**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

---

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI**

**AZIZOV MUZAFFAR SULAYMONOVICH**

# BUZILADIGAN VA SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI YUQORI JUFT TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN MASALALAR

**01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika**

**FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

**Farg‘ona – 2023**

**UDK: 517.95**

**Fizika – matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical – mathematical sciences**

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI**
**HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI**
**PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI**

**AZIZOV MUZAFFAR SULAYMONOVICH**

# BUZILADIGAN VA SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI YUQORI JUFT TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN MASALALAR

**01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika**

**FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI**
**bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi**
**AVTOREFERATI**

**Farg‘ona – 2023**

**Fizika - matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida №B 2023.1.PhD/FM835 raqam bilan ro'yxatga olingan.**

Dissertatsiya Farg'ona davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.fdu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

| | |
|---|---|
| **Ilmiy rahbar:** | **Urinov Axmadjon Kushakovich**<br>fizika-matematika fanlari doktori, professor |
| **Rasmiy opponentlar:** | **Qodirqulov Baxtiyor Jalilovich**<br>fizika-matematika fanlari doktori, professor |
| | **Irgashev Baxrom Yusupxonovich**<br>fizika-matematika fanlari nomzodi |
| **Yetakchi tashkilot:** | **Termiz davlat universiteti** |

Dissertatsiya himoyasi Farg'ona davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil «16» 11 soat $9^{30}$ dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. Tel.:( +99873) 244-44-02, faks: (+99873) 244-44-93, ye-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertatsiya bilan Farg'ona davlat universitetining Axborot - resurs markazida tanishish mumkin (310 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19- uy. Tel.:(+99873) 244-44-94.

Dissertatsiya avtoreferati 2023 «7» 11 kuni tarqatildi.

(2023 yil «7» 11 dagi 3 raqamli reyestr bayonnomasi).

**Sh.T. Karimov**
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi o'rinbosari, f.-m.f.d., dotsent

**I.U.Xaydarov**
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.n., dotsent

**E.T.Karimov**
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., dotsent

## KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiya annotatsiyasi)

**Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati.** Ma’lumki, jahon miqyosida olib borilayotgan ilmiy tadqiqotlarning aksariyati o‘rganilayotgan muammolarga mos keladigan matematik modellarni qurish va o‘rganishga olib kelinadi. Xususan, diffuziya va tebranish jarayonlari, statsionar jarayonlar, shuningdek, boshqa fizik jarayonlarning matematik modellari sifatida juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar olinadi. Masalan, giperbolik tipdagi ikkinchi tartibli differensial tenglama sterjenning tebranishlarini ifodalasa, to‘rtinchi tartibli tenglama esa balkaning tebranishlarini aniqlaydi. Xuddi shunday, o‘tkir uchli torning tebranishi ikkinchi tartibli buziladigan differensial tenglama bilan, o‘zgaruvchan qalinlikdagi plastinkaning tebranishi esa to‘rtinchi tartibli buziladigan differensial tenglama bilan ifodalanadi. Bundan ko‘rinadiki, yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni tadqiq etish hozirgi vaqtda matematik fizika tenglamalari nazariyasining dolzarb yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi.

Hozirgi vaqtda jahonda yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun masalalarni qo‘yish va tadqiq etish hamda ularning yechish usullarini ishlab chiqishga qiziqish sezilarli darajada ortib bormoqda. Bunda yangi lokal va nolokal chegaraviy shartli to‘g‘ri va teskari masalalarni bayon qilishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Bugungi kunga qadar bunday masalalarni qo‘yish va tadqiq etish metodikasi bo‘yicha hamda amaliy ahamiyatiga oid ilmiy maqolalar chop etilgan. Ularning aksariyatida, asosan, ikkinchi va to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun klassik chegaraviy shartli masalalar tadqiq qilingan. Hozirgi kundagi fanning taraqqiyoti ixtiyoriy juft tartibli buziladigan va buzilmaydigan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun yangi noklassik boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni qo‘yish va tadqiq etishni talab etmoqda.

Respublikamizda ham nazariy, ham amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan tadqiqotlar yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. Jumladan, matematik fanlarning ustuvor yo‘nalishlari, xususan, differensial tenglamalar va matematik fizika, dinamik sistemalar va optimal boshqaruv, amaliy matematika va matematik modellashtirish, matematik analiz va funksiyalar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, algebra va geometriya bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish, matematiklarning asosiy vazifalari va faoliyati sifatida belgilangan[1]. Bugungi kunga qadar ushbu sohalar bo‘yicha muhim ilmiy natijalar qo‘lga kiritildi. Ixtiyoriy juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun yangi chegaraviy shartli boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni qo‘yish va o‘rganish yuqorida qo‘yilgan topshiriqlarni amalga oshirishda katta ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2017 yil 20 apreldagi PQ-2909-son “Oliy ta’lim tizimini yanada

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi 292-son qarori

rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” va 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

**Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi.** Mazkur dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

**Muammoning o‘rganilganlik darajasi.** Xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi uzoq va boy tarixga ega bo‘lishiga qaramay, yuqori juft tartibli tenglamalarni tizimli o‘rganish o‘tgan asrning 60-yillarida boshlangan. Bugungi kunga qadar to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich va boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning tadqiqoti bo‘yicha juda ko‘p maqolalar nashr etilgan. Xususan, M.S.Salaxitdinov, Dj.Amanov, A.B.Bekiyev, Sh.A.Otarova, A.V.Yuldasheva va M.B.Murzambetovalar to‘rtburchakda to‘rtinchi tartibli buzilmaydigan model tenglamalarni ko‘rib chiqib, bir qator chegaraviy masalalarning yechimi va spektral xossalarini o‘rganishdi, K.B.Sabitov esa korrekt qo‘yilgan yangi boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni bayon qildi va ularning bir qiymatli yechilishini isbotladi. Xuddi shunday, T.K.Yuldashev to‘rtinchi tartibli integro-differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalarni, B.J.Qodirqulov to‘rtinchi tartibli involyutsiyali tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni ko‘rib chiqdi. Keyinchalik Dj.Amanov to‘rtburchakda aralash tipdagi to‘rtinchi tartibli tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni tadqiq etdi. B.K.Boyqo‘ziyev va M.Qosimova chiziqli va chiziqli bo‘lmagan buziladigan to‘rtinchi tartibli tenglama uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning yechilishini o‘rgandilar.

Bir qator tadqiqotchilar tekislikda va ko‘p o‘lchovli fazoda ixtiyoriy juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni o‘rgandilar. Masalan, Dj.Amanov va A.V.Yuldasheva, A.I.Kojanov va N.R.Pinigina bir erkin o‘zgaruvchi bo‘yicha yuqori juft tartibli buzilmaydigan differensial tenglamalar uchun to‘g‘ri to‘rtburchakda boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni tadqiq qildilar, R.R.Ashurov va A.T.Muxiddinova esa ixtiyoriy tartibli musbat o‘z-o‘ziga qo‘shma elliptik differensial operator qatnashgan giperbolik va parabolik tipdagi differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni o‘rgandilar. K.B.Sabitov har ikkala erkli o‘zgaruvchilar bo‘yicha ham yuqori juft tartibli buzilmaydigan differensial tenglamani to‘rtburchakda qarab, Dirixle tipidagi masalalarni, B.Y.Irgashev esa bunday tenglama uchun boshlang‘ich-chegaraviy va spektral masalalarni o‘rgangan. Yuqori juft tartibli buziladigan tenglamalar uchun to‘rtburchakda boshlang‘ich chegaraviy masalalar K.B.Boyqo‘ziyev, B.S.Kalonov va B.Y.Irgashev tomonidan bayon qilingan va tadqiq etilgan.

Ko‘p o‘lchovli sohalarda ba’zi boshlang‘ich-chegaraviy masalalar fazoviy o‘zgaruvchilari bo‘yicha yuqori juft tartibli ultragiperbolik tenglamalarning ba’zi sinflari uchun B.A.Bubnov va V.N.Vragov, psevdoparabolik, kvazielliptik va "qisman giperbolik" tenglamalar uchun A.I.Kojanov, vaqt o‘zgaruvchisi bo‘yicha yuqori juft tartibli qo‘shma tenglamalarning ba’zi sinflari uchun esa A.I.Kojanov va N.R.Piniginalar tomonidan o‘rganilgan. I.YE.Yegorov va I.YE.Fedorov aralash tipdagi tenglama hamda fazoviy o‘zgaruvchilar bo‘yicha $2m$-tartibli, vaqt o‘zgaruvchisi bo‘yicha mos ravishda $2s$ va $2s+1$ - tartibli vaqt yo‘nalishi o‘zgaruvchi bo‘lgan tenglama uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni o‘rganishgan, bu yerda $m, s \in N$. SH.G.Qosimov va U.S.Madrahimov geometrik o‘zgaruvchilar bo‘yicha $4k$-tartibli tenglamalar uchun ba’zi boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni o‘rganishgan.

Yuqorida sanab o‘tilgan ishlarda o‘rganilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalar asosan chegaraviy shartlarning bir nechta ma’lum variantlarini o‘z ichiga oladi. Ravshanki, yuqori juft tartibli differensial tenglamalar uchun yangi chegaraviy shartli boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni tekislikda o‘rganish katta ahamiyatga ega. Mazkur dissertatsiya xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining ushbu muhim muammosiga bag‘ishlangan.

**Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy – tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi.** Dissertatsiya tadqiqoti Farg‘ona davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq “Differensial tenglamalar va unga turdosh matematik sohalarning dolzarb muammolari” dasturi doirasida bajarilgan.

**Tadqiqotning maqsadi** tekislikda yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy va teskari masalalarni qo‘yish va o‘rganish, shuningdek, qo‘yilgan masalalarni tadqiq etish usullarini ishlab chiqishdan iborat.

**Tadqiqotning vazifalari** quyidagilardan iborat:

to‘rtinchi tartibli singulyar koeffitsiyentli tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar qo‘yish va o‘rganish;

to‘rtinchi tartibli tenglamalar uchun teskari masalalar qo‘yish va o‘rganish;

to‘rtinchi tartibli yuklangan tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar qo‘yish va o‘rganish;

yuqori juft tartibli singulyar koeffitsiyentli tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar qo‘yish va o‘rganish;

yuqori juft tartibli singulyar koeffitsiyentli buziladigan tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar qo‘yish va o‘rganish.

**Tadqiqotning obyekti** ikki o‘zgaruvchili to‘rtinchi va yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar hisoblanadi.

**Tadqiqotning predmeti** tekislikda yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy va teskari masalalardan iborat.

**Tadqiqotning usullari.** Dissertatsiya ishida masalalar yechimining yagonaligini isbotlashda spektral usul va energiya integrallari usulidan, yechimning mavjudligini isbotlashda esa Furye usuli, Grin funksiyalar usuli, integral tenglamalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

**Tadqiqotning ilmiy yangiligi** quyidagilardan iborat:

singulyar koeffitsiyentli to‘rtinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan xususiy hosilali tenglama uchun to‘g‘ri va teskari masalalarning yechimi Furye usuli yordamida bir qiymatli topilgan;

to‘rtinchi tartibli yuklangan model tenglama uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishini ta’minlaydigan shartlar Furye usulini qo‘llab aniqlangan;

singulyar koeffitsiyentli yuqori juft tartibli tenglamalar uchun lokal va nolokal boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning korrektligi Furye usuli, Grin funksiyalar usuli, simmetrik yadroli integral tenglamalar usuli hamda spektral analiz usullaridan foydalanib isbotlangan;

singulyar koeffitsiyentli yuqori juft tartibli buziladigan tenglamalar uchun qo‘yilgan lokal boshlang‘ich-chegaraviy masala yechimining yagonalik, mavjudlik va turg‘unlik teoremalari energiya integrallari usuli, Furye usuli, Grin funksiyalar usuli, simmetrik yadroli integral tenglamalar usuli hamda spektral analiz usullaridan foydalanib isbotlangan.

**Tadqiqotning amaliy natijalari** olingan ilmiy natijalarni shunday matematik modellarga keltiriladigan jarayonlarning sifat xususiyatlarini o‘rganishga hamda qo‘yilgan masalalar yechimini sonli hisoblashga qo‘llash mumkinligidan iborat.

**Tadqiqot natijalarining ishonchliligi.** Matematik isbotlar Furye usuli, energiya integrallari usuli va integral tenglamalar usullariga, shuningdek, matematik fikrlash va hisob-kitoblarning qat’iyligiga asoslangan.

**Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.**

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, ishda olingan ilmiy natijalar yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasini yanada rivojlantirish uchun asos sifatida foydalanish mumkin.

Dissertatsiya tadqiqotining amaliy ahamiyati balka va plastinkaning tebranishi, kemasozlik sanoati, mexanika va boshqa sohalarga oid jarayonlarni matematik modellashtirishda qo‘llanishi mumkinligi bilan belgilanadi.

**Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi.** Buziladigan va singulyar koeffitsiyentli yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun masalalarni tadqiq qilish bo‘yicha olingan natijalar asosida:

yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar yechimining mavjudligi, yagonaligi va turg‘unligi bo‘yicha olingan natijalar AP09259394-sonli “Musbat operatorlar qatnashgan evolyutsion tenglamalar uchun teskari masalalar” loyihasi bo‘yicha ilmiy tadqiqotlarida foydalanilgan (Qozog‘iston Respublikasi Fan va oliy ta’lim vazirligi Fan qo‘mitasining Matematika va matematik modellashtirish institutining 2023-yil 16-iyundagi №01-06/91-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalalarni tadqiq etish imkonini bergan;

yuklangan tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar bo‘yicha olingan natijalardan “Asosiy va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy va boshqaruv masalalari va ularni taqsimlangan parametrlarga ega sistemalarni o‘rganishda qo‘llanilishi” mavzu doirasidagi tadqiqot ishlarida foydalanilgan (Rossiya Fanlar Akademiyasining Kabardino-Balkar ilmiy markazi Amaliy matematika va avtomatlashtirish institutining 2023-yil 20-iyundagi № 01-13/42 - sonli ma’lumotnomasi). Natijada, yuklangan giperbolik va giperbolik-parabolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni va yuklangan giperbolik tenglamalar uchun boshqaruv masalalarini hal qilish imkonini bergan;

yuqori juft tartibli spektral masalalarni o‘rganishda qo‘llanilgan usul “Bisingulyar masalalar va ularning tadbiqlari” mavzusidagi loyihada foydalanilgan (O‘sh davlat universitetining 2023-yil 20-iyundagi №803 sonli ma’lumotnomasi). Natijada, yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun ba’zi nolokal umumlashgan spektral masalalarning xos sonlari va xos funksiyalari mavjudligini isbotlash imkonini bergan.

**Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi.** Dissertatsiyaning asosiy natijalari 9 ta xalqaro va 5 ta respublika ilmiy va ilmiy – amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

**Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi.** Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha 28 ta ilmiy ish e’lon qilingan bo‘lib, ulardan 14 tasi ilmiy maqola, shulardan 6 tasi xorijiy ilmiy jurnallarda, 7 tasi esa O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan mahalliy ilmiy jurnallarda chop etilgan.

**Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi.** Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 117 betni tashkil etadi.

## DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

**Kirish** qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“To‘rtinchi tartibli tenglamalar uchun masalalar”** deb nomlangan birinchi bobi to‘rtta paragrafdan iborat bo‘lib, u to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali (yuklangan) differensial tenglamalar uchun $\Omega = \{(x,t): 0 < x < p, 0 < t < T\}$ to‘g‘ri to‘rtburchakli sohada to‘g‘ri va teskari masalalar qo‘yishga va o‘rganishga bag‘ishlangan, bu yerda $p, T \in R^{+}$.

1.1-paragrafda $\Omega$ sohada ushbu tenglama

$$Lu \equiv u_{xxxx} + u_{tt} + (2\gamma/t)u_t = f(x,t), \quad 0 < \gamma < 1/2 \qquad (1)$$

uchun quyidagi boshlang‘ich-chegaraviy masala qo‘yilgan va tadqiq etilgan:

**1-masala.** (1) *tenglamaning quyidagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi* $u(x,t)\in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$ *yechimi topilsin:*

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ 0\le x\le p;\quad \lim_{t\to 0} t^{2\gamma}u_t(x,t)=\varphi_2(x),\ 0<x<p, \qquad (2)$$

$$u_x(0,t)=\psi_1(t), u_x(p,t)=\psi_2(t), u_{xxx}(0,t)=\psi_3(t), u_{xxx}(p,t)=\psi_4(t), 0\le t\le T, \qquad (3)$$

*bu yerda* $f(x,t)$, $\varphi_i(x)$ $(i=1,2)$ *ва* $\psi_j(t)$ $(j=\overline{1,4})$ *– berilgan funksiyalar.*

Quyidagi teoremalarning o‘rinliligi isbotlangan:

**1-teorema.** *Agar 1-masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u yagonadir.*

**2-teorema.** *Agar* $g(x,t)\in C_{x,t}^{4,0}(\bar{\Omega})$, $g_{xxxxx}(x,t)\in C(\Omega)\cap L_2(\Omega)$, $g_x(0,t)=g_x(p,t)=0$, $g_{xxx}(0,t)=g_{xxx}(p,t)=0$ *ва* $\varphi_3(x), \varphi_4(x)\in C^4[0,p]$, $\varphi_3^{(5)}(x), \varphi_4^{(5)}(x)\in C(0,p)\cap L_2(0,p)$, $\varphi_3'(0)=\varphi_3'(p)=0$, $\varphi_3'''(0)=\varphi_3'''(p)=0$, $\varphi_4'(0)=\varphi_4'(p)=0$, $\varphi_4'''(0)=\varphi_4'''(p)=0$ *shartlar bajarilsa, u holda 1-masalaning yechimi mavjud, bu yerda* $g(x,t)=f(x,t)-w_{xxxx}(x,t)-w_{tt}(x,t)-\frac{2\gamma}{t}w(x,t)$, $\varphi_3(x)=\varphi_1(x)-w(x,0)$, $\varphi_4(x)=\varphi_2(x)-\lim_{t\to 0}t^{2\gamma}w_t(x,t)$, $0\le x\le p$,

$$w(x,t)=\frac{1}{24p}\left[\psi_4(t)-\psi_3(t)\right]x^4+\frac{1}{6}\psi_3(t)x^3+$$

$$+\left\{\frac{1}{2p}\left[\psi_2(t)-\psi_1(t)\right]-\frac{p}{12}\left[\psi_4(t)+2\psi_3(t)\right]\right\}x^2+\psi_1(t)x.$$

1.2-paragrafda $\Omega$ sohada ushbu tenglama

$$Lu\equiv u_{xxxx}+u_{tt}=Q(t)f(x) \qquad (4)$$

qaralgan, bu yerda $Q(t)\in C(0,T)\cap L(0,T)$ – ma’lum funksiya, $u=u(x,t)$ va $f(x)$ esa noma’lum funksiyalar, va quyidagi boshlang‘ich-chegaraviy masala tadqiq etilgan:

**2-masala.** *Quyidagi xossalarga ega bo‘lgan* $u(x,t)$ *va* $f(x)$ *funksiyalar topilsin:*

*1)* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$, $f(x)\in C(0,p)\cap L(0,p)$;

*2)* $u(x,t)$ *va* $f(x)$ *funksiyalar* $\Omega$ *sohada* (4) *tenglamani qanoatlantirsin;*

*3)* $u(x,t)$ *funksiya quyidagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:*

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad 0\le x\le p;\quad u_t(x,0)=\varphi_2(x),\ 0<x<p; \qquad (5)$$

$$u(0,t)=0,\quad u(p,t)=0,\quad u_{xx}(0,t)=0,\quad u_{xx}(p,t)=0,\ 0\le t\le T; \qquad (6)$$

$$u(x,T)=\varphi_3(x),\quad 0\le x\le p.$$

**3-masala.** *Quyidagi xossalarga ega bo‘lgan* $u(x,t)$ *va* $f(x)$ *funksiyalar topilsin:*

*1)* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$, $f(x)\in C(0,p)\cap L(0,p)$;

*2) $u(x,t)$ va $f(x)$ funksiyalar $\Omega$ sohada* (4) *tenglamani qanoatlantirsin;*
*3) $u(x,t)$ funksiya* (5), (6) *va $u_t(x,T)=\varphi_3(x)$, $0\le x\le p$ shartlarni qanoatlantirsin.*

**4-masala.** *Quyidagi xossalarga ega bo'lgan $u(x,t)$ va $f(x)$ funksiyalar topilsin:*
*1) $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$, $f(x)\in C(0,p)\cap L(0,p)$;*
*2) $u(x,t)$ va $f(x)$ funksiyalar $\Omega$ sohada* (4) *tenglamani qanoatlantirsin;*
*3) $u(x,t)$ funksiya* (5), (6) *va $\int_0^T u(x,t)dt=\varphi_3(x)$, $0\le x\le p$ shartlarni qanoatlantirsin.*

**5-masala.** *Quyidagi xossalarga ega bo'lgan $u(x,t)$ va $f(x)$ funksiyalar topilsin:*
*1) $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$, $f(x)\in C(0,p)\cap L(0,p)$;*
*2) $u(x,t)$ va $f(x)$ funksiyalar $\Omega$ sohada* (4) *tenglamani qanoatlantirsin;*
*3) $u(x,t)$ funksiya* (5), (6) *va $u_t(x,T)+\int_0^T u(x,t)dt=\varphi_3(x)$, $0\le x\le p$, shartlarni qanoatlantirsin.*

Bu yerda $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ va $\varphi_3(x)$ – berilgan funksiyalar, 2- va 4-masalalarda $\varphi_3(0)=0$, $\varphi_3(p)=0$ kelishuv shartlari bajarilsin.

Quyidagi teoremalarning o'rinliligi isbotlangan:

**3-teorema.** *Agar $\forall n\in N$ son uchun $\Delta_{jn}\neq 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda 2-5 masala bittadan ortiq yechimga ega bo'lmaydi ($j=\overline{1,4}$), bu yerda*

$$\Delta_{1n}=\lambda_n^2\int_0^T Q(\tau)\sin\lambda_n^2(T-\tau)d\tau,\ \Delta_{2n}=\lambda_n^4\int_0^T Q(\tau)\cos\lambda_n^2(T-\tau)d\tau,$$

$$\Delta_{3n}=\lambda_n^4\int_0^T Q(\tau)\left[1-\cos\lambda_n^2(T-\tau)\right]d\tau,$$

$$\Delta_{4n}=\lambda_n^4\int_0^T Q(\tau)\cos\lambda_n^2(T-\tau)d\tau+\int_0^T Q(\tau)\left[1-\cos\lambda_n^2(T-\tau)\right]d\tau,\ \lambda_n=n\pi/p.$$

**4-teorema.** *Shunday $\delta_1>0$ son mavjud bo'lib, $\forall n\in N$ son uchun $|\Delta_{1n}|>\delta_1$ tengsizlik o'rinli bo'lsin va quyidagi shartlar bajarilsin:*

$$\varphi_1(x),\varphi_3(x)\in C^6[0,p]\cap C^7(0,p),\ \varphi_1^{(7)}(x),\varphi_3^{(7)}(x)\in L_2(0,p),$$

$$\varphi_1^{(2i)}(0)=\varphi_1^{(2i)}(p)=0,\ \varphi_3^{(2i)}(0)=\varphi_3^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,3},$$

$$\varphi_2(x)\in C^4[0,p]\cap C^5(0,p),\ \varphi_2^{(5)}(x)\in L_2(0,p),\ \varphi_2^{(2i)}(0)=\varphi_2^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,2}.$$

*U holda 2-masalaning yechimi mavjud.*

**5-teorema.** *Shunday $\delta_2>0$ son mavjud bo'lib, $\forall n\in N$ son uchun $|\Delta_{2n}|>\delta_2$ tengsizlik o'rinli bo'lsin va quyidagi shartlar bajarilsin:*

$$\varphi_1(x)\in C^8[0,p]\cap C^9(0,p),\ \varphi_1^{(9)}(x)\in L_2(0,p),\ \varphi_1^{(2i)}(0)=\varphi_1^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,4};$$
$$\varphi_2(x),\varphi_3(x)\in C^6[0,p]\cap C^7(0,p),\ \varphi_2^{(7)}(x),\varphi_3^{(7)}(x)\in L_2(0,p),$$
$$\varphi_2^{(2i)}(0)=\varphi_2^{(2i)}(p)=0,\ \varphi_3^{(2i)}(0)=\varphi_3^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,3}.$$

*U holda 3-masalaning yechimi mavjud.*

**6-teorema.** *Shunday $\delta_3>0$ son mavjud bo'lib, $\forall n\in N$ son uchun $|\Delta_{3n}|>\delta_3$ tengsizlik o'rinli bo'lsin va quyidagi shartlar bajarilsin:*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_3(x)\in C^{10}[0,p]\cap C^{11}(0,p),\ \varphi_1^{(11)}(x),\ \varphi_3^{(11)}(x)\in L_2(0,p),$$
$$\varphi_1^{(2i)}(0)=\varphi_1^{(2i)}(p)=0,\ \varphi_3^{(2i)}(0)=\varphi_3^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,5};$$
$$\varphi_2(x)\in C^6[0,p]\cap C^7(0,p),\ \varphi_2^{(7)}(x)\in L_2(0,p),\ \varphi_2^{(2i)}(0)=\varphi_2^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,3}.$$

*U holda 4-masalaning yechimi mavjud.*

**7-teorema.** *Shunday $\delta_4>0$ son mavjud bo'lib, $\forall n\in N$ son uchun $|\Delta_{4n}|>\delta_4$ tengsizlik o'rinli bo'lsin va quyidagi shartlar bajarilsin:*

$$\varphi_1(x)\in C^8[0,p]\cap C^9(0,p),\ \varphi_1^{(9)}(x)\in L_2(0,p),\ \varphi_1^{(2i)}(0)=\varphi_1^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,4};$$
$$\varphi_2(x),\varphi_3(x)\in C^6[0,p]\cap C^7(0,p),\ \varphi_2^{(7)}(x),\varphi_3^{(7)}(x)\in L_2(0,p),$$
$$\varphi_2^{(2i)}(0)=\varphi_2^{(2i)}(p)=0,\ \varphi_3^{(2i)}(0)=\varphi_3^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,3}.$$

*U holda 5-masalaning yechimi mavjud.*

1.3-paragrafda $\Omega$ sohada quyidagi tenglama qaralgan:

$$u_{xxxx}+u_{tt}+(2\gamma/t)u_t=f(x),\quad 0<\gamma<1/2,\tag{7}$$

bu yerda $u=u(x,t)$ va $f(x)$ noma'lum funksiyalar va quyidagi masala o'rganilgan:

**6-masala.** *Quyidagi xossalarga ega bo'lgan $u(x,t)$ va $f(x)$ funksiyalar topilsin:*

*1) $u(x,t)\in C_{x,t}^{3,1}(\overline{\Omega})\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$, $f(x)\in C(0,p)\cap L(0,p)$;*

*2) $u(x,t)$ va $f(x)$ funksiyalar $\Omega$ sohada* (7) *tenglamani qanoatlantirsin;*

*3) $u(x,t)$ funksiya* (5) *boshlang'ich shartlarni,* (6) *va $u(x,T)=\varphi_3(x)$, $0\le x\le p$, chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ va $\varphi_3(x)$ – berilgan funksiyalar.*

Quyidagi teoremalar isbotlangan.

**8-teorema.** *Agar 6-masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u yagonadir.*

**9-teorema.** *Agar $\varphi_j(x)\in C^4[0,p]\cap C^5(0,p)$, $\varphi_j^{(5)}(x)\in L(0,p)$, $\varphi_j^{(2i)}(0)=0$, $\varphi_j^{(2i)}(p)=0$, $j=\overline{0,3}$, $i=\overline{0,2}$ shartlar bajarilsa, 6-masalaning yechimi mavjud.*

1.4-paragrafda $\Omega$ sohada ushbu tenglamalar

$$u_{xxxx}+u_{tt}=v_k(x,t)+f(x,t),\quad k=\overline{1,4},\tag{8}$$

qaralgan, bu yerda $f(x,t)$ - berilgan funksiya, $u=u(x,t)$ - noma'lum funksiya,

$$v_1(x,t)=\sum_{j=1}^m\alpha_j u(x,t_j),\ v_2(x,t)=\sum_{j=1}^m\beta_j u_t(x,t_j),\ v_3(x,t)=\int_0^{t_0}u(x,t)dt,\ v_4(x,t)=\int_0^{t_0}u_{xx}(x,t)dt,$$

$\alpha_j$, $\beta_j$, $t_0$, $t_j$, $j=\overline{1,m}$ – berilgan haqiqiy sonlar bo‘lib, $t_0, t_j \in (0,T]$, $j=\overline{1,m}$; $t_j \neq t_l$, $j \neq l$, $j,l=\overline{1,m}$; $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2 \neq 0$, $\sum_{j=1}^{m}\beta_j^2 \neq 0$ va quyidagi masala tadqiq etilgan:

**7-masala.** $\Omega$ *sohada* (8) ($k=\overline{1,4}$) *tenglamani qanoatlantiruvchi, soha chegarasida esa* (5) *boshlang‘ich shartlarni va* (6) *chegaraviy shartalarni qanoatlantiradigan* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$ *funksiya topilsin, bu yerda* $\varphi_1(x)$ *va* $\varphi_2(x)$ *– berilgan funksiyalar.*

Quyidagi teoremalar isbotlangan.

**10-teorema.** *Agar* $\forall n \in N$ *uchun* $\Delta_{kn} \neq 0$ ($k=\overline{1,4}$) *tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda 7-masala bittadan ortiq yechimga ega bo‘lmaydi, bu yerda*

$$\Delta_{1n} = 1 - 2\lambda_n^{-4}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j \sin^2\left(\lambda_n^2 t_j/2\right), \qquad \Delta_{2n} = 1-\lambda_n^{-2}\sum_{j=1}^{m}\beta_j \sin\left(\lambda_n^2 t_j\right),$$

$$\Delta_{3n} = 1-\lambda_n^{-4}\left[t_0 - \lambda_n^{-2}\sin\left(\lambda_n^2 t_0\right)\right],\ \Delta_{4n} = 1+\lambda_n^{-2}\left[t_0 - \lambda_n^{-2}\sin\left(\lambda_n^2 t_0\right)\right],\ \lambda_n = n\pi/p.$$

**11-teorema.** *Shunday* $\delta_k > 0$ *son mavjud bo‘lib,* $\forall n \in N$ *son uchun* $|\Delta_{kn}| > \delta_k$ ($k=\overline{1,4}$) *tengsizlik o‘rinli bo‘lsin va quyidagi shartlar bajarilsin:* $f(x,t)\in C_{x,t}^{2,0}(\bar{\Omega})$,

$$\left(\partial^3/\partial x^3\right) f(x,t)\in L_2(\Omega), \qquad \left(\partial^{2i}/\partial x^{2i}\right) f(0,t) = \left(\partial^{2i}/\partial x^{2i}\right) f(p,t)=0, \qquad i=\overline{0,1};$$

$$\varphi_1(x)\in C^4[0,p]\cap C^5(0,p),\quad \varphi_1^{(5)}(x)\in L_2(0,p),\quad \varphi_1^{(2i)}(0)=\varphi_1^{(2i)}(p)=0,\quad i=\overline{0,2};$$

$$\varphi_2(x)\in C^2[0,p]\cap C^3(0,p),\quad \varphi_2^{(3)}(x)\in L_2(0,p),\ \varphi_2^{(2i)}(0)=\varphi_2^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,1}.$$

*U holda 7-masalaning yechimi mavjud.*

Dissertatsiyaning **“Yuqori juft tartibli tenglamalar uchun masalalar”** deb nomlangan ikkinchi bobi to‘rtta paragrafdan iborat bo‘lib, $\Omega=\{(x,t): 0<x<1; 0<t<T\}$ sohada yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni bayon qilish va o‘rganishga bag‘ishlangan.

2.1-paragrafda $\Omega$ sohada ushbu tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x,t), \quad 0<\gamma<1/2 \tag{9}$$

qaralgan, bu yerda $f(x,t)$ – berilgan funksiya, va quyidagi masala tadqiq etilgan:

**8-masala.** $\Omega$ *sohada* (9) *tenglamani qanoatlantiruvchi, soha chegarasida esa* (2) *boshlang‘ich va quyidagi*

$$\left(\partial^j/\partial x^j\right)u(0,t)=0,\ \left(\partial^{k+j}/\partial x^{k+j}\right)u(1,t)=0,\ j=\overline{0,k-1},\quad 0\le t\le T, \tag{10}$$

*chegaraviy shartlarni bajaruvchi* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2k-1,0}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega)$ *funksiya topilsin, bu yerda* $\varphi_1(x)$ *va* $\varphi_2(x)$*– ma’lum funksiyalar.*

Bu yerda dastlab ushbu

$$Mv \equiv (-1)^k v^{(2k)}(x) = \lambda v(x), \quad 0<x<1; \tag{11}$$

$$v^{(j)}(0)=0,\quad v^{(k+j)}(1)=0,\ j=\overline{0,k-1},\tag{12}$$

spektral masalaning sanoqli sondagi musbat xos sonlari mavjudligi va ularga mos xos funksiyalar esa $L_2(0,1)$ da ortonormal ekanligi isbotlangan.

8-masala yechimining mavjudligi, yagonaligi va turg'unligini isbotlash uchun quyidagi lemmadan foydalanilgan:

**1-lemma.** *Faraz qilaylik,* $g(x)\in C^{3k-1}[0,1],\ g^{(3k)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *va* $g(0)=g'(0)=...=g^{(k-1)}(0)=0$, $g^{(k)}(1)=g^{(k+1)}(1)=...=g^{(2k-1)}(1)=0$, $g^{(2k)}(0)=g^{(2k+1)}(0)=...=g^{(3k-1)}(0)=0$ *shartlar bajarilsin. U holda,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3 g_n^2\le\int_0^1\left[g^{(3k)}(x)\right]^2dx,\tag{13}$$

*tensizlik o'rinli, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n\in N-$ (11),(12) *spektral masalaning xos sonlari va xos funksiyalari,* $g_n=\int_0^1 g(x)v_n(x)dx$, $g(x)$ *funksiyaning Furye koeffitsiyenti.*

Quyidagi teoremalarning o'rinliligi isbotlangan

**12-teorema.** *Faraz qilaylik,* $\varphi_1(x)$ *va* $\varphi_2(x)$ *funksiyalar uchun 1-lemmaning shartlari bajarilsin,* $f(x,t)$ *funksiya esa* $x$ *o'zgaruvchisi bo'yicha 1-lemmaning shartlarini* $t$ *o'zgaruvchiga nisbatan tekis qanoatlantirsin. U holda ushbu*

$$\begin{aligned}u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{&a_n t^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+b_n t^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+\\&+\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\int_0^t J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)(t/\tau)^{1/2-\gamma}\tau f_n(\tau)d\tau-\\&-\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\int_0^t J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)(t/\tau)^{1/2-\gamma}\tau f_n(\tau)d\tau\Big\}v_n(x)\end{aligned}\tag{14}$$

*funksiya 8-masalaning regulyar yechimini aniqlaydi, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n\in N$ – (11),(12) *spektral masalaning mos holda xos sonlari va xos funksiyalari;*

$$a_n=(1/2)\left(\sqrt{\lambda_n}/2\right)^{\gamma-1/2}\Gamma(1/2-\gamma)\varphi_{2n},\ b_n=\left(\sqrt{\lambda_n}/2\right)^{1/2-\gamma}\Gamma(1/2+\gamma)\varphi_{1n},n\in N,\tag{15}$$

$$\varphi_{1n}=\int_0^p\varphi_1(x)v_n(x)dx,\ \varphi_{2n}=\int_0^p\varphi_2(x)v_n(x)dx,\ f_n(t)=\int_0^1 f(x,t)v_n(x)dx,n\in N,\tag{16}$$

$J_\nu(z)$ *– birinchi tur Bessel funksiyasi,* $\Gamma(z)$*– Eylerning gamma funksiyasi.*

**13-teorema.** *8-masala bittadan ortiq yechimga ega emas.*

**14-teorema.** *Faraz qilaylik,* $\varphi_1(x)$ *va* $\varphi_2(x)$ *funksiyalar uchun 1-lemmaning shartlari o'rinli bo'lsin,* $f(x,t)$ *funksiya esa* $x$ *o'zgaruvchisi bo'yicha 1-lemmaning shartlarini* $t$ *o'zgaruvchiga nisbatan tekis qanoatlantirsin.*

*U holda 8-masala yechimi uchun quyidagi baho o'rinli:*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)}\le K_0\left[\|\varphi_1(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|\varphi_2(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right],\tag{17}$$

*bu yerda* $K_0 \in R^+$ *– o‘zgarmas son,* $\|g(x)\|_{L_2(0,1)} = \sqrt{\int\limits_0^1 g^2(x)dx}$ .

2.2-paragrafda $\Omega$ sohada ushbu tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^{4k} u}{\partial x^{4k}} = f(x,t), \quad 0<\gamma<1/2 \qquad (18)$$

qaralgan, bu yerda $f(x,t)$ – berilgan funksiya, va quyidagi masala o‘rganilgan:

**9-masala.** $\Omega$ *sohada* (18) *tenglamani qanoatlantiruvchi, soha chegarasida esa* (2) *boshlang‘ich shartlarni hamda*

$$p\frac{\partial^{2i}}{\partial x^{2i}}u(0,t) = q\frac{\partial^{2i+1}}{\partial x^{2i+1}}u(0,t), p\frac{\partial^{2i}}{\partial x^{2i}}u(1,t) = q\frac{\partial^{2i+1}}{\partial x^{2i+1}}u(1,t),\ i=\overline{0,2k-1}, 0\le t\le T,$$

*chegaraviy shartlarni bajaruvchi* $u(x,t)\in C_{x,t}^{4k-1,0}(\overline{\Omega})\cap C_{x,t}^{4k,2}(\Omega)$ *funksiya topilsin, bu yerda* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *– berilgan funksiyalar,* $p, q \in R$ *– berilgan sonlar va* $p \ne 0$.

Bu yerda dastlab ushbu

$$Mv \equiv v^{(4m)}(x) = \lambda v(x),\ 0<x<1; \qquad (19)$$

$$pv^{(2i)}(0) = qv^{(2i+1)}(0),\ pv^{(2i)}(1) = qv^{(2i+1)}(1),\ i=\overline{0,2m-1} \qquad (20)$$

spektral masalaning sanoqli sondagi musbat xos sonlari mavjudligi va ularga mos xos funksiyalar esa $L_2(0,1)$ da ortonormal ekanligi isbotlangan.

9-masala yechimining mavjudligi, yagonaligi va turg‘unligini isbotlash uchun quyidagi lemmadan foydalanilgan:

**2-lemma.** *Faraz qilaylik,* $g(x)\in C^{6m-1}[0,1]$, $g^{(6m)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *va* $pg^{(2j)}(0) = qg^{(2j+1)}(0)$, $pg^{(2j)}(1) = qg^{(2j+1)}(1)$, $j=\overline{0,3m-1}$ *shartlar bajarilsin. U holda,* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3 g_n^2 \le \int\limits_0^1\left[g^{(6m)}(x)\right]^2 dx$, *tengsizlik o‘rinli, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n\in N$ *– mos holda* (19),(20) *spektral masalaning xos sonlari va xos funksiyalari,* $g_n = \int\limits_0^1 g(x)v_n(x)dx$ *– esa* $g(x)$ *funksiyaning Furye koeffitsiyenti.*

Ushbu paragrafda quyidagi teoremalar isbotlangan:

**15-teorema.** *Faraz qilaylik,* $\varphi_i(x)$ *funksiyalar* $\varphi_i(x)\in C^{6k-1}[0,1]$, $\varphi_i^{(6k)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$, $p\varphi_i^{(2j)}(0) = q\varphi_i^{(2j+1)}(0)$, $p\varphi_i^{(2j)}(1) = q\varphi_i^{(2j+1)}(1)$, $i=\overline{1,2}$, $j=\overline{0,3k-1}$, *shartlarni bajarsin,* $f(x,t)$ *funksiya esa* $x$ *o‘zgaruvchisi bo‘yicha* $t$ *o‘zgaruvchiga nisbatan* $f(x,t)\in C^{2k-1}[0,1]$, $f_x^{(2k)}(x,t)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$, *va* $p\,f^{(2j)}(0,t) = q\,f^{(2j+1)}(0,t)$, $p\,f^{(2j)}(1,t) = q\,f^{(2j+1)}(1,t)$, $j=\overline{0,2k-1}$ *shartlarini tekis qanoatlantirsin. U holda,* (14) *qator 9-masalaning yagona yechimini aniqlaydi, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n\in N$ –(19),(20) *spektral masalaning mos holda xos sonlari va xos funksiyalari;* $a_n$ *va* $b_n$ *koeffitsiyentlar* (15) *formulalar bilan,* $\varphi_{1n}$, $\varphi_{2n}$ *va* $f_n(t)$ *lar esa* (16) *formulalar bilan aniqlanadi.*

**16-teorema.** *Faraz qilaylik,* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *va* $f(x,t)$ *funksiyalar 2-lemmaning shartlarini bajarsin. U holda, 9-masalaning yechimi uchun* (17) *baho o'rinli.*

2.3-paragrafda $\Omega$ sohada (9) tenglama va quyidagi masala qaralgan:

**10-masala.** $\Omega$ *sohada* (9) *tenglamani qanoatlantiruvchi, soha chegarasida esa* (2) *boshlang'ich shartlarni hamda*

$$p\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\bigg|_{x=0} = q\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\bigg|_{x=1}, \quad q\frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^{k+j}}\bigg|_{x=0} = p\frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^{k+j}}\bigg|_{x=1}, \quad j=\overline{0,k-1}, \ 0\le t\le T, \quad (21)$$

*chegaraviy shartlarni bajaruvchi* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2k-1,0}(\overline{\Omega})\cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega)$ *funksiya topilsin, bu yerda* $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,2}$*-berilgan funksiyalar,* $p,q\in R$*-berilgan sonlar va* $p^2+q^2\ne 0$.

Bu yerda dastlab ushbu spektral masalaning

$$Mv\equiv(-1)^k v^{(2k)}(x)=\lambda v(x), \quad 0<x<1; \quad (22)$$

$$pv^{(j)}(0)=qv^{(j)}(1),\ qv^{(k+j)}(0)=pv^{(k+j)}(1),\ j=\overline{0,k-1} \quad (23)$$

sanoqli sondagi musbat xos sonlari $p\ne q$ bo'lganda mavjudligi va ularga mos xos funksiyalar esa $L_2(0,1)$ da ortonormal ekanligi isbotlangan.

Ushbu paragrafda quyidagi lemmalar va teoremalar isbotlangan:

**3-lemma.** *Faraz qilaylik,* $g(x)$ *funksiya* $g(x)\in C^{3k-1}[0,1]$, $g^{(3k)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *ва* $pg^{(j)}(0)=qg^{(j)}(1)$, $qg^{(k+j)}(0)=pg^{(k+j)}(1)$, $pg^{(2k+j)}(0)=qg^{(2k+j)}(1)$, $j=\overline{0,k-1}$ *shartlarni bajarsin. U holda,* (13) *tengsizlik o'rinli, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n\in N$ – (22),(23) *spektral masalaning xos sonlari va xos funksiyalari,* $g_n=\int_0^1 g(x)v_n(x)dx$ *esa* $g(x)$ *funksiyaning Furye koeffitsiyenti.*

**17-teorema.** *Faraz qilaylik,* $p\ne q$ *bo'lib,* $\varphi_1(x)$ *va* $\varphi_2(x)$ *funksiyalar 2-lemmaning shartlarini bajarsin,* $f(x,t)$ *funksiya esa* $x$ *o'zgaruvchisi bo'yicha* $t$ *o'zgaruvchiga nisbatan 2-lemmaning shartlarini tekis qanoatlantirsin. U holda,* (14) *funksiya 10-masalaning yagona yechimini aniqlaydi, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n\in N$ –(22),(23) *spektral masalaning mos holda xos sonlari va xos funksiyalari,* $a_n$ *va* $b_n$ *koeffitsiyentlar* (15) *formulalar bilan,* $\varphi_{1n}$, $\varphi_{2n}$ *va* $f_n(t)$ *Furye koeffitsiyentlari esa* (16) *formulalar bilan aniqlanadi.*

**18-teorema.** *Faraz qilaylik, 17-teoremaning barcha shartlari bajarilgan bo'lsin. U holda, 10-masalaning yechimi uchun* (17) *baho o'rinli.*

2.4-paragrafda $\Omega$ sohada (9) tenglama va quyidagi masala qaralgan:

**11-masala.** $\Omega$ *sohada* (9) *tenglamani qanoatlantiruvchi, soha chegarasida esa* (2) *boshlang'ich shartlarni hamda*

$$p\frac{\partial^{2j} u}{\partial x^{2j}}\bigg|_{x=0} = q\frac{\partial^{2j} u}{\partial x^{2j}}\bigg|_{x=1}, \quad q\frac{\partial^{2j+1} u}{\partial x^{2j+1}}\bigg|_{x=0} = p\frac{\partial^{2j+1} u}{\partial x^{2j+1}}\bigg|_{x=1}, \quad j=\overline{0,k-1}, \ 0\le t\le T, \quad (24)$$

*chegaraviy shartlarni bajaruvchi* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2k-1,0}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega)$ *funksiya topilsin, bu yerda* $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,2}$*-berilgan funksiyalar,* $p\,,q\in R$*-berilgan sonlar va* $p^2+q^2\neq 0.$

Bu yerda dastlab ushbu spektral masalaning

$$Mv\equiv(-1)^k v^{(2k)}(x)=\lambda v(x),\quad 0<x<1; \tag{25}$$

$$pv^{(2j)}(0)=qv^{(2j)}(1),\, qv^{(2j+1)}(0)=pv^{(2j+1)}(1),\ j=\overline{0,k-1} \tag{26}$$

sanoqli sondagi musbat xos sonlari $p\neq q$ bo‘lganda mavjudligi va ularga mos xos funksiyalar esa $L_2(0,1)$ da ortonormalligi isbotlangan.

Ushbu paragrafda 11-masala yechimining mavjudligi, yagonaligi hamda turg‘unligini isbotlash uchun quyidagi lemmadan foydalanilgan:

**4-lemma.** *Faraz qilaylik,* $g(x)\in C^{3k-1}[0,1]$, $g^{(3k)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *va* $j$ *– toq son bo‘lganda* $qg^{(j)}(0)=pg^{(j)}(1)$ *shartlar va* $j$ *–juft son bo‘lganda esa* $pg^{(j)}(0)=qg^{(j)}(1)$, $j=\overline{0,3k-1}$ *shartlar bajarilsin. U holda* (13) *tengsizlik o‘rinli, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n\in N$ *–* (25),(26) *spektral masalaning xos sonlari va xos funksiyalari,* $g_n=\int_0^1 g(x)v_n(x)dx$, $g(x)$ *funksiyaning Furye koeffitsiyenti.*

Bu paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremalardan iborat:

**19-teorema.** *Faraz qilaylik,* $p\neq q$ *bo‘lib,* $\varphi_1(x)$ *va* $\varphi_2(x)$ *funksiyalar 4-lemma shartlarini qanoatlantirsin,* $f(x,t)$ *funksiya esa ushbu shartlarni* $x$ *o‘zgaruvchisi bo‘yicha* $t$ *o‘zgaruvchiga nisbatan tekis qanoatlantirsin. U holda,* (14) *funksiya 11-masalaning yechimini aniqlaydi, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n\in N$ *–* (25),(26) *spektral masalaning mos holda xos sonlari va xos funksiyalari,* $a_n$ *va* $b_n$ *koeffitsiyentlar* (15) *formulalar bilan,* $\varphi_{1n}$, $\varphi_{2n}$ *va* $f_n(t)$ *Furye koeffitsiyentlari esa* (16) *formulalari bilan aniqlanadi.*

**20-teorema.** *Faraz qilaylik, 19-teoremaning barcha shartlari bajarilsin. U holda, 11-masalaning yechimi uchun* (17) *baho o‘rinli.*

Dissertatsiyaning **“Yuqori juft tartibli buziladigan tenglamalar uchun masalalar”** deb nomlangan uchinchi bobi, ikkita pararafdan iborat bo‘lib, ushbu bob $\Omega$ sohada buziladigan tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni tadqiq etishga bag‘ishlangan.

3.1-paragrafda $\Omega$ sohada yuqori juft tartibli soha chegarasida buziladigan quyidagi tenglama qaralgan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t}+(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)=f(x,t), \tag{27}$$

bu yerda $\alpha$, $\gamma$, $k$ – berilgan haqiqiy sonlar va $0\leq\alpha<1$, $0\leq\gamma<(1/2)$, $k\in N$, $f(x,t)$ – berilgan funksiya.

**12-masala.** *Quyidagi xossalarga ega bo‘lgan* $u(x,t)$ *funksiya topilsin:*

1) $\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \in C(\bar{\Omega}), \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\bar{\Omega}), \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) \in C(\bar{\Omega}), \quad j=\overline{0,k-1};$

$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) \in C(\Omega);\ t^{2\gamma}\frac{\partial u}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t} \in C(\Omega);$

2) $\Omega$ *sohada* (27) *tenglamani qanoatlantiradi;*

3) $\Omega$ *soha chegarasida* (2) *boshlang'ich shartlarni va* (10) *chegaraviy shartlarni bajaradi, bu yerda* $\varphi_1(x)$ *va* $\varphi_2(x)$ – *berilgan funksiyalar.*

Bu yerda, dastlab quyidagi spektral masala tadqiq etilgan:

$$Mv \equiv (-1)^k \left[x^\alpha v^{(k)}(x)\right]^{(k)} = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1; \tag{28}$$

$$v^{(j)}(0) = 0, \quad v^{(k+j)}(1) = 0, \ j = \overline{0,k-1} \tag{29}$$

va spektral masalaning sanoqli sondagi musbat xos sonlari mavjudligi va ularga mos xos funksiyalar esa $L_2(0,1)$ da ortonormalligi isbotlangan.

Quyidagi lemma o'rinliligi isbotlangan:

**5-lemma.** $g(x)$ *funksiya quyidagi shartlarni bajarsin:*

$$x^{\alpha/2}\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(2k-1)} \in C[0,1],\ x^{\alpha/2}\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(2k)} \in C(0,1) \cap L_2(0,1),$$

$$g^{(l)}(0) = 0, \quad g^{(k+l)}(1) = 0, \ g^{(2k+l)}(0) = 0, \quad l = \overline{0,k-1}.$$

*U holda,* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^3 g_n^2 \le \int\limits_0^t x^\alpha \left[\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(2k)}\right]^2 dx,$ *tengsizlik o'rinli, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x),\ n \in N$ – (28),(29) *spektral masalaning mos holda xos sonlari va xos funksiyalari,* $g_n = \int\limits_0^1 g(x) v_n(x) dx$ – $g(x)$ *funksiyaning Furye koeffitsiyenti.*

Quyidagi teoremalarning o'rinliligi isbotlangan:

**21-teorema.** *Faraz qilaylik,* $\varphi_1(x)$ *va* $\varphi_2(x)$ *funksiyalar 5-lemmaning shartlarini qanoatlantirsin,* $f(x,t)$ *funksiya esa 5-lemmaning shartlarini* $x$ *o'zgaruvchisi bo'yicha* $t$ *o'zgaruvchiga nisbatan tekis qanoatlantirsin. U holda,* (14) *funksiya, 12-masalaning yagona yechimini aniqlaydi, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n \in N$ – (28), (29) *spektral masalaning mos holda xos sonlari va xos funksiyalari,* $a_n$ *va* $b_n$ *koeffitsiyentlar* (15) *formulalar bilan,* $\varphi_{1n}$, $\varphi_{2n}$ *va* $f_n(t)$ *Furye koeffitsiyentlari esa* (16) *formulalar bilan aniqlanadi.*

**22-teorema.** *Faraz qilaylik,* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *va* $f(x,t)$ *funksiyalar 21-teoremaning shartlarini bajarsin. U holda, 12-masalaning yechimi uchun* (17) *baho o'rinli.*

3.2-paragrafda $\Omega$ sohada quyidagi tenglama qaralgan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^k x^m \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) = f(x,t), \tag{30}$$

bu yerda $m$, $\alpha$, $k$ – berilgan haqiqiy sonlar va $0 \le \gamma < (1/2)$, $0 \le m < 1$, $0 \le \alpha < 1$, $k \in N$; $f(x,t)$ – berilgan funksiya, va quyidagi masala tadqiq etilgan.

**13-masala.** *Quyidagi xossalarga ega bo'lgan* $u(x,t)$ *funksiya topilsin:*

1) $\dfrac{\partial^j u}{\partial x^j} \in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\Omega)$, $\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) \in C(\overline{\Omega})$, $j = \overline{0, k-1}$;

$x^m \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) \in C(\Omega)$; $t^{2\gamma} \dfrac{\partial u}{\partial t} \in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{2\gamma}{t}\dfrac{\partial u}{\partial t} \in C(\Omega)$;

2) $\Omega$ *sohada* (30) *tenglamani qanoatlantiradi;*

3) $\Omega$ *soha chegarasida* (2) *boshlang'ich shartlarni va* (10) *chegaraviy shartlarni bajaradi, bu yerda* $\varphi_1(x)$ *va* $\varphi_2(x)$ – *berilgan funksiyalar.*

Bu yerda, dastlab quyidagi spektral masala tadqiq etilgan:

$$Mv \equiv (-1)^k \left(x^\alpha v^{(k)}(x)\right)^{(k)} = \lambda x^{-m} v(x), \quad 0 < x < 1; \tag{31}$$

$$v^{(j)}(0) = 0, \quad v^{(k+j)}(1) = 0, \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{32}$$

Bu spektral masalaning sanoqli sondagi musbat xos sonlari mavjudligi va ularga mos xos funksiyalar esa $L_2(0,1)$ da ortonormalligi isbotlangan.

13-masala yechimining mavjudligi, yagonaligi va turg'unligini isbotlashda quyidagi lemmadan foydalaniladi:

**6-lemma.** $g(x)$ *funksiya quyidagi shartlarni bajarsin:* $x^{\frac{\alpha}{2}}\left[x^m\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(k)}\right]^{(k-1)} \in C[0,1]$, $x^{\frac{\alpha}{2}}\left[x^m\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(k)}\right]^{(k)} \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$, $g^{(l)}(0) = 0$, $g^{(k+l)}(1) = 0$, $g^{(2k+l)}(0) = 0$, $l = \overline{0, k-1}$. *U holda*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^3 g_n^2 \le \int_0^t x^\alpha \left[\left\{x^m \left[x^\alpha g(x)\right]^{(k)}\right\}^{(k)}\right]^2 dx,$$

*tengsizlik o'rinli, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n \in N$ – (31), (32) *spektral masalaning mos holda xos sonlari va xos funksiyalari,* $g_n = \int_0^1 x^{-m} g(x) v_n(x) dx$.

Ushbu bo'limning asosiy natijalarini quyidagi teoremalar ifodalaydi.

**23-teorema.** *Faraz qilaylik,* $\varphi_1(x)$ *va* $\varphi_2(x)$ *funksiyalar 6-lemmaning shartlarini bajarsin,* $f(x,t)$ *funksiya esa 6-lemmaning shartlarini* $x$ *o'zgaruvchisi bo'yicha* $t$ *o'zgaruvchiga nisbatan tekis qanoatlantirsin. U holda,* (14) *funksiya 13-masalaning yagona yechimini aniqlaydi, bu yerda* $\lambda_n$ *va* $v_n(x)$, $n \in N$ – (31), (32) *spektral masalaning mos holda xos sonlari va xos funksiyalari,* $a_n$ *va* $b_n$ *koeffitsiyentlar* (15) *formulalar bilan,* $\varphi_{1n}$, $\varphi_{2n}$ *va* $f_n(t)$ *koeffitsiyentlar esa*

$$\varphi_{1n} = \int_0^1 x^{-m} \varphi_1(x) v_n(x) dx, \varphi_{2n} = \int_0^1 x^{-m} \varphi_2(x) v_n(x) dx, f_n(t) = \int_0^1 x^{-m} f(x,t) v_n(x) dx$$

*formulalar bilan aniqlanadi.*

**24-teorema.** *Faraz qilaylik,* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *va* $f(x,t)$ *funksiyalar 23-teoremaning shartlarini bajarsin. U holda, 13-masalaning yechimi uchun quyidagi baho o'rinli:*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_{2,m}(0,1)} \le C_3\left[\|\varphi_1(x)\|^2_{L_{2,m}(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|^2_{L_{2,m}(0,1)} + \|f(x,t)\|^2_{L_{2,m}(\Omega)}\right],$$

*bu yerda* $C_3 = const > 0$, $\|g(x)\|_{L_{2,m}(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 x^{-m} g^2(x)dx}$.

## XULOSA

Dissertatsiya yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri to'rtburchakli sohada boshlang'ich-chegaraviy va teskari masalalarni qo'yish va tadqiq etishga bag'ishlangan.

Birinchi bobda to'rtinchi tartibli tenglamalar uchun masalalar, ikkinchi bobda yuqori juft tartibli singulyar koeffitsientli tenglamalar uchun, uchinchi bobda yuqori juft tartibli singulyar koeffitsientli buziladigan tenglamalar uchun masalalar o'rganildi.

Tadqiqot natijalari quyidagicha:

o'ng tomoni noma'lum bo'lgan to'rtinchi tartibli model va singulyar koeffitsiyentli tenglamalar uchun teskari masalalar tadqiq etilgan va ushbu masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan;

to'rtinchi tartibli yuklangan model tenglamalar uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan;

singulyar koeffitsiyentli to'rtinchi tartibli tenglama uchun boshlang'ich-chegaraviy masalaning yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan;

yuqori juft tartibli tenglamalar uchun turli lokal va nolokal boshlang'ich-chegaraviy masalalar tadqiq etilgan va ushbu masalalar yechimining yagona, mavjud va turg'un bo'lishini ta'minlovchi shartlar topilgan;

buziladigan yuqori juft tartibli tenglamalar uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar o'rganilib, ushbu masalalar yechimining yagonaligini, mavjudligini va turg'unligi isbotlangan.

O'rganilgan masalalar yechimining yagonaligini isbotlashda spektral usul va energiya integrallari usulidan, yechimning mavjudligini isbotlashda Furye usuli, Grin funksiyalar usuli, integral tenglamalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan. Dissertatsiya ishida o'rganilgan barcha masalalar yangi va ulardan xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasini yanada rivojlantirish uchun foydalanish mumkin.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

---

**ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**АЗИЗОВ МУЗАФФАР СУЛАЙМОНОВИЧ**

# ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ И СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

**01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика**

**АВТОРЕФЕРАТ**
**диссертации доктора философии (PhD)**
**ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Фергана – 2023**

**Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико – математическим наукам зарегистрирована в Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за №B 2023.1.PhD/FM835.**

Диссертация выполнена в Ферганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб – странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | **Уринов Ахмаджон Кушакович**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| **Официальные оппоненты:** | **Кодиркулов Бахтиёр Жалилович**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| | **Иргашев Бахром Юсупханович**<br>кандидат физико-математических наук |
| **Ведущая организация:** | **Термезский государственный университет** |

Защита диссертации состоится «16» 11 2023 года в $9^{30}$ часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19. Тел: (+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно–ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за №310). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19). Тел.: (+99873) 244-44-94.

Автореферат диссертации разослан «7» 11 2023 года.
(протокол рассылки №3 от «7» 11 2023 года).

**Ш.Т. Каримов**
Заместитель председателя научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., доцент

**И.У. Хайдаров**
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф-м.н., доцент

**Э.Т. Каримов**
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., доцент

## ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** Известно, что большинство научных исследований, проводимых в мировом масштабе, сводится к построению и изучению математических моделей, соответствующих изучаемым проблемам. При этом дифференциальные уравнения в частных производных высокого четного порядка берутся в качестве математических моделей процессов колебаний, диффузии, а также стационарных процессов и др. Например, если модельное дифференциальное уравнение второго порядка гиперболического типа описывает колебания стержня, то такое же уравнение четвертого порядка определяет колебания балки. Аналогично, колебание струны с острым краем описывается вырождающимся дифференциальным уравнением второго порядка, а колебание пластинки переменной толщины – вырождающимся уравнением четвёртого порядка. Поэтому в настоящее время исследование дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка является одним из актуальных направлений теории дифференциальных уравнений.

В настоящее время во всем мире значительно возрос интерес к постановке и исследованию задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка и разработке методов их решения. При этом особое внимание уделяется постановке прямых и обратных задач с новыми локальными и нелокальными граничными условиями. К настоящему времени по постановке и методам исследования таких задач, а также по их практической значимости публиковался ряд научных статей. В большинстве из них, в основном, рассмотрены дифференциальные уравнения в частных производных второго и четвертого порядка, а в качестве объекта исследования взяты задачи с классическими граничными условиями. Очевидно, что при возрастании порядка уравнения, а также при наличии вырождения в уравнении, варианты граничных условий увеличиваются. Поэтому постановка и исследование новых начально-граничных задач как для вырождающихся, так и для невырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных произвольного четного порядка являются актуальными.

В нашей Республике особое внимание уделяется фундаментальным исследованиям, которые имеют как теоретическое, так и практическое значение. В том числе, проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук, особенно по дифференциальным уравнениям и математической физике, динамических систем и оптимального управления, по прикладной математике и математическому моделированию, математическому анализу и теории функций, теории вероятностей и математической статистике, алгебре и геометрии определено как основные задачи и направления деятельности математиков[1]. К настоящему времени по этим направлениям получены значительные научные результаты. Решение проблемы постановки и исследования начально-граничных задач с новыми граничными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных произвольного четного порядка имеет большое значение при реализации поставленных выше задач.

Проблема исследования настоящей диссертации находится в русле задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии Наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан», ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** Несмотря на то, что теория дифференциальных уравнений в частных производных имеет длинную и богатую историю, систематические исследования уравнений высокого четного порядка начались с 60-х годов прошлого века. К настоящему времени по постановке начальных и начально-граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка опубликовано достаточно много работ. В частности, рассматривая в четырехугольнике невырождающиеся модельные уравнения четвёртого порядка М.С.Салахитдиновым, Дж.Амановым, А.Б.Бекиевым, Ш.А.Отаровой, А.В.Юлдашевой и М.Б.Мурзамбетовой изучены разрешимость и спектральные свойства ряда краевых задач, а К.Б.Сабитовым сформулированы новые корректно поставленные начально-граничные задачи и доказана однозначная их разрешимость. Аналогично, Т.К.Юлдашевым рассмотрены начальные и краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений четвертого порядка, а Б.Ж.Кадыркуловым – начально-граничные задачи для уравнений четвертого порядка с инволюцией. Далее, Дж.Амановым в прямоугольнике исследованы краевые задачи для уравнений четвертого порядка смешанного типа. Б.К.Байкузиев и М.Касимова исследовали

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

разрешимость начально-граничных задач для линейного и нелинейного вырождающегося уравнения четвертого порядка.

Изучением начально-граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных произвольного четного порядка на плоскости и в многомерном пространстве занимался ряд исследователей. Например, Д.Аманов и А.В.Юлдашева, А.И.Кожанов и Н.Р.Пинигина, рассматривая в прямоугольнике невырождающиеся дифференциальные уравнения высокого четного порядка по одной переменной, рассмотрели начально-граничные задачи, а Р.Р.Ашуров и А.Т.Мухиддинова изучили начально-граничную задачу для гиперболического и параболического уравнений с положительным самосопряженным эллиптическим дифференциальным оператором произвольного порядка. К.Б.Сабитов, рассматривая в четырехугольнике невырождающееся дифференциальное уравнение произвольного высокого четного порядка по обеим переменным исследовал задачи типа Дирихле, а Б.Ю.Иргашев – для такого уравнения исследовал начально-граничную и спектральную задачу. Начально-граничные задачи в четырехугольнике для вырождающихся уравнений высокого четного порядка на плоскости сформулированы и исследованы К.Б.Байкузиевым, Б.С.Калановым и Б.Ю.Иргашевым.

В многомерных областях начально-граничные задачи для некоторых классов ультрагиперболических уравнений высокого четного порядка по пространственным переменным исследованы Б.А.Бубновым и В.Н.Враговым, для псевдопараболических, квазиэллиптических и «частично гиперболических» уравнений - А.И.Кожановым, а для некоторых классов уравнений составного типа высокого четного порядка по временной переменной - А.И.Кожановым и Н.Р.Пинигиной. И.Е.Егоров и И.Е.Федоров изучили начально-граничные задачи для уравнения смешанного типа и для уравнения с меняющимся направлением времени $2m$-го порядка по пространственным переменным, а по временной переменной соответственно $2s$-го и $2s+1$-го порядков, где $m,s \in N$. Ш.Г.Касимов и У.С.Мадрахимов исследовали начально-граничные задачи для уравнений $4k$-го порядка по геометрическим переменным.

В перечисленных выше работах при исследовании начально-граничных задач в основном взято несколько известных вариантов граничных условий. Очевидно, что изучение начально-граничных задач на плоскости для дифференциальных уравнений высокого четного порядка с новыми граничными условиями представляет большой интерес. Настоящая диссертация посвящена этой важной проблеме теории дифференциальных уравнений в частных производных.

**Связь темы диссертации с научно – исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация.** Диссертационная работа выполнена в рамках темы «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и родственных разделов математики» плана научно – исследовательских работ Ферганского государственного университета.

**Целью исследования** являются постановка и исследование начально-граничных и обратных задач на плоскости для дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка, а также разработка методов исследования поставленных задач.

**Задачи исследования,** решаемые в данной работе, следующие:

постановка и исследование начально-граничных задач для уравнений четвертого порядка с сингулярным коэффициентом;

постановка и исследование обратных задач для уравнений четвертого порядка;

постановка и исследование начально-граничных задач для нагруженных уравнений четвертого порядка;

постановка и исследование начально-граничных задач для уравнений высокого четного порядка с сингулярным коэффициентом;

постановка и исследование начально-граничных задач для вырождающихся уравнений высокого четного порядка с сингулярным коэффициентом.

**Объектом исследования** являются дифференциальные уравнения в частных производных четвертого и высокого четного порядка с двумя независимыми переменными.

**Предметом исследования** являются начально-граничные и обратные задачи на плоскости для дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка.

**Методы исследования.** В диссертационной работе для доказательства единственности решения исследуемых задач использовались спектральный метод и метод интегралов энергии, а для доказательства существования решения метод Фурье, метод функций Грина, теория интегральных уравнений.

**Научная новизна исследования заключается в следующем:**

методом Фурье найдено решение прямых и обратных задач для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с сингулярными коэффициентами;

методом Фурье определены условия, обеспечивающие однозначную разрешимость начально-граничных задач для модельного нагруженного уравнения четвертого порядка;

посредством метода Фурье, метода функции Грина, метода интегральных уравнений с симметричным ядром и методов спектрального анализа доказывается корректность решения локальных и нелокальных начально-краевых задач для уравнений высокого четного порядка с сингулярными коэффициентами;

посредством метода энергетических интегралов, метода Фурье, метода функции Грина, метода интегральных уравнений с симметричным ядром, методов спектрального анализа, доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости локальной начально-граничной задачи для вырождающихся уравнений высокого четного порядка с сингулярным коэффициентом.

**Практические результаты исследования** состоят в применении полученных научных результатов для изучения качественных характеристик процессов, приводящих к таким математическим моделям и для численного расчета решения задач.

**Достоверность результатов исследования.** Математические доказательства основаны на методе Фурье, методах интегралов энергии и интегральных уравнений, а также основаны на строгости математических рассуждений и вычислений.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.**

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть положены в основу дальнейшего развития теории локальных и нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка.

Практическая значимость диссертационного исследования определяется тем, что его можно использовать при математическом моделировании ряда процессов механики, таких как вибрация молота и плиты, судостроение, а также при математическом моделировании процессов, относящихся к другим областям науки.

**Внедрение результатов исследования.** Полученные результаты исследования задачи для дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка с вырождением и сингулярным коэффициентом были использованы в следующих научных проектах:

результаты по существованию, единственности и устойчивости решения начально-граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка использовались в научных исследованиях по проекту №AP09259394 «Обратные задачи для эволюционных уравнений с положительными операторами» (справка №01-06/91 от 16.06.2023 Институт математики и математического моделирования Комитета Науки Министерства Науки и высшего образования Республики Казахстан). Применение этих результатов позволило исследовать обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка;

результаты по начально-граничным задачам для нагруженных уравнений были использованы при выполнении научно-исследовательских работ в рамках темы «Краевые задачи и задачи управления для основных и смешанного типов уравнений и их применение к исследованию систем с распределёнными параметрами» (Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук. Справка №01-13/42 от 20.06.2023). Используя эти результаты доказана однозначная разрешимость краевых задач для существенно нагруженных уравнений гиперболического и гиперболо-параболического типа;

метод, примененный при исследовании спектральных задач, использован в проекте на тему “Бисингулярные задачи и их применения” (справка №803 от 20.06.2023 Ошский государственный университет). Применение этого метода позволило доказать существование собственных значений и собственных функций некоторых нелокальных обобщенных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка.

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты диссертации обсуждались на 9 международных и 5 республиканских научных и научно-практических конференциях.

**Публикация результатов исследования.** По теме диссертации опубликовано 28 научных работ, в том числе-14 научных статей, из них 6 опубликованы в зарубежных научных журналах, 7-опубликованы в отечественных научных журналах, рекомендованных к публикации основных научных результатов докторских диссертаций Высшей Аттестационной Комиссии Республики Узбекистан.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 117 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** обосновывается актуальность и необходимость темы диссертации, освещается совместимость исследования с приоритетными направлениями развития науки и техники республики, указывается уровень изученности проблемы, цель, описываются задачи, объект и предмет исследования, описываются научная новизна и практические результаты исследования, раскрывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, информация о внедрении результатов исследования, сведения об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Задачи для уравнения четвертого порядка»**, состоит из четырех параграфов и посвящена постановке и исследованию прямых и обратных задач для дифференциальных (нагруженных) уравнений в частных производных четвертого порядка в прямоугольной области $\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$, где $p,T\in R^+$.

В параграфе 1.1 в области $\Omega$ для уравнения

$$Lu\equiv u_{xxxx}+u_{tt}+(2\gamma/t)u_t=f(x,t),\ \ 0<\gamma<1/2 \qquad (1)$$

поставлена и исследована следующая начально-граничная задача:

**Задача 1.** *Найти решение* $u(x,t)\in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям:*

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ 0\le x\le p;\quad \lim_{t\to 0} t^{2\gamma}u_t(x,t)=\varphi_2(x),\ \ 0<x<p \qquad (2)$$

$$u_x(0,t)=\psi_1(t),u_x(p,t)=\psi_2(t),u_{xxx}(0,t)=\psi_3(t),u_{xxx}(p,t)=\psi_4(t),0\le t\le T, \qquad (3)$$

*где* $f(x,t)$, $\varphi_i(x)$ $(i=1,2)$ *и* $\psi_j(t)$ $(j=\overline{1,4})$ *– заданные функции.*

Доказано, что справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если существует решение задачи 1, то оно единственно.*

**Теорема 2.** *Если* $g(x,t)\in C^{4,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$, $g_{xxxxx}(x,t)\in C(\Omega)\cap L_2(\Omega)$, $g_x(0,t)=g_x(p,t)=0$, $g_{xxx}(0,t)=g_{xxx}(p,t)=0$ *и* $\varphi_3(x),\varphi_4(x)\in C^4[0,p]$, $\varphi_3^{(5)}(x),\varphi_4^{(5)}(x)\in C(0,p)\cap L_2(0,p)$, $\varphi_3'(0)=\varphi_3'(p)=0$, $\varphi_3'''(0)=\varphi_3'''(p)=0$, $\varphi_4'(0)=\varphi_4'(p)=0$, $\varphi_4'''(0)=\varphi_4'''(p)=0$, *то решение задачи 1 существует, где*

$$g(x,t)=f(x,t)-w_{xxxx}(x,t)-w_{tt}(x,t)-\frac{2\gamma}{t}w(x,t),\ \ \varphi_3(x)=\varphi_1(x)-w(x,0),$$

$$\varphi_4(x)=\varphi_2(x)-\lim_{t\to 0}t^{2\gamma}w_t(x,t),\ 0\le x\le p,$$

$$w(x,t)=\frac{1}{24p}\left[\psi_4(t)-\psi_3(t)\right]x^4+\frac{1}{6}\psi_3(t)x^3+$$

$$+\left\{\frac{1}{2p}\left[\psi_2(t)-\psi_1(t)\right]-\frac{p}{12}\left[\psi_4(t)+2\psi_3(t)\right]\right\}x^2+\psi_1(t)x.$$

В параграфе 1.2 в области $\Omega$ рассмотрено уравнение вида

$$Lu\equiv u_{xxxx}+u_{tt}=Q(t)f(x), \tag{4}$$

где $Q(t)\in C(0,p)\cap L(0,p)$ – известная функция, а $u=u(x,t)$ и $f(x)$ – неизвестные функции, и исследованы следующие задачи:

**Задача 2.** *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $f(x)$*, которые:*

*1)* $u(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})\cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$, $f(x)\in C(0,p)\cap L(0,T)$;

*2)* $u(x,t)$ *и* $f(x)$ *удовлетворяют уравнению* (4) *в области* $\Omega$;

*3)* $u(x,t)$ *удовлетворяет следующим начальным и краевым условиям:*

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad 0\le x\le p;\quad u_t(x,0)=\varphi_2(x),\ \ 0<x<p; \tag{5}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(p,t)=0,\quad u_{xx}(0,t)=0,\quad u_{xx}(p,t)=0,\ \ 0\le t\le T; \tag{6}$$

$$u(x,T)=\varphi_3(x),\quad 0\le x\le p.$$

**Задача 3.** *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $f(x)$*, которые:*

*1)* $u(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})\cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$, $f(x)\in C(0,p)\cap L(0,T)$;

*2)* $u(x,t)$ *и* $f(x)$ *удовлетворяют уравнению* (4) *в области* $\Omega$;

*3)* $u(x,t)$ *удовлетворяет условиям* (5), (6) *и условию*

$$u_t(x,T)=\varphi_3(x),\quad 0\le x\le p.$$

**Задача 4.** *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $f(x)$*, которые:*

*1)* $u(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})\cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$, $f(x)\in C(0,p)\cap L(0,T)$;

*2)* $u(x,t)$ и $f(x)$ *удовлетворяют уравнению* (4) *в области* $\Omega$;

*3)* $u(x,t)$ *удовлетворяет условиям* (5), (6) *и условию*

$$\int_0^T u(x,t)\,dt=\varphi_3(x),\quad 0\le x\le p.$$

**Задача 5.** *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $f(x)$*, которые:*

*1)* $u(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})\cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$, $f(x)\in C(0,p)\cap L(0,T)$;

*2)* $u(x,t)$ *и* $f(x)$ *удовлетворяют уравнению* (4) *в области* $\Omega$;

*3)* $u(x,t)$ *удовлетворяет условиям* (5), (6) *и условию*

$$u_t(x,T)+\int_0^T u(x,t)\,dt=\varphi_3(x),\quad 0\le x\le p.$$

Здесь $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *и* $\varphi_3(x)$ – заданные функции, причем в задачах 2 и 4 выполняется условие согласования вида $\varphi_3(0)=0,\ \varphi_3(p)=0$.

Доказана справедливость следующих теорем.

**Теорема 3.** *Если для* $\forall n\in N$ *выполнено неравенство* $\Delta_{jn}\ne 0$, *то задача 2-5 не может иметь более одного решения* $\left(j=\overline{1,4}\right)$, *где*

$$\Delta_{1n}=\lambda_n^2\int_0^T Q(\tau)\sin\lambda_n^2(T-\tau)\,d\tau,\ \Delta_{2n}=\lambda_n^4\int_0^T Q(\tau)\cos\lambda_n^2(T-\tau)\,d\tau,$$

$$\Delta_{3n}=\lambda_n^4\int_0^T Q(\tau)\left[1-\cos\lambda_n^2(T-\tau)\right]d\tau,$$

$$\Delta_{4n}=\lambda_n^4\int_0^T Q(\tau)\cos\lambda_n^2(T-\tau)\,d\tau+\int_0^T Q(\tau)\left[1-\cos\lambda_n^2(T-\tau)\right]d\tau,\ \lambda_n=n\pi/p.$$

**Теорема 4.** *Пусть существует такое число* $\delta_1>0$, *которое* $|\Delta_{1n}|>\delta_1$, $\forall n\in N$, *и выполнены следующие условия:*

$$\varphi_1(x),\varphi_3(x)\in C^6[0,p]\cap C^7(0,p),\ \varphi_1^{(7)}(x),\varphi_3^{(7)}(x)\in L_2(0,p),$$

$$\varphi_1^{(2i)}(0)=\varphi_1^{(2i)}(p)=0,\ \varphi_3^{(2i)}(0)=\varphi_3^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,3};$$

$$\varphi_2(x)\in C^4[0,p]\cap C^5(0,p),\ \varphi_2^{(5)}(x)\in L_2(0,p),\ \varphi_2^{(2i)}(0)=\varphi_2^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,2}.$$

*Тогда решение задачи* 2 *существует.*

**Теорема 5.** *Пусть существует такое число* $\delta_2>0$, *которое* $|\Delta_{2n}|>\delta_2$, $\forall n\in N$, *и выполнены следующие условия:*

$$\varphi_1(x)\in C^8[0,p]\cap C^9(0,p),\ \varphi_1^{(9)}(x)\in L_2(0,p),\ \varphi_1^{(2i)}(0)=\varphi_1^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,4};$$

$$\varphi_2(x),\varphi_3(x)\in C^6[0,p]\cap C^7(0,p),\ \varphi_2^{(7)}(x),\varphi_3^{(7)}(x)\in L_2(0,p),$$

$$\varphi_2^{(2i)}(0)=\varphi_2^{(2i)}(p)=0,\ \varphi_3^{(2i)}(0)=\varphi_3^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,3}.$$

*Тогда решение задачи 3 существует.*

**Теорема 6.** *Пусть существует такое число* $\delta_3>0$, *которое* $|\Delta_{3n}|>\delta_3$, $\forall n\in N$, *и выполнены следующие условия:*

$$\varphi_1(x),\, \varphi_3(x) \in C^{10}[0,p] \cap C^{11}(0,p),\; \varphi_1^{(11)}(x),\, \varphi_3^{(11)}(x) \in L_2(0,p),$$
$$\varphi_1^{(2i)}(0) = \varphi_1^{(2i)}(p) = 0,\; \varphi_3^{(2i)}(0) = \varphi_3^{(2i)}(p) = 0,\; i = \overline{0,5};$$
$$\varphi_2(x) \in C^6[0,p] \cap C^7(0,p),\; \varphi_2^{(7)}(x) \in L_2(0,p),\; \varphi_2^{(2i)}(0) = \varphi_2^{(2i)}(p) = 0,\; i = \overline{0,3}.$$

*Тогда решение задачи 4 существует.*

**Теорема 7.** *Пусть существует такое число* $\delta_4 > 0$*, которое* $|\Delta_{4n}| > \delta_4$, $\forall n \in N$*, и выполнены следующие условия:*

$$\varphi_1(x) \in C^8[0,p] \cap C^9(0,p),\; \varphi_1^{(9)}(x) \in L_2(0,p),\; \varphi_1^{(2i)}(0) = \varphi_1^{(2i)}(p) = 0,\; i = \overline{0,4};$$
$$\varphi_2(x), \varphi_3(x) \in C^6[0,p] \cap C^7(0,p),\; \varphi_2^{(7)}(x), \varphi_3^{(7)}(x) \in L_2(0,p),$$
$$\varphi_2^{(2i)}(0) = \varphi_2^{(2i)}(p) = 0,\; \varphi_3^{(2i)}(0) = \varphi_3^{(2i)}(p) = 0,\; i = \overline{0,3}.$$

*Тогда решение задачи 5 существует.*

В параграфе 1.3 в области $\Omega$ рассмотрено уравнение

$$u_{xxxx} + u_{tt} + (2\gamma/t)u_t = f(x), \quad 0 < \gamma < 1/2, \tag{7}$$

где $u = u(x,t)$ и $f(x)$ неизвестные функции, и исследована следующая задача:

**Задача 6.** *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $f(x)$*, которые:*

*1)* $u(x,t) \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$, $f(x) \in C(0,p) \cap L(0,p)$*;*

*2)* $u(x,t)$ *и* $f(x)$ *удовлетворяют уравнению* (7) *в области* $\Omega$*;*

*3)* $u(x,t)$ *удовлетворяет начальным условиям* (5) *и краевым условиям* (6),

$$u(x,T) = \varphi_3(x), \quad 0 \le x \le p,$$

*где* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *и* $\varphi_3(x)$ *– заданные функции.*

Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 8.** *Если существует решение задачи 6, то оно единственно.*

**Теорема 9.** *Если* $\varphi_j(x) \in C^4[0,p] \cap C^5(0,p)$, $\varphi_j^{(5)}(x) \in L(0,p)$, $\varphi_j^{(2i)}(0) = 0$, $\varphi_j^{(2i)}(p) = 0$, $j = \overline{0,3}$, $i = \overline{0,2}$, *то решение задачи 6 существует.*

В параграфе 1.4 в области $\Omega$ рассмотрены уравнения

$$u_{xxxx} + u_{tt} = v_k(x,t) + f(x,t), \quad k = \overline{1,4}, \tag{8}$$

где $f(x,t)$ - заданная функция, $u = u(x,t)$ - неизвестная функция,

$$v_1(x,t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u(x,t_j), \quad v_2(x,t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j u_t(x,t_j),$$
$$v_3(x,t) = \int_0^{t_0} u(x,t)\,dt, \quad v_4(x,t) = \int_0^{t_0} u_{xx}(x,t)\,dt,$$

$\alpha_j$, $\beta_j$, $t_0$, $t_j$, $j = \overline{1,m}$ – заданные действительные числа, причем $t_0$, $t_j \in (0,T]$, $j = \overline{1,m}$; $t_j \ne t_l$, $j \ne l$ , $j,l = \overline{1,m}$; $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2 \ne 0$, $\sum_{j=1}^{m} \beta_j^2 \ne 0$, и исследована следующая задача.

**Задача 7.** *Найти функцию* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega})\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$, *удовлетворящую в области* $\Omega$ *уравнению* (8) $(k=\overline{1,4})$, *начальным условиям* (5) *и граничным условиям* (6), *где* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *– заданные функции.*

Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 10**. *Если для* $\forall n\in N$ *справедливо неравенство* $\Delta_{kn}\neq 0$ $(k=\overline{1,4})$, *то задача 7 не может иметь более одного решения, где*

$$\Delta_{1n}=1-2\lambda_n^{-4}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\sin^2\left(\lambda_n^2 t_j/2\right),\qquad \Delta_{2n}=1-\lambda_n^{-2}\sum_{j=1}^{m}\beta_j\sin\left(\lambda_n^2 t_j\right),$$

$$\Delta_{3n}=1-\lambda_n^{-4}\left[t_0-\lambda_n^{-2}\sin\left(\lambda_n^2 t_0\right)\right],\ \Delta_{4n}=1+\lambda_n^{-2}\left[t_0-\lambda_n^{-2}\sin\left(\lambda_n^2 t_0\right)\right],\ \lambda_n=n\pi/p.$$

**Теорема 11.** *Пусть существует такое число* $\delta_k>0$, *при котором для* $\forall n\in N$ *выполняется неравенство* $|\Delta_{kn}|>\delta_k$ $(k=\overline{1,4})$, *и выполнены условия*

$$f(x,t)\in C_{x,t}^{2,0}(\overline{\Omega}),\ \left(\partial^3/\partial x^3\right)f(x,t)\in L_2(\Omega),$$

$$\left(\partial^{2i}/\partial x^{2i}\right)f(0,t)=\left(\partial^{2i}/\partial x^{2i}\right)f(p,t)=0,\ i=\overline{0,1};\ \varphi_1(x)\in C^4[0,p]\cap C^5(0,p),$$

$$\varphi_1^{(5)}(x)\in L_2(0,p),\ \varphi_1^{(2i)}(0)=\varphi_1^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,2};\ \varphi_2(x)\in C^2[0,p]\cap C^3(0,p),$$

$$\varphi_2^{(3)}(x)\in L_2(0,p),\ \varphi_2^{(2i)}(0)=\varphi_2^{(2i)}(p)=0,\ i=\overline{0,1}.$$

*Тогда существует решение задачи 7.*

Вторая глава диссертации, названная **«Задачи для уравнения высокого четного порядка»**, состоит из четырех параграфов и посвящена постановке и исследованию начально-граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка в области $\Omega=\{(x,t):0<x<1;0<t<T\}$.

В параграфе 2.1 в области $\Omega$ рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t}+(-1)^k\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}=f(x,t),\quad 0<\gamma<1/2, \tag{9}$$

где $f(x,t)$ – заданная функция, и исследована следующая задача:

**Задача 8.** *Найти функцию* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2k-1,0}(\overline{\Omega})\cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega)$, *удовлетворяющую в области* $\Omega$ *уравнению* (9), *а на границе области* $\Omega$ *начальным условиям* (2) *и следующим граничным условиям:*

$$\left(\partial^j/\partial x^j\right)u(0,t)=0,\quad \left(\partial^{k+j}/\partial x^{k+j}\right)u(1,t)=0,\quad j=\overline{0,k-1},\quad 0\le t\le T, \tag{10}$$

*где* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *– заданные функции.*

Здесь сначала доказано, что спектральная задача с условиями

$$Mv\equiv(-1)^k v^{(2k)}(x)=\lambda v(x),\quad 0<x<1; \tag{11}$$

$$v^{(j)}(0)=0,\quad v^{(k+j)}(1)=0,\ j=\overline{0,k-1} \tag{12}$$

имеет счетное число положительных собственных значений, а соответствующие им собственные функции ортонормальны в $L_2(0,1)$.

При доказательстве существования, единственности и устойчивости решения задачи 8 используется следующая лемма:

**Лемма 1.** *Пусть* $g(x)\in C^{3k-1}[0,1]$, $g^{(3k)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *и* $g(0)=g'(0)=...=g^{(k-1)}(0)=0$, $g^{(k)}(1)=g^{(k+1)}(1)=...=g^{(2k-1)}(1)=0$, $g^{(2k)}(0)=g^{(2k+1)}(0)=...=g^{(3k-1)}(0)=0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3 g_n^2 \le \int_0^1 \left[g^{(3k)}(x)\right]^2 dx, \tag{13}$$

*где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$ *– соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи* (11), (12), *а* $g_n=\int_0^1 g(x)v_n(x)dx$ *– коэффициенты Фурье функции* $g(x)$.

Доказана справедливость следующих теорем

**Теорема 12.** *Пусть функции* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 1, а функция* $f(x,t)$ *удовлетворяет этим условиям по аргументу* $x$ *равномерно по* $t$. *Тогда функция*

$$\begin{aligned}u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{&a_n t^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+b_n t^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+\\ &+\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\int_0^t J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)(t/\tau)^{1/2-\gamma}\tau f_n(\tau)d\tau-\\ &-\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\int_0^t J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)(t/\tau)^{1/2-\gamma}\tau f_n(\tau)d\tau\Big\}v_n(x)\end{aligned} \tag{14}$$

*определяет решение задачи 8, где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$ *– соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи* (11), (12);

$$a_n=(1/2)\left(\sqrt{\lambda_n}/2\right)^{\gamma-1/2}\Gamma(1/2-\gamma)\varphi_{2n},\ b_n=\left(\sqrt{\lambda_n}/2\right)^{1/2-\gamma}\Gamma(1/2+\gamma)\varphi_{1n}, n\in N, \tag{15}$$

$$\varphi_{1n}=\int_0^p\varphi_1(x)v_n(x)dx,\ \varphi_{2n}=\int_0^p\varphi_2(x)v_n(x)dx,\ f_n(t)=\int_0^1 f(x,t)v_n(x)dx, n\in N, \tag{16}$$

$J_\nu(x)$ *– функция Бесселя первого рода,* $\Gamma(z)$ *– гамма-функция Эйлера.*

**Теорема 13.** *Задача 8 не может иметь более одного решения.*

**Теорема 14.** *Пусть функции* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 1, а функция* $f(x,t)$ *удовлетворяет этим условиям по* $x$ *равномерно по* $t$. *Тогда для решения задачи 8 справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)}\le K_0\left[\|\varphi_1(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|\varphi_2(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right], \tag{17}$$

*где* $K_0\in R^+$ *– некоторое число,* $\|g(x)\|_{L_2(0,1)}=\sqrt{\int_0^1 g^2(x)dx}$.

В параграфе 2.2 в области $\Omega$ рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^{4k} u}{\partial x^{4k}}=f(x,t), \quad 0<\gamma<1/2, \tag{18}$$

где $f(x,t)$ – заданная функция, и изучена следующая задача:

**Задача 9.** *Найти функцию* $u(x,t)\in C_{x,t}^{4k-1,0}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{4k,2}(\Omega)$, *удовлетворяющую в области* $\Omega$ *уравнению* (18), *а на границе области* $\Omega$ *начальным условиям* (2) *и следующим граничным условиям:*

$$p\frac{\partial^{2i}}{\partial x^{2i}}u(0,t)=q\frac{\partial^{2i+1}}{\partial x^{2i+1}}u(0,t),\ i=\overline{0,2k-1}, 0\le t\le T,$$

$$p\frac{\partial^{2i}}{\partial x^{2i}}u(1,t)=q\frac{\partial^{2i+1}}{\partial x^{2i+1}}u(1,t),\ i=\overline{0,2k-1}, 0\le t\le T,$$

*где* $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$*–заданные функции, а* $p,q\in R$*–заданные числа, причем* $p\neq 0$.

Здесь сначала доказано, что спектральная задача с условиями

$$Mv\equiv v^{(4m)}(x)=\lambda v(x),\ 0<x<1; \tag{19}$$

$$pv^{(2i)}(0)=qv^{(2i+1)}(0),\ pv^{(2i)}(1)=qv^{(2i+1)}(1),\ i=\overline{0,2m-1} \tag{20}$$

имеет счетное число положительных собственных значений, а соответствующие им собственные функции ортонормальны в $L_2(0,1)$.

При для доказательстве существования, единственности и устойчивости решения задачи 9 используется следующая лемма:

**Лемма 2.** *Пусть* $g(x)\in C^{6m-1}[0,1]$, $g^{(6m)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *и* $pg^{(2j)}(0)=qg^{(2j+1)}(0)$, $pg^{(2j)}(1)=qg^{(2j+1)}(1)$, $j=\overline{0,3m-1}$. *Тогда справедливо неравенство* $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3 g_n^2\le\int_0^1\left[g^{(6m)}(x)\right]^2dx$, *где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$ *– соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи* (19), (20), *а* $g_n=\int_0^1 g(x)v_n(x)dx$ *– коэффициенты Фурье функции* $g(x)$.

В этом параграфе доказываются следующие теоремы:

**Теорема 15.** *Пусть* $\varphi_i(x)\in C^{6k-1}[0,1]$, $\varphi_i^{(6k)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$, $p\varphi_i^{(2j)}(0)=q\varphi_i^{(2j+1)}(0)$, $p\varphi_i^{(2j)}(1)=q\varphi_i^{(2j+1)}(1)$, $j=\overline{0,3k-1}$, $i=\overline{1,2}$, *а функция* $f(x,t)$ *по аргументу* $x$ *равномерно по* $t$ *удовлетворяет условиям*

$$f(x,t)\in C^{2k-1}[0,1],\ f_x^{(2k)}(x,t)\in C(0,1)\cap L_2(0,1),\ \text{и}$$

$$p\,f^{(2j)}(0,t)=q\,f^{(2j+1)}(0,t),\ p\,f^{(2j)}(1,t)=q\,f^{(2j+1)}(1,t),\ j=\overline{0,2k-1}.$$

*Тогда сумма ряда* (14), *определяет единственное решение задачи 9, где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$*–соответственно собственные значения и собственные функции* *спектральной задачи* (19), (20); *коэффициенты* $a_n$ *и* $b_n$ *определяются формулами* (15)*, а* $\varphi_{1n}$, $\varphi_{2n}$ *и* $f_n(t)$ - *формулами* (16).

**Теорема 16.** *Пусть функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *и* $f(x,t)$ *удовлетворяют условиям леммы 2. Тогда для решения задачи 9 справедлива оценка* (17).

В параграфе 2.3 в области $\Omega$ рассмотрим уравнение (9).

**Задача 10.** *Найти функцию* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2k-1,0}(\overline{\Omega})\cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega)$, *удовлетворяющую в области* $\Omega$ *уравнению* (9)*, а на границе области* $\Omega$ *начальным условиям* (2) *и следующим граничным условиям:*

$$p\left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right|_{x=0}=q\left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right|_{x=1},\quad q\left.\frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^{k+j}}\right|_{x=0}=p\left.\frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^{k+j}}\right|_{x=1},\quad j=\overline{0,k-1},\ 0\le t\le T,\qquad (21)$$

*где* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ – *заданные функции, а* $p\,,q\in R$ – *заданные числа, причем* $p^2+q^2\neq 0$.

Здесь, сначала доказано, что спектральная задача с условиями

$$Mv\equiv(-1)^k v^{(2k)}(x)=\lambda v(x),\quad 0<x<1;\qquad (22)$$

$$pv^{(j)}(0)=qv^{(j)}(1),\, qv^{(k+j)}(0)=pv^{(k+j)}(1),\ j=\overline{0,k-1}\qquad (23)$$

при $p\neq q$ имеет счетное число положительных собственных значений, а соответствующие им собственные функции ортонормальны в $L_2(0,1)$.

В этом параграфе доказываются следующие леммы и теоремы:

**Лемма 3.** *Пусть* $g(x)\in C^{3k-1}[0,1]$, $g^{(3k)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *и* $pg^{(j)}(0)=qg^{(j)}(1)$, $qg^{(k+j)}(0)=pg^{(k+j)}(1)$, $pg^{(2k+j)}(0)=qg^{(2k+j)}(1)$, $j=\overline{0,k-1}$. *Тогда справедливо неравенство* (13)*, где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$ – *соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи* (22), (23), $g_n=\int\limits_0^1 g(x)v_n(x)dx$ – *коэффициенты Фурье функции* $g(x)$.

**Теорема 17.** *Пусть* $p\neq q$ *и функции* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 2, а функция* $f(x,t)$ *удовлетворяет этим условиям по аргументу* $x$ *равномерно по* $t$. *Тогда функция* (14)*, определяет единственное решение задачи 10, где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$ – *соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи* (22), (23)*, коэффициенты* $a_n$ *и* $b_n$ *определяются формулами* (15)*, а коэффициенты Фурье* $\varphi_{1n},\varphi_{2n}$ *и* $f_n(t)$ - *формулами* (16)

**Теорема 18.** *Пусть выполнены все условия теоремы 17. Тогда для решения задачи 10 справедлива оценка* (17).

В §2.4 в области $\Omega$ рассмотрим уравнение (9) и следующую задачу:

**Задача 11.** *Найти функцию* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2k-1,0}(\overline{\Omega})\cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega)$, *удовлетворяющую в области* $\Omega$ *уравнению* (9), *а на границе области* $\Omega$ *начальным условиям* (2) *и следующим граничным условиям:*

$$p\left.\frac{\partial^{2j}u}{\partial x^{2j}}\right|_{x=0}=q\left.\frac{\partial^{2j}u}{\partial x^{2j}}\right|_{x=1},\quad q\left.\frac{\partial^{2j+1}u}{\partial x^{2j+1}}\right|_{x=0}=p\left.\frac{\partial^{2j+1}u}{\partial x^{2j+1}}\right|_{x=1},\quad j=\overline{0,k-1},\ 0\le t\le T,\qquad(24)$$

*где* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *– заданные функции, а* $p$, $q\in R$ *– заданные числа, причем* $p^2+q^2\neq 0$.

Здесь сначала доказано, что спектральная задача с условиями

$$Mv\equiv(-1)^k v^{(2k)}(x)=\lambda v(x),\quad 0<x<1;\qquad(25)$$

$$pv^{(2j)}(0)=qv^{(2j)}(1),\ qv^{(2j+1)}(0)=pv^{(2j+1)}(1),\ j=\overline{0,k-1}\qquad(26)$$

при $p\neq q$ имеет счетное число положительных собственных значений, а соответствующие им собственные функции ортонормальны в $L_2(0,1)$.

В этом параграфе для доказательства существования, единственности и устойчивости решения задачи 11 используются следующие леммы и теоремы:

**Лемма 4.** *Пусть* $g(x)\in C^{3k-1}[0,1]$, $g^{(3k)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *и* $qg^{(j)}(0)=pg^{(j)}(1)$, *если* $j$ *– нечетное число и* $pg^{(j)}(0)=qg^{(j)}(1)$, *если* $j$ *– четное число,* $j=\overline{0,3k-1}$. *Тогда справедливо неравенство* (13), *где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$ *– соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи* (25), (26), *а* $g_n=\int_0^1 g(x)v_n(x)dx$ *– коэффициенты Фурье функции* $g(x)$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема:

**Теорема 19.** *Пусть* $p\neq q$ *и функции* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 4, а функция* $f(x,t)$ *удовлетворяет этим условиям по аргументу* $x$ *равномерно по* $t$. *Тогда функция* (14), *определяет решение задачи 11, где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$ *– соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи,* (25), (26), *коэффициенты* $a_n$ *и* $b_n$ *определяются формулами* (15), *а коэффициенты Фурье* $\varphi_{1n},\varphi_{2n}$ *и* $f_n(t)$ - *формулами* (16)

**Теорема 20.** *Пусть выполнены все условия теоремы 19. Тогда для решения задачи 11 справедлива оценка* (17).

Третья глава диссертации, названная **«Задачи для вырождающихся уравнений высокого четного порядка»**, состоит из двух параграфов и посвящена исследованию начально-граничных задач в области $\Omega$, представленной в главе III, для вырождающихся уравнений.

В параграфе 3.1 в области $\Omega$ рассмотрено следующее уравнение высокого четного порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t}+(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)=f(x,t), \qquad (27)$$

вырождающееся на границе области, где $\alpha,\ \gamma,\ k$ – заданные действительные числа, причем $0\le\alpha<1,\ 0\le\gamma<(1/2),\ k\in N$, а $f(x,t)$ – заданная функция.

**Задача 12.** *Найти функцию* $u(x,t)$, *обладающую следующими свойствами:*

1) $\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\in C(\bar\Omega),\quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\in C(\bar\Omega),\quad \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)\in C(\bar\Omega),\quad j=\overline{0,k-1};$

$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)\in C(\Omega);\ t^{2\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}\in C(\bar\Omega),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t}\in C(\Omega);$

2) *в области* $\Omega$ *удовлетворяет уравнению* (27);

3) *на границе области* $\Omega$ *удовлетворяет начальным условиям* (2) *и краевым условиям* (10), *где* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ – *заданные функции.*

Здесь сначала исследована спектральная задача:

$$Mv\equiv(-1)^k\left[x^\alpha v^{(k)}(x)\right]^{(k)}=\lambda v(x),\quad 0<x<1; \qquad (28)$$

$$v^{(j)}(0)=0,\quad v^{(k+j)}(1)=0,\ j=\overline{0,k-1} \qquad (29)$$

и доказано, что она имеет счетное число положительных собственных значений, а соответствующие им собственные функции ортонормальны в $L_2(0,1)$.

Установлено, что справедлива следующая лемма:

**Лемма 5.** *Пусть функция* $g(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:* $x^{\alpha/2}\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(2k-1)}\in C[0,1]$, $x^{\alpha/2}\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(2k)}\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$, $g^{(l)}(0)=0$, $g^{(k+l)}(1)=0$, $g^{(2k+l)}(0)=0$, $\quad l=\overline{0,k-1}$. *Тогда справедливо неравенство* $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3 g_n^2\le\int_0^t x^\alpha\left[\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(2k)}\right]^2 dx$, *где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$ – *соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи* (28), (29), *а* $g_n=\int_0^1 g(x)v_n(x)dx$ – *коэффициенты Фурье функции* $g(x)$.

Доказана справедливость следующих теорем:

**Теорема 21.** *Пусть функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют леммы 5 и а функция* $f(x,t)$ *удовлетворяет этим условиям по аргументу* $x$ *равномерно по* $t$. *Тогда функция* (14), *определяет единственное решение задачи 12, где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$ *–соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи* (28), (29), *коэффициенты* $a_n$ *и* $b_n$ *определяются формулами* (15), *а коэффициенты Фурье* $\varphi_{1n},\varphi_{2n}$ *и* $f_n(t)$ - *формулами* (16).

**Теорема 22.** *Пусть функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *и* $f(x,t)$ *удовлетворяют условиям теоремы 21. Тогда для решения задачи 12 справедлива оценка* (17).

В параграфе 3.2 в области $\Omega$ рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t}+(-1)^k x^m \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)=f(x,t), \tag{30}$$

где $m$, $\alpha$, $k$ – заданные действительные числа, причем $0\le\gamma<(1/2)$, $0\le m<1$, $0\le\alpha<1$, $k\in N$; $f(x,t)$ – заданная функция, и исследована следующая задача.

**Задача 13.** *Найти функцию* $u(x,t)$, *обладающую следующими свойствами:*

1) $\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\in C(\overline{\Omega})$, $\quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\in C(\Omega)$, $\quad \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)\in C(\overline{\Omega})$, $\quad j=\overline{0,k-1}$;

$x^m \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)\in C(\Omega)$; $\quad t^{2\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}\in C(\overline{\Omega})$, $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t}\in C(\Omega)$;

2) *в области* $\Omega$ *удовлетворяет уравнению* (30);

3) *удовлетворяет начальным условиям* (2) *и граничным условиям* (10), *где* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *– заданные функции.*

Здесь сначала исследована спектральная задача:

$$Mv\equiv(-1)^k\left(x^\alpha v^{(k)}(x)\right)^{(k)}=\lambda x^{-m}v(x),\quad 0<x<1; \tag{31}$$

$$v^{(j)}(0)=0,\quad v^{(k+j)}(1)=0,\quad j=\overline{0,k-1}. \tag{32}$$

Доказано, что она имеет счетное число положительных собственных значений, а соответствующие им собственные функции ортонормальны в $L_2(0,1)$.

При доказательстве существования, единственности и устойчивости решения задачи 13 используется следующая лемма:

**Лемма 6.** *Пусть функция* $g(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:* $x^{\frac{\alpha}{2}}\left[x^m\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(k)}\right]^{(k-1)}\in C[0,1]$, $x^{\alpha/2}\left[x^m\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(k)}\right]^{(k)}\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$, $g^{(l)}(0)=0$, $\quad g^{(k+l)}(1)=0$, $\quad g^{(2k+l)}(0)=0$, $\quad l=\overline{0,k-1}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3 g_n^2\le\int_0^t x^\alpha\left[\left\{x^m\left[x^\alpha g(x)\right]^{(k)}\right\}^{(k)}\right]^2 dx,$$

*где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n\in N$ *– соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи* (31),(32); $g_n=\int_0^1 x^{-m}g(x)v_n(x)dx$.

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы.

**Теорема 23.** *Пусть функции* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 6, а функция* $f(x,t)$ *удовлетворяет этим условиям по аргументу* $x$ *равномерно по* $t$. *Тогда сумма ряда* (14)*, определяет единственное решение задачи 13, где* $\lambda_n$ *и* $v_n(x)$, $n \in N$ *– соответственно собственные значения и собственные функции спектральной задачи* (31),(32)*, коэффициенты* $a_n$ *и* $b_n$ *определяются формулами* (15)*; а коэффициенты* $\varphi_{1n}, \varphi_{2n}$ *и* $f_n(t)$ *- формулами*

$$\varphi_{1n} = \int_0^1 x^{-m}\varphi_1(x)v_n(x)dx, \varphi_{2n} = \int_0^1 x^{-m}\varphi_2(x)v_n(x)dx,\ f_n(t) = \int_0^1 x^{-m} f(x,t)v_n(x)dx.$$

**Теорема 24.** *Пусть функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *и* $f(x,t)$ *удовлетворяют условиям теоремы 23. Тогда для решения задачи 13 справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_{2,m}(0,1)} \le C_3\left[\|\varphi_1(x)\|^2_{L_{2,m}(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|^2_{L_{2,m}(0,1)} + \|f(x,t)\|^2_{L_{2,m}(\Omega)}\right],$$

где $C_3 = const > 0$, $\|g(x)\|_{L_{2,m}(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 x^{-m} g^2(x)dx}$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена постановке и исследованию начально-граничных и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка в прямоугольной области.

В первой главе исследованы задачи для уравнений четвертого порядка, во второй главе - для уравнений высокого четного порядка с сингулярным коэффициентом, а в третьей главе для вырождающихся уравнений высокого четного порядка с сингулярным коэффициентом.

Результаты исследования заключаются в следующем:

исследованы обратные задачи для модельных уравнений и для уравнения с сингулярным коэффициентом четвертого порядка с неизвестной правой частью, доказаны существование и единственность решения этих задач;

доказаны существование и единственность решения начально-граничных задач для нагруженных модельных уравнений четвертого порядка;

доказаны существование и единственность решения начально-граничной задачи для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом;

исследованы локальные и нелокальные начально-граничные задачи для уравнений высокого четного порядка и получены условия, обеспечивающие единственность, существование и устойчивость решения этих задач;

исследованы начально-граничные задачи для вырождающихся уравнений высокого четного порядка и доказаны единственность, существование и устойчивость решения этих задач.

Для доказательства единственности решения исследуемых задач использовались спектральный метод и метод интегралов энергии, для доказательства существования решения – метод Фурье, метод функций Грина, теория интегральных уравнений. Все задачи, изученные в диссертации, являются новыми и могут быть использованы для дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений в частных производных.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 FERGANA STATE UNIVERSITY**

**FERGANA STATE UNIVERSITY**

**AZIZOV MUZAFFAR SULAYMONOVICH**

# PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGH EVEN ORDER WITH DEGENERATION AND SINGULAR COEFFICIENT

**01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics**

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**Fergana – 2023**

**The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number №B 2023.1.PhD/FM835.**

Dissertation has been prepared at Fergana State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.fdu.uz ) and the "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

| | |
|---|---|
| **Scientific supervisors:** | **Urinov Akhmadjon Kushakovich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor |
| **Official opponents:** | **Kadirkulov Bakhtiyor Jalilovich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor |
| | **Irgashev Bakhrom Yusupkhanovich**<br>Candidate of Physical and Mathematical Sciences |
| **Leading organization:** | **Termez State University** |

Defense will take place « 16 » 11 2023 at 9$^{30}$ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University. (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-02, fax: (+99873)244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Fergana State University (is registered № 310 ). (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-94.

Abstract of dissertation sent out on « 7 » 11 2023 year.
(Mailing report № 3 on « 7 » 11 2023 year).

**Sh.T.Karimov**
Deputy chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Dotsent

**I.U.Khaydarov**
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S., Dotsent

E. K. **E.T.Karimov**
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Dotsent

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of the research** is the formulation and study of initial-boundary and inverse problems on the plane for high even order partial differential equations, as well as the development of methods for studying the formulated problems.

**The object of the research work is** the fourth and high even order partial differential equations with two independent variables.

**The scientific novelty of the research consists of the following:**

the unique solvability of direct and inverse problems for a fourth-order equation with a singular coefficient has been established;

conditions are determined that ensure the unique solvability of initial-boundary problems for a model loaded fourth-order equation;

the applicability of the Fourier method for proving the correctness of local and nonlocal initial-boundary problems for equations of high even order with a singular coefficient is substantiated;

the uniqueness, existence and stability theorems for a local initial-boundary problem for degenerate equations of high even order with a singular coefficient were proved;

a method for studying spectral problems for ordinary differential equations of high even order is proposed.

**Implementation of the research results.** The results of the study of the problems for partial differential equations of high even order with degeneration and a singular coefficient, have been used in the following foreign scientific projects:

The results on the existence, uniqueness and stability of the solution of initial-boundary problems for partial differential equations of high even order were used in scientific research on project No. AP09259394 "Inverse problems for evolutionary equations with positive operators" (reference No. 01-06/91 dated 16.06. 2023 Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan). The application of these results made it possible to study inverse problems for partial differential equations of fractional order.

The results on initial-boundary problems for loaded equations were used in research work within the framework of the topic "Boundary value problems and control problems for basic and mixed types of equations and their application to the study of systems with distributed parameters" (No. NIOKTR122041800029-5, 2022- 2024 Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences Reference No. 01-13/42 dated 06/20/2023). These results allowed solving boundary value problems for loaded hyperbolic and hyperbolic-parabolic equations and control problems for loaded hyperbolic equations.

The method applied in the study of spectral problems was used in a foreign project on the topic “Bisingular problems and their applications” (reference No. 803 dated 06/20/2023 Osh State University). The application of this method made it possible to prove the existence of eigenvalues and eigen-functions of some nonlocal generalized spectral problems for high-order ordinary differential equations.

**E’lon qilingan ishlar ro‘yxati**
**Список опубликованных работ**
**List of published works**

**I bo‘lim (I часть; part I)**

1. Уринов А.К., Азизов М.С. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике // Научный Вестник НамГУ. 2019. № 11. –С. 26-37. (01.00.00; №14)
2. Azizov M.S. A Boundary problem for the fourth order equation with a singular coefficient in a rectangular region // Lobachevskii journal of mathematics. 2020. Vol. 41. №6. pp. 1043-1050. (3. Journal IF: 1.1)
3. Азизов М.С. Смешанная задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике // Бюллетень Института математики. 2020. Т. 3. №4. –С. 50-59. (01.00.00; №17)
4. Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary problem for the loaded partial differential equations of fourth order // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 3. pp. 621-631. (3. Journal IF: 1.4)
5. Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 3. pp. 632-640. (3. Journal IF: 1.4)
6. Азизов М.С. Обратная задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом // Бюллетень Института математики. 2021. Т. 4. №4. –С. 51-60. (01.00.00; №17)
7. Азизов М.С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Бюллетень Института математики 2022. Vol. 5. № 1. –С.14-24. (01.00.00; №17)
8. Азизов М.С. О разрешимости нелокальной начально-граничной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя // Научный вестник. Scientific bulletin. Physical and Mathematical Research. 2022. №1. pp. 95-103. (01.00.00; №13)
9. Уринов А.К., Азизов М.С. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. вып. 2. –С. 240-255. (3. Journal IF: 1.0)
10. Уринов А.К., Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. –С. 273-292. (3. Journal IF 1.1)
11. Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике // Научный вестник НамГУ. 2022. № 10. –С. 3-11. (01.00.00; №14)

12. Азизов М.С. Об одной нелокальной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике // Бюллетень Института математики. 2022. Т. 5. №5. –С. 112-133. (01.00.00; №17)
13. Уринов А.К., Азизов М.С. О разрешимости начально-граничной задачи для уравнения высокого чётного порядка, вырождающегося на границе области // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26. № 2. –С. 155–170. (3. Journal IF: 0.8)

**II bo'lim (II часть; part II)**

1. Азизов М.С. Об одной задаче для вырождающегося уравнения четвертого порядка // Тезисы докладов Международной научной конференции на тему «Актуальные проблемы прикладной математики». 22-26-май 2018 г. – Нальчик. Россия. 2018. –С. 30.
2. Азизов М.С. Кравая задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области // Тезисы докладов Международной научной конференции на тему «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» 4-7 декабрь 2018 г. Нальчик, Россия 2018. –С.23.
3. Уринов А.К., Азизов М.С. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике // «Управление, оптимизация и динамические системы –CODS – 2019». Республиканская научная конференция с участием зарубежным ученых. 17-19 октябрь 2019 г. – Андижан. 2019. –С. 105.
4. Azizov M.S. Inverse problem for the fourth order nonhomogeneous equation // Abstracts of the international online conference "Frontier in mathematics and computer science". 12-15 October. 2020 y. –Tashkent. Uzbekistan. 2020. p. 28.
5. Уринов А.К., Азизов М.С. Задачи для одного уравнения в частных производных четвертого порядка с неизвестной правой частью // "Matematikaning zamonaviy masalalari: muammolar va yechimlar" mavzusidagi respublika miqyosidagi ilmiy onlayn konferensiya materiallari. 21-23 oktabr 2020 y. –Termiz. O'zbekiston. 2020. 78-81 b.
6. Уринов А.К., Азизов М.С. Об одной краевой задаче для нагруженных дифференциалных уравнений четвертого порядка с частными производными // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» 17-18 ноября 2020 г. –Ташкент. Узбекистан. 2020. –С. 286-289 г.
7. Азизов М.С. О единственности одной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом // Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики». 12-15 сентября 2021 г. – Стерлитамак. Россия. 2021. –С. 105-110.

8. Уринов А.К., Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Сборник материалов международной конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы». 25-29 октября 2021 г. Белгород. Россия. 2021. –С. 241-242.
9. Azizov M.S. About a initial-boundary value problem for a higher even order partial differential equation with Bessel’s operator // “Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021” dedicated to the 100th anniversary of the academician Vasil Kabulovich Kabulov 15-17 November. 2021 y. Fergana. Uzbekistan. 2021. p. 110.
10. Urinov A.K., Azizov M.S. On an initial-boundary problem for degenerate partial differential equation of higher even order // “Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021” dedicated to the 100th anniversary of the academician Vasil Kabulovich Kabulov 15-17 November. 2021 y. Fergana. Uzbekistan. 2021. p. 283.
11. Азизов М.С. Обратная краевая задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом // Материалы VI Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». 5-9 декабрь 2021 г. – Нальчик. Кабардино-Балкарская Республика. Россия. 2021. –С. 24.
12. Азизов М.С. Начально-граничная задача для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя // Тезисы докладов научной конференции «Новые теоремы молодых математиков – 2022». 13-14 мая 2022 г. –Наманган. Узбекистан. 2022. –С.147-148.
13. Уринов А.К., Азизов М.С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике // Научный вестник ФерГУ. 2022. №2. –С. 207-224.
14. Уринов А.К., Азизов М.С. Об одной начально-граничной задаче для вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // Материалы международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». 6-8 октября 2022 г. –Ташкент. Узбекистан. 2022. –С. 186-187.
15. Азизов М.С. Об одной нелокальной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы алгебры и анализа». 18-19 ноября 2022 г. –Термез. Узбекистан. 2022. –С. 85-86.

Avtoreferat Farg‘ona davlat universiteti «FarDU. Ilmiy xabarlar – Научный вестник. ФерГУ» ilmiy – metodik jurnal tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

FDU “Nusxa ko‘paytirish bo‘limi”da
chop etildi. 2023 yil.
Nashriyot bosma tabog‘i – 3.
Shartli bosma tabog‘i – 1, 5. Bichimi 84x108 1/16.
Adadi 100.
Manzil: 150100, Farg‘ona shahri, Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.