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\in C\left(R_{+}\times(0,+\infty)\right), u\ge 0$ sinfda umumlashgan yechim sifatida qaraladi va bu yechim (1) tenglamani integral ayniyat ma'nosida yoki taqsimot ma'nosida qanoatlantiradi. Parametrlarning turli qiymatlarida (1),(2) masala ko'plab fizikaviy va biologik jarayonlarni ifodalaydi. (1),(2) masala yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz.

$$u(t,x)=\bar{u}(t)\cdot z\left(\tau(t),\varphi(|x|)\right),$$

$$\bar{u}(t)=\left(T+(1-\beta)t\right)^{\frac{1}{1-\beta}},\ \ \tau(t)=\frac{\bar{u}^{q+m+k(p-2)-\beta}}{q+m+k(p-2)-\beta}$$

$$\varphi(|x|)=\begin{cases}\dfrac{p}{p-l-n}|x|^{\frac{p-l-n}{p}}, & p\ne l+n\\ \ln|x| & ,\ p=l+n\end{cases},\ s=\frac{p(1-l)}{p-l-n},$$

$$z\left(\tau(t),\varphi(|x|)\right)=f(\xi),\ \xi=\frac{\varphi}{\tau^{\frac{1}{p}}}$$

Nochiziqli ajratish algoritimi yordamida (1) tenglamadan quyidagi avtomodel tenglamaga ega bo'lamiz.

$$-\frac{\xi}{p}\frac{df}{d\xi}=f^{q}\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{1-s}f^{m-1}\left|\frac{df^{k}}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{1}{\left(q+m+k(p-2)-\beta\right)}\left(f^{\beta}-f\right).\tag{3}$$

Endi (3) avtomodel tenglamaning notrivial manfiy bo'lmagan, quyidagi

$$f(0)=M,\ M\in R,\ f(d)=0,\ 0<d<\infty\tag{4}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish bilan shug'ullanamiz.

1-teorama. (1)-(2) masalaning sonli parametrlari uchun $\beta<q+m+k(p-2)$ tengsizlik va quyidagi tengsizliklardan biri

$$1)\ q>1,\ l<1,\ p>n+1,\ \ 2)\ q>1,\ l>1,\ p<n+1,$$
$$3)\ q<1,\ l<1,\ p<n+l,\ \ 4)\ q<1,\ l>1,\ p>n+l,$$

hamda $u(0,x)\le u_+(0,x),\ x\in R$ munosabat o‘rinli bo‘lsin. U holda (1)-(2) masalaning Q sohada aniqlangan global yechimi mavjud va u uchun quyidagi baholash o‘rinli $u(t,x)\le u_+(t,x)$ bo‘ladi.

Bu yerda $u_+(t,x)=f(\xi)\cdot\bar{u}(t),\ f(\xi)=A\left(a-\xi^{\gamma_1}\right)^{\gamma_2},\quad a=const>0,\quad \gamma_1=\dfrac{p}{p-1}$

$$A=\left(\frac{m+q+p+k(p-2)-1}{p\left(p(1-q)k^{p-2}\right)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{m+q+k(p-2)-1},\quad \gamma_2=\frac{p-1}{m+k(p-2)+q-1}.$$

1.4-paragraf nodivergent kross-diffuziya jarayonining sifat xossalarini tadqiq qilishga bag‘ishlangan.

Bunda $Q=\{(t,x):t>0,x\in R^N\}$ sohada aniqlangan o‘zgaruvchan zichlikka ega nochiziqli nodivergent kross-diffuziya parabolik tenglamalar sistemasiga qo‘yilgan quyidagi

$$|x|^n\frac{\partial u_i}{\partial t}=u_i^{\alpha_i}\nabla\left(u_{3-i}^{m_i-1}\left|\nabla u_i^k\right|^{p-2}\nabla u_i\right)\tag{5}$$

$$u_i(0,x)=u_{0,i}(x),\ x\in R^N\tag{6}$$

Koshi masalasi ko‘rib chiqilgan. Bu yerda $k\ge0,p\ge2,m_i\ge1,\alpha_i\ge0(i=1,2)$ sonli parametrlar, $\nabla(\cdot)=grad_x(\cdot),u_i=u_i(t,x)\ge0$ izlanayotgan nomanfiy yechimlar, $u_{0,i}(x)$ chegaralangan, uzluksiz, nomanfiy funksiyalar.

(5)-(6) masalaning yechimini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz, ya’ni:

$$u_i(x,t)=(T+t)^{\gamma_i}\cdot f_i(\xi),\ \bar{f}_i(\xi)=A_i\left(a-\xi^l\right)_+^{l_i},l=\frac{p+n}{p-1},\ A_i,a>0,\ |x|=\sqrt{\sum_{j=1}^N x_j^2}$$

$$l_i=\frac{(p-1)\left(k(p-2)+\alpha_{3-i}-m_i+1\right)}{\left(k(p-2)+\alpha_i\right)\left(k(p-2)+\alpha_{3-i}\right)-(m_i-1)(m_{3-i}-1)}$$

$$\gamma=\frac{\gamma_1\left(k(p-2)-\alpha_1\right)+\gamma_2(m_1-1)+1}{p+n}\ (i=1,2)$$

Natijada quyidagi avtomodel tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$f_i^{\alpha_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{df_i^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df_i}{d\xi}\right)+\gamma\xi^{n+1}\frac{df_i}{d\xi}-\gamma_i f_i=0(i=1,2).\tag{7}$$

Endi (7) tenglamalar sistemasining notrivial, manfiy bo‘lmagan quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari topiladi:

$$\begin{gathered}f_1(0)=M_1,\ f_2(0)=M_2,M_1\in R,M_2\in R\\ f_1(d_1)=f_2(d_2)=0,\ 0<d_1<\infty,\ 0<d_1<\infty.\end{gathered}\tag{8}$$

2-teorema (Globallik shartlari). Faraz qilaylik $l_i>0$,

$$A_i^{\alpha_i+k(p-2)}\cdot A_{3-i}^{m_i-1} l\left|l l_i k\right|^{p-2}=\frac{\gamma}{l_i\left(k(p-2)+1\right)+l_{3-i}\left(m_i-1\right)-p+1},$$

$$-\frac{\gamma(N+n)l_i}{l_i\left(k(p-2)-\alpha_i\right)+l_{3-i}\left(m_i-1\right)+1}-\gamma_i\le 0,$$

$$u_i(t,0)\le u_{i+}(t,0),\, x\in R^N \quad i=1,2$$

munosabatlar bajarilsin. U holda (5)-(6) masala uchun Q sohada global yechim mavjud va quyidagi baholash o‘rinli bo‘ladi:

$$u_i(t,x)\le u_{i+}(t,x)=(T+t)^{\gamma_i}\,\overline{f}_i(\xi)\quad i=1,2\ .$$

Biz avtomodel tenglamalar sistemasi yechimining asimptotikasini o‘rganishga oid teoremalar va ular asosida kelib chiqadigan natijalarni keltirishdan oldin quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz.

$$a_{1i}(\eta)=-l_{i+2}+\frac{(N+n)e^{-\eta}}{l\left(a-e^{-\eta}\right)},\ a_{2i}(\eta)=\frac{\gamma}{l^{p-2}},\ a_{3i}(\eta)=\frac{\gamma_i e^{-\eta}}{\gamma^p\left(a-e^{-\eta}\right)}$$

$$l_{i+2}=l_{3-i}\left(m_i-1\right)+\left(l_i k-1\right)(p-2)+l_i-1\quad i=1,2\ .$$

3-teorema. Faraz qilaylik $l_i>0$ bo‘lsin. U holda (7)-(8) masalaning kompakt yurituvchili yechimi uchun, $\xi\to a^{\frac{p-1}{p+n}}$ da, quyidagi asipmtotika o‘rinli

$$f_i(\xi)=c_i\left(a-\xi^l\right)^{l_i}\left(1+o(1)\right),\ (i=1,2)$$

bu yerda $c_i\,(i=1,2)$ quyida ko‘rsatilgan nochiziqli algebraik tenglamalar sistemasining

$$a_{i1}\cdot c_{3-i}^{m_i-1}c_i^{k(p-2)+1}l_i^{p-1}k^{p-2}+a_{i2}\cdot c_i^{1-\alpha_i}=0$$

mos ravishda yechimlari.

Natija 1. Agar $l_i>0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, (5)-(6) masalaning $|x|\to a^{\frac{p-1}{p+n}}(T+t)^{\gamma}$ dagi umumlashgan yechimi quyidagi asimptotikaga ega

$$u_A(x,t)\approx c_i(T+t)^{\gamma_i}\left(a-\left(\frac{|x|}{(T+t)^{\gamma}}\right)^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{l_i}\left(1+o(1)\right),$$

bu yerda $c_i\,(i=1,2)$ yuqorida aniqlangan o‘zgarmaslar.

Dissertatsiyaning “**Ikki komponentali muhitda manbaga ta’sirida nodivergent kross-diffuziya jarayonlarini matematik modellashtirish**” nomli ikkinchi bobning 2.1 paragrafi bir o‘lchovli manbaga ega nodivergent parabolik tenglamalar sistemasining yechimlari xossalarini tadqiq qilishga bag‘ishlangan. Bunda $Q=\{(t,x):\ t>0,\ x\in R\}$ sohada aniqlangan, quyidagi manbaga ega nodivergent parabolik tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi ko‘rib chiqilgan.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=u_i^{\alpha_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{\partial u_i^k}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)+u_i^{\beta_i} \tag{9}$$

$$u_i(0,x)=u_{0,i}(x),\ x\in R\quad . \tag{10}$$

Bu yerda $\alpha_i,k,\beta_i>0,\ p\ge 2, m_i\ge 1(i=1,2)$ sonli parameterlar, $u_i=u_i(t,x)\ge 0$ izlanayotgan yechimlar.

Bu yerda (9) sistema yechimlari $u_i(t,x)=\bar{u}_i(t)\cdot w_i(\tau(t),x)$ ko‘rinishda izlanadi.

$$\bar{u}_i(t)=(T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}},\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{(T+t)^{\sigma}}{\sigma}\ , & \sigma\ne 0\\ \ln(T+t)\ , & \sigma=0\end{cases}$$

$$\psi_i=\left(\frac{k(p-2)+\alpha_i}{1-\beta_i}+\frac{m_i-1}{1-\beta_{3-i}}+1\right)^{-1},\ w_i(x,\tau)=f_i(\xi),\xi=\frac{|x|}{\tau^{\frac{1}{p}}}$$

$$T>0,\sigma=\frac{k(p-2)+\alpha_1}{1-\beta_1}+\frac{m_1-1}{1-\beta_2}+1=\frac{k(p-2)+\alpha_2}{1-\beta_2}+\frac{m_2-1}{1-\beta_1}+1\ .$$

$f_i(\xi)$ funksiyalar quyidagi avtomodel tenglamalar sistemasi yechimlaridir

$$f_i^{\alpha_i}\frac{d}{d\xi}\left(f_{3-i}^{\ m_i-1}\left|\frac{df_i^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df_i}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{p}\frac{df_i}{d\xi}+$$
$$+\psi_i\left(f_i^{\beta_i}-\frac{1}{1-\beta_i}f_i\right)=0. \tag{11}$$

Biz (11) avtomodel tenglamalar sistemasini notrivial, manfiy bo‘lmagan, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini topamiz:

$$f_i'(0)=0,\ f_i(\infty)=0\,. \tag{12}$$

Bu yerda $f_i(\xi)=A_i\left(a+\xi^{\gamma}\right)_+^{\gamma_i}$ ga teng bo‘lib, uning koeffitsiyentlari quyidagicha aniqlangan:

$$a>0,\gamma_i=\frac{(p-1)(k(p-2)+\alpha_{3-i}-m_i+1)}{(k(p-2)+\alpha_i)(k(p-2)+\alpha_{3-i})-(m_i-1)(m_{3-i}-1)},\gamma=\frac{p}{p-1},\ A_i,n_i=\frac{1}{1-\beta_i}\ (i=1,2)$$

$$A_i^{\alpha_i+k(p-2)}A_{3-i}^{m_i-1}=\frac{\dfrac{\gamma\gamma_i}{p}+\dfrac{\psi_i}{1-\beta_i}}{\gamma\gamma_i|\gamma\gamma_i|^{p-2}(\gamma\gamma_{i+2}-1)},\ \gamma_{i+2}=(\gamma_i k-1)(p-2)+\gamma_{3-i}(m_i-1)+\gamma_i-1.$$

Tez diffuziya ($\gamma_i<0$). Yechimning globallik shartlari.

4-teorema. Faraz qilaylik $\gamma_i<0$,

$$\gamma\gamma_{i+2}A_i^{\alpha_i+k(p-2)}\cdot A_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}|\gamma\gamma_i|^{p-2}=-\frac{1}{p}\ ,$$

$$\psi_i\left(A_i^{\beta_i-1}a^{\gamma_i\beta_i-\gamma_i}-\frac{1}{1-\beta_i}\right)-\frac{\gamma_i}{p\gamma_{i+2}}\geq 0\ ,$$

$$u_i(t,0)\geq u_{i-}(t,0)\ ,x\in R\ \ (i=1,2)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. U holda (9), (10) masala uchun Q sohada global yechim mavjud va uning uchun quyidagi baholash o‘rinli bo‘ladi.

$$u_i(t,x)\geq u_{i-}(t,x)=(T+t)^{n_i}\ \overline{f_i}(\xi),(i=1,2).$$

Biz avtomodel tenglamalar sistemasi yechimining asimptotikasini o‘rganishga oid teoremalar va ular asosida kelib chiqadigan natijalarni keltirishdan oldin quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz:

$$a_{1i}(\eta)=\gamma_{i+2}+\frac{e^{\eta}}{\gamma\left(a-e^{\eta}\right)},\ a_{2i}(\eta)=\frac{1}{p\gamma^{p-1}e^{\eta}},\ a_{3i}(\eta)=\frac{\psi_i e^{(1-\gamma_i+\gamma_i\beta_i)\eta}}{\gamma^p\left(a-e^{\eta}\right)}$$

$$a_{4i}=\frac{\psi_i e^{\eta}}{(1-\beta_1)\gamma^p\left(a-e^{\eta}\right)}\ (i=1,2).$$

5-teorema. Faraz qilaylik, $\gamma_i<0$ bo‘lsin. U holda (11), (12) masalaning cheksizlikda so‘nuvchi yechimlari uchun $\xi\to\infty$ da quyidagi

$$f_i(\xi)=c_i\left(a+\xi^{\gamma}\right)^{\gamma_i}\left(1+o(1)\right),\ (i=1,2)$$

asimptotikalar o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $c_i\,(i=1,2)$ quyida ko‘rsatilgan nochiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi

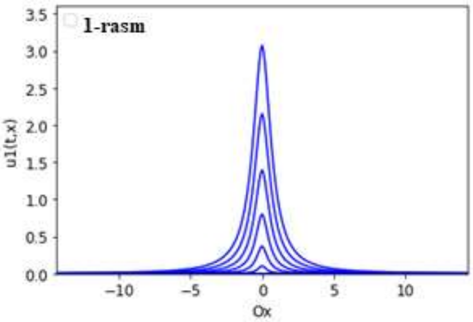
$$a_{i1}c_i^{k(p-2)+1}c_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}\gamma_i^{p-1}+a_{i2}\gamma_i c_i^{1-\alpha_i}+a_{i4}c_i^{1-\alpha_i}=0.$$

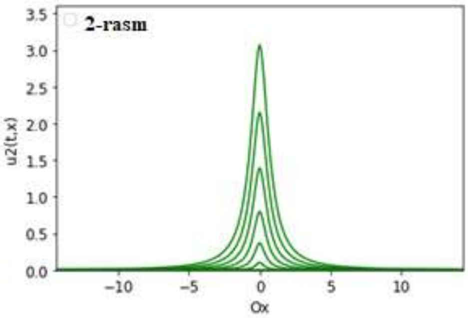
Natija 2. Agar $\gamma_i<0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda (9), (10) masalaning umumlashgan yechimi $\xi\to\infty$ da quyidagi

$$u_{iA}(x,t)\approx c_{i+2}(T+t)^{n_i}\left(a+\xi^{\gamma}\right)^{\gamma_i}\left(1+o(1)\right)$$

asimptotikalarga ega, bu yerda $c_{2+i}\,(i=1,2)$ yuqorida aniqlangan o‘zgarmaslar.

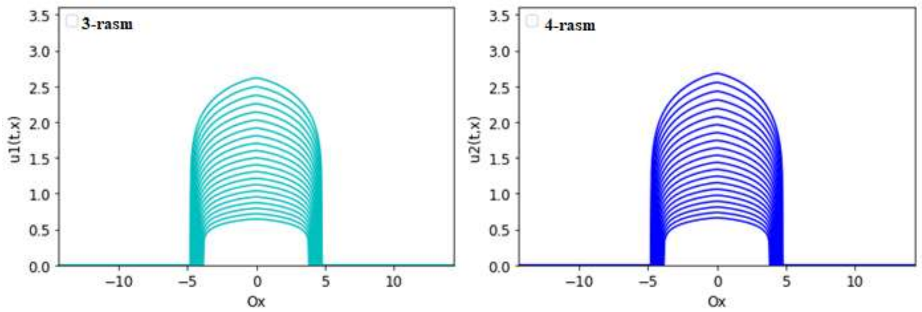
2.2 paragrafda (9), (10) masala ko‘p o‘zgaruvchili holda qaralgan va yuqoridagi teorema hamda ulardan kelib chiqadigan natijalar ham ko‘p o‘lchovli holda keltirib o‘tilgan. 2.3 paragrafda (9), (10) masala uchun ayirmali sxema ishlab chiqilgan, Python dasturlash tilidan foydalanib sonli natijalar olingan va jarayon vizuallashtirilgan.





$$k=4.1,p=2.2,m_1=1.32,m_2=1.48$$

$$\alpha_1=0.32,\alpha_2=0.35,\beta_1=0.6,\beta_2=0.5$$



$k=0.8, p=3.8, m_1=2.25, m_2=2.34$

$\alpha_1=2.82, \alpha_2=2.65, \beta_1=0.6, \beta_2=0.4$

Bunda parametrlarning qiymatlariga qarab, (1)-(2) grafiklar tez diffuziya jarayoni va (3)-(4) grafiklarda esa sekin diffuziya jarayoni o‘z aksini topgan.

Dissertatsiyaning uchinchi bobi “**Manba va o‘zgaruvchan zichlikka ega nodivergent parabolik tenglamalar sistemasi bilan ifodalanuvchi kross-diffuziya jarayonlarini matematik modellashtirish”** deb nomlangan.

3.1 paragarfda $Q=\{(t,x):\ t>0,\ x\in R^N\}$ sohada manba va o‘zgaruvchan zichlikka ega nodivergent parabolik tenglamalar sistemasiga qo‘yilgan

$$|x|^n\frac{\partial u_i}{\partial t}=u_i^{\alpha_i}\nabla\left(u_{3-i}^{m_i-1}\left|\nabla u_i^k\right|^{p-2}\nabla u_i\right)+|x|^n u_i^{\beta_i} \tag{14}$$

$$u_i(0,x)=u_{0,i}(x),\ x\in R^N \tag{15}$$

Koshi masalasi ko‘rib chiqilgan. Yechimni quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$u_i(t,x)=\bar{u}_i(t)\cdot w_i(\tau(t),r)$$

$$\bar{u}_i(t)=(T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}},\psi_i=\left(\frac{k(p-2)+\alpha_i}{1-\beta_i}+\frac{m_i-1}{1-\beta_{3-i}}+1\right)^{-1}$$

$$T>0,\sigma=\frac{k(p-2)+\alpha_1}{1-\beta_1}+\frac{m_1-1}{1-\beta_2}+1=\frac{k(p-2)+\alpha_2}{1-\beta_2}+\frac{m_2-1}{1-\beta_1}+1$$

$$\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{(T+t)^{\sigma}}{\sigma}, & \sigma\neq 0\\ \ln(T+t), & \sigma=0\end{cases},w_i(x,\tau)=f_i(\xi),\xi=\frac{r}{\tau^{\frac{1}{p+n}}}.$$

Natijada quyidagi avtomodel tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$f_i^{\alpha_i}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f_{3-i}^{\ m_i-1}\left|\frac{df_i^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df_i}{d\xi}\right)+\frac{\xi^{n+1}}{p}\frac{df_i}{d\xi}+\psi_i\xi^n\left(f_i^{\beta_i}-\frac{1}{1-\beta_i}f_i\right)=0 \tag{16}$$

Endi (16) tenglamalar sistemasining notrivial, manfiy bo‘lmagan (8) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari topiladi.

Sekin diffuziya. Yechimning globallik shartlari.

Buning uchun $u_{i+}(t,x)$ yechimni quyidagi ko‘rinishda izlaymiz.

$$u_{i+}(t,x)=(T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}}\,\bar{f}_i(\xi),\ \bar{f}_i(\xi)=A_i\left(a-\xi^{\gamma}\right)_+^{\gamma_i}$$

$$a>0,\ \gamma_i=\frac{(p-1)\left(k(p-2)+\alpha_{3-i}-m_i+1\right)}{\left(k(p-2)+\alpha_i\right)\left(k(p-2)+\alpha_{3-i}\right)-(m_i-1)(m_{3-i}-1)},\gamma=\frac{p+n}{p-1},\ A_i\ (i=1,2)$$

$$A_i^{\alpha_i+k(p-2)}A_{3-i}^{m_i-1}=\frac{\dfrac{\gamma\gamma_i}{p+n}+\dfrac{\psi_i}{1-\beta_i}}{\gamma\gamma_i|\gamma\gamma_i|^{p-2}(\gamma\gamma_{i+2}-N-n)},\quad \begin{array}{l}\gamma_{i+2}=(\gamma_i k-1)(p-2)+\\ +\gamma_{3-i}(m_i-1)+\gamma_i-1\end{array}$$

6-teorema. Faraz qilaylik $\gamma_i>0$,

$$\gamma\gamma_{i+2}A_i^{\alpha_i+k(p-2)}\cdot A_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}|\gamma\gamma_i|^{p-2}=\frac{1}{p+n}$$

$$\psi_i\left(A_i^{\beta_i-1}a^{\gamma_i\beta_i-\gamma_i}-\frac{1}{1-\beta_i}\right)-\frac{\gamma_i(N+n)}{\gamma_{i+2}(p+n)}\le 0,$$

$$u_i(t,0)\le u_{i+}(t,0),x\in R^N\ (i=1,2)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. U holda (14),(15) masala uchun Q sohada global yechim mavjud va uning uchun quyidagi baholashlar o‘rinli bo‘ladi.

$$u_i(t,x)\le u_{i+}(t,x)=(T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}}\ \bar f_i(\xi),(i=1,2)$$

Biz avtomodel tenglamalar sistemasi yechimining asimptotikasini o‘rganishga oid teoremalar va ular asosida kelib chiqadigan natijalarni keltirishdan oldin quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz.

$$a_{1i}(\eta)=-\gamma_{i+2}+\frac{(N+n)e^{-\eta}}{\gamma\left(a-e^{-\eta}\right)},\quad a_{2i}(\eta)=\frac{1}{(p+n)\cdot\gamma^{p-1}}$$

$$a_{3i}(\eta)=\frac{\psi_i e^{(\gamma_i-\gamma_i\beta_i-1)\eta}}{\gamma^p\left(a-e^{-\eta}\right)},\ a_{4i}(\eta)=\frac{\psi_i e^{-\eta}}{(1-\beta_i)\gamma^p\left(a-e^{-\eta}\right)}$$

$$\gamma_{i+2}=\gamma_{3-i}(m_i-1)+(\gamma_i k-1)(p-2)+\gamma_i-1\ (i=1,2)$$

Natija 3. Agar $\gamma_i<0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda (14), (15) masalaning umumlashgan yechimi $\xi\to\infty$da quyidagi

$$u_{iA}(x,t)\approx c_{i+2}(T+t)^{n_i}\left(a+\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\gamma_i}(1+o(1))$$

asimptotikalarga ega, bu yerda $c_{2+i}\ (i=1,2)$ yuqorida aniqlangan o‘zgarmaslar.

Dissertatsiyaning 3.2-paragrafi **“Kritik hollarda ikki komponentali muhitlarda manba va o‘zgaruvchan zichlikka ega nodivergent kross-diffuziya masalasining global yechimi hamda uning asimptotikalari”**ni o‘rganishga bag‘ishlangan.

Bunda $Q=\{(t,x):\ t>0,\ x\in R^N\}$ sohada aniqlangan quyidagi, manbaga ega nodivergent parabolik tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi ko‘rib chiqilgan.

$$|x|^{-l}\frac{\partial u_i}{\partial t}=u_i^{\alpha_i}\nabla\left(|x|^n u_{3-i}^{m_i-1}\left|\Delta u_i^k\right|^{p-2}\Delta u_i\right)+|x|^{-l}u_i^{\beta_i}\qquad(18)$$

$$u_i(0,x)=u_{0,i}(x),\, x\in R^N \tag{19}$$

Bu yerda $l,n,\alpha_i,k,\beta_i>0,\, p\ge 2, m_i\ge 1,(i=1,2)$ sonli parameterlar, $u_i=u_i(t,x)\ge 0$ izlanayotgan yechimlar. (19) masalaning yechimini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$u_i(t,x)=\bar{u}_i(t)\cdot w_i\left(\tau(t),\varphi(|x|)\right)$$

$$\bar{u}_i(t)=(T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}},\psi_i=\left(\frac{k(p-2)+\alpha_i}{1-\beta_i}+\frac{m_i-1}{1-\beta_{3-i}}+1\right)^{-1}$$

$$\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{(T+t)^{\sigma}}{\sigma}\ , & \sigma\ne 0\\ \ln(T+t)\ , & \sigma=0\end{cases},\varphi(|x|)=\begin{cases}\dfrac{|x|^{\frac{p-(l+n)}{n}}}{\frac{p-(l+n)}{n}}\ , & p\ne l+n\\ \ln|x|\ , & p=l+n\end{cases},$$

$$T>0,\sigma=\frac{k(p-2)+\alpha_1}{1-\beta_1}+\frac{m_1-1}{1-\beta_2}+1=\frac{k(p-2)+\alpha_2}{1-\beta_2}+\frac{m_2-1}{1-\beta_1}+1\ \ (i=1,2).$$

$p=l+n$ va $\dfrac{k(p-2)+\alpha_1}{1-\beta_1}+\dfrac{m_1-1}{1-\beta_2}=0$ bo‘lgan hol.

7-teorema. Faraz qilaylik

$$\gamma\gamma_{i+2}A_i^{\alpha_i+k(p-2)}\cdot A_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}|\gamma\gamma_i|^{p-2}=\frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p(1-\alpha_i)}+\left(A_i^{\beta_i-1}a^{\gamma_i\beta_i-\gamma_i}-\frac{1}{1-\beta_i}\right)\le 0$$

$$u_i(t,0)\le u_{i+}(t,0), x\in R^N\ (i=1,2)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. U holda (18), (19) masala uchun $Q\setminus\{0\}$ sohada global yechim mavjud va uning uchun quyidagi baholashlar o‘rinli bo‘ladi.

$$u_i(t,x)\le u_{i+}(t,x),(i=1,2)$$

Natija 4. Agar $\gamma_i>0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin, u holda (18)-(19) masalaning umumlashgan yechmi $|x|\to a^{\frac{p-1}{p}}\tau^{\frac{1}{p}}$ da quyidagi

$$u_{iA}(t,x)\approx c_i(T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}}\left(a-\left(|x|\tau^{-\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\gamma_i}\left(1+o(1)\right)$$

asimptotikalarga ega, bu yerda $c_i\,(i=1,2)$ aniqlangan o‘zgarmaslar.

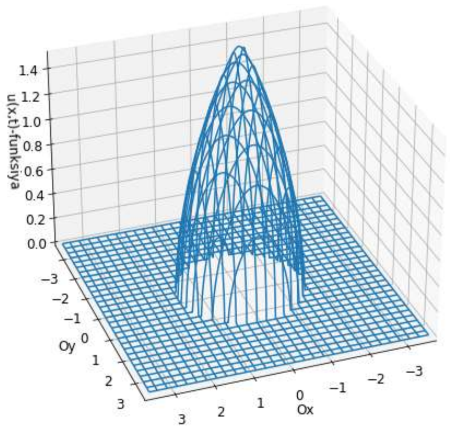
3.3-paragraf $Q=\{(t,x):t>0,x\in R^N\}$ sohada (14), (15) masalaning $N=2$ bo‘lgan, hol uchun masalani sonli usulda yechishga bag‘ishlangan.

$$
\begin{cases}
|x|^n \dfrac{\partial u}{\partial t} = u^{\alpha_1} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(v^{m_1-1} \left| \dfrac{\partial u^k}{\partial x_1} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \right) + u^{\alpha_1} \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(v^{m_1-1} \left| \dfrac{\partial u^k}{\partial x_1} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \right) + |x|^n u^{\beta_1} \\
|x|^n \dfrac{\partial v}{\partial t} = v^{\alpha_1} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(u^{m_1-1} \left| \dfrac{\partial v^k}{\partial x_1} \right|^{p-2} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} \right) + v^{\alpha_1} \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(u^{m_1-1} \left| \dfrac{\partial v^k}{\partial x_1} \right|^{p-2} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} \right) + |x|^n v^{\beta_2}
\end{cases}
$$

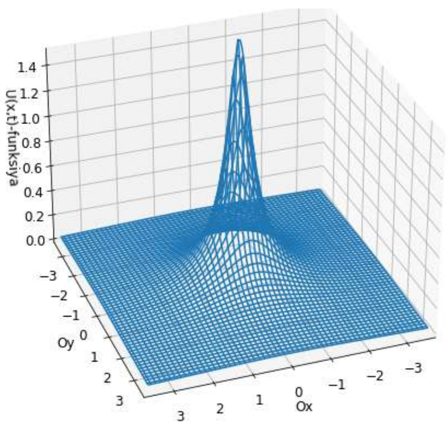
$$
u(0,x) = u_0(x) \geq 0, v(0,x) = v_0(x) \geq 0, \;\; x \in R^2
$$

Bu yerda $u = u(t, x_1, x_2), v = v(t, x_1, x_2)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ kabi aniqlangan.

Bu masalani sonli yechishimiz uchun biz o‘zgaruvchan yo‘nalishli metodlardan biri “bo‘ylama-ko‘ndalang” ayirmali sxemadan, boshqacha aytadigan bo‘lsak, “Pismen-Reychford” ayirmali sxemasidan foydalanilgan va sonli natijalar olingan hamda grafiklarda o‘z aksini topgan. Sekin va tez diffuziya holatlari aks etrilgan.



$k=1.2, p=6.8, m_1=1.35, m_2=1.45$
$\alpha_1=0.2, \alpha_2=0.2, \beta_1=0.4, \beta_2=0.6$



$k=1.2, p=2.8, m_1=1.35, m_2=1.45$
$\alpha_1=0.2, \alpha_2=0.2, \beta_1=0.4, \beta_2=0.6$

XULOSA

“Ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya masalalarini sonli modellashtirish” mavzusidagi dissertatsiya bo‘yicha olib borilgan tadqiqot natijalarining xulosalari quyidagilardan iborat:

1. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan muhitda nochiziqli parabolik tipdagi nodivergent tenglama hamda tenglamalar sistemalari bilan ifodalanuvchi issiqlik diffuziyasi va filtratsiya jarayonlarining sifat xossalari tadqiq etildi. Shuningdek, nodivergent kross-diffuziya jaryonlarni ifodalovchi nochiziqli parabolik tipdagi nodivergent tenglama va tenglamalar sistemasi uchun sonli hisoblash uchun zarur bo‘lgan boshlang‘ich yaqinlashish masalasi hal qilingan.

2. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan muhitda o‘zgaruvchan zichlikka ega hamda ega bo‘lmagan parabolik tipdagi nodivergent tenglama va tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining avtomodel yechimlari asimptotikasining bosh hadlari topilgan.

3. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan muhitda o‘zgaruvchan zichlikka ega hamda ega bo‘lmagan parabolik tipdagi nodivergent tenglama va tenglamalar sistemasi yordamida ifodalanuvchi nodivergent kross-diffuziya modelining sekin hamda tez diffuziya holida yechimning nochiziqli muhit parametrlariga bog‘liq ravishda globallik va global bo‘lmaslik shartlari topilgan.

4. Saqlanish qonuniga muvofiq, balans usuliga asoslanib, issiqlik diffuziyasi va filtratsiya masalalari uchun bir hamda ko‘p o‘lchovli hollar uchun ayirmali sxemalar va interatsion jarayon qurilgan hamda sonli hisoblashlar bajarilgan.

5. Nodivergent kross-diffuziya modelini ifodalovchi nochiziqli parabolik tipdagi tenglamalar sistemasini sonli yechish va hisoblash eksperimenti natijalarini vizuallashtirish uchun algoritmlar hamda dasturiy vositalar ishlab chiqilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ХАСАНОВ ЖАМШИД ОЗОДОВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ НЕДИВЕРГЕНТНОЙ КРОСС-ДИФФУЗИИ В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2023.2.PhD/FM902.

Диссертация выполнена в Ургенчский государственный университет.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале “ZiyoNet” (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Арипов Мерсаид Мирсиддикович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Утеулиев Нитбой Утеулиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Хайдаров Абдугаппар кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится «___» _______ 2023 г. в ______часов на заседании научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.:(+99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21; e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована №___). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «__» _________ 2023 года.
(протокол рассылки №_________ от «__» _________ 2023 года.)

Б.Ф.Абдурахимов
Зам. председателя научного совета по
присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь научного совета по присуждению
ученых степеней, д.ф.-м.н.

А.С.Матякубов
Председатель научного семинара при научном совете
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. На сегодняшний день исследования уравнений и систем уравнений, описывающие процесс диффузии, считаются актуальными и необходимыми в мировом масштабе и широко применяются во многих областях науки и техники, в частности, в механике, физике, технике, экологии, биофизике, биологии, медицине и других областях. Нашими учеными было отмечено, что можно построить математические модели, выражая их с помощью различных сложных математических уравнений и систем уравнений. Большое количество процессов представлено нелинейными дифференциальными уравнениями и системами дифференциальных уравнений параболического типа и являются объектом исследования таких процессов, как процессы переноса солей и пыли, процессы диффузии тепла, фильтрации в пористом грунте, движение крови в мелких кровеносных сосудах, испарительная диффузия отходов, биологические процессы, рост населения и миграция. Поэтому исследование нелинейных математических моделей недивергентных кросс-диффузионных процессов в двухкомпонентных средах, построение эффективных схем и алгоритмов численного решения и создание программного обеспечения остаются одной из важных задач прикладной математики.

В настоящее время во всем мире широко исследуются математические модели процессов кросс-диффузии, характеризуемые недивергентными уравнениями и системами уравнений параболического типа. Одна из основных причин этого заключается в том, что указанные выше и многие другие процессы могут быть более точно описаны с помощью недивергентных уравнений и систем уравнений, а математические модели этих процессов широко исследуются. Математические модели таких кросс-диффузионных процессов широко используются для представления нелинейной теплопроводности, фильтрации газов и жидкостей, процессов биологической популяции и многих других процессов, в которых коэффициенты диффузии взаимосвязаны. Поэтому изучение качественных свойств нелинейных математических моделей недивергентных кросс-диффузионных процессов в двухкомпонентных средах, построение схем и алгоритмов численного решения и создание их программного обеспечения являются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране большое внимание уделяется таким актуальным направлениям, как математическое моделирование химических, сейсмологических, биологических и биофизических процессов, имеющих научное и практическое применение фундаментальных наук, развитие численных методов. В связи с этим были достигнуты значительные результаты в математическом моделировании, в определении качественных свойств нелинейных математических моделей и в развитии численно-аналитических методов решения таких процессов, как соле-пылеперенос в окружающей среде, фильтрация в пористой почве в механике, движение крови в мелких кровеносных сосудах в медицине, в распространении тепла, в биологической популяции. Определены задачи проведения научных исследований на уровне международных стандартов по таким приоритетным направлениям, как «функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика»[1]. В исследовании и применении на практике качественных свойств нелинейных математических моделей недивергентных кросс-диффузионных процессов в двухкомпонентных средах важную роль играют: нахождение главного члена асимптотики автомодельных решений в одномерном и многомерном случаях системы уравнений, описывающих недивергентный кросс-диффузионный процесс с источником или без источника и с переменной плотностью, определение оценок решений, создание комплекса прикладных программ, позволяющих изучение математических моделей нелинейных процессов. Этим и объясняется актуальность темы рассматриваемой диссертации.

Настоящее диссертационное исследование служит в определенной мере реализации задач, определенных в решениях Постановления Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года № ПФ-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № ПФ-60 от 28 января 2022 года постановление «О Стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», №PQ-2789 от 17 февраля 2017 года «Организация, управление и финансирование деятельности Академии наук, научно-исследовательских работ о мерах по дальнейшему совершенствованию», PQ-2909 от 20 апреля 2017 г. «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования»,№ PQ-3682 от 27 апреля 2018 г. -«О мерах по дальнейшему совершенствованию системы внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № PQ-4708 от 7 мая 2020 г. «Повышение качества образования в области математики и научных исследований» и иных нормативных правовых документов, относящиеся к данной деятельности.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы Изучение недивергентного нелинейного уравнения параболического типа и исследование свойств его решений было начато Fridmanom и Makleodom. Позже Deng W., Zhou L., Li Y., Xie Ch. Wei Y., Lu H., Duan Z., Wang M., Wu M., Sun Y., Huiling Li, Shi Y., Koichi Anadaa, Yang Zhang, Juntang Ding, Shengjia Li и др. продолжили исследования в этом направлении. Основное внимание научных исследований было направлено на существование глобального решения, изучение свойств неограниченного решения за конечное время. Примером этого являются

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан от 7 мая 2020 года №PQ-4708 «О мерах по повышению качества образования в области математики и развитию научных исследований» (https://lex.uz/docs/4807552).

работы А.А.Самарского, А.С.Калашникова, В.А.Галактионова, А.П.Михайлова, Б.И.Баренблатта, J.L.Lions, Daniela Giachetti, Pan Zheng, J. Vazgues, Ansgar Jüngel, L.Rossi, Juntang Ding. Также, в исследованиях зарубежных ученых, таких как Wiegner M., Winkler M., Gage E., Angenent S., Jin Ch., Yin J., Yunzhu Gao, Qiu Meng, Yingjia Guo, Zhi-wen Duan, Li Zhou были определены асимптотика решений, неограниченность решений, эффект диффузии с конечной скоростью и пространственной локализации диффузии тепла, существование конечного времени процесса воздействия в нелинейных средах с источником или стоком.

В Узбекистане задачами нелинейной диффузии занимались Н.Мухитдинов, Б.М.Худжаяров, А.С.Расулов, М.Арипов, Н.Равшанов, Дж.Тохиров, О.Гасанов, Г.Орозбоев, Б.Бабаджанов и их ученики – различными задачами для уравнений Кортвега-де Фриза. Их основные работы посвящены численному исследованию свойств решений задач нелинейной диффузии, представленных системой дифференциальных уравнений, и эти методы могут быть применены к моделированию процессов фильтрации, диффузии и теплопроводности. С научными работами по недивергентным уравнениям и системам уравнений занимались М.М.Арипов, А.А.Матякубов, Ш.Садуллаева, Д.Мухаммадиева, З.Р.Рахманов, Ж.Раимбеков, Д.Раупов, М.Ходжимуродова. В их работах, на основе автомодельного анализа, исследованы качественные свойства решений нелинейных задач, представляющих процессы, происходящие в различных областях естествознания, и представлен анализ с численными результатами.

В Узбекистане Ф.Б.Абуталиев, Н.Мухитдинов, М.М.Арипов, Б.Х.Худжаёров, А.С.Расулов, Н.Равшанов, Ж.Тохиров, Н.Утеулиев, А.С.Матякубов, Ш.А.Садуллаева, З.Р.Рахмонов, Д.К.Мухамедиева и другие ученые занимались численным решением и исследованием новых свойств математических моделей, представляющих различные процессы нелинейной диффузии, фильтрации и теплопроводности. Их основные работы посвящены численному исследованию решения системы уравнений нелинейной диффузии и могут быть применены к моделированию процессов переноса тепла, фильтрации, кросс-диффузии и биологической популяции. Работы М.М.Арипова основаны на методах нелинейного расщепления и эталонных уравнений, как эффективные методы исследования нелинейных задач. В этих работах, на основе автомодельного анализа, были исследованы качественные свойства решений нелинейных задач, представляющих процессы, встречающиеся в различных областях естествознания. Результаты моделирования нелинейных кросс-диффузионных процессов, анализа решений, анализа существующих методов и алгоритмов показывают, что моделирование нелинейных процессов требует разработки методов для более глубокого и полного исследования теоретических и практических задач.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках научно-исследовательских проектов Национального Университета Узбекистана по теме ОТ-Ф4-30 - «Исследование качественных свойств решений кросс систем с двумя нелинейностями, конвективным переносом, переменной плотностью, источником или поглощением» (2017-2020 гг).

Целью исследования является построение численно-аналитических методов и алгоритмов решения недивергентных задач кросс-диффузии в двухкомпонентных средах, а также создание программного обеспечения.

Задачи исследования:

- нахождение условий глобальности и неглобальности во времени решений нелинейной модели, представляющей недивергентный процесс кросс-диффузии в случае медленной и быстрой диффузии в случаях с источником и без него и переменной плотностью;
- нахождение главного члена асимптотики автомодельных решений нелинейной математической модели, представляющей недивергентный кросс-диффузионный процесс;
- решение задачи нахождения начального приближения, необходимого для численного расчета нелинейных задач, представляющей недивергентный кросс-диффузионный процесс с источником и переменной плотностью;
- построение численных расчетных схем для исследования качественных свойств нелинейных математических моделей недивергентных кросс-диффузионных процессов с источником и переменной плотностью;
- разработка комплекса программ для решения поставленной задачи, а также визуализация полученных решений.

Объектом исследования состоит из недивергентных кросс-диффузионных процессов в двухкомпонентных средах.

Предмет исследования состоит из математических моделей недивергентных кросс-диффузионных процессов в двухкомпонентных средах, численных схем и алгоритмов численного решения и программного обеспечения.

Методы исследования. В диссертации использовались алгоритм нелинейного расщепления, автомодельные, приближенно-автомодельные и асимптотические методы, метод эталонных уравнений, теоремы сравнения решений, методы итерации и прогонки.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдены условия глобальности и неглобальности по времени решений нелинейной математической модели, представляющей процесс недивергентной кросс-диффузии в случае медленной и быстрой диффузии в случаях с источником и без него и переменной плотностью;

найден главный член асимптотики автомодельных решений нелинейной математической модели, представляющей недивергентный процесс кросс-диффузии;

решена задача нахождения начального приближения, необходимой для численного расчета нелинейных задач, представляющих собой недивергентный процесс кросс-диффузии, с источником и переменной плотностью;

построены численные расчетные схемы для исследования качественных свойств нелинейных математических моделей недивергентных кросс-диффузионных процессов с источником и переменной плотностью;

в критических случаях найдены условия глобальности и неглобальности во времени решений медленной и быстрой диффузии нелинейной математической модели, представляющей недивергентный кросс-диффузионный процесс с источником и переменной плотность.

Практические результаты исследования следующие:

получены глобальные решения и асимптотика автомодельных решений задач, описывающих недивергентные кросс-диффузионные процессы с источником и без него и с переменной плотностью;

построены численные решения задач, описывающих недивергентные кросс-диффузионные процессы с источником и без него, с переменной плотностью и создан комплекс программ.

Достоверность результатов исследований.

Утверждения, полученные в диссертационной работе, строго доказаны на основе теорем сравнения и принципа максимума и подтверждены результатами вычислительных экспериментов, основанных на соответствии полученных результатов законам сохранения.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется использованием методов построения автомодельных решений, асимптотических формул, численных схем и алгоритмов решения при численном и аналитическом решении моделей процессов распространения вирусов, фильтрации газов и жидкостей, диффузии и теплопроводности.

Практическая значимость результатов исследований объясняется тем, что построенные итерационные процессы, созданная схема численного расчета и программное обеспечение, позволяют проводить эффективные вычислительные эксперименты для исследования процессов нелинейной теплопроводности, фильтрации газов и жидкостей, диффузии, распространения вирусов и биологической популяции.

Внедрение результатов исследования.

Научные результаты, полученные при численном моделировании задач недивергентной кросс-диффузии в двухкомпонентных средах, реализуются на практике в следующих направлениях:

алгоритмы численно-аналитического решения недивергентных задач кросс-диффузии в двухкомпонентных средах и условия существования глобального решения использовались при получении условий существования решения и при численном моделировании в грантовом проекте OT-Atex-2O18-340 ‘‘Ikki tezlikli muhit dinamikasining amaliy geofizik masalalarini nazariy va sonli tadqiq etish (Теоретическое и численное исследование прикладных геофизических задач динамики двухскоростных сред) (справка 03/1884 от 5 мая 2023 года Каршинского государственного университета). В результате удалось получить условия существования глобального решения практических геофизических задач двухскоростной динамики среды и создать пакет прикладных программ для численного моделирования;

алгоритмы численного и аналитического решения недивергентных задач кросс-диффузии в двухкомпонентных средах, методы нахождения верхних оценок асимптотики автомодельных решений БВ-Атекс-2018(399+487) "Создание пакета практических программ для численного моделирование диффузионных процессов в двухкомпонентных средах» в двухкомпонентных средах, используемых при численном моделировании недивергентных кросс-диффузионных процессов (Отчет № 01-194/23 от 19 мая 2023 г. Совместной междисциплинарной технической квалификации Беларуси и Узбекистана института). В результате это позволило создать пакет практических программ для численного моделирования диффузионных процессов в двухкомпонентной среде;

методы нахождения начального приближения, необходимого для численного расчета нелинейных задач, представляющих недивергентные кросс-диффузионные течения с источником и переменной плотностью, были использованы для теоретического и численного решения задач прикладной геофизики двухскоростной динамики среды в грантовом проекте РФФИ-20-01-00293 Удмуртской Государственный университет Российской Федерации (Удмуртский государственный университет Российской Федерации, номер отчета 7873-3980/32 от 2023 г.). В результате удалось решить задачу начального приближения для итерационного процесса, используемого при теоретическом и численном решении практических геофизических задач двухскоростной динамики среды.

Апробация результатов исследований. Результаты данного исследования были обсуждены на 9 научно-практических конференциях, в том числе, на 7 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, 7 из них входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, 4 из них опубликованы в зарубежных журналах (2-в базе данных scopus) и 3 в республиканских научных изданиях. Получены также 2 свидетельства о регистрации программных средств, созданных для ЭВМ

Структура и объем диссертации. Структура диссертации состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 107 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, отмечено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, описана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, указаны объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, даны сведения об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется **«Математические модели недивергентного кросс-диффузионного процесса»**.

В первой главе диссертации «Математические модели недивергентного кросс-диффузионного процесса» приведена общая постановка задачи, посвящена изучению особенностей математической модели недивергентного кросс-диффузионного процесса и обзор результатов местных и международных исследований. Параграф 1.2. содержит основные определения и вспомогательные утверждения.

В параграфе 1.3 приведены качественные свойства решений нижеследующей задачи Коши для параболического уравнения, представляющего собой следующий процесс недивергентной диффузии с переменной плотностью и источником в области $Q=\{(t,x):t>0,x\in R\}$

$$|x|^{-l}\frac{\partial u}{\partial t}=u^{q}\frac{\partial}{\partial x}\left(|x|^{n}u^{m-1}\left|\frac{\partial u^{k}}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+|x|^{-l}u^{\beta} \tag{1}$$

$$u(0,x)=u_0(x)\geq 0,\ x\in R\ . \tag{2}$$

Здесь $n,l,k,q,\beta>0, p\geq 2, m\geq 1$ числовые параметры, $u=u(t,x)\geq 0$ искомое неотрицательное решение, $u_0(x)$ ограниченная непрерывная неотрицательная функция. Известно, что уравнение (1) является вырождающим и может не иметь решения в классическом смысле при $u(t,x)=0$ или $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|=0$. Поэтому решение задачи (1),(2) рассматривается как обобщенное решение в классе $\left(|x|^{n}u^{m-1}\left|\frac{\partial u^{k}}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\in C\left(R_{+}\times(0,+\infty)\right), u\geq 0$, и это решение удовлетворяет уравнению (1) в смысле интеграла или распределения. При разных значениях параметров задача (1),(2) представляет множество физических и биологических процессов. При различных значениях параметров задача (1),(2) представляет множество физических и биологических процессов. Ищем решение задачи (1), (2) в следующем виде.

$$u(t,x)=\bar{u}(t)\cdot z\left(\tau(t),\varphi(|x|)\right),$$

$$\bar{u}(t)=\left(T+(1-\beta)t\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \qquad \tau(t)=\frac{\bar{u}^{q+m+k(p-2)-\beta}}{q+m+k(p-2)-\beta}$$

$$\varphi(|x|)=\begin{cases}\dfrac{p}{p-l-n}|x|^{\frac{p-l-n}{p}}, если\ p\neq l+n\\ \ln|x| \qquad\qquad , если\ p=l+n\end{cases}, s=\frac{p(1-l)}{p-l-n},$$

$$z\left(\tau(t),\varphi(|x|)\right)=f(\xi), \xi=\frac{\varphi}{\tau^{\frac{1}{p}}}$$

Используя алгоритм нелинейного расщепления, мы получим из уравнения (1) следующее автомодельное уравнение.

$$-\frac{\xi}{p}\frac{df}{d\xi}=f^{q}\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{1-s}f^{m-1}\left|\frac{df^{k}}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{1}{\left(q+m+k(p-2)-\beta\right)}\left(f^{\beta}-f\right). \quad (3)$$

Теперь, ищем неотрицательное нетривиальное решение автомодельного уравнения (3), удовлетворяющее нижеследующим условиям

$$f(0)=M\ , M\in R,\ f(d)=0, 0<d<\infty. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть для числовых параметров задачи (1)-(2) выполняется неравенство $\beta<q+m+k(p-2)$ и одно из следующих неравенств

$$1)\, q>1,\ l<1,\ p>n+1,\quad 2)\, q>1,\ l>1,\ p<n+1$$

$$3)\, q<1,\ l<1,\ p<n+l,\quad 4)\, q<1,\ l>1,\ p>n+l$$

и пусть $u(0,x)\leq u_{+}(0,x),\ \ x\in R$. Тогда существует глобальное решение задачи (1), (2), определенное в области Q, для которого справедлива следующая оценка $u(t,x)\leq u_{+}(t,x)$.

Здесь $u_{+}(t,x)=f(\xi)\cdot\bar{u}(t),\ f(\xi)=A\left(a-\xi^{\gamma_1}\right)^{\gamma_2},\ \gamma_1=\dfrac{p}{p-1},\ \ a=const>0,$

$$\gamma_2=\frac{p-1}{m+k(p-2)+q-1}, \qquad A=\left(\frac{m+q+p+k(p-2)-1}{p\left(p(1-q)k^{p-2}\right)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{m+q+k(p-2)-1}.$$

Параграф 1.4 посвящен изучению качественных свойств недивергентного кросс-диффузионного процесса.

Рассмотрим в $Q=\left\{(t,x):t>0, x\in R^{N}\right\}$ задачу Коши для кросс-диффузионной системе уравнений в недивергентной форме:

$$|x|^{n}\frac{\partial u_i}{\partial t}=u_i^{\alpha_i}\nabla\left(u_{3-i}^{m_i-1}\left|\nabla u_i^{k}\right|^{p-2}\nabla u_i\right) \quad (5)$$

$$u_i(0,x)=u_{0,i}(x),\ x\in R^{N} \quad (6)$$

Здесь $k \ge 0, p \ge 2, m_i \ge 1, \alpha_i \ge 0 \left(i = 1,2\right)$ параметров, $\nabla(\cdot) = grad_x(\cdot)$, $u_i = u_i\left(t,x\right) \ge 0$ неотрицательные решения, $u_{0,i}\left(x\right)$-ограниченные, непрерывные, неотрицательные функции.

Решение задачи (5)-(6) ищем в следующем виде, т.е.:

$$u_i\left(x,t\right) = \left(T+t\right)^{\gamma_i} \cdot f_i\left(\xi\right),\ \overline{f}_i\left(\xi\right) = A_i\left(a-\xi^l\right)_+^{l_i}, l = \frac{p+n}{p-1},\ A_i, \left|x\right| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} x_j^2}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_1\left(k\left(p-2\right)-\alpha_1\right)+\gamma_2\left(m_1-1\right)+1}{p+n},$$

$$a>0,\ l_i = \frac{\left(p-1\right)\left(k\left(p-2\right)+\alpha_{3-i}-m_i+1\right)}{\left(k\left(p-2\right)+\alpha_i\right)\left(k\left(p-2\right)+\alpha_{3-i}\right)-\left(m_i-1\right)\left(m_{3-i}-1\right)}\left(i=1,2\right)$$

В результате была построена следующая система автомодельных уравнений

$$f_i^{\alpha_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f_{3-i}^{\ m_i-1}\left|\frac{df_i^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df_i}{d\xi}\right)+\gamma\xi^{n+1}\frac{df_i}{d\xi}-\gamma_i f_i = 0\left(\ i=1,2\right). \qquad (7)$$

Теперь ищем нетривиальные, неотрицательные решения системы уравнений (7), удовлетворяющих следующим условиям

$$\begin{gathered} f_1\left(0\right) = M_1,\ f_2\left(0\right) = M_2, M_1 \in R, M_2 \in R \\ f_1\left(d_1\right) = f_2\left(d_2\right) = 0,\ 0<d_1<\infty,\ 0<d_1<\infty. \end{gathered} \qquad (8)$$

Теорема 2. (Условие глобальности). Пусть $l_i > 0$,

$$A_i^{\alpha_i+k\left(p-2\right)} \cdot A_{3-i}^{m_i-1} l\left|ll_ik\right|^{p-2} = \frac{\gamma}{l_i\left(k\left(p-2\right)+1\right)+l_{3-i}\left(m_i-1\right)-p+1},$$

$$-\frac{\gamma\left(N+n\right)l_i}{l_i\left(k\left(p-2\right)-\alpha_i\right)+l_{3-i}\left(m_i-1\right)+1}-\gamma_i \le 0,$$

$$u_i\left(t,0\right) \le u_{i+}\left(t,0\right),\ x\in R^N\ \left(i=1,2\right).$$

Тогда задача (5)-(6) имеет глобальное решение в области Q и для нее справедливы следующие оценки

$$u_i\left(t,x\right) \le u_{i+}\left(t,x\right) = \left(T+t\right)^{\gamma_i}\ \overline{f}_i\left(\xi\right)\ \ i=1,2\ .$$

Прежде чем излагать теоремы и результаты, основанные на изучении асимптотики решения автомодельной системы уравнений, введем следующие обозначения

$$a_{1i}\left(\eta\right) = -l_{i+2}+\frac{\left(N+n\right)e^{-\eta}}{l\left(a-e^{-\eta}\right)},\ a_{2i}\left(\eta\right) = \frac{\gamma}{l^{p-2}},\ a_{3i}\left(\eta\right) = \frac{\gamma_i e^{-\eta}}{\gamma^p\left(a-e^{-\eta}\right)}$$

$$l_{i+2} = l_{3-i}\left(m_i-1\right)+\left(l_ik-1\right)\left(p-2\right)+l_i-1\left(i=1,2\right).$$

Теорема 3. Пусть $l_i > 0$. Тогда решение с компактным носителем задачи (7),(8), при $\xi \to a^{\frac{p-1}{p+n}}$, имеет следующие асимптотики

$$f_i(\xi)=c_i\left(a-\xi^l\right)^{l_i}\left(1+o(1)\right),(i=1,2)$$

где $c_i\left(i=1,2\right)$ соответствующие решения приведенной ниже системы нелинейных алгебраических уравнений

$$a_{i1}\cdot c_{3-i}^{m_i-1}c_i^{k(p-2)+1}l_i^{p-1}k^{p-2}+a_{i2}\cdot c_i^{1-\alpha_i}=0\ .$$

Следствие 1. При выполнении неравенства $l_i>0$, обобщенное решение задачи (5),(6), при $|x|\to a^{\frac{p-1}{p+n}}\left(T+t\right)^{\gamma}$, имеет следующую асимптотику

$$u_A(x,t)\approx c_i\left(T+t\right)^{\gamma_i}\left(a-\left(\frac{|x|}{\left(T+t\right)^{\gamma}}\right)^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{l_i}\left(1+o(1)\right),$$

где $c_i\left(i=1,2\right)$ определенные выше константы.

Параграф 2.1 второй главы диссертации “**Математическое моделирование недивергентных кросс-диффузионных процессов под действием источника в двухкомпонентной среде**” посвящен изучению свойств решений системы недивергентных параболических уравнений с одномерным источником.

Здесь рассматривается задача Коши для системы недивергентных параболических уравнений с источником, заданных в области $Q=\left\{(t,x):\ t>0,\ x\in R\right\}$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=u_i^{\alpha_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{\partial u_i^k}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)+u_i^{\beta_i} \qquad (9)$$

$$u_i(0,x)=u_{0,i}(x),x\in R\quad . \qquad (10)$$

Здесь $\alpha_i,k,\beta_i>0,p\geq 2,m_i\geq 1(i=1,2)$ численные параметры, $u_i=u_i(t,x)\geq 0$ решения, которые нужно найти.

Здесь решения системы (9) ищутся в форме $u_i(t,x)=\bar{u}_i(t)\cdot w_i\left(\tau(t),x\right)$.

$$\bar{u}_i(t)=\left(T+t\right)^{\frac{1}{1-\beta_i}},\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{\left(T+t\right)^{\sigma}}{\sigma}\ ,\sigma\neq 0\\ \ln\left(T+t\right)\ ,\ \ \sigma=0\end{cases}$$

$$\psi_i=\left(\frac{k(p-2)+\alpha_i}{1-\beta_i}+\frac{m_i-1}{1-\beta_{3-i}}+1\right)^{-1},\ w_i(x,\tau)=\ f_i(\xi),\xi=\frac{|x|}{\tau^{\frac{1}{p}}}$$

$$T>0,\sigma=\frac{k(p-2)+\alpha_1}{1-\beta_1}+\frac{m_1-1}{1-\beta_2}+1=\frac{k(p-2)+\alpha_2}{1-\beta_2}+\frac{m_2-1}{1-\beta_1}+1\ .$$

Функции $f_i(\xi)$ являются решениями следующей системы автомодельных уравнений

$$f_i^{\alpha_i}\frac{d}{d\xi}\left(f_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{df_i^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df_i}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{p}\frac{df_i}{d\xi}+\psi_i\left(f_i^{\beta_i}-\frac{1}{1-\beta_i}f_i\right)=0 \qquad (11)$$

Находим нетривиальные, неотрицательные решения системы автомодельных уравнений (11), удовлетворяющие следующим условиям

$$f_i'(0)=0,\ f_i(\infty)=0\ . \qquad (12)$$

Здесь $f_i(\xi)=A_i\left(a+\xi^{\gamma}\right)_+^{\gamma_i}$, а его коэффициенты определяются следующим образом

$$a>0,\gamma_i=\frac{(p-1)\left(k(p-2)+\alpha_{3-i}-m_i+1\right)}{\left(k(p-2)+\alpha_i\right)\left(k(p-2)+\alpha_{3-i}\right)-(m_i-1)(m_{3-i}-1)},\gamma=\frac{p}{p-1},\ A_i,n_i=\frac{1}{1-\beta_i}\ (i=1,2)$$

$$A_i^{\alpha_i+k(p-2)}A_{3-i}^{m_i-1}=\frac{\dfrac{\gamma\gamma_i}{p}+\dfrac{\psi_i}{1-\beta_i}}{\gamma\gamma_i\left|\gamma\gamma_i\right|^{p-2}\left(\gamma\gamma_{i+2}-1\right)},\ \gamma_{i+2}=(\gamma_i k-1)(p-2)+\gamma_{3-i}(m_i-1)+\gamma_i-1.$$

Быстрая диффузия ($\gamma_i<0$). Условия глобальности решения.

Теорема 4. Пусть $\gamma_i<0$,

$$\gamma\gamma_{i+2}A_i^{\alpha_i+k(p-2)}\cdot A_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}\left|\gamma\gamma_i\right|^{p-2}=-\frac{1}{p},$$

$$\psi_i\left(A_i^{\beta_i-1}a^{\gamma_i\beta_i-\gamma_i}-\frac{1}{1-\beta_i}\right)-\frac{\gamma_i}{p\gamma_{i+2}}\geq 0,$$

$$u_i(t,0)\geq u_{i-}(t,0)\ ,x\in R\ (i=1,2)$$

Тогда задача (9),(10) имеет глобальное решение в области Q и для нее справедлива следующая оценка

$$u_i(t,x)\geq u_{i-}(t,x)=(T+t)^{n_i}\ \overline{f}_i(\xi).$$

Прежде чем излагать теоремы и результаты, основанные на изучении асимптотики решения автомодельной системы уравнений, введем следующие определения

$$a_{1i}(\eta)=\gamma_{i+2}+\frac{e^{\eta}}{\gamma\left(a-e^{\eta}\right)},\ a_{2i}(\eta)=\frac{1}{p\gamma^{p-1}e^{\eta}},\ a_{3i}(\eta)=\frac{\psi_i e^{-(1-\gamma_i+\gamma_i\beta_i)\eta}}{\gamma^p\left(a-e^{-\eta}\right)}$$

$$a_{4i}=\frac{\psi_i e^{-\eta}}{(1-\beta_1)\gamma^p\left(a-e^{-\eta}\right)}\ (i=1,2)\ .$$

Теорема 5. Пусть $\gamma_i<0$. Тогда исчезающие на бесконечности решения задачи (11), (12) при $\xi\to\infty$ имеют асимптотику

$$f_i(\xi)=c_i\left(a+\xi^{\gamma}\right)^{\gamma_i}\left(1+o(1)\right)(\ i=1,2)$$

где $c_i\ (i=1,2)$ соответствующие решения приведенной ниже системы нелинейных алгебраических уравнений

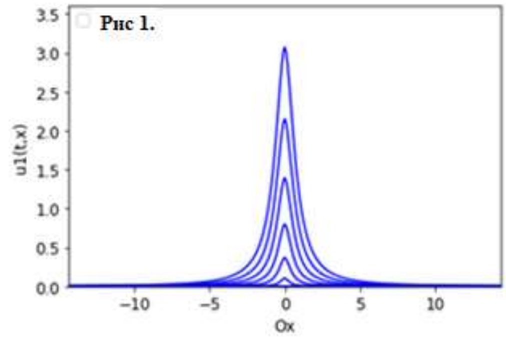
$$a_{i1}c_i^{k(p-2)+1}c_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}\gamma_i^{p-1}+a_{i2}\gamma_i c_i^{1-\alpha_i}+a_{i4}c_i^{1-\alpha_i}=0.$$

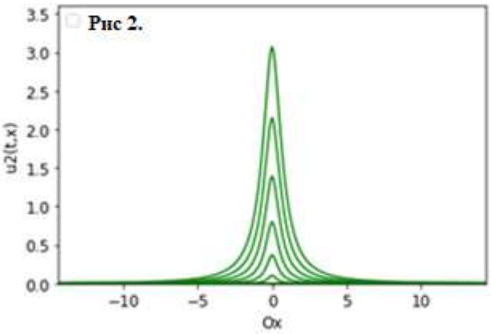
Следствие 2. При выполнении неравенства $\gamma_i<0$ обобщенные решения задачи (9), (10) в $\xi\to\infty$ имеют следующую асимптотику.

$$u_{iA}(x,t)\approx c_{i+2}(T+t)^{n_i}\left(a+\xi^{\gamma}\right)^{\gamma_i}\left(1+o(1)\right),$$

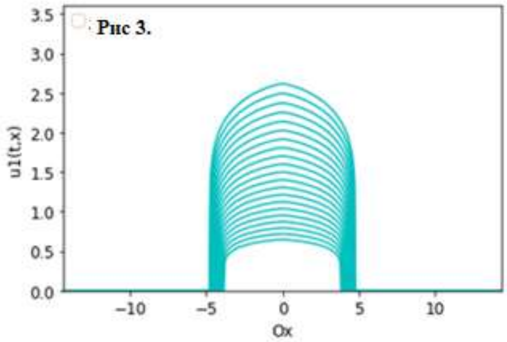
где $c_i\,(i=1,2)$ определенные выше константы.

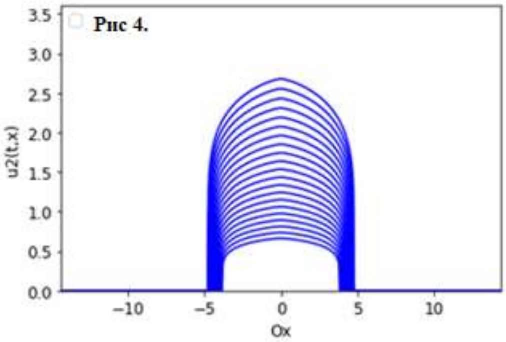
В параграфе 2.2 задача (9), (10) рассматривается в многомерном случае, приведенная выше теорема и полученные из них результаты также представлены в многомерном случае. В параграфе 2.3 для задачи (9), (10) разработана разностная схема, получены и визуализированы численные результаты с помощью языка программирования Python.





$$k=4.1, p=2.2, m_1=1.32, m_2=1.48$$
$$\alpha_1=0.32, \alpha_2=0.35, \beta_1=0.6, \beta_2=0.5$$





$$k=0.8, p=3.8, m_1=2.25, m_2=2.34$$
$$\alpha_1=2.82, \alpha_2=2.65, \beta_1=0.6, \beta_2=0.4$$

В зависимости от значений параметров, графики (1),(2) показывают процесс быстрой диффузии, а графики (3),(4)-процессы медленной диффузии.

Третья глава диссертации называется “**Математическое моделирование процессов кросс-диффузии, выражающихся системой недивергентных параболических уравнений с источником и переменной плотностью**”.

В параграфе 3.1рассматривается задача Коши,

$$|x|^n\frac{\partial u_i}{\partial t}=u_i^{\alpha_i}\nabla\left(u_{3-i}^{m_i-1}\left|\nabla u_i^k\right|^{p-2}\nabla u_i\right)+|x|^n u_i^{\beta_i} \tag{14}$$

$$u_i(0,x)=u_{0,i}(x),\, x\in R^N\,(i=1,2) \tag{15}$$

для системы недивергентных параболических уравнений с источником и переменной плотностью в области $Q=\left\{(t,x):t>0,x\in R^N\right\}$.

Ищем решение в следующем виде: $u_i(t,x)=\bar{u}_i(t)\cdot w_i(\tau(t),r)$,

$$\bar{u}_i(t)=(T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}},\psi_i=\left(\frac{k(p-2)+\alpha_i}{1-\beta_i}+\frac{m_i-1}{1-\beta_{3-i}}+1\right)^{-1},$$

$$T>0,\sigma=\frac{k(p-2)+\alpha_1}{1-\beta_1}+\frac{m_1-1}{1-\beta_2}+1=\frac{k(p-2)+\alpha_2}{1-\beta_2}+\frac{m_2-1}{1-\beta_1}+1$$

$$\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{(T+t)^\sigma}{\sigma}, & \sigma\neq 0\\ \ln(T+t), & \sigma=0\end{cases},w_i(x,\tau)=f_i(\xi),\xi=\frac{r}{\tau^{\frac{1}{p+n}}}.$$

В результате была построена следующая система автомодельных уравнений

$$f_i^{\alpha_i}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{df_i^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df_i}{d\xi}\right)+\frac{\xi^{n+1}}{p}\frac{df_i}{d\xi}++\psi_i\xi^n\left(f_i^{\beta_i}-\frac{1}{1-\beta_i}f_i\right)=0. \quad (16)$$

Теперь находим нетривиальные, неотрицательные решения системы уравнений (16), удовлетворяющих условиям (8).

Медленная диффузия. Условия глобальности решения.

Для этого ищем решение $u_{i+}(t,x)$ в следующем виде.

$$u_{i+}(t,x)=(T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}}\bar{f}_i(\xi),\ \bar{f}_i(\xi)=A_i\left(a-\xi^\gamma\right)_+^{\gamma_i}$$

$$a>0,\ \gamma_i=\frac{(p-1)\left(k(p-2)+\alpha_{3-i}-m_i+1\right)}{\left(k(p-2)+\alpha_i\right)\left(k(p-2)+\alpha_{3-i}\right)-(m_i-1)(m_{3-i}-1)},\gamma=\frac{p+n}{p-1},\ A_i\ (i=1,2)$$

$$A_i^{\alpha_i+k(p-2)}A_{3-i}^{m_i-1}=\frac{\dfrac{\gamma\gamma_i}{p+n}+\dfrac{\psi_i}{1-\beta_i}}{\gamma\gamma_i|\gamma\gamma_i|^{p-2}(\gamma\gamma_{i+2}-N-n)},\quad \begin{array}{l}\gamma_{i+2}=(\gamma_i k-1)(p-2)+\\ +\gamma_{3-i}(m_i-1)+\gamma_i-1\end{array}$$

Теорема 6. Пусть $\gamma_i>0$,

$$\gamma\gamma_{i+2}A_i^{\alpha_i+k(p-2)}\cdot A_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}|\gamma\gamma_i|^{p-2}=\frac{1}{p+n},$$

$$\psi_i\left(A_i^{\beta_i-1}a^{\gamma_i\beta_i-\gamma_i}-\frac{1}{1-\beta_i}\right)-\frac{\gamma_i(N+n)}{\gamma_{i+2}(p+n)}\leq 0,$$

$$u_i(t,0)\leq u_{i+}(t,0),x\in R^N\ (i=1,2).$$

Тогда задача (14),(15) имеет глобальное решение в области Q и для нее справедливы следующие оценки

$$u_i(t,x)\leq u_{i+}(t,x)=(T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}}\bar{f}_i(\xi),(i=1,2)$$

Прежде чем излагать теоремы и результаты, основанные на изучении асимптотики решения автомодельной системы уравнений, введем следующие обозначения

$$a_{1i}(\eta) = -\gamma_{i+2} + \frac{(N+n)e^{-\eta}}{\gamma\left(a - e^{-\eta}\right)}, \quad a_{2i}(\eta) = \frac{1}{(p+n)\cdot\gamma^{p-1}}$$

$$a_{3i}(\eta) = \frac{\psi_i e^{(\gamma_i - \gamma_i\beta_i - 1)\eta}}{\gamma^p\left(a - e^{-\eta}\right)}, \; a_{4i}(\eta) = \frac{\psi_i e^{-\eta}}{(1-\beta_i)\gamma^p\left(a - e^{-\eta}\right)}$$

$$\gamma_{i+2} = \gamma_{3-i}(m_i - 1) + (\gamma_i k - 1)(p-2) + \gamma_i - 1 \; (i = 1,2)$$

Следствие 3. При выполнении неравенства $\gamma_i < 0$ обобщенные решения задачи (14)-(15) при $\xi \to \infty$ имеют следующую асимптотику

$$u_{iA}(x,t) \approx c_{i+2}(T+t)^{n_i}\left(a + \xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\gamma_i}\left(1 + o(1)\right),$$

где $c_i\,(i=1,2)$ определенные выше константы.

Параграф 3.2 диссертации посвящен исследованию “**Глобального решения и его асимптотику недивергентной задачи кросс-диффузии с источником и переменной плотностью в двухкомпонентных средах в критических случаях**”.

Здесь рассматривается задача Коши для системы недивергентных параболических уравнений с источником, в области $Q = \left\{(t,x):\; t > 0,\; x \in R^N\right\}$.

$$|x|^{-l}\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i^{\alpha_i}\nabla\left(|x|^n u_{3-i}^{m_i-1}\left|\Delta u_i^k\right|^{p-2}\Delta u_i\right) + |x|^{-l}u_i^{\beta_i} \qquad (18)$$

$$u_i(0,x) = u_{0,i}(x),\, x \in R^N \; (i=1,2) \qquad (19)$$

Здесь $l,\, n,\, \alpha_i,\, k,\, \beta_i > 0,\; p \ge 2,\; m_i \ge 1 (i=1,2)$ численные параметры, $u_i = u_i(t,x) \ge 0$ решения, которые нужно найти. Здесь решения системы (18) ищутся в форме $u_i(t,x) = \bar{u}_i(t)\cdot w_i\left(\tau(t), \varphi(|x|)\right)$

$$\bar{u}_i(t) = (T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}}\;(i=1,2), \psi_i = \left(\frac{k(p-2)+\alpha_i}{1-\beta_i} + \frac{m_i - 1}{1-\beta_{3-i}} + 1\right)^{-1}$$

$$\tau(t) = \begin{cases} \dfrac{(T+t)^{\sigma}}{\sigma}, & \sigma \ne 0 \\ \ln(T+t), & \sigma = 0 \end{cases}, \varphi(|x|) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\frac{p-(l+n)}{n}}}{\dfrac{p-(l+n)}{n}}, & p \ne l+n \\ \ln|x|, & p = l+n \end{cases},$$

$$T > 0, \sigma = \frac{k(p-2)+\alpha_1}{1-\beta_1} + \frac{m_1 - 1}{1-\beta_2} + 1 = \frac{k(p-2)+\alpha_2}{1-\beta_2} + \frac{m_2 - 1}{1-\beta_1} + 1 \;\; (i=1,2).$$

Пусть $p=l+n$ и $\dfrac{k(p-2)+\alpha_1}{1-\beta_1}+\dfrac{m_1-1}{1-\beta_2}=0$.

Теорема 7. Пусть

$$\gamma\gamma_{i+2}A_i^{\alpha_i+k(p-2)}\cdot A_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}\left|\gamma\gamma_i\right|^{p-2}=\frac{1}{p},$$

$$\frac{1}{p(1-\alpha_i)}+\left(A_i^{\beta_i-1}a^{\gamma_i\beta_i-\gamma_i}-\frac{1}{1-\beta_i}\right)\le 0,$$

$$u_i(t,0)\le u_{i+}(t,0),\, x\in R^N\ (i=1,2).$$

Тогда задача (18), (19) имеет глобальное решение в области $Q\setminus\{0\}$ и для него справедливы следующие оценки

$$u_i(t,x)\le u_{i+}(t,x),(i=1,2).$$

Следствие 4. При выполнении неравенства $\gamma_i>0$ обобщенное решение задачи (18), (19), при $|x|\to a^{\frac{p-1}{p}}\tau^{\frac{1}{p}}$, имеет следующую асимптотику

$$u_{iA}(x,t)\approx c_i(T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}}\left(a-\left(|x|\tau^{-\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\gamma_i}(1+o(1)),$$

где $c_i\ (i=1,2)$ определенные выше константы.

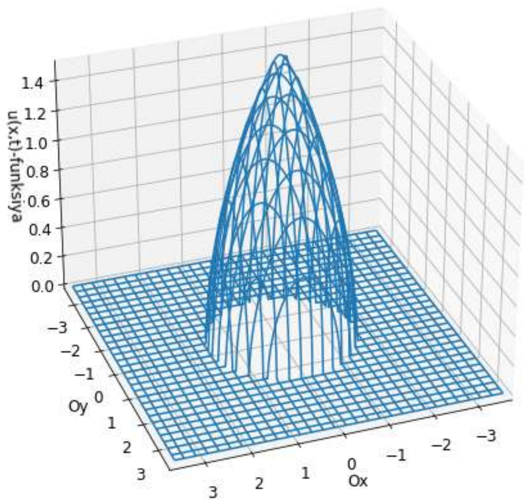
Параграф 3.3 посвящен численному решению задачи (14),(15) в области $Q=\left\{(t,x):t>0,x\in R^N\right\}$, в случае $N=2$.

$$\begin{cases}|x|^n\dfrac{\partial u}{\partial t}=u^{\alpha_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(v^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u^k}{\partial x_1}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)+u^{\alpha_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(v^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u^k}{\partial x_1}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)+|x|^n u^{\beta_1}\\ |x|^n\dfrac{\partial v}{\partial t}=v^{\alpha_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(u^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial v^k}{\partial x_1}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right)+v^{\alpha_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(u^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial v^k}{\partial x_1}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right)+|x|^n v^{\beta_2}\end{cases}$$

$$u(0,x)=u_0(x)\ge 0, v(0,x)=v_0(x)\ge 0,\ x\in R^2 .$$

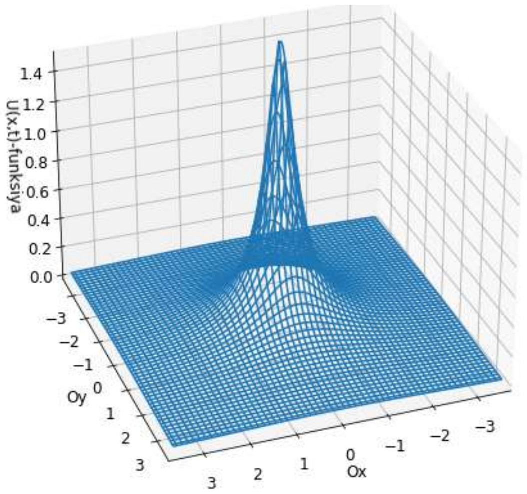
Здесь $u=u(t,x_1,x_2), v=v(t,x_1,x_2)$, $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$.

Для численного решения этой задачи был использован один из методов переменного направления, «продольно-поперечная» разностная схема, иначе говоря, разностная схема «Писмена-Речфорда», и получены численные результаты. На графиках показаны случаи медленной и быстрой диффузии.



$k=1.2, p=6.8, m_1=1.35, m_2=1.45$

$\alpha_1=0.2, \alpha_2=0.2, \beta_1=0.4, \beta_2=0.6$



$k=1.2, p=2.8, m_1=1.35, m_2=1.45$

$\alpha_1=0.2, \alpha_2=0.2, \beta_1=0.4, \beta_2=0.6$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных исследований по диссертации «Численное моделирование задач недивергентной кросс-диффузии в двухкомпонентных средах» представлены следующие выводы:

1. Исследованы качественные свойства процессов диффузии тепла и фильтрации, представленных недивергентными уравнениями и системами уравнений нелинейного параболического типа в однородных и неоднородных средах. Также решена задача нахождения начального приближения, необходимого для численного расчета нелинейных уравнений параболического типа и системы уравнений, представляющих модели недивергентной кросс-диффузии.
2. Найдены главные члены асимптотики автомодельных решений задачи Коши для недивергентных уравнений и систем уравнений параболического типа с переменной плотностью и без него в однородной и неоднородной среде.
3. Найдены условия глобальности и неглобальности решения, при условии независимости от параметров нелинейной среды, в случае медленной и быстрой диффузии, модели недивергентной кросс-диффузии, описываемых недивергентными уравнениями и системами уравнений параболического типа с переменной плотностью и без него в однородной и неоднородной среде
4. На основе метода баланса, по закону сохранения, построены разностные схемы и итерационный процесс для одномерного и многомерного случаев задач диффузии тепла и фильтрации и проведены численные расчеты.
5. Разработаны алгоритмы и программные средства для численного решения системы нелинейных параболических уравнений, представляющих недивергентную модель кросс-диффузии, и визуализации результатов вычислительного эксперимента.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.T.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

URGENCH STATE UNIVERSITY

KhASANOV JAMSHID OZODOVICH

NUMERICAL SIMULATION OF NON-DIVERGENT CROSS-DIFFUSION PROBLEMS IN TWO-COMPONENT MEDIA

05.01.07 – Mathematical modeling. Numerical methods and software complexes

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHISICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2023.2.PhD/FM902.

The dissertation has been prepared at Urgench State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz.)

Scintific superviser:	**Aripov Mersaid Mirsiddiqovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Uteuliev Nietboy Uteulievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Khaydarov Abdugappar Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Leading organization:	**Qarshi State University**

Defense will take place "_____" _________ 2023 at _________ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.T.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resourse centre at National University of Uzbekistan (is registered №____). (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "____" ______________ 2023 year
(Mailing report №. __________ on "____" _____________ 2023 year)

B.F.Abdurakhimov
Deputy chairman of Scientific Council
awarding scientific degrees, d.ph.-m.s., professor

Z. R.Rakhmonov
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, d.ph.-m.s.

A.S.Matyakubov
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award scientific degrees,
d.ph.-m.s., ass. prof.

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is to develop numerical-analytical methods and algorithms for solving nondivergent cross-diffusion problems in two-component media, and to create corresponding software.

The object of the research work is the nondivergent cross-diffusion processes in two-component media.

The scientific novelty of the research work is as follows:

the conditions of globality and non-globality in time for solutions of a nonlinear mathematical model representing the process of nondivergent cross-diffusion in the cases of slow and fast diffusion, with and without a source, and variable density have been found;

the first term of the asymptotics of the automodel solutions of the nonlinear mathematical model representing the nondivergent cross-diffusion process has been determined;

the problem of finding an initial approximation necessary for the numerical calculation of nonlinear problems representing a nondivergent cross-diffusion process with a source and variable density has been solved;

numerical computational schemes have been developed to investigate the qualitative properties of nonlinear mathematical models of nondivergent cross-diffusion processes with a source and variable density;

in critical cases, the conditions of globality and non-globality in time for solutions of the nonlinear mathematical model representing a nondivergent cross-diffusion process with a source and variable density have been found for both slow and fast diffusion;

Implementation of the research results. The scientific results obtained from the numerical modeling of non-divergent cross-diffusion problems in two-component media have been practically implemented in the following areas:

numerical-analytical algorithms for solving non-divergent cross-diffusion problems in two-component media, as well as conditions for the existence of a global solution, were utilized in the numerical modelling of non-divergent cross-diffusion processes in two-component media within the grant project OT-Atex-2O18-340 titled "Theoretical and numerical study of applied geophysical problems of the dynamics of two-velocity media" (Karshi State University, 2023, No. 03/1884 of May 05). Consequently, the results allowed the project to successfully determine the conditions for the existence of a global solution to practical geophysical problems involving the dynamics of a two-velocity medium and develop an applied software package for numerical modeling;

algorithms for numerical and analytical solutions of nondivergent cross-diffusion problems in two-component media, methods for obtaining upper estimates of the asymptotics of automodel solutions were used in the grant project BV-Ateks-2018(399+487) "Development of a practical software package for numerical simulation of diffusion processes in two-component media". These algorithms and methods are used in numerical modeling of nondivergent cross-diffusion processes in two-component media. This work was conducted as part of a joint interdisciplinary technical qualification project between Belarus and Uzbekistan Institute (Report No. 01-194/23 dated May 19, 2023). As a result, a practical software package for numerical modelling of diffusion processes in a two-component environment has been created;

the methods for finding the initial approximation, necessary for the numerical calculation of nonlinear problems representing nondivergent cross-diffusion flows with a source and variable density, were utilized for the theoretical and numerical solution of applied geophysics problems on two-velocity dynamics of the medium in the grant project RFBR-20-01-00293 at Udmurt State University, Russia (Udmurt State University, Report Number 7873-3980/32, 2023). As a result, the problem of obtaining the initial approximation for the iterative process used in the theoretical and numerical solution of practical geophysical problems on two-velocity dynamics of the medium has been successfully addressed.

Structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, conclusion, references and appendices. The volume of the dissertation is 107 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR ROʻYXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I boʻlim (I часть; I part)

1. Aripov M., Matyakubov A.S., Khasanov J.O. and Bobokandov M.M. Mathematical modeling of double nonlinear problem of reaction diffusion in not divergent form with a source and variable density // J.Phys.: Conf. Ser, 2021, 2131 032043 (№ 3, Scopus IF=0.18).

2. Aripov M., Matyakubov A.S., Khasanov J.O. Explicit estimate and global solution of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form // Ilm sarchashmalari. – Urganch, 2022. – № 5. – P. 23-32 (01.00.00. № 12).

3. Aripov M., Matyakubov A. S., Khasanov J.O. Global solvability and explicit estimation of solutions of a cross-diffusion parabolic system in non-divergent form with a source and variable density // Bull. Inst. Math., 2022. Vol. 5. – № 4. – P. 22-31 (01.00.00. № 6).

4. Khasanov J.O. Mathematical modeling of processes described by cross-diffusion source and variable density // Problems of Computational and Applied mathematics, 2022. – № 6 (45). – P. 39-47 (01.00.00. № 9).

5. Aripov M., Matyakubov A.S., Xasanov J.O. Nodivergent kross-diffuzion parabolik tenglamalar sistemasini sonli modellashtirish // SamDu Ilmiy axborotnomasi (aniq fanlar seriyasi), 2022. – № 5 (135). – B. 84-91 (01.00.00. № 2).

6. Xasanov J.O. Investigation of qualitative properties of the non-divergent cross-diffusion problem with source and variable density in two-component media in critical cases // International Scientific Research Journal, 2023. – № 4 (5). – P. 1091-1099 (№ 23 Scientific Journal Impact Factor IF=6.595).

7. Aripov M., Matyakubov A.S., Xasanov J.O. To the qualitative properties of self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form with a source // AIP Conference Proceedings, 2023. 2781, 020005 (№ 3, Scopus IF=0.16).

II boʻlim (II часть; II part)

1. Aripov M., Matyakubov A.S., Xasanov J.O. Explicit estimate and global solution of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form / “Tabiiy fanlarni rivojlantirishda axborot-kommunikatsiya texnologiyalarining oʻrni” mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi maqolalar toʻplami. – Nukus, 2021. – B. 144-148.

2. Aripov M., Matyakubov A.S., Xasanov J.O. To the qualitative properties of self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form with a source // Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi. – Fergana, 2021. – P. 35-36.

3. Aripov M., Matyakubov A.S., Xasanov J.O. Global solvability and explicit estimation of solutions of a cross-diffusion parabolic system in non-divergent form

with a source and variable density // Contemporary mathematics and its application. – Tashkent, 2021. – P. 23-24.

4. Aripov M., Matyakubov A.S., Khasanov J.O. To the qualitative properties of self-similar solutions of parabolic system not in divergence form with in variable density // Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics. – Samarkand, 2022. – P. 138-139.

5. Aripov M., Matyakubov A.S., Khasanov J.O. The qualitative properties at the problem Cauchy to not divergent type parabolic equations with variable density and source / Issues of innovative development of science, education and technology. International scientific and practical online conference. – Andijan, 2022. – P. 200-203.

6. Aripov M., Matyakubov A.S., Khasanov J.O. Nochiziqli muhitda oʻzgaruvchan zichlikka va manbaga ega nodivergent parabolik tipdagi tenglamalar sistemasiga qoʻyilgan koshi masalasining asimptotikalarini oʻrganish / “Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muammolari” mavzusidagi konferensiya toʻplami. – Buxoro, 2022. – B. 270-271.

7. Aripov M., Matyakubov A.S., Xasanov J.O., Sharipova L.Sh. Nochiziqli muhitda manbaga ega nodivergent parabolik tipdagi tenglamalar sistemasining yechimlarini baholash / “Innovatsion texnika va texnologiyalarning qishloq xoʻjaligi oziq-ovqat tarmogʻidagi muammo va istiqbollari” mavzusidagi konferensiya toʻplami. – Toshkent, 2022. – B. 224-225.

8. Matyakubov A.S., Khasanov J.O., Ismoilova O.M. Asymptotic representation of blow-up modes of parabolic equation not in divergence form with source / Научные основы использования информационных технологий нового уровня и современные проблемы автоматизации. – Ташкент, 2022. – С. 195.

9. Xasanov J.O. Kritik hollarda ikki komponentali muhitlarda manba va oʻzgaruvchan zichlikka ega nodivergent kross-diffuziya masalasining global yechimi va uning asimptotikalari / “Analizning zamonaviy muammolari” mavzusidagi Respublika ilmiy anjumani materiallari. – Qashqadaryo, 2023. – B. 281-283.

10. Xasanov J.O. Ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya masalalarini sonli modellashtirish dasturi (Bir oʻlchovli hol). № DGU 24080, 23.03.2023.

11. Xasanov J.O. Ikki komponentali muhitlarda nodivergent kross-diffuziya masalalarini sonli modellashtirish dasturi (Koʻp oʻlchovli hol). № DGU 24078, 23.03.2023.

Avtoreferat «_________________________________» jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 1/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.