

**“TIQXMMI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI HUZURIDAGI
FUNDAMENTAL VA AMALIY TADQIQOTLAR INSTITUTI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

FUNDAMENTAL VA AMALIY TADQIQOTLAR INSTITUTI

BABAJANOV DONIYOR BAHODIROVICH

**BOZE-EYNSHTEYN KONDENSATLARIDA GIRDOBLAR DINAMIKASINI
MODELLASHTIRISH**

01.04.02 – Nazariy fizika

**05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZKIIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI
(PhD) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2023

UO‘T: 538.9, UO‘T: 517.9, UO‘T: 621.315.592

**Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Table of Contents of Doctor of Philosophy (PhD) Dissertation in Physical and
Mathematical Sciences**

**Содержание диссертации доктора философии (PhD) по физико-
математическим наукам**

Babajanov Doniyor Bahodirovich

Boze-Eynshteyn kondensatlarida girdoblar
dinamikasini modellashtirish 3

Babajanov Doniyor Bahodirovich

Modeling of the dynamics of vortices
in Bose-Einstein condensates 21

Бабажанов Дониёр Баходирович

Моделирование динамики вихрей в
Конденсатах Бозе-Эйнштейна 39

List of published works

E‘lon qilingan ishlar ro‘uxati 33
Список опубликованных работ

**“TIQXMMI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI HUZURIDAGI
FUNDAMENTAL VA AMALIY TADQIQOTLAR INSTITUTI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

FUNDAMENTAL VA AMALIY TADQIQOTLAR INSTITUTI

BABAJANOV DONIYOR BAHODIROVICH

**BOZE-EYNSHTEYN KONDENSATLARIDA GIRDOBLAR DINAMIKASINI
MODELLASHTIRISH**

01.04.02 – Nazariy fizika

**05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZKIIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI
(PhD) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2023

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.2.PhD/FM63 raqami bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Fundamental va amaliy tadqiqotlar institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (xulosa)) Ilmiy kengashning internet sahifasida (www.ifar.uz) va "Ziyonet" axborot-ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Katsuhiko Nakamura
Fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Toshmatov Bobir Abdumanonovich
Fizika-matematika fanlari doktori

Mardonov Shuhrat Numonjonovich
Fizika-matematika fanlari doktori

Yetakchi tashkilot:

Urganch davlat universiteti

Dissertatsiya "TIQXMMI" Milliy tadqiqot universiteti huzuridagi Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti huzuridagi DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 raqamli Ilmiy kengashning 2023-yil "29" sentyabr soat 16³⁰ dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100000, Toshkent shahri, Qori Niyoziy ko'chasi 39-uy, Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti, 108-katta majlislar zali; tel.: 71 237-09-61.; e-mail: info@ifar.uz)

Dissertatsiya bilan "TIQXMMI" Milliy tadqiqot universiteti huzuridagi fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (№ 15 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100000, Toshkent shahri, Qori Niyoziy ko'chasi, 39-uy, Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti, 108-katta majlislar zali; tel.: 71 237-09-61)

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil " " sentyabr kuni tarqatildi.
(2023-yil "15" sentyabr dagi № 15 raqamli reestr bayonnomasi)

B.J. Ahmedov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash raisi f.-m.f.d., professor

E. X. Karimbayev

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash ilmiy kotibi f.-m.f. bo'yicha PhD

B. M. Narziloev

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi
f.-m.f.d.

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati. Dunyoda so‘nggi 30 yil mobaynida olib borilayotgan fundamental va amaliy ilmiy izlanishlar materiallarning funksional hossalarni optimallashtirish va (mexanik, issiqlik, elektron va optik) qurilmalarni kichiklashtirish yo‘li bilan resurstejamkor texnologiyalarni ishlab chiqishga qaratilgan. Bu sohada eng istiqbolli bo‘lgan yo‘nalish bu – past o‘lchamli materiallar fizikasi va ular asosida resurstejamkor elektron va optoelektron qurilmalar yaratish uchun kvant effektlarini qo‘llashni o‘z ichiga olgan kvant texnologiyalaridir. Shu sababli, zaryad, spin, issiqlik va axborot tashuvchisi hisoblanadigan zarralar va to‘lqinlar ishtirokidagi jarayonlarni tavsiflashga imkon beruvchi effektiv matematik modellarni qo‘llash kvant fotonikasi, optika, fotovol’taika, kvant informatikasi va kondensirlangan muhitlar fizikasi kabi fizikaning zamonaviy qator sohalarida dolzarb masalaga aylandi.

Hozirgi vaqtda dunyoda nochiziqli Shredinger tenglamasi va Gross Pitaevskiy tenglamasi kabi nochiziqli tenglamalar yordamida tavsiflanuvchi, ham kvazizarralar ham to‘lqinlar ishtirokidagi jarayonlarni o‘rganish zamonaviy kvant fizikasi, sovutilgan atomlar va kondensirlangan muhitlar fizikasining dolzarb masalalaridan biri hisoblanadi. Bunday sistemalarda Gross-Pitaevskiy tenglamasini yechish nanofizikada, sovutilgan atomlar fizikasida va kvant texnologiyalarida paydo bo‘ladigan bir qator amaliy masalalarda muxim rol o‘ynaydi. Nochiziqli tenglamalarining analitik va sonli yechimlarini topish va ularning hossalarni o‘rganish hamda effektiv dinamik jarayonlarni matematik modellashtirish, sonli hisoblashlarning effektiv algoritmlarini va dasturiy ta‘minotini yaratish zamonaviy izlanishlarning muhim bosqichi hisoblanadi.

Respublikamizda fizika-matematika fanlarining, jumladan, nazariy fizika va amaliy matematika sohasining dolzarb yo‘nalishlariga e’tibor kuchaytirildi, binobarin bu yo‘nalishlardagi ishlanmalarni ilmiy va amaliy jixatdan tatbiq qilish katta ahamiyatga ega. Jumladan, nochiziqli optika, kvant mexanikasi, kondensirlangan xolatlar fizikasida yuzaga keladigan masalalarni matematik modellashtirish va sonli usullar yordamida yechish orqali fundamental tadqiqotlar olib borish va bu tadqiqotlarning natijalarini amaliy ishlanmalarni yaratishga qo‘llashga mamlakatimizda katta e’tibor qaratilmoqda. Boze-Kondensatlarda nochiziqli evolyusion tenglamalarning aniq va sonli yechimini topish, ularning soliton va girdobli yechimlarini modellashtirishda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan natijalarga erishildi. Xalqaro standartlar darajasidagi “Nochiziqli dinamika, kvant materiallar fizikasi va amaliy matematika” fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha yurtimizda nazariy va amaliy izlanishlar olib borilmoqda. Qaror ijrosini ta‘minlashda nochiziqli evolyusion tenglamalarni Boze kondensatlar uchun aniq va sonli usullar yordamida yechish nazariyasini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son «O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha harakatlar strategiyasi to'g'risida»gi, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son «Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi, 2017 yil 20 apreldagi PQ-2909-son «Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi va 2018 yil 27 apreldagi PQ-3682-son «Innovasion g'oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi qarorlari, O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.M. Mirziyoevning 2019 yil 24 may kuni Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida ta'lim va ilm-fan sohasi vakillari bilan bo'lib o'tgan uchrashuvidagi ma'ruzasi hamda 2023-yil Prezidentning senatga murojatomasida mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy xujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnikasi rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga muvofiqligi. Ushbu dissertatsiya ishi O'zbekiston Respublikasi fan va texnikasini rivojlantirishning ustuvor yo'nalishi IV. «Matematika, mexanika va informatika» doirasida bajarilgan.

Muammoning o'rganilganlik darajasi.

Qopqondagi bir komponentli va ko'p komponentli Boze-Eynshteyn kondensatlari (BEK) eksperimental ravishda hosil qilindi va bu girdoblar dinamikasini nazariy jihatdan o'rganish uchun yaxshi nomzod bo'ldi. So'nggi paytlarda, xususan, kichik girdob klasterlariga e'tibor qaratilmoqda. BEKlarning makroskopik to'lqin funksiyasi dinamikasi nohizizli Shryodinger tenglamasi yoki Gross-Pitayevskiy tenglamasi (GPE) orqali tavsiflansa-da, qopqon potentsiali ahamiyatsiz bo'lgan. Qopqondagi bir komponentli BEKlar uchun kenglik tebranish rejimining mavjudligi, ya'ni sferik yoki aylana bilan chegaralangan hududning kollektiv radial tebranishi nazariy va eksperimental jihatdan ko'rsatilgan. Bundan farqli o'laroq, kuchli nohizizlilik qopqondagi BEKlarda o'zaro ta'sir qiluvchi girdoblarning samarali dinamikasi yaqinda taklif qilingan va sonli usullar yordamida tahlil qilingan, ammo kenglik erkinlik darajasining tebranishi mavjud bo'lganida o'zaro ta'sirlashuvchi girdoblarning asosiy koordinatalarini qanday bog'lashga nazariy jihatdan kam e'tibor berilgan. Ushbu dissertatsiyada biz har bir komponentda "yagona girdob" mavjud bo'lsa, garmonik qopqondagi va kuchli nohizizlilikka ega ikki o'lchamli (2D) ko'p komponentli BEKda girdoblar dinamikasining samarali nazariyasini ishlab chiqdik. Bu yerda biz har bir girdob sinov funksiyasining amplituda shaklini Padé yaqinlashuvida tanlaymiz, bu girdoblar yadrosining o'ziga xos shaklini o'z ichiga oladi. Ushbu ishdagi muhim yangilik ishda taklif qilingan girdoblarning nolga teng bo'lmagan inertsiasiyasi (yoki impulsi) bo'lib, u odatdagi gidrodinamikada keng

qo'llaniladigan inertsiyasiz girdoblardan farq qiladi. Yakka girdob dinamikasida kenglik tebranishi erkinlik darajasining rolini ham hisobga oldik. Biroq, bu xulosalar, agar BEKning har bir komponenti "ko'p sonli girdoblar"ga ega bo'lsa, ular o'rtasidagi kuchli fazaviy korrelyatsiya tufayli bu usulni qo'llash masalasi boshqacharoq tarzda kechadi. Ushbu dissertatsiyada biz standart variatsion printsipini kuchli kubik 2 o'lchamli aylanmaydigan qopqondagi bir komponentli BEKlardagi o'zaro ta'sir qiluvchi girdoblarga qo'llaymiz va girdob koordinatalari erkinlik darajasi bilan birlashtirilgan kenglik tebranishi erkinlik darajasining muhim rolini yoritib beramiz.

Tadqiqotning dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasining ilmiy-tadqiqot ishi rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya O'zbekiston Respublikasi Fan va texnika davlat qo'mitasining F-4-005 raqamli yosh olimlarning "Qattik jismlar deformatsiya jarayoni, noxizikli dinamika va internetdagi trafik jarayonlar tahlili" ilmiy loyihasi granti doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi Gross-Pitayevskiy tenglamasidan foydalangan holda Boze-Eynshteyn kondensatlarida (BEK) girdoblar dinamikasi modelini ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

- bir va ko'p komponentli BEKlarda girdoblar dinamikasi modelini ishlab chiqish;
- uchta girdob dinamikasida xaosni olish;
- nuqtaviy girdoblar dinamikasi uchun topologik va topologik bo'lmagan elastiklik kuchlarini olish;
- Gross-Pitayevskiy modelidan kollektiv koordinatalar variatsion usuli va sonli yondashuv (chekli farq sxemalari) orqali foydalanish.

Tadqiqotning obyekti Bose-Eynshteyn kondensatlarining uyg'ongan holatlari – girdoblardir.

Tadqiqotning predmeti BEKlaridagi girdoblarning dinamik xususiyatlaridir.

Tadqiqotning usullari. Ushbu dissertatsiyada kubik noxizizlikka ega bo'lgan noxizizli Shryodinger (Gross-Pitayevskiy) tenglamasi (GPT) va uning mos Lagranjian yondashuvi qo'llanilgan. Shuningdek, dissertatsiyada kollektiv koordinatalar usuli (variatsion yondashuv) va GPT ning bevosita sonli yechimi Gross-Pitayevskiy tenglamalarini, shuningdek, noxizizli Shredinger tenglamasini analitik va sonli yechish usullari, chekli ayirmali sxemalar, Tomas algoritmi, Krank-Nikolson usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

- ilk bora Bose-Eynshteyn kondensat modelini ikki o'lchovli tuzoqlarda tavsiflovchi Gross-Pitayevskiy tenglamasining girdobli yechimlari va bu yechimlar dinamikasining harakat tenglamalari topilib, girdoblar markazlari uchun samarali noxizizli dinamika olindi va bu dinamika

kuchli elastik kuch va bir jinsli magnit maydondagi Lorents kuchi ta'sirida inertsiyaga (massaga) ega bo'lgan zaryadlangan zarrachalar dinamikasiga o'xshashligi aniqlandi;

- ilk bora o'zaro ta'sirlashuvchi girdoblar markazlari koordinatalari va girdob yechimi kengligining vaqt hosilasi uchun Lagranj tenglamasi topildi va uning Gamilton formalizmi nostandart Puasson qavslari yordamida tuzilib, sekinroq aylanma harakat bilan bir vaqtda sodir bo'ladigan girdob markazlarining tez radial tebranishlari topildi;
- ilk bora girdoblararo o'zaro ta'sir potentsialining formulasi topildi;
- ilk bora uchta girdobning dinamikasi o'rganilib, ularning harakati xaotik ekanligi aniqlandi.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

- ilk bora girdoblararo o'zaro ta'sir formulasi topildi;
- ilk bora Gross-Pitayevskiy tenglamasining girdobli yechimlari olindi;
- ilk bora magnit qopqondagi girdoblar dinamikasi kuchli elastik kuch ta'sirida va bir jinsli magnit maydonda Lorents kuchi ta'sirida inertsiyaga (massaga) ega bo'lgan zaryadlangan zarrachalar dinamikasiga o'xshashligi ko'rsatilgan;
- ilk bora uchta girdob dinamikasida kaos olingan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi quyidagilardan iborat:

- dissertatsiya ishida matematik va nazariy fizikaning standart usullari, shu jumladan yuqori samarali sonli usullar va dasturlardan foydalanilgan;
- boshqa mualliflarning nazariy natijalarining izchilligi sinchkovlik bilan taqqoslanishi; xulosalar Bose-Eynshteyn kondensatlari nazariyasining asosiy qoidalariga yaqin kelishi bilan izohlanadi;
- nohiziqli Shryodinger tenglamasi bo'lgan Gross-Pitayevskiy tenglamasining yechimlari va bu tenglamalarning asosiy saqlanish qonunlaridan, masalan, energiya saqlanish qonunlaridan olingan sonli yechimlari bir xil ekanligi tasdiqlangan;
- yechimlarning barqarorligi sonli tahlil qilindi va ularning aniqligi baholandi. Olingan natijalar to'liq fizik tahlil qilindi va ularning haqiqiy fizik jarayonlarga muvofiqligi nazariy jihatdan isbotlandi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati:

- tadqiqotning ilmiy ahamiyati shundan iboratki, dissertatsiyada ishlab chiqilgan formalizm Gross-Pitayevskiy tenglamasi bilan tasvirlangan makroskopik modda - Bose-Eynshteyn kondensatining nohiziqli dinamik xususiyatlarini tahlil qilish asosida kvant hisoblash va kvant axborot sohalorida keng qo'llanilishi bilan belgilanadi;

- u shuningdek, kvant materiyaning makroskopik xususiyatlarini chuqurroq tushunishga imkon beradi;
- tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ularni zamonaviy optoelektronika, axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, kvant texnologiyalari va kichik o'lchamli kvant funksional materiallarda uchraydigan optik girdobli solitonlarni modellashtirishda qo'llash bilan izohlanadi;
- natijalar kondensatsiyalangan holatning tabiati va dinamikasini tahlil qilishda va kuzatish tajribalarini ishlab chiqishda foydali bo'ladi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi.

Garmonik qopqondagi Bose-Eynshteyn kondensati uchun ikki o'lchovli Gross-Pitayevskiy tenglamasining girdobli yechimlari bo'yicha dissertatsiya natijalari xorijiy ilmiy jurnallarda chop etilgan maqolalarda qo'llaniladi (Physical Review A, Volume 93, Issue 1, 2016, pp. 013615; Physical Review A, Volume 99, Issue 3, 2019, pp. 033607; Physical Review A, 103, 053313 (2021)). Ularda girdoblar uchun sinov funksiyasi va Lagranj funksiyasini hosil qilishda paydo bo'ladigan integrallarning yechimlari qo'llanildi.

Bose-Eynshteyn kondensatida girdoblar dinamikasi bo'yicha dissertatsiya natijalari quyidagi ilmiy jurnallarda chop etilgan maqolalarda qo'llaniladi (Journal of the Physical Society of Japan, Volume 87, Number 6, 2018, pp. 063601; Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 53, 065303 (2020); Modern Physics Letters B, Vol. 36, No. 28-29, 2250153 (2022); Journal of the Physical Society of Japan, 86, 114001 (2017)). Ilmiy natijalarni qo'llash Bose-Eynshteyn kondensatlarida hosil bo'lgan girdoblar uchun harakat tenglamalarini yechish imkonini berdi.

Nostatsionar nochiziqli Shredinger tenglamasi va Gross-Pitayevskii tenglamasining soliton yechimlari dinamikasini modellashtirish xorijiy ilmiy jurnallarda (Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **55**, 243001 (2022); Phys. Rev. E, Volume 93, 032204 (2016); Journal of Differential Equations, Volume 260, Number 10, 2016, pp. 7397-7415; Nonlinearity, 35, 3283 (2022); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51, 095203 (2018); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 52, 035202) foydalanilgan. Ilmiy natijaning qo'llanilishi ikki o'lchamli nostatsionar nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun planar graflarda qo'yilgan chegaraviy masalani sonli usulli modelini qurish imkonini bergan.

Statsionar nochiziqli Shredinger tenglamasi va Gross-Pitayevskii tenglamasining soliton yechimlari dinamikasini modellashtirish xorijiy ilmiy jurnallarda (Contemporary mathematics: Mathematical Problems in Quantum Physics, 717, 14446 (2018); Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, Volume 23, Number 6, pp. 63; Physical Review E, 94, 062216 (2016); Applicable Analysis,

Volume 99, Pages 1359-1372, (2020); Mathematical Modelling of Natural Phenomena, Vol. 11, No. 2, pp. 20-35, (2016); Mathematical Methods in the Applied Sciences Volume 41, Issue 1, p. 159-191, (2017); Asymptotic Analysis, vol. 113, no. 1-2, pp. 87-121, (2019); Analysis, geometry and number theory, 2, (2017)) foydalanilgan. Ilmiy natijaning qo'llanilishi ikki o'lchamli statsionar nochiziqli Shredinger tenglamasini sonli va analitik usulli modelini qurish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Tadqiqot natijalari 4 ta xalqaro va 3 ta respublika konferentsiyalarda aprobatsiyadan o'tgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinishi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 7 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktorlik (PhD) dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 4 ta ilmiy maqola, jumladan, 1 tasi Web of Science bazasidagi MDH jurnalida va 3 tasi Scopus bazasidagi yuqori impakt faktoriga ega horijiy jurnallarda nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya tarkibi kirish, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 92 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY QISMI

Dissertatsiyaning kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalarini rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlariga mos kelishi asoslangan. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha chet eldagi ilmiy tadqiqotlarning qisqacha ma'lumoti va muammoning o'rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqotning maqsad, vazifalari shakllantirilgan, uning ob'yekti va predmeti ko'rsatilgan, tadqiqotning amaliy natijalari va ilmiy yangiliklari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining qo'llanilishi, dissertatsiya tuzilishi va nashr qilingan ilmiy ishlar to'g'risida ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Boze-Eynshteyn kondensatlaridagi girdoblar bilan tanishish”** nomli birinchi bobida Boze-Eynshteyn kondensatlarining asosiy nazariyasi tavsifi berilgan. Xususan, Boze-Eynshteyn kondensatlari uchun Gross-Pitaevskiy tenglamasi, uni Shryodinger tenglamasidan keltirib chiqarish, bu tenglamaning soliton yechimlari va girdobli yechimlari yoritilgan.

“Boze-Eynshteyn kondensatlarida qopqon ichidagi o'zaro ta'sirlashuvchi girdoblar dinamikasi” deb nomlangan ikkinchi bob variatsion prinsip yordamida bir komponentali ikki o'lchamli Boze-Eynshteyn kondensatida ikkita girdobning dinamikasi, ularning o'zaro ta'siri va kengayib-qisqaruvchi kondensat kengligining roli modelini ishlab chiqishga bag'ishlangan.

Biz Gross-Pitayevskiy tenglamasi yordamida tavsiflanuvchi ikkita girdobga ega qopqon ostidagi ikki o'Ichamli aylanmaydigan bir komponentali Boze-Einstein kondensatini qaraymiz. $r = (x, y)$ bo'lganida $\Phi(t, \mathbf{r})$ makroskopik to'liqin funksiya quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}) = [-\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g |\Phi(t, \mathbf{r})|^2] \Phi(t, \mathbf{r}) \quad (1)$$

Bu yerda Φ to'g'ri kalibrovka qilinganidan keyin normirovka sharti $\int |\Phi(t, \mathbf{r})|^2 d^2 \mathbf{r} = 1$ orqali aniqlanadi. Qopqon potentsiali effekti $V(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2$ orqali ifodalanadi.

Sinov funksiyasi sifatida biz ikkita girdob funksiyasining ko'paytmasini tanlaymiz va har bir girdob funksiyasi amplitudasi shaklini Pade yaqinlashishi asosida qo'laymiz. Ikkita ta'sirlashuvchi girdoblar uchun sinov funksiyasi quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = N f_0 f_i f_j e^{i(\phi_0 + \phi_i + \phi_j)}, \quad (2)$$

bu yerda $f_0 \equiv e^{-\frac{r^2}{4w^2}}$, $f_k \equiv \sqrt{\frac{(r-r_k)^2}{2\xi^2 + (r-r_k)^2}}$ va $\phi_0 \equiv \mathbf{r}^2 \beta$, $\phi_k \equiv n_k \arctan\left(\frac{y-y_k}{x-x_k}\right)$ mos ravishda amplitudalar va fazalardir. Bu yerda $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k)$, $k = i, j$ kollektiv koordinatalari hisoblanadigan girdob yadrolarining koordinatalari, ξ girdob yadrosi o'Ichamiga taalluqli bo'lgan uzunlik. w va β mos ravishda kondensat kengligi va uning kanonik qo'shmasidir. Energiyani minimallashtirish shartidan quyidagi parametrlar uchun ifodalarni olamiz:

$$\begin{aligned} w_0^2 &\cong \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{\pi}} = O(g^{1/2}), \\ \xi &\cong \frac{|n_i| \pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2 + \gamma}} g^{-\frac{1}{4}} = O\left(g^{-\frac{1}{4}}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

Bu yerda $\gamma (= 0,57721)$ Eyler doimiysi.

Gross-Pitayevskiy tenglamasi ta'sir integralini minimallashtiradigan variantsion prinsip asosida quyidagi Lagrangian zichligi yordamida hosil qilinishi mumkin

$$-\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\Phi \dot{\Phi}^* - \dot{\Phi} \Phi^*) + |\nabla \Phi|^2 + r^2 |\Phi|^2 + \frac{g}{2} |\Phi|^4. \quad (4)$$

Bunda Eyler-Lagranj tenglamasidan foydalaniladi

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^*} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \Phi^*} = 0. \quad (5)$$

(2) formuladagi sinov funksiyasini (4) formulaga qo'yamiz. So'ngra esa Lagrangian zichligini butun fazo koordinatalari bo'yicha integrallab ($L \equiv \iint d^2 \mathbf{r} \mathcal{L}$), kollektiv koordinatalar uchun effektiv Lagranjianni topamiz

$$\begin{aligned}
-L = & \sum_{k=i,j} \left\{ -\frac{1}{2w^2} n_k \left(1 - \frac{r_k^2}{4w^2} + \frac{r_k^4}{24w^4} \right) (y_k \dot{x}_k - x_k \dot{y}_k) - \frac{r_k^2}{6w^4} \left(1 - \frac{r_k^2}{4w^2} \right) \right. \\
& + \frac{1}{w^2} \left(1 - \frac{r_k^2}{2w^2} + \frac{r_k^4}{8w^4} \right) n_k^2 \left. \right\} + 2w^2(1 + \beta + 4\beta^2) + \frac{7}{6w^2} + \frac{g}{8\pi w^2} \\
& + V_{ij}. \tag{6}
\end{aligned}$$

Bu yerda

$$\begin{aligned}
V_{ij} = & -\frac{1}{w^2} n_i n_j \left(1 - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{2w^2} \right) \left(\gamma + \ln \left(\frac{r_{ij}^2}{2w^2} \right) - \frac{r_i^2 + r_j^2 - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{2w^2} \right) \\
& + \frac{5\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{2}} \sqrt{7} r_{ij}^4} e^{-\frac{r_i^2 + r_j^2}{4w^2}} I_0 \left(\frac{r_G^{ij} r_{ij}}{4w^2} \right). \tag{7}
\end{aligned}$$

Bu (7) formula girdoblarning o'zaro ta'sir potensialini tavsiflaydi va uning birinchi hadi zaryadga bog'liq uzoq masofalarda ham ta'sir qiluvchi ta'sirni bildirsa, ikkinchi hadi zaryadga bog'liq bog'liq bo'lmagan qisqa masofalarda ta'sir qiluvchi tarishuvchi potensialni bildiradi.

Lagranj harakat tenglamalari \mathbf{r}_k uchun

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = 0,$$

va β hamda w uchun

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial L}{\partial w} = 0. \tag{8}$$

$g \gg 1$ bo'lganida $\xi \ll r_{ij}, r_G^{ij} \ll w$ asimptotik shartlar bajarilganida yuqoridagi Lagranj harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{aligned}
n_k \dot{y}_k &= \left(\frac{1}{3} + n_k^2 \right) \left(1 + \frac{r_k^2}{2w^2} \right) \frac{x_k}{w^2} + n_k \frac{\dot{w}}{w} y_k - w^2 \left(1 + \frac{r_k^2}{2w^2} \right) \frac{\partial V}{\partial x_k}, \\
n_k \dot{x}_k &= -\left(\frac{1}{3} + n_k^2 \right) \left(1 + \frac{r_k^2}{2w^2} \right) \frac{y_k}{w^2} + n_k \frac{\dot{w}}{w} x_k + w^2 \left(1 + \frac{r_k^2}{2w^2} \right) \frac{\partial V}{\partial y_k},
\end{aligned}$$

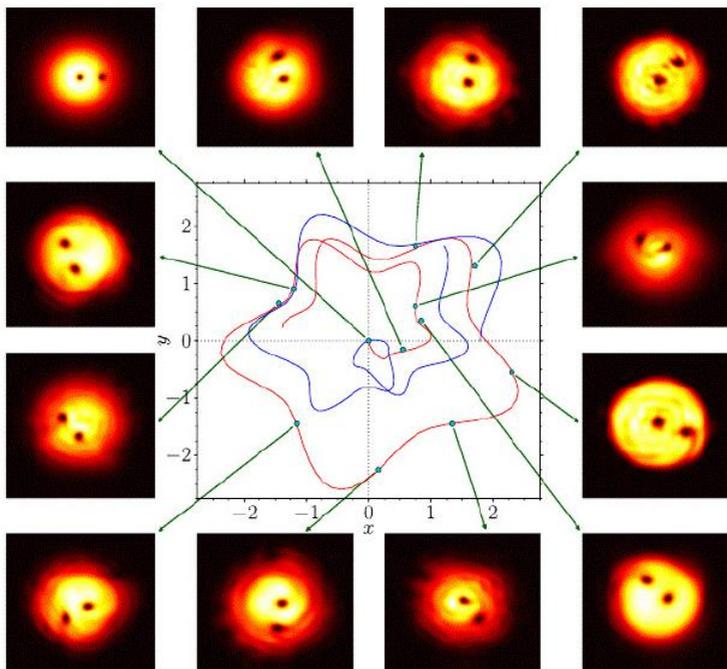
va

$$\begin{aligned}
\ddot{w} &= -4w + \frac{g}{4\pi w^3} - \frac{1}{w^5} \left(\sum_{k=i,j} \left(\frac{1}{3} + n_k^2 \right) r_k^2 \right) - \frac{\partial V_{ij}}{\partial w}, \\
\beta &= \frac{\dot{w}}{4w}, \tag{9}
\end{aligned}$$

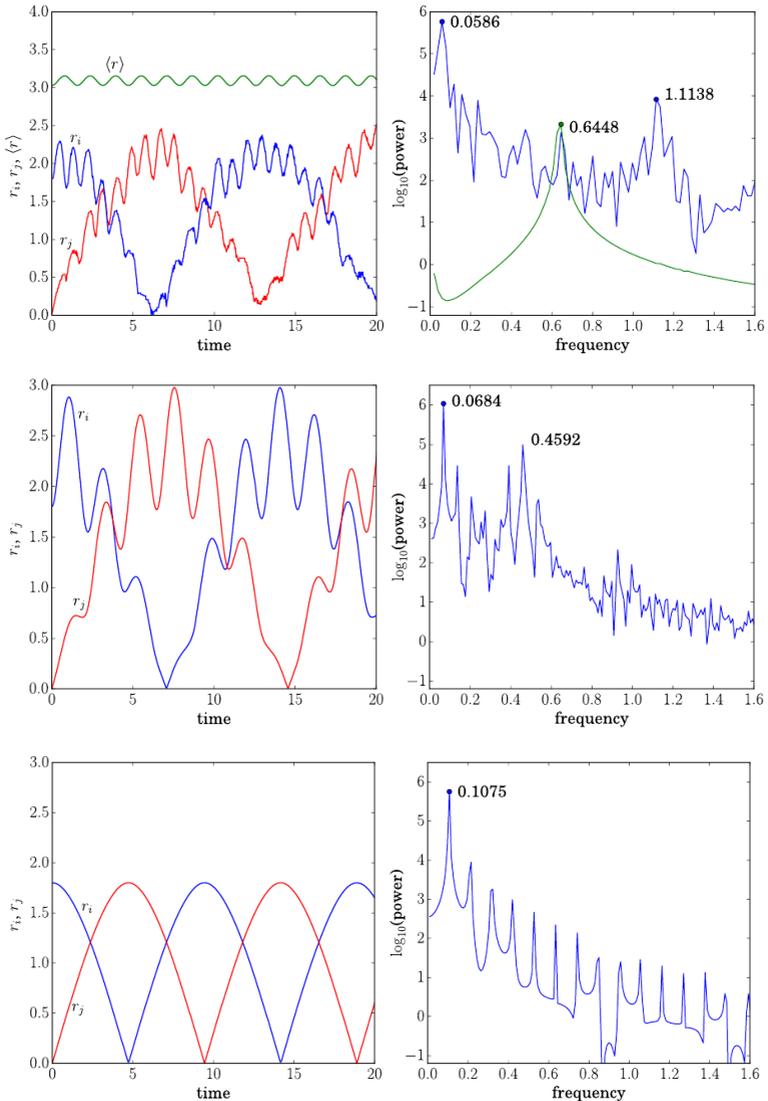
Endi bu tenglamalarni va Gross-Pitaevskiy tenglamasini sonli usullar yordamida yechamiz.

$g = 500$ bo'lganida 1-rasmda (9) formula orqali tavsiflanuvchi effektiv dinamika va uning sonli usullar (split-step Cranck-Nicholson usuliga asoslangan haqiqiy va kompleks vaqt propagatorlari) yordamida yechilgan (1) formuladagi Gross-Pitaevskiy tenglamasining to'liq dinamikasi orqali tasdiqlanishi ko'rsatilgan.

2-rasmda har bir girdob uchun r_i, r_j radial masofalarning (t) vaqtga bog'liqlik grafigi hamda quvvat spektri tasvirlangan. Ular uch xil usulda hisoblangan: (i) Gross-Pitaevskiy tenglamasi (GPT) (1) ni sonli usulda yechish; (ii) kenglik erkinlik darajasini inobatga olgan holda effektiv diinamika tenglamalarini yechish orqali; (iii) kenglik erkinlik darajasini "muzlatib" qo'yib, ya'ni kenglikni o'zgarimas deb hisoblab, effektiv dinamika tenglamalarini ychish orqali. Bu rasmning yuqori o'ng qimidagi GPT orqali topilgan quvvat spektri grafigida uchta cho'qqi nuqtani ko'rishimi mumkin, bular $v_1 = 0.0586, v_2 = 0.6448$ va $v_3 = 1.1138$. Bular mos ravishda sekin aylanma harakat, kenglik tebranishi va girdob yadrosining kichik fluktuatsiyalaridir.

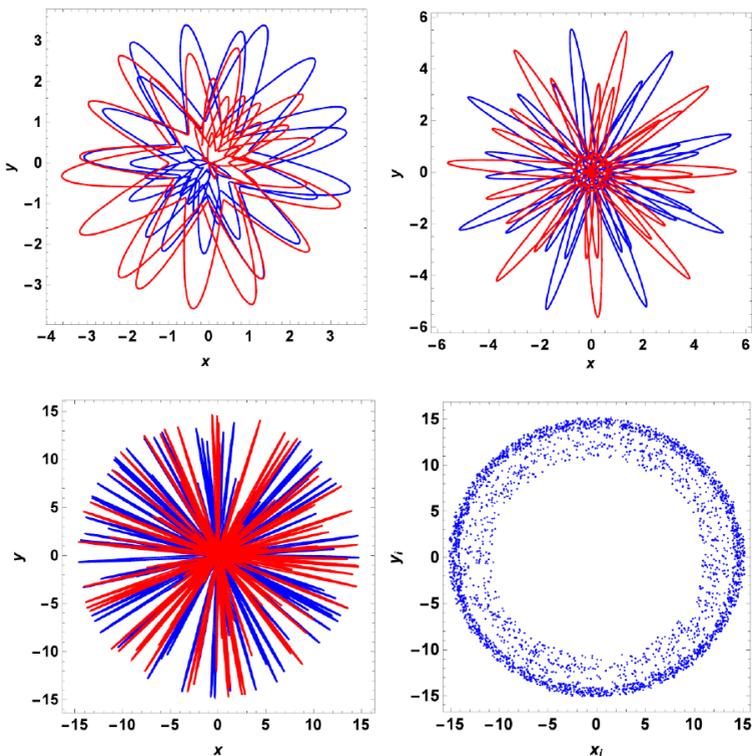


1-rasm. Bir xil zaryadga ($n_i = n_j = 1$) ega bo'lgan ikkita girdob holida Hamilton dinamikasi yordamida hosil qilingan (9) formula orqali tavsiflanadigan qisqa vaqt oralig'idagi trayektoriyalar va (1) Gross-Pitaevskiy tenglamasidan hosil qilingan to'liq funksiyasi amplitudalarining rasmlari.



2-rasm. Chap tomondagi rasmlarda har bir girdob radial koordinatalari r_i, r_j larning (t) vaqtga bog'liqlik grafiklari keltirilgan. Qizil va ko'k rangli grafiklar mos ravishda r_j va r_i ni bildiradi. O'ng tomondagi rasmlarda quvvat spektrining chastotaga bog'liqlik grafiklari tasvirlangan.

3-rasmda sistemaning energiyasi oshirilganida kenglik radial tebranishlarining amplitudasi ham, chastotasi ham ortishi ko'rsatilgan. Bu yerda Puankare kesimi ham ko'rsatilgan bo'lib, bu $w(t)$ vaqtinchalik lokal maksimal qiymatga ega bo'lib, bu ikki girdob tizimida xaosning paydo bo'lishini aniq ko'rsatadi.



3-rasm. Bir xil zaryadga ega bo'lgan ($n_i = n_j = 1$) ikkita girdob uchun yuqori energiyali trayektoriyalar va Puankare kesimi.

Dissertatsiyaning “**Ko'p komponentali Boze-Eynshteyn kondensatida inersiyaga ega girdoblar dinamikasi**” deb nomlangan uchinchi bobida ikki

o'lchamli konfaynmentga ega qopqondagi Boze-Eynshteyn kondensatining dinamikasi uchun model qurilgan. Atomar Boze-Eynshteyn kondensatining o'ta oquvchanlik xususiyati paydo bo'ladi va bu moddaning o'ziga xos holati bo'lib, u ma'lum fizik sharoitlar mavjud bo'lganda va atomlarni sovutganda paydo bo'ladi. Bu holat nohiziqli Shredinger tenglamasi bo'lgan Gross-Pitaevskiy tenglamasi bilan tavsiflangan, o'zini yagona zarra-to'lqinidek tutadigan, bir necha o'nta atomdan boshlab bir necha yuz mingtagacha sonli atomlarning kollektiv holatidir. Bunga sabab, bu tenglama soliton yechimlarga ega va zarrachalar ansambli o'zini "katta" soliton kabi tutadi va soliton to'lqinining barcha xususiyatlariga ega bo'ladi. Ushbu bobda biz Boze-Eynshteyn kondensatini ikki o'lchamli qopqonda ko'rib chiqamiz va shuning uchun tizim dinamikasini o'rganish uchun ikki o'lchamli nohiziqli Shredinger tenglamasidan foydalanamiz. Bir o'lchamli nohiziqli Shredinger tenglamasidan farqli o'laroq, ikki o'lchamli nohiziqli Shredinger tenglamasi soliton yechimlaridan tashqari, girdobli yechimlarga ham ega. Ushbu bobda, Pade yaqinlashishida girdobli solitonlar yordamida variatsion usulni qo'llagan holda, biz girdoblar uchun effektiv Gamiltonianni aniqlaymiz. Ikki va uchta girdoblar mavjud bo'lgan holni qarab, girdoblarning batafsil dinamikasini sonli usulda tekshiramiz. Quyidagi tenglamani qanoatlantiruvchi, qopqondagi n -komponentli $\Phi_1(t, x, y)$, $\Phi_2(t, x, y)$, ..., $\Phi_n(t, x, y)$ makroskopik to'lqin funksiyalari sistemasidan iborat bo'lgan ikki o'lchamli modelni ko'rib chiqamiz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_i(t, x, y) &= \left[-\nabla^2 + V(x, y) + g_{ii} |\Phi_i(t, x, y)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \neq i} g_{ij} |\Phi_j(t, x, y)|^2 \right] \Phi_i(t, x, y), \end{aligned} \quad (30)$$

bunda $i, j=1, \dots, n$. Bu yerda to'lqin funksiyalarining har bir komponenti uchun bir xil bo'lgan normirovka sharti Φ_i to'lqin funksiyalarni zarralar soni bo'yicha to'g'ri masshtablanganidan keyin $\int |\Phi_i(t, x, y)|^2 dx dy = 1$ formula bo'yicha aniqlanadi. Qopqon $V(x, y) = (x^2 + y^2)$ ko'rinishida berilgan. (30) tenglamada quyidagi

o'zgaruvchilarni almashtirish bajarilgan: $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ konfaynment uzunligi va $\tau = \omega^{-1}$ tebranish davri yordamida fazoviy koordinatalar l bo'yicha, vaqt 2τ bo'yicha, to'lqin funksiyasi $\frac{1}{l}$ bo'yicha va nohiziqlilik koeffitsientlar $\frac{\hbar^2}{2m}$ bo'yicha masshtablangan. Ikki zarrachali to'qnashuvlar uchun sochilish uzunligi a_{ij} bo'lgan $g_{ij} \equiv 8\pi N a_{ij} / l$ nohiziqli koeffitsientlar musbat deb hisoblanadi va birdan ancha katta. $i \neq j$ uchun g_{ii}

va g_{ij} komponenta ichidagi va komponentlararo o‘zaro ta’sirni bildiradi. Biz barcha i uchun $g_{ii} = g_1 (\gg 1)$ va $i \neq j$ uchun $g_{ij} = g_2 (\gg 1)$ ni tanlaymiz.

Bizning maqsadimiz (30) tenglamadan girdob uchun sinov funksiyalarining kollektiv koordinatalari uchun evolyusion tenglamani olishdir. Girdob uchun kollektiv koordinatalar fazali o‘zgaruvchilar hisoblanadi, girdob yadrosi koordinatalaridan tashqari. Biz girdob uchun sinov funksiyalarini Tomas-Fermi rejimidan tashqarida (30) formulada Gross-Pitaevskiy tenglamasidagi kinetik energiya hadini hisobga olgan holda ishlatamiz: girdob uchun sinov funksiyalari amplitudasi uchun biz Pade yaqinlashishi asosida quyidagi girdob funksiyasini tanlaymiz (topologik son $n_i = \pm 1$)

$$\begin{aligned} \Phi_i(t, x, y) &\equiv f_i(t, x, y) \exp[i\phi_i(t, x, y)] \\ &= N \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\Delta}\right] \sqrt{\frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{2\xi^2 + (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \\ &\times \exp\left[i\left[n_i \arctan\left(\frac{y - y_i}{x - x_i}\right) + \alpha_i(x - x_i) + \beta_i(y - y_i)\right]\right], \end{aligned} \quad (31)$$

normirovka koeffitsienti $N = \frac{1}{\sqrt{\pi\Delta - 2\pi e \frac{2\xi^2}{\Delta} \xi^2 \Gamma\left(0, \frac{2\xi^2}{\Delta}\right)}}$. Bu yerda $\Gamma(0, z) \equiv \int_z^\infty t^{-1} e^{-t} dt$ bu ikkinchi turdagi to‘liq bo‘lmagan gamma funksiya.

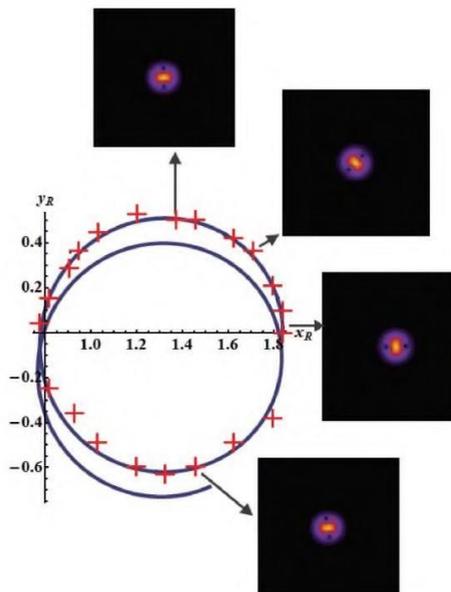
Ushbu sinov funksiyasini maydon o‘zgaruvchilari uchun Lagranjian zichligi \mathcal{L} ga almashtirish,

$$\begin{aligned} -\mathcal{L} &= \sum_i \left[\frac{i}{2} (\Phi_i \Phi_i^* - \Phi_i^* \Phi_i) + |\nabla \Phi_i|^2 + (x^2 + y^2) |\Phi_i|^2 + \frac{g_1}{2} |\Phi_i|^4 \right] \\ &+ \sum_{j>i} g_2 |\Phi_i|^2 |\Phi_j|^2 \end{aligned}$$

(32) va Lagranj tenglamalari yordamida:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i^*} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i^*} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \Phi_i^*} = 0 \quad (33)$$

kollektiv o‘zgaruvchilar bo‘yicha harakat tenglamasini olamiz. Ushbu tenglamalarning sonli yechimi bizga ikki o‘lchamli qopqondagi girdoblar dinamikasini tekshirishga imkon beradi. 8-rasmda ikki o‘lchamli qopqondagi Boze-Eynshteyn kondensati dinamikasini tavsiflovchi ikki girdobli tizim traektoriyasi (x_R, y_R) , ko‘rsatilgan.



4-rasm. Bir xil topologik sonlarga ega bo'lgan ikkita girdobning dinamikasi ($n_1 = n_2 = 1$). $g_1 = g_2 = 100$. Boshlang'ich qiymatlar quyidagicha: $x_1(0) = y_1(0) = -x_2(0) = -y_2(0) = 1/\sqrt{2}$; $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$; $\dot{y}_1(0) = -\dot{y}_2(0) = 1.1$. Uzluksiz chiziq - bu (18) Gamiltonian uchun kanonik tenglamani iterallash yordamida hisoblangan zarrachalar juftining nisbiy koordinatasining traektoriyasi; qizil “+” belgilari - (2) formulada GPT ning sonli iteratsiyasi orqali olingan o'zaro ta'sir qiluvchi girdoblarning juftligi koordinatalari uchun mos natijalar; to'rtta panelda o'zaro ta'sir qiluvchi girdoblar uchun to'liq funksiyasi modulining kvadratining profillari tasvirlangan.

XULOSA

Ushbu dissertasiya ishi kondensirlangan moddalar fizikasida, optoelektronikada va Boze-Eynshteyn kondensatida paydo bo'ladigan turli xil girdoblar dinamikasini modellashtirish masalalarini hal qilishga bag'ishlangan. Dissertasiya ishida olib borilgan tadqiqotlar asosida quyidagi xulosalar keltirilgan:

1. Kuchli itaruvchi kubik nochiziqilikka ega ikki o'lchamdagi bir komponentli Boze-Eynshteyn kondensatlarida o'zaro ta'sir qiluvchi girdoblarning samarali nazariyasida kondensat kengligi erkinlik darajasining roli tadqiq qilindi.
2. O'zaro ta'sirlashuvchi girdoblar yadrosi koordinatalari uchun Lagranj tenglamasini va kenglikning vaqt hosilasini oldik va nostandart Puasson qavslari yordamida uning Gamilton formalizmi qurildi.
3. Gamilton tenglamasini yechish orqali biz Gross-Pitayevskiy tenglamasining sonli yechimlari bilan tasdiqlangan, girdob yadrolarining sekinroq aylanish harakati bilan bir qatorda tez radial kenglik tebranishlarini aniqlandi.

Boshqacha qilib aytganda, to'liq dinamikasida kuzatilgan tez radial tebranishlarni muzlatilgan kenglik erkinlik darajasi bilan samarali dinamika doirasida tushuntirib bo'lmaydi. Yuqori energiyalarda bir xil zaryadga ega bo'lgan ikki girdobli tizimlarda kenglik tebranishi zarba ta'siridagi rotatorida zarba rolini o'ynaydi. Zarba kuchi ortib borishi bilan kenglik tebranishi natijasida yuzaga keladigan radial tebranishning amplitudasi ham, chastotasi ham kattalashadi va har bir girdobning traektoriyasi dengiz tipratikaniga o'xshash strukturani hosil qiladi. Hozirgi variatsion yondashuvning qo'shimcha natijasi bir juft yadro koordinata vektorlarining skalyar ko'paytmasiga bog'liq bo'lgan koeffitsiyent bilan ko'paytiriladigan logarifmik girdoblararo o'zaro ta'sirni, qisqa masofali itarish, zaryadga bog'liq bo'lgan elastiklik kuchi va zaryadga bog'liq bo'lmagan o'zaro ta'sirni o'z ichiga oladi.

4. Bundan tashqari, har bir komponentda bitta girdob bo'lsa, garmonik tuzoqdagi ikki o'Ichamli ko'p komponentli BEKda girdoblar dinamikasini tadqiq qildik. Tomas-Fermi rejimidan tashqari tekshiruv kuchli itaruvchi kubik nochiziqilik koeffitsiyentiga ega bo'lgan nochizikli Shryodinger tenglamasida amalga oshiriladi. Qopqon tufayli tartibga solingan Pade yaqinlashuviga asoslangan girdob sinov funksiyasidan foydalanganib, bir jinsli magnit maydon va elastiklik kuchi ostida hamda Lorents kuchi ishtirokida inertsiyaga ega zaryadlangan zarrachalar dinamikasiga ekvivalent bo'lgan girdob yadrolari (zarralari) uchun nochizikli dinamikani olgan holda kollektiv koordinatalar usulini qo'llandi. Zarrachalararo o'zaro ta'sir o'ziga xos noodatiy va qisqa diapazonli bo'lib, uning kattaligi massa markazining qopqon markazidan uzoqlashishi bilan kamayadi.
5. Eng muhim yangilik bu girdoblarning nolga teng bo'lmagan inertsiasidir, bu odatiy gidrodinamikada keng qo'llaniladigan nuqtaviy girdoblarining an'anaviy nazariyasida mavjud emas. Inertsiasiz uchta girdob tizimi, inertsiasiz nuqtaviy girdobning tegishli holatidan farqli o'laroq xaotik bo'lishi mumkin.

**SCIENTIFIC COUNCIL DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 ON AWARD OF
SCIENTIFIC DEGREE AT INSTITUTE OF FUNDAMENTAL AND
APPLIED RESEARCH “TIAME” NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY**

INSTITUTE OF FUNDAMENTAL AND APPLIED RESEARCH

BABAJANOV DONIYOR BAHODIROVICH

**MODELLING OF THE DYNAMICS OF VORTICES IN BOSE-EINSTEIN
CONDENSATES**

01.04.02 – Theoretical physics

**05.01.07 – Mathematical modelling. A set of numerical methods and programs.
(physical and mathematical sciences)**

**DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2023

The theme of dissertation of the doctor of philosophy (PhD) on technical sciences was registered by Supreme Attestation Commission under the Ministry of higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under B2023.2.PhD/FM63.

The doctoral (PhD) dissertation was carried out the Institute of Fundamental and applied research under "TIAMEE" National Research University.

The abstract of the dissertation was posted in three (Uzbek, English, Russian (resume)) languages on the website of the Scientific Council (www.ifar.uz) and on the information and education portal at "Zionet" (www.ziyonet.uz).

Scientific consultant: **Katsuhiko Nakamura**
Doctor of physical and mathematical sciences, professor

Official opponents: **Toshmatov Bobir Abdumanonovich**
Doctor of physical and mathematical sciences

Mardonov Shuhrat Numonjonovich
Doctor of physical and mathematical sciences

Leading organization: Urgench State University

The defense of the dissertation will be held on "29" September, 2023 at 16³⁰ in the meeting of the Scientific Council No. DSc.03/31.03.2022 T/FM T.04 at the Institute of Fundamental and Applied Research under the National Research University "TIAME" (Address: 100000, Tashkent city, Qori Niyazov Street 39, Institute of Fundamental and Applied Research, Hall 108; tel.: 71 237-09-61.; e-mail: info@ifar.uz)

The doctoral (PhD) dissertation can be looked through at the Information Resource Center of the Institute of Fundamental and Applied Research under the National Research University "TIAME" (registered under № 15). (Address: 100000, Tashkent city, 39 Qori Niyazov str., Institute of Fundamental and Applied Research, hall 108; ph.: 71 237-09-61)

The Abstract of the dissertation was distributed on " " September, 2023.

(Registry record № 15 dated "15" September, 2023)

B. J. Ahmedov
Chairman of the Scientific Council
on Award of Scientific Degrees,
D. Ph.-M.S., Professor

E. Kh. Karimbayev
Scientific Secretary of Scientific Council
on Award of Scientific Degrees
PhD in Ph.-M.S.

B. M. Narzilloev
Chairman of the Scientific Seminar of the Scientific
Council on Award of Scientific Degrees,
D. Ph.-M.S., Senior Researcher

INTRODUCTION (abstract of a PhD dissertation)

Topicality and demand of the theme of the dissertation. The fundamental and practical scientific research conducted in the world over the last 30 years is aimed at optimizing the functional properties of materials and developing resource-efficient technologies by miniaturizing (mechanical, thermal, electronic and optical) devices. The most promising direction in this field is the physics of low-dimensional materials and quantum technologies, which include the use of quantum effects to create resource-efficient electronic and optoelectronic devices based on them. Therefore, the use of effective mathematical models that allow to describe the processes involving particles and waves that are carriers of charge, spin, heat, and information is a topical issue in a number of modern fields of physics, such as quantum photonics, optics, photovoltaics, quantum informatics, and the physics of condensed matter.

Currently, the study of processes involving both quasiparticles and waves, characterized by nonlinear equations such as the nonlinear Schrödinger equation and the Gross Pitaevsky equation, is one of the topical issues of modern quantum physics, the physics of cooled atoms and condensed media. Solving the Gross-Pitaevsky equation in such systems plays an important role in a number of practical problems arising in nanophysics, physics of cooled atoms, and quantum technologies. Finding analytical and numerical solutions of nonlinear equations and studying their properties, as well as mathematical modeling of effective dynamic processes, creating effective algorithms and software for numerical calculations is an important stage of modern research.

In our Republic, attention has been paid to the current directions of physical and mathematical sciences, including theoretical physics and applied mathematics, therefore, the implementation of developments in these directions from a scientific and practical point of view is of great importance. In particular, in our country, great attention is being paid to conducting fundamental researches and applying the results of these researches to the creation of practical developments by solving problems arising in nonlinear optics, quantum mechanics, condensed matter physics by means of mathematical modeling and numerical methods. Finding an accurate and numerical solution of nonlinear evolutionary equations in Bose-condensates, and modeling their soliton and vortex solutions, achieved important results. Theoretical and practical research is being conducted in our country on the priority directions of “Nonlinear dynamics, physics of quantum materials and applied mathematics” at the level of international standards. It is important to develop the theory of solving nonlinear evolutionary equations for Bose condensates using exact and numerical methods to ensure the implementation of the decision.

This dissertation research serves to a certain extent in the implementation of the tasks defined in the following documents: Decree of the President of the Republic of

Uzbekistan No. PF-4947 dated February 7, 2017 “On the strategy of actions for the further development of the Republic of Uzbekistan”, PQ-2789 dated February 17, 2017 “On measures to further improve the activities of the Academy of Sciences, the organization, management and financing of scientific research works”, PQ-2909 dated April 20, 2017 “On measures to further develop the higher education system” and 2018 Resolution No. PQ-3682 dated April 27, “On measures to further improve the system of implementation of innovative ideas, technologies and projects”, President of the Republic of Uzbekistan Sh.M. Mirziyoyev's speech at the meeting with representatives of the field of education and science at the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek on May 24, 2019, and other normative and legal documents related to this activity in the 2023 President's appeal to the Senate.

Relevance of the research to the priority areas of development of science and technology of the Republic. The dissertation research has been carried out in accordance with the priority areas of science and technology in the Republic of Uzbekistan.

The degree of knowledge of the problem. Trapped single-component and multi-component Bose-Einstein condensates (BECs) have been realized experimentally, giving a good candidate within which to study theoretically the dynamics of vortices. Recently, attention has been paid in particular to small vortex clusters. While dynamics of the macroscopic wave function of BECs is described by the nonlinear Schrodinger equation or Gross-Pitaevskii equation (GPE) as in equation (2.1) below, the trapping potential plays a nontrivial role. For trapped single-component BECs, the presence of the breathing mode of width, i.e, collective radial oscillation of the spherically- or circularly-confined region, has been exhibited both theoretically and experimentally. In contrast, the effective dynamics of interacting vortices in trapped BECs with strong nonlinearity has recently been proposed and numerically analyzed, but little theoretical attention has been paid to how to couple the core-coordinates of interacting vortices with the breathing width degree of freedom. In our paper, we developed an effective theory of vortex dynamics in a two-dimensional (2D) multi-component BEC in the harmonic trap and with strong nonlinearity, in the case that each component has a ‘single vortex’. There we chose the amplitude form of each vortex function in the Pade approximation which accommodates a hallmark of the vortex core. The important finding in this instance was the nonzero inertia (or momentum) of vortices suggested in, which was distinct from the inertia-less vortices widely used in usual hydrodynamics. We also recognized the little active role of the breathing degree of freedom in single vortex dynamics. However, these conclusions become questionable in the case that each component of the BECs will accommodate “plural number of vortices”, because of the strong phase correlation among them. In this dissertation, we apply the standard variational principle to the interacting vortices in 2D non-rotating trapped single-component BECs with strong cubic nonlinearity, and

elucidate an outstanding role of the breathing degree of freedom which is coupled with vortex degree of freedom (i.e., core coordinates).

In this dissertation we apply the variational method with use of a regularized function for a pair of vortices which includes the width degree of freedom as a collective coordinate, derive Lagrange equations for vortex cores and width, and construct their Hamiltonian formalism.

Solving numerically the above Hamilton equation, we show novel effects of breathing oscillations on vortices, which will be verified by numerical iteration of the GPE. We proceed to the dynamics of two vortices in cases of both identical and different vortex charges. There we see emergence of chaos in higher energies in trapped two-vortex systems under the breathing dynamics.

Recently, there has been much interest in theoretical and experimental studies on trapped atomic Bose-Einstein condensates (BECs). The superfluid property of atomic BECs arises from a dual aspect of waves and particles (i.e., matter waves), and is theoretically described by the macroscopic wave function. Because of the nonlinearity of the system caused by interaction between particles, the macroscopic wave function can take a form of various solitons such as bright, dark, gray, and vortex solitons, and these solitons are experimentally observed in BECs. As for bright solitons, Martin et al. theoretically predicted that the particlelike behavior of three bright solitons in a one-dimensional ^{87}Rb BEC was nonintegrable and showed its change from regular motions to chaos.

Perez-Garcia et al. applied a variational method to dynamics of bright solitons in a two-dimensional (2D) BEC and showed that the center of mass of each soliton obeys Newtonian dynamics and Ehrenfest's theorem is valid if the phase of the BEC wave function will be suitably chosen. As more interesting systems, we can consider solitons in multicomponent BECs which consist of different kinds of atoms or the same kind of atoms having different spin and that have been experimentally realized. In multicomponent BECs, there is not only intracomponent particle interaction but also intercomponent particle interaction which is another origin of nonlinearity, so we expect novel soliton dynamics which is not seen in single-component BECs. Yamasaki et al. developed a variational method to describe bright soliton dynamics in 2D multicomponent BECs, and proposed a model of conservative chaos. In 2D and three-dimensional (3D) systems, however, bright solitons are unstable unless intracomponent interaction oscillates between attraction and repulsion or coexisting intracomponent quintic (three-body) interaction is strong enough.

On the other hand, topological vortices known as quantized vortices (i.e., topological defects of the macroscopic wave function can be stable in two dimensions). Vortices in single-component and multicomponent BECs have been realized experimentally, making a good candidate to study the dynamics of vortices in 2D and 3D BECs. Most of the theoretical studies, however, are limited to the Thomas-Fermi regime (TFR) in a single-component BEC. While dynamics of the macroscopic wave

function of BEC is described by Gross-Pitaevskii equation (GPE) in Eq. (3.2) below, TFR suppresses the kinetic energy part in GPE in the lowest approximation and therefore the lowest-order wave function cannot have a healing length which is a hallmark of the vortex core. It is highly desirable to construct the effective theory of vortices beyond the TFR.

In the dissertation, we consider the vortices in 2D multicomponent BECs beyond the Thomas-Fermi regime. To consider the effective dynamics of point-like vortices, we extract some degrees of freedom by using the variational approach, and derive an effective dynamics with finite degrees of freedom.

Connection of the topic of dissertation with the scientific researches of the higher educational institutions, where the dissertation was conducted. The dissertation was carried out within the framework of the grant of the State Committee for Science and Technology of the Republic of Uzbekistan number F-4-005 for the young scientists' scientific project entitled "Deformation process of solid bodies, analysis of nonlinear dynamics and the analysis of the Internet traffic".

Aim of the research is to develop the model of the dynamics of vortices in Bose-Einstein condensates (BEC) by modeling the latter with use of the Gross-Pitaevskii equation.

The tasks of the research:

- to develop the model of the dynamics of vortices in single and multi-component BEC's
- to obtain the chaos in the case of three vortices.
- to obtain the topological and non-topological spring forces for the dynamics of point vortices.
- to use Gross-Pitaevskii model via collective coordinates variational method and numerical approach (finite difference schemes).

Objects of the research are excited states of the Bose-Einstein condensates – vortices.

Subjects of the research are the dynamical properties of vortices in BECs.

Methods of the research are Nonlinear Schrodinger (Gross-Pitaevskii) equation and its Lagrangian with the cubic nonlinearity. Collective coordinates method (variational approach). Direct numerical solution of the GPE.

Scientific novelty of the research.

1. For the first time, the vortex solutions of the Gross-Pitaevskii equation describing the Bose-Einstein condensate model in two-dimensional traps were found, and the equations of motion of the dynamics of these solutions

- were found. An effective nonlinear dynamics was obtained for the centers of vortices, and it was found that this dynamics is similar to the dynamics of charged particles under the influence of a strong elastic force and having inertia (mass) under the influence of the Lorentz force in a homogeneous magnetic field.
2. For the first time, the Lagrange equation for the coordinates of the centers of interacting vortices and the time derivative of the vortex soliton width were found, and its Hamiltonian formalism was constructed using non-standard Poisson brackets and rapid radial oscillations of the centers of vortices occurring simultaneously with slower rotational movement were found.
 3. For the first time, the formula of the inter-vortex interaction potential was found.
 4. For the first time, the dynamics of three vortices was studied and it was determined that their movement is chaotic.

Practical results of the study are as follows:

- for the first time, formula for the inter-vortex interaction potential was found;
- for the first time, the vortex solutions of the Gross-Pitaevsky equation has been obtained;
- for the first time, it is shown that the dynamics is similar to the dynamics of charged particles under the influence of a strong elastic force and having inertia (mass) under the influence of the Lorentz force in a homogeneous magnetic field;
- for the first time it was obtained chaos in the dynamics of three vortices.

Reliability of the research results is provided by the following:

- the standard methods of mathematical and theoretical physics, including high-performance numerical methods and programs, was used in the dissertation work;
- that the consistency of theoretical results of other authors is carefully compared; the conclusions are explained by their close agreement with the basic rules of the theory of Bose-Einstein condensates;
- the solutions of the Gross-Pitaevsky equation, which is the nonlinear Schrodinger equation, and the numerical solutions of these equations derived from the fundamental conservation laws, for example, the energy conservation laws, are verified to be the same;
- the stability of the solutions was analyzed numerically and their accuracy was evaluated. The obtained results are fully physically analyzed and their compliance with real physical processes is theoretically proved.

Scientific and practical significance of the research:

- the scientific significance of the research is that the formalism developed in the dissertation is determined by the wide application of the Bose-Einstein condensate in quantum computing and quantum information fields based on the analysis of the nonlinear dynamic properties of the Bose-Einstein condensate as a macroscopic substance described by the Gross-Pitaevsky equation;
- it can also illuminate a deeper understanding of the macroscopic properties of quantum matter;
- the practical significance of the research results is explained by their use in modeling optical vortex solitons that appear in modern optoelectronics, information and communication technologies, quantum technologies and low-dimensional quantum functional materials;
- the results can be useful in analyzing the nature and dynamics of the condensed state, and in developing observational experiments.

Implementation of the research results.

The results of the dissertation on the vortex solutions of the two-dimensional Gross-Pitaevsky equation for the Bose-Einstein condensate in a harmonic trap are used in articles published in foreign scientific journals (Physical Review A, Volume 93, Issue 1, 2016, pp. 013615; Physical Review A, Volume 99, Issue 3, 2019, pp. 033607; Physical Review A, 103, 053313 (2021)). They used the trial function for vortices and the solutions of the integrals that appear when forming the Lagrange function.

The results of the dissertation on the dynamics of vortices in the Bose-Einstein condensate are used in the articles published in the following scientific journals (Journal of the Physical Society of Japan, Volume 87, Number 6, 2018, pp. 063601; Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 53, 065303 (2020); Modern Physics Letters B, Vol. 36, No. 28-29, 2250153 (2022); Journal of the Physical Society of Japan, 86, 114001 (2017)). The application of scientific results made it possible to solve the equations of motion for vortices formed in Bose-Einstein condensates.

Modeling the dynamics of soliton solutions of the non-stationary nonlinear Schrödinger equation and the Gross-Pitaevsky equation in foreign scientific journals (Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 55, 243001 (2022); Phys. Rev. E, Volume 93, 032204 (2016); Journal of Differential Equations, Volume 260, Number 10, 2016, pp. 7397-7415; Nonlinearity, 35, 3283 (2022); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51, 095203 (2018); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 52, 035202) was used. The application of the scientific result made it possible to build a numerical method model of the boundary value problem posed on planar graphs for the two-dimensional non-stationary nonlinear Schrödinger equation.

Modeling the dynamics of soliton solutions of the stationary nonlinear Schrödinger equation and the Gross-Pitaevsky equation in foreign scientific journals (Contemporary mathematics: Mathematical Problems in Quantum Physics, 717, 14446 (2018); Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, Volume 23, Number 6, pp. 63; Physical Review E, 94, 062216 (2016); Applicable Analysis, Volume 99, Pages 1359-1372, (2020); Mathematical Modeling of Natural Phenomena, Vol. 11, No. 2, pp. 20-35, (2016); Mathematical Methods in the Applied Sciences Volume 41, Issue 1, p. 159-191, (2017); Asymptotic Analysis, vol. 113, no. 1-2, pp. 87-121, (2019); Analysis, geometry and number theory , 2, (2017)) was used. The application of the scientific result made it possible to build a numerical and analytical model of the two-dimensional stationary nonlinear Schrödinger equation.

Approbation of the research results. The results of the dissertation have been discussed in 4 international and 3 local conferences, and several workshops and seminars.

Publication of research results. A total of 7 scientific works have been published on the topic of the dissertation, including 4 scientific articles in scientific publications recommended for publication of the main scientific results of doctoral (PhD) dissertations of the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan, including 1 in the CIS journal on the Web of Science database and 3 Published in foreign journals with a high impact factor in the Scopus database.

Scope and structure of the thesis. The dissertation consists of introduction, three chapters, conclusion, appendix and list of references all in 92 pages.

THE MAIN PART OF THE DISSERTATION

The **introduction** of the dissertation is based on the relevance and necessity of the dissertation topic, the compatibility of the research with the priority directions of the development of science and technology of the republic. A brief summary of foreign scientific research on the topic of the dissertation and the level of research of the problem is presented, the purpose and tasks of the research are formulated, its object and subject are indicated, the practical results and scientific innovations of the research are described, the theoretical and practical significance of the obtained results is revealed, the application of the research results, the dissertation information about its structure and published scientific works is provided.

The first chapter of the dissertation entitled “**Introduction to vortices in Bose-Einstein condensates**” describes the basic theory of Bose-Einstein condensates. In particular, the Gross-Pitaevsky equation for Bose-Einstein condensates, its derivation from the Schrödinger equation, soliton solutions and vortex solutions of this equation are covered.

The second chapter, entitled “**Dynamics of trapped interacting vortices in Bose-Einstein condensates**”, describes the dynamics of two vortices in a one-component two-dimensional Bose-Einstein condensate dedicated to the development of a role model using the variational principle, their interaction and the width of the expanding-contracting condensate.

We consider a two-dimensional non-rotating single-component Bose-Einstein condensate under a trap with two vortices described by the Gross-Pitayevsky equation. If $r = (x, y)$ then the macroscopic wave function $\Phi(t, \mathbf{r})$ is described by the following equation:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}) = [-\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g |\Phi(t, \mathbf{r})|^2] \Phi(t, \mathbf{r}). \quad (1)$$

Here, normalization condition after proper rescaling of Φ can be found using $\int |\Phi(t, \mathbf{r})|^2 d^2 \mathbf{r} = 1$. The effect of the trapping potential is described by $V(\mathbf{r}) = r^2$.

As a trial function, we choose the product of two vortex functions and apply the shape of the amplitude of each vortex function based on the Padé approximation. The trial function for two interacting vortices is following:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = N f_0 f_i f_j e^{i(\phi_0 + \phi_i + \phi_j)}, \quad (2)$$

here $f_0 \equiv e^{-\frac{r^2}{4w^2}}$, $f_k \equiv \sqrt{\frac{(r-r_k)^2}{2\xi^2 + (r-r_k)^2}}$ and $\phi_0 \equiv n_k \beta$, $\phi_k \equiv n_k \arctan\left(\frac{y-y_k}{x-x_k}\right)$ are amplitudes and phases, respectively. Here $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k)$, $k = i, j$ the coordinates of the vortex cores, which are considered collective coordinates, ξ length relative to the size of the vortex core. w and β are the width of the condensate and its canonical conjugate, respectively. From the energy minimization condition, we obtain expressions for the following parameters:

$$\begin{aligned} w_0^2 &\cong \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{\pi}} = O(g^{1/2}), \\ \xi &\cong \frac{|n_i| \pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2 + \gamma}} g^{-\frac{1}{4}} = O\left(g^{-\frac{1}{4}}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

Here $\gamma (= 0,57721)$ is Euler constant.

The Gross-Pitayevsky equation can be found using the following Lagrangian density based on the variational principle that minimizes the action integral

$$-\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\Phi \dot{\Phi}^* - \dot{\Phi} \Phi^*) + |\nabla \Phi|^2 + r^2 |\Phi|^2 + \frac{g}{2} |\Phi|^4. \quad (4)$$

Euler-Lagrange equation is used for this

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^*} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \Phi^*} = 0. \quad (5)$$

We put the test function in formula (2) into formula (4). And then by integrating the Lagrangian density over all space coordinates ($L \equiv \iint d^2\mathbf{r}\mathcal{L}$), we find the effective Lagrangian for collective coordinates

$$\begin{aligned}
 -L = & \sum_{k=i,j} \left\{ -\frac{1}{2w^2} n_k \left(1 - \frac{r_k^2}{4w^2} + \frac{r_k^4}{24w^4} \right) (y_k \dot{x}_k - x_k \dot{y}_k) - \frac{r_k^2}{6w^4} \left(1 - \frac{r_k^2}{4w^2} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{w^2} \left(1 - \frac{r_k^2}{2w^2} + \frac{r_k^4}{8w^4} \right) n_k^2 \right\} + 2w^2(1 + \beta + 4\beta^2) + \frac{7}{6w^2} + \frac{g}{8\pi w^2} \\
 & + V_{ij}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned}
 V_{ij} = & -\frac{1}{w^2} n_i n_j \left(1 - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{2w^2} \right) \left(\gamma + \ln \left(\frac{r_{ij}^2}{2w^2} \right) - \frac{r_i^2 + r_j^2 - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{2w^2} \right) \\
 & + \frac{5\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{2}}\sqrt{7}r_{ij}^4} e^{-\frac{r_i^2+r_j^2}{4w^2}} I_0 \left(\frac{r_G^{ij} r_{ij}}{4w^2} \right). \tag{7}
 \end{aligned}$$

This formula (7) describes the interaction potential of vortices, and its first term represents the charge-dependent long-range effect, while the second term represents the charge-independent short-range effect indicates a repulsive potential. Lagrangian equations of motion for \mathbf{r}_k

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = 0,$$

And for β and w

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial L}{\partial w} = 0. \tag{8}$$

For $g \gg 1$ when the asymptotic conditions $\xi \ll r_{ij}, r_G^{ij} \ll w$ are satisfied the above Lagrangian equations of motion become:

$$\begin{aligned}
 n_k \dot{y}_k &= \left(\frac{1}{3} + n_k^2 \right) \left(1 + \frac{r_k^2}{2w^2} \right) \frac{x_k}{w^2} + n_k \frac{\dot{w}}{w} y_k - w^2 \left(1 + \frac{r_k^2}{2w^2} \right) \frac{\partial V}{\partial x_k}, \\
 n_k \dot{x}_k &= -\left(\frac{1}{3} + n_k^2 \right) \left(1 + \frac{r_k^2}{2w^2} \right) \frac{y_k}{w^2} + n_k \frac{\dot{w}}{w} x_k + w^2 \left(1 + \frac{r_k^2}{2w^2} \right) \frac{\partial V}{\partial y_k},
 \end{aligned}$$

and

$$\dot{w} = -4w + \frac{g}{4\pi w^3} - \frac{1}{w^5} \left(\sum_{k=i,j} \left(\frac{1}{3} + n_k^2 \right) r_k^2 \right) - \frac{\partial V_{ij}}{\partial w},$$

$$\beta = \frac{\dot{w}}{4w}, \quad (9)$$

Now we solve these equations and the Gross-Pitaevsky equation using numerical methods.

For $g = 500$, figure 1 shows the effective dynamics described by formula (9) and its numerical methods (real and complex time propagators based on the split-step Crank-Nicholson method [56, 57]) is shown to be confirmed by wave dynamics.

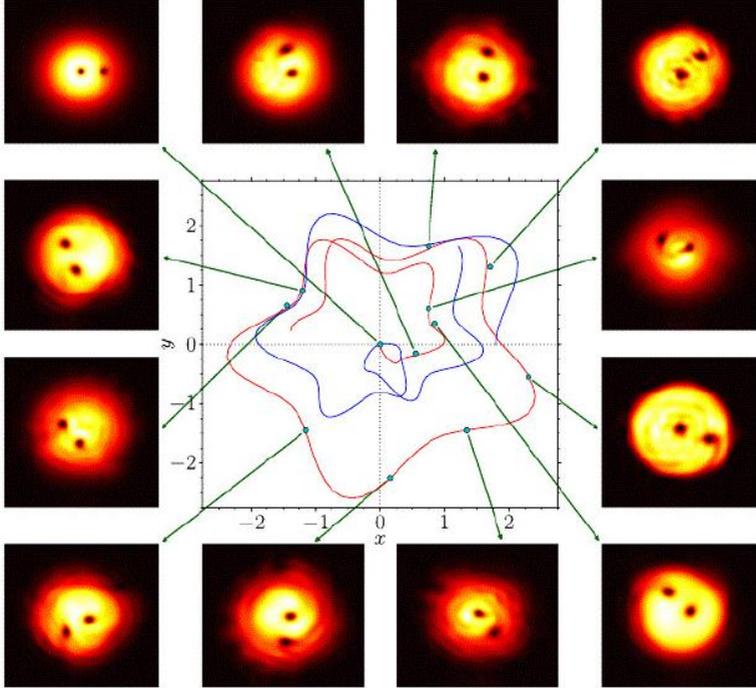


Figure 1. In the case of two vortices with the same winding numbers ($n_i = n_j = 1$), the short-time trajectories described by formula (9) generated using Hamiltonian dynamics and (1) images of the wave function amplitudes generated from the Gross-Pitaevsky equation.

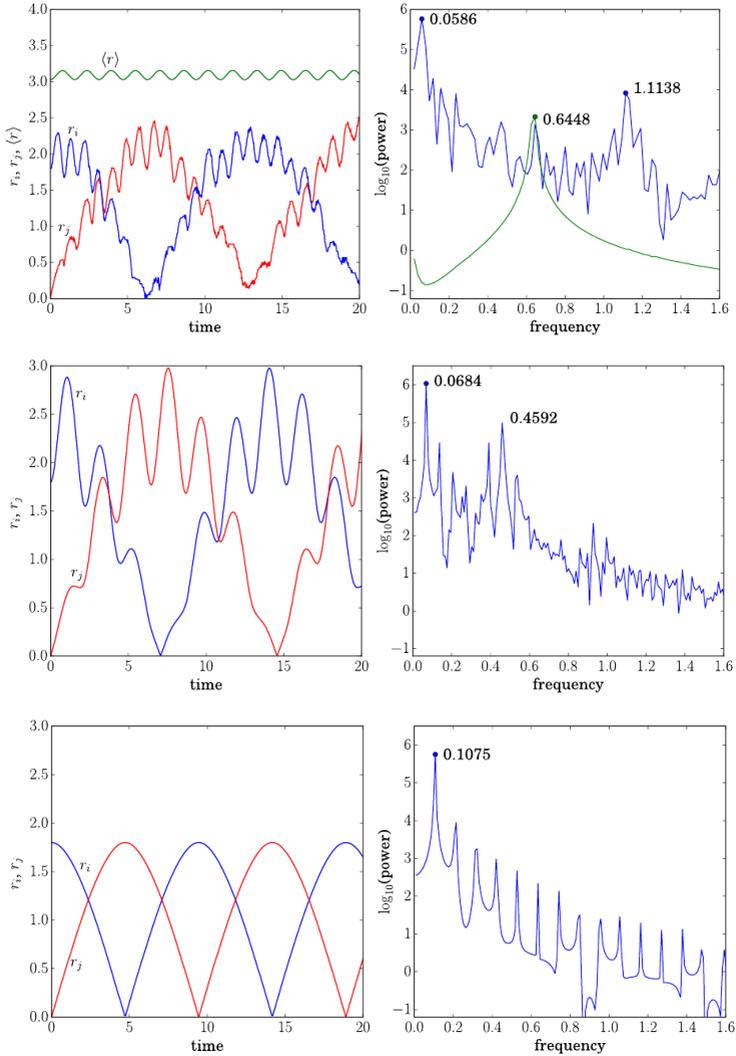


Figure 2. The graphs of the radial coordinates $r_i, r_j(t)$ of each vortex are presented in the figures on the left. The red and blue graphs represent r_j and r_i respectively. The figures on the right show power spectrum versus frequency graphs.

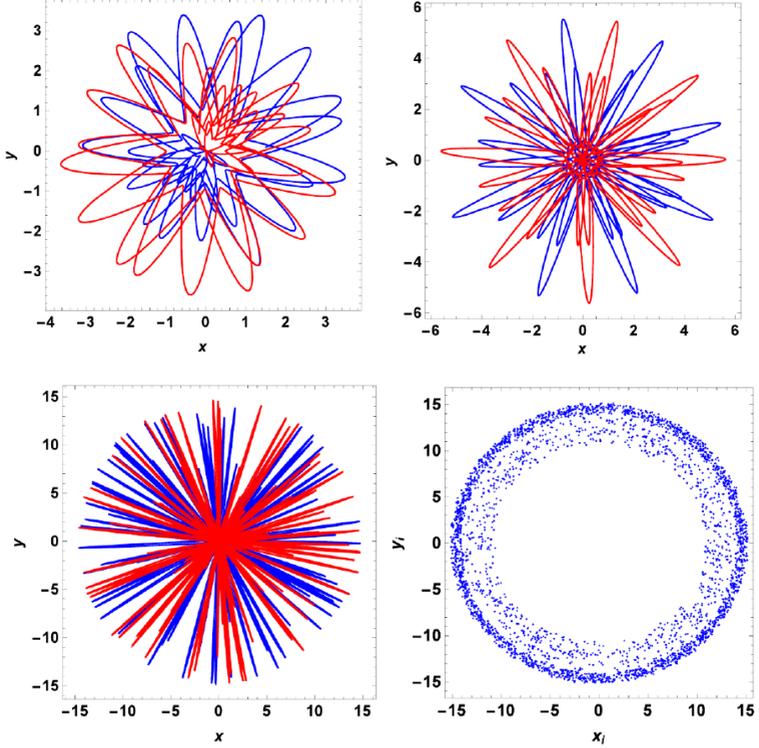


Figure 3. High-energy trajectories and Poincaré section for two vortices with the same winding number ($n_i = n_j = 1$).

In the third chapter of the dissertation, entitled “**Dynamics of inertial vortices in a multicomponent Bose-Einstein condensate**”, a model for the dynamics of a Bose-Einstein condensate in a trap with two-dimensional confinement is built. An atomic Bose-Einstein condensate is characterized by superfluidity, which is a special state of matter that occurs when atoms are cooled under certain physical conditions. This state is described by the Gross-Pitaevsky equation, which is the nonlinear Schrödinger equation, and is a collective state of atoms ranging from a few tens to several hundred thousand, behaving like a single particle-wave. This is because this equation has soliton solutions and the particle ensemble behaves like a “big” soliton and has all the properties of a soliton wave. In this chapter, we consider the Bose-Einstein condensate in a two-dimensional trap and therefore use the two-dimensional nonlinear Schrödinger equation to study the dynamics of the system. Unlike the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation, the two-dimensional nonlinear

Schrödinger equation has eddy solutions in addition to soliton solutions. In this chapter, using a variational method using vortex solitons in the Padé approximation, we determine the effective Hamiltonian for vortices. We investigate the detailed dynamics of vortices numerically, considering the case where two and three vortices are present. We consider a two-dimensional model in the trap consisting of a system of n -component macroscopic wave functions $\Phi_1(t, x, y)$, $\Phi_2(t, x, y)$, ..., $\Phi_n(t, x, y)$, satisfying the following equation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_i(t, x, y) &= \left[-\nabla^2 + V(x, y) + g_{ii} |\Phi_i(t, x, y)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \neq i} g_{ij} |\Phi_j(t, x, y)|^2 \right] \Phi_i(t, x, y), \end{aligned} \tag{30}$$

here $i, j=1, \dots, n$. Here is a normalization condition that is the same for each component of the wave functions Φ_i after the wave functions are properly scaled by the number of particles $\int |\Phi_i(t, x, y)|^2 dx dy = 1$ determined by the formula. Trapping is given in the form $V(x, y) = (x^2 + y^2)$. In equation (30), the following variables are changed:

$l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ is a confining length and $\tau = \omega^{-1}$ is oscillation period. Using this spatial coordinates are scaled by l , time by 2τ , wave function by $\frac{1}{l}$, and nonlinearity coefficients by $\frac{\hbar^2}{2m}$. Scattering length for two-particle collisions is a_{ij} and $g_{ij} \equiv 8\pi N a_{ij} / l$ nonlinear coefficients are considered positive and are much greater than unity. For $i \neq j$ nonlinear coefficients g_{ii} and g_{ij} represent intra- and inter-component interactions. For all i we assume that $g_{ii} = g_1 (\gg 1)$ and for $i \neq j$ we choose $g_{ij} = g_2 (\gg 1)$.

Our goal is to derive from equation (30) the evolution equation for the collective coordinates of the test functions for the eddy. The collective coordinates for the vortex are phase variables, except for the coordinates of the vortex core. We use test functions for vortices outside the Thomas-Fermi regime, taking into account the kinetic energy term in the Gross-Pitaevsky equation in formula (30): for the amplitude of test functions for vortices, we choose the following vorticity function based on the Padé approximation (winding number $n_i = \pm 1$)

$$\begin{aligned}
\Phi_i(t, x, y) &\equiv f_i(t, x, y) \exp[i\phi_i(t, x, y)] \\
&= N \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\Delta}\right] \sqrt{\frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{2\xi^2 + (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \\
&\times \exp\left[i\left[n_i \arctan\left(\frac{y - y_i}{x - x_i}\right) + \alpha_i(x - x_i) + \beta_i(y - y_i)\right]\right],
\end{aligned} \tag{31}$$

with normalization coefficient $N = \frac{1}{\sqrt{\pi\Delta - 2\pi e^{\frac{2\xi^2}{\Delta}} \xi^2 \Gamma\left(0, \frac{2\xi^2}{\Delta}\right)}}$. Here $\Gamma(0, z) \equiv \int_z^\infty t^{-1} e^{-t} dt$ is an incomplete gamma function of the second type.

Substituting this trial function into the Lagrangian density for field variables,

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L} &= \sum_i \left[\frac{i}{2} (\Phi_i \Phi_i^* - \Phi_i^* \Phi_i) + |\nabla \Phi_i|^2 + (x_i^2 + y_i^2) |\Phi_i|^2 + \frac{g_1}{2} |\Phi_i|^4 \right] \\
&\quad + \sum_{j>i} g_2 |\Phi_i|^2 |\Phi_j|^2
\end{aligned} \tag{32}$$

and using the Lagrange equations:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i^*} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i^*} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \Phi_i^*} = 0 \tag{33}$$

we get the equation of motion in terms of collective coordinates. The numerical solution of these equations allows us to investigate the dynamics of vortices in a two-dimensional trap. Figure 8 shows the trajectory (x_R, y_R) of a two-vortex system describing the dynamics of a Bose-Einstein condensate in a two-dimensional trap.

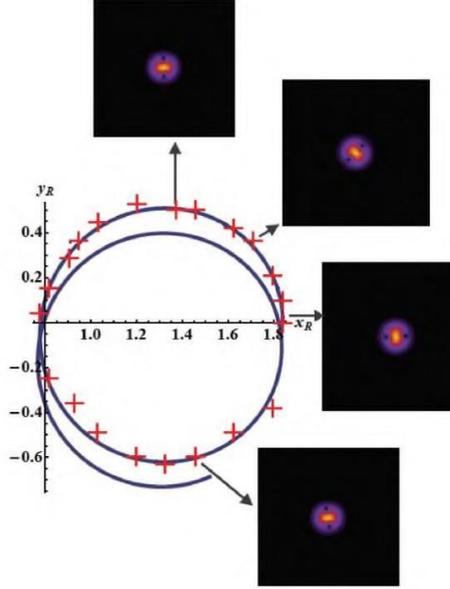


Figure 4. Dynamics of two vortices with the same winding numbers ($n_1 = n_2 = 1$). $g_1 = g_2 = 100$. The initial values are the following: $x_1(0) = y_1(0) = -x_2(0) = -y_2(0) = 1/\sqrt{2}$; $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$; $\dot{y}_1(0) = -\dot{y}_2(0) = 1.1$. The solid line is the trajectory of the relative coordinate of the pair of particles calculated by iterating the canonical equation for the Hamiltonian (18); red "+" signs - corresponding results for coordinates of pairs of interacting vortices obtained by numerical iteration of GPE in formula (2); the four panels depict the profiles of the square of the wave function modulus for the interacting vortices.

CONCLUSION

This dissertation work is dedicated to solving the problems of modeling the dynamics of various vortices that appear in the physics of condensed matter, optoelectronics and Bose-Einstein condensate. The following conclusions are made based on the research conducted in the dissertation work:

1. The role of condensate width degrees of freedom in the effective theory of interacting vortices in two-dimensional single-component Bose-Einstein condensates (BEC) with strong repulsive cubic nonlinearity is investigated.
2. The Lagrange equation for the coordinates of the core of interacting vortices and the time derivative of the width is derived and its Hamiltonian formalism using non-standard Poisson brackets is constructed.
3. By solving the Hamiltonian equation, we have detected rapid radial amplitude fluctuations, as well as slower rotational motion of the vortex cores, confirmed by numerical solutions of the Gross-Pitayevsky equation. In other words, fast

radial oscillations observed in wave dynamics cannot be explained in the framework of effective dynamics with frozen radial degrees of freedom. In systems of two vortices with the same winding numbers at high energies, the amplitude oscillation plays the role of a kick in a kicked rotator. As the impact strength increases, both the amplitude and frequency of the radial oscillation resulting from the radial oscillation increase, and the trajectory of each vortex forms a sea urchin-like structure. An additional result of the present variational approach is the logarithmic inter-vortex interaction multiplied by a factor that depends on the scalar product of a pair of core coordinate vectors, the short-range repulsion, the charge-dependent elastic force, and involves a charge-independent interaction.

4. In addition, we investigated the dynamics of vortices in a two-dimensional multi-component BEC in a harmonic trap, where each component has one vortex. The investigation beyond the Thomas-Fermi regime is carried out in the nonlinear Schrödinger equation with a strongly repulsive cubic nonlinearity coefficient. Using the vortex trial function based on the trap-regulated Padé approximation, we use the collective coordinates method to obtain nonlinear dynamics for vortex cores (particles) equivalent to the dynamics of charged particles with inertia under a homogeneous magnetic field and elastic force and in the presence of the Lorentz force. The interparticle interaction is unique and short-range, and its magnitude decreases as the center of mass moves away from the trap center.
5. The most important finding is the non-zero inertia of the vortices, which does not exist in the traditional theory of point vortices, which is widely used in conventional hydrodynamics. A system of three inertial vortices can be chaotic, unlike the corresponding case of a noninertial point vortices.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ ИНСТИТУТЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И
ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ «ТИИМСХА»**

ИНСТИТУТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ

БАБАЖАНОВ ДОНИЁР БАХОДИРОВИЧ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВИХРЕЙ В КОНДЕНСАТАХ БОЗЕ-
ЭЙНШТЕЙНА**

01.04.02 – Теоретическая физика

**05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплекс
программирования**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент-2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан под номером В2023.2.PhD/FM63.

Диссертация выполнена в Институте фундаментальных и прикладных исследований при Национальном университете «ТИИМСХА».

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ifar.uz) и информационно-образовательном портале “Ziyonet” (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель: **Накамура Кацухиро** доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Тошматов Бобир Абдуманович**
Доктор ф.-м.н.

Мардонов Шухрат Нумононович
Доктор ф.-м.н.

Ведущая организация Ургенчский государственный университет

Защита диссертации состоится «29» сентября 2023 года в 16³⁰ часов на заседании Научного совета при Институте фундаментальных и прикладных исследований при Национальном исследовательском университете «ТИИМСХА» (Адрес: 100000, город Ташкент, улица Кори Ниёзий 39-дом, Институт фундаментальных и прикладных исследований, 108-зал; тел.: 71 237-09-61.; e-mail: info@ifar.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Институте фундаментальных и прикладных исследований при Национальном исследовательском университете «ТИИМСХА» за № 15 (Адрес: 100000, город Ташкент, улица Кори Ниёзий 39-дом, Институт фундаментальных и прикладных исследований, 108-зал; тел.: 71 237-09-61.; e-mail: info@ifar.uz).

Автореферат диссертации разослан « » сентября 2023 года. (протокол рассылки № 15 от «15» сентября 2023 года.)

Б. Ж. Ахмедов

Председатель научного совета по присуждению
учёной степени, д.ф.-м.н., профессор

Э. Х. Каримбаев

Учёный секретарь научного совета по присуждению
ученой степени, PhD по ф.-м.н.

Б. М. Нарзиллов

Председатель научного семинара при научном совете
по присуждению ученой степени,
д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации.

Фундаментальные и практические научные исследования, проводимые в мире за последние 30 лет, направлены на оптимизацию функциональных свойств материалов и разработку ресурсоэффективных технологий за счет миниатюризации (механических, тепловых, электронных и оптических) устройств. Наиболее перспективным направлением в этой области является физика низкоразмерных материалов и квантовые технологии, включающие использование квантовых эффектов для создания на их основе ресурсосберегающих электронных и оптоэлектронных устройств. Поэтому использование эффективных математических моделей, позволяющих описывать процессы с участием частиц и волн, являющихся носителями заряда, спина, тепла и информации, является актуальной задачей в ряде современных областей физики, таких как квантовая фотоника, оптика, фотовольтаика, квантовая информатика и физика конденсированного состояния.

В настоящее время исследование процессов с участием как квазичастиц, так и волн, характеризуемых такими нелинейными уравнениями, как нелинейное уравнение Шрёдингера и уравнение Гросса-Питаевского, является одним из актуальных вопросов современной квантовой физики, физики холодных атомов и конденсированных сред. Решение уравнения Гросса-Питаевского в таких системах играет важную роль в ряде практических задач, возникающих в нанофизике, физике холодных атомов и квантовых технологиях. Поиск аналитических и численных решений нелинейных уравнений и изучение их свойств, а также математическое моделирование эффективных динамических процессов, создание эффективных алгоритмов и программного обеспечения для численных расчетов является важным этапом современных исследований.

Данная диссертационная работа служит в определенной степени для реализации задач, определенных в следующих документах: Указ Президента Республики Узбекистан №ПФ-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», PQ-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, руководству и финансированию научно-исследовательских работ», PQ-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и Постановление № PQ-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы реализации инновационных идей, технологий и проектов», Выступление Президента Республики Узбекистан Ш.М. Мирзиёева

на встрече с представителями сферы образования и науки в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека 24 мая 2019 года, в обращении Президента 2023 года к Сенату и другие нормативно-правовые документы, связанные с этой деятельностью.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии в Республике. Диссертационные исследования выполнены в соответствии с приоритетными направлениями науки и техники Республики Узбекистан.

Степень изученности проблемы. Захваченные однокомпонентные и многокомпонентные бозе-эйнштейновские конденсаты (БЭК) были реализованы экспериментально, что дает хороший кандидат для теоретического изучения динамики вихри. В последнее время особое внимание уделяется малым вихревым скоплениям. Хотя динамика макроскопической волновой функции БЭК описывается нелинейным уравнением Шрёдингера или уравнением Гросса-Питаевского (УГП), как в уравнении (2.1) ниже, потенциал захвата играет нетривиальную роль. Для захваченных однокомпонентных БЭК как теоретически, так и экспериментально было показано наличие «дышащей» моды ширины, т.е. коллективных радиальных колебаний сферически- или циркулярно-ограниченной области. Напротив, эффективная динамика взаимодействующих вихрей в захваченных БЭК с сильной нелинейностью недавно была предложена и численно проанализирована, но мало теоретического внимания уделялось тому, как это сделать. связать координаты ядра взаимодействующих вихрей со степенью свободы «дыхания» ширины конденсата. В нашей работе мы разработали эффективную теорию вихревой динамики в двумерном (2D) многокомпонентном БЭК в гармонической ловушке и с сильной нелинейностью в случае, когда каждая компонента имеет «одиночный вихрь». Там мы выбрали амплитудную форму каждой вихревой функции в приближении Паде, которая учитывает признак ядра вихря. Важным открытием в этом случае была ненулевая инерция (или импульс) вихрей, предложенная в данной диссертационной работе, которая отличалась от безынерционных вихрей, широко используемых в обычной гидродинамике. Мы также признали малоактивную роль степени свободы дыхания в динамике одиночных вихрей. Однако эти выводы становятся сомнительными в случае, если каждый компонент БЭК будет содержать «множественное число вихрей» из-за сильной фазовой корреляции между ними. В этой диссертации мы применяем стандартный вариационный принцип к взаимодействующим вихрям в двумерных невращающихся запертых однокомпонентных БЭК с сильной кубической нелинейностью и выясняем выдающуюся роль

дыхательной степени свободы, которая сочетается с вихревой степенью свободы (т.е. , координаты ядра).

В диссертации мы применяем вариационный метод с использованием регуляризованной функции для пары вихрей, включающей в качестве коллективной координаты степень свободы по ширине, выводим уравнения Лагранжа для вихревых ядер и ширины и строим их гамильтонов формализм.

Численно решая приведенное выше уравнение Гамильтона, мы показываем новые эффекты дыхательных колебаний на вихри, которые будут проверены численной итерацией GPE. Перейдем к динамике двух вихрей как в случае одинакового, так и в случае разных зарядов вихрей. Там мы видим возникновение хаоса в высших энергиях в запертых двухвихревых системах под динамикой дыхания.

В последнее время наблюдается большой интерес к теоретическим и экспериментальным исследованиям захваченных атомных бозе-эйнштейновских конденсатов. Сверхтекучесть атомных БЭК возникает из-за двойственного аспекта волн и частиц (т.е. волн материи) и теоретически описывается макроскопической волновой функцией. Из-за нелинейности системы, вызванной взаимодействием частиц, макроскопическая волновая функция может принимать форму различных солитонов, таких как яркие, темные, серые и вихревые солитоны, которые экспериментально наблюдаются в БЭК. Что касается ярких солитонов, Мартин и др. теоретически предсказали, что корпускулярное поведение трёх ярких солитонов в одномерном БЭК ^{87}Rb неинтегрируемо, и показал его переход от регулярных движений к хаосу.

Перес-Гарсия и др. применили вариационный метод к динамике ярких солитонов в двумерном (2D) БЭК и показали, что центр масс каждого солитона подчиняется ньютоновской динамике и теорема Эренфеста справедлива, если фаза волновой функции БЭК будет выбрана соответствующим образом. В качестве более интересных систем можно рассматривать солитоны в многокомпонентных БЭК, состоящих из атомов разного сорта или атомов одного и того же сорта, имеющих разный спин и реализованных экспериментально. В многокомпонентных БЭК существует не только внутрикомпонентное взаимодействие частиц, но и межкомпонентное взаимодействие частиц, которое является еще одним источником нелинейности, поэтому мы ожидаем новую динамику солитонов, которая не наблюдается в однокомпонентных БЭК. Ямасаки и др. разработали вариационный метод описания динамики ярких солитонов в двумерных многокомпонентных БЭК и предложил модель консервативного хаоса. Однако в двумерных и трехмерных (3D) системах яркие солитоны неустойчивы, если внутрикомпонентное взаимодействие не колеблется между притяжением и

отталкиванием или если сосуществующее внутрикомпонентное квинтичное (трехчастичное) взаимодействие не является достаточно сильным.

Связь диссертационного исследования с планами научноисследовательских работ высшего учебного заведения, где выполнена диссертация. Диссертация выполнена в рамках гранта Государственного комитета по науке и технологиям Республики Узбекистан № Ф-4-005 по научному проекту молодых ученых по теме «Процесс деформирования твердых тел, анализ нелинейной динамики и анализ интернет-трафика».

Цель исследования – Цель исследования – разработка модели динамики вихрей в бозе-эйнштейновских конденсатах (БЭК) путем моделирования последнего с использованием уравнения Гросса-Питаевского.

Задачи исследования:

- разработать модель динамики вихрей в одно- и многокомпонентных БЭК.
- получить хаос в случае трёх вихрей.
- получить топологические и нетопологические пружинные силы для динамики точечных вихрей.
- использовать модель Гросса-Питаевского с помощью вариационного метода коллективных координат и численного подхода (конечно-разностных схем).

Объект исследования – возбужденные состояния бозе-эйнштейновских конденсатов – вихри.

Предмет исследования – динамические свойства вихрей в конденсатах Бозе-Эйнштейна.

Методы исследования. Методы исследования: нелинейное уравнение Шрёдингера (Гросса-Питаевского) и его лагранжиан с кубической нелинейностью. Метод коллективных координат (вариационный подход). Прямое численное решение УГП.

Научная новизна диссертационного исследования следующая:

1. Впервые найдены вихревые решения уравнения Гросса-Питаевского, описывающего модель бозе-эйнштейновского конденсата в двумерных ловушках, и найдены уравнения движения динамики этих решений. Получена эффективная нелинейная динамика центров вихрей и установлено, что эта динамика аналогична динамике заряженных частиц, находящихся под действием сильной упругой силы и обладающих инерцией (массой) под действием влияния силы Лоренца в однородном магнитном поле.
2. Впервые найдено уравнение Лагранжа для координат центров взаимодействующих вихрей и производной по времени ширины вихревого

солитона, построен его гамильтонов формализм с использованием нестандартных скобок Пуассона, а также обнаружены быстрые радиальные колебания центров вихрей, происходящие одновременно с более медленными вращательными движениями.

3. Впервые найдена формула потенциала межвихревого взаимодействия.

4. Впервые изучена динамика трех вихрей и установлено, что их движение хаотично.

Практические результаты исследования следующие:

- впервые найдена формула для потенциала межвихревого взаимодействия;
- впервые получены вихревые решения уравнения Гросса-Питаевского;
- впервые показано, что динамика аналогична динамике заряженных частиц, находящихся под действием сильной упругой силы и обладающих инерцией (массой) под действием силы Лоренца в однородном магнитном поле;
- впервые получен хаос в динамике трех вихрей.

Достоверность результатов исследований заключается в следующем: • в диссертационной работе использовались стандартные методы математической и теоретической физики, в том числе высокопроизводительные численные методы и программы;

- тщательно сравнивается согласованность теоретических результатов других авторов; выводы объясняются их тесным соответствием основным правилам теории бозе-эйнштейновских конденсатов;
- проверяется идентичность решений уравнения Гросса-Питаевского, которое представляет собой нелинейное уравнение Шредингера, и численных решений этих уравнений, полученных на основе фундаментальных законов сохранения, например, законов сохранения энергии;
- численно проанализирована устойчивость решений и оценена их точность. Полученные результаты полностью физически проанализированы и теоретически обосновано их соответствие реальным физическим процессам.

Научная и практическая значимость результатов исследования:

- научная значимость исследования заключается в том, что формализм, развитый в диссертации, определяется широким применением конденсата Бозе-Эйнштейна в квантовых вычислениях и квантовых информационных полях на основе анализа нелинейных динамических свойств конденсата Бозе-Эйнштейна как макроскопическое вещество, описываемое уравнением Гросса-Питаевского;
- это также может пролить свет на более глубокое понимание макроскопических свойств квантовой материи;

- практическая значимость результатов исследований объясняется их использованием при моделировании оптических вихревых солитонов, возникающих в современной оптоэлектронике, информационных и коммуникационных технологиях, квантовых технологиях и низкоразмерных квантовых функциональных материалах;
- результаты могут быть полезны при анализе природы и динамики конденсированного состояния, а также при разработке наблюдательных экспериментов.

Внедрение результатов исследования.

Результаты диссертации по вихревым решениям двумерного уравнения Гросса-Питаевского для конденсата Бозе-Эйнштейна в гармонической ловушке использованы в статьях, опубликованных в зарубежных научных журналах (Physical Review A, Volume 93, Issue 1, 2016, pp. 013615; Physical Review A, Volume 99, Issue 3, 2019, pp. 033607; Physical Review A, 103, 053313 (2021)). Они использовали пробную функцию для вихрей и решения интегралов, возникающих при формировании функции Лагранжа.

Результаты диссертации по динамике вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате использованы в статьях, опубликованных в следующих научных журналах (Journal of the Physical Society of Japan, Volume 87, Number 6, 2018, pp. 063601; Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 53, 065303 (2020); Modern Physics Letters B, Vol. 36, No. 28-29, 2250153 (2022); Journal of the Physical Society of Japan, 86, 114001 (2017)). Применение научных результатов позволило решить уравнения движения для вихрей, образующихся в бозе-эйнштейновских конденсатах.

Моделирование динамики солитонных решений нестационарного нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения Гросса-Питаевского в зарубежных научных журналах (Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 55, 243001 (2022); Phys. Rev. E, Volume 93, 032204 (2016); Journal of Differential Equations, Volume 260, Number 10, 2016, pp. 7397-7415; Nonlinearity, 35, 3283 (2022); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51, 095203 (2018); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 52, 035202). Применение научного результата позволило построить численно-методическую модель краевой задачи, поставленной на плоских графах для двумерного нестационарного нелинейного уравнения Шрёдингера.

Моделирование динамики солитонных решений стационарного нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения Гросса-Питаевского в зарубежных научных журналах (Contemporary mathematics: Mathematical Problems in Quantum Physics, 717, 14446 (2018); Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, Volume 23, Number 6, pp. 63; Physical Review E, 94, 062216 (2016); Applicable Analysis, Volume 99, Pages 1359-1372, (2020); Mathematical Modeling of Natural Phenomena, Vol. 11, No. 2, pp. 20-35, (2016);

Mathematical Methods in the Applied Sciences Volume 41, Issue 1, p. 159-191, (2017); Asymptotic Analysis, vol. 113, no. 1-2, pp. 87-121, (2019); Analysis, geometry and number theory, 2, (2017)). Применение научного результата позволило построить численно-аналитическую модель двумерного стационарного нелинейного уравнения Шрёдингера.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации обсуждались на 4 международных и 3 местных конференциях, а также на нескольких мастер-классах и семинарах.

Публикация результатов исследования. Всего по теме диссертации опубликовано 7 научных работ, в том числе 4 научные статьи в научных изданиях, рекомендованных к публикации основных научных результатов докторских (PhD) диссертаций ВАК Республики Узбекистан, в том числе 1 в журнале СНГ в базе данных Web of Science и 3 опубликованных в зарубежных журналах с высоким импакт-фактором в базе данных Scopus.

Структура и объем диссертации. Эта диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, аппендикса и списка публикаций. Объем диссертации составляет 92 страниц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена решению задач моделирования динамики различных вихрей, возникающих в физике конденсированного состояния, оптоэлектронике и бозе-эйнштейновском конденсате. На основании исследования, проведенного в диссертационной работе, сделаны следующие выводы:

1. Исследована роль степеней свободы ширины конденсата в эффективной теории взаимодействующих вихрей в двумерных однокомпонентных бозе-эйнштейновских конденсатах (БЭК) с сильной отталкивающей кубической нелинейностью.

2. Выведено уравнение Лагранжа для координат ядра взаимодействующих вихрей и производной ширины по времени и построен его гамильтонов формализм с использованием нестандартных скобок Пуассона.

3. Решая уравнение Гамильтона, мы обнаружили быстрые радиальные колебания амплитуды, а также более медленное вращательное движение ядер вихрей, подтвержденное численными решениями уравнения Гросса-Питаевского. Другими словами, быстрые радиальные колебания, наблюдаемые в волновой динамике, не могут быть объяснены в рамках эффективной динамики с замороженными радиальными степенями свободы. В системах двух вихрей с одинаковыми топологическими числами при

высоких энергиях колебание амплитуды играет роль толчка для ротатора под толчком. По мере увеличения силы удара как амплитуда, так и частота радиальных колебаний, возникающих в результате радиальных колебаний, увеличиваются, а траектория каждого вихря образует структуру, подобную «морскому ежу». Дополнительным результатом настоящего вариационного подхода является логарифмическое межвихревое взаимодействие, умноженное на множитель, который зависит от скалярного произведения пары векторов координат ядра, короткодействующего отталкивания, зарядовой упругой силы и включает не зависящее от заряда взаимодействие.

4. Кроме того, была исследована динамика вихрей в двумерном многокомпонентном БЭК в гармонической ловушке, где каждый компонент имеет один вихрь. Исследование за пределами режима Томаса-Ферми проводится в нелинейном уравнении Шредингера с сильно отталкивающим кубическим коэффициентом нелинейности. Используя пробную функцию вихря, основанную на приближении Паде, регулируемого ловушками, методом коллективных координат получена нелинейная динамика вихревых ядер (частиц), эквивалентная динамике заряженных частиц с инерцией в однородном магнитном поле и упругой силе, а также в наличие силы Лоренца. Межчастичное взаимодействие уникально и короткодействующе, а его величина уменьшается по мере удаления центра масс от центра ловушки.

5. Важнейшим открытием является ненулевая инерция вихрей, которой нет в традиционной теории точечных вихрей, широко используемой в традиционной гидродинамике. Система трех инерционных вихрей может быть хаотичной, в отличие от соответствующего случая неинерционных точечных вихрей.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; part I)

1. Katsuhiko Nakamura, Doniyor Babajanov, Davron Matrasulov, and Michikazu Kobayashi. Dynamics of inertial vortices in multicomponent Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 86:053613, Nov 2012. doi: 10.1103/PhysRevA.86.053613. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.053613>.
2. Katsuhiko Nakamura, Doniyor Babajanov, Davron Matrasulov, Michikazu Kobayashi, and Paulsamy Muruganandam. Dynamics of trapped interacting vortices in Bose-Einstein condensates: a role of breathing degree of freedom. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(31):315102, jun 2016. doi: 10.1088/1751-8113/49/31/315102. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/49/31/315102>.
3. Hannes Uecker, Daniel Grieser, Zarif Sobirov, Doniyor Babajanov, and Davron Matrasulov. Soliton transport in tubular networks: Transmission at vertices in the shrinking limit. *Phys. Rev. E*, 91:023209, Feb 2015. doi: 10.1103/PhysRevE.91.023209. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.023209>.

II бўлим (II часть; partII)

4. D. Babajanov, Z. Sobirov and D. Matrasulov. Nonlinear standing waves on planar branched systems: shrinking into metric graph. *Nanosystems: physics, chemistry, mathematics*, 8:29–37, 2017.
5. Z.A.Sobirov, S.K.Avazbaev, O.V.Karpova, D.B.Babajanov, D.U.Matrasulov. Time-dependent quantum circular billiard. *Nanosystems: physics, chemistry, mathematics*, 6:224–243, 2015.
6. K. Nakamura, D. Babajanov. Dynamics of vortices with inertia in multi-component Bose-Einstein condensates. *Proceedings of International Workshop Low-dimensional Nanoscale Systems*, November 10-11 (2011), Tashkent, Uzbekistan, Nov 2011.
7. K. Nakamura, D. Babajanov. Poster: Effective nonlinear dynamics of two and three vortices in Bose-Einstein condensates in the trap “beyond Thomas-Fermi regime”. 8 th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 26 29 May 2015, Henri Poincaré Institute, Paris, France, May 2015.

“Fan va innovatsiyalar” xalqaro ilmiy jurnali (International scientific journal “Science and Innovation”) tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, ingliz va rus tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi (06.09.2023).

Bosishga ruxsat etildi 09.09.2023 y. Bichimi 60x84 1/16.
Hajmi 3,0 bosma taboq. Shartli bosma taboq 2,79.
“Times New Roman” garniturasida. Ofset bosma.
Adadi 50 nusxa. Buyurtma № 28.
Bahosi shartnoma asosida.

“Silver Star Print” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Olmazor tumani, Qorasaroy ko‘chasi, 322^b-uy.