

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI

ESHMAMATOVA DILFUZA BAXROMOVNA

**EPIDEMIOLOGIYA VA EKOLOGIYANING DISKRET MODELLARI:
MATEMATIK VA KOMPYUTERLI TADQIQOT**

**05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

Toshkent - 2023

**Fizika-matematika fanlari doktori (DSc)
dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора (DSc)
по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of the doctor
of physical and mathematical sciences (DSc)**

Eshmamatova Dilfuza Bahromovna

Epidemiologiya va ekologiyaning diskret modellari: matematik va kompyuterli tadqiqot 3

Эшмаматова Дилфуза Бахромовна

Дискретные модели эпидемиологии, экологии: математическое и компьютерное исследование 31

Eshmamatova Dilfuza Bahromovna

Discrete models of epidemiology, ecology:
mathematical and computer research..... 63

E'lon qilingan ishlar ro'yhati

Список опубликованных работ

List of published works 68

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI

ESHMAMATOVA DILFUZA BAXROMOVNA

**EPIDEMIOLOGIYA VA EKOLOGIYANING DISKRET MODELLARI:
MATEMATIK VA KOMPYUTERLI TADQIQOT**

**05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

Toshkent - 2023

Fan doktori (DSc) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.3.DSc/FM231 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Toshkent davlat transport universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) va «Ziyonet» axborot-ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:

G‘anixo‘jaev Rasul Nabievich

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Temirbekov Nurlan Muxanovich

fizika-matematika fanlari doktori, professor,
akademik (Qozog‘iston)

Jamilov Uyg‘un Umirovich

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Sadullaeva Shaxlo Azimbaevna

fizika-matematika fanlari doktori, dotsent

Yetakchi tashkilot:

Samarqand davlat universiteti

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi Dsc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil «___» _____ soat ___ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (99871) 246-02-24.

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil «___» _____ kuni tarqatildi.

(2023 yil «___» _____ dagi _____ - raqamli reestr bayonnomasi).

M.Aripov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash raisi, f.-m.f.d, professor

Z.R. Raxmonov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.

A.S.Matyakubov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash huzuridagi Ilmiy seminar
raisi, f.-m.f.d.

KIRISH (fan doktori dissertatsiyasi annotatsiyasi (DSc))

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida chiziqli bo‘lmagan dinamikada turli xil tuzilma va jarayonlarni tavsiflash usullariga, ularning vaqt va makonda evolyusiyasiga, shuningdek murakkab tuzilmalar ishtirok etadigan jarayonlarga katta e’tibor qaratilmoqda. Bularning barchasi amaliy jihatdan ko‘plab ilmiy tadqiqotlarning asosini tashkil etadi. Buning natijasida bu kabi amaliy yondashish kvadratik akslantirishlarning dinamik xususiyatlarini o‘rganishga olib keladi. Zamonaviy matematikaning rivojlangan sohasi sifatida qo‘llanilib kelinayotgan ushbu akslantirishlar matematik analiz, differensial tenglamalar, ehtimolliklar va graflar nazariyasi bilan chambarchas bog‘liq bo‘lib, bular asosida matematik modellar qurish, hamda ularni sonli yechish usullarini takomillashtirish esa muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda dunyoda epidemiologik va ekologik jarayonlarni matematik modellashtirish fan, iqtisodiyot va texnikaning rivojida muhim ahamiyatga ega ekanligi sir emas. Bunda kvadratik akslantirishlar orasida Lotka-Volterra diskret akslantirishi alohida o‘rin tutadi. Bu akslantirishlarni tadqiq qilishning dolzarbligi, aerosol yo‘li orqali yuqadigan yuqumli kasalliklarning tarqalish jarayoni, shu bilan birga ekosistemada biogenlarning aylanish siklini modellashtirish uchun qo‘llanilishi bilan izohlanadi. Bugungi kunda yuqumli kasalliklarning sezilarli darajada kamayishiga erishildi, ammo, shunga qaramay, bu jarayon inson salomatligi va har qanday mamlakat iqtisodiyotiga katta zarar yetkazishda davom etmoqda. Bu turdagi amaliy masalalarni yechishda Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalarining to‘liq xususiyatlarini ochish, ya’ni ularning qo‘zg‘almas nuqtalarini aniqlash, bu nuqtalarning lokal va global xossalari tahlil qilish, ichki nuqta traektoriyalarining asimptotik xatti-harakatlarini ochish, graflar nazariyasi elementlarini qo‘llash orqali bu akslantirishlar kompozitsiyasining traektoriyalari dinamikasini tahlil qilish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqiga ega bo‘lgan dinamik sistemalar, ularni tabiiy va amaliy masalalarini sonli-analitik yechish usullarini ishlab chiqish kabi dolzarb yo‘nalishlarga katta e’tibor qaratilmoqda. Bu esa matematiklar va boshqa soha olimlari o‘rtasida yaqin va o‘zaro uzviy aloqalarni o‘rnatishga asos bo‘lmoqda. Bunda texnik va iqtisodiy sohalarda qo‘shma jamoalar barqaror ishlab kelmoqda, lekin biologiya, epidemiologiya va ayniqsa ekologiyada bu jarayon hali boshlang‘ich bosqichda. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish O‘zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi¹. Qaror ijrosini ta’minlashning ustuvor maqsadlaridan biri – epidemiologik va ekologik muammolarni yechishda diskret dinamik sistemalar nazariyasini rivojlantirishdir.

¹ O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi PQ-4708-son qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida” gi farmoni, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori, 2019-yil 8-oktabrdagi PF-5847-son “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi farmoni, 2019-yil 27-apreldagi PQ-3682-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori va 2021-yil 1-apreldagi PF-6198-son “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo‘yicha davlat boshqaruvi tizimini takomillashtirish to‘g‘risida”gi farmonlari, hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlantirishning IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi¹.

Kvadratik akslantirishlar, uzluksiz va diskret dinamik sistemalar, ularning tadbiqlari bilan bog‘liq ilmiy izlanishlar jahonning yetakchi oliy ta’lim muassasalari va ilmiy markazlari, jumladan, University of California (AQSH), Universidad de Santiago de Compostela (Ispaniya), Institute for Calculus Applications (Italiya), University of Oxford (Buyuk Britaniya), Mathematisches Institut, RWTH Aachen University (Germaniya), Universidad Carlos III de Madrid (Ispaniya), Southern University at New Orleans, National Taiwan Normal University (Tayvan), Zhongshan University, Jilin University, Southeast University, Nantong University, Central South University (Kitay), Paris Mathematics Center, Université Paris-Dauphine (Fransiya), Moskova davlat universiteti (Rossiya), Qozoq milliy universiteti (Qozog‘iston), O‘zbekiston Milliy Universiteti (O‘zbekiston), Samarkand davlat universiteti (O‘zbekiston), O‘zFA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti (O‘zbekiston)da olib borilmoqda.

Uzluksiz va diskret dinamik sistemalar yordamida tavsiflanadigan matematik biologiya va populyatsion genetika jarayonlari dinamikasini tadqiq etishga oid jahonda olib borilgan tadqiqotlar natijasida qator ilmiy natijalar olingan bo‘lib, bular jumlasiga, akkresion operatorlar va ularning tadbiqlari uchun variatsion qo‘shimchalar tizimi va iteratsion usullar ishlab chiqilgan (Institute for Calculus

¹ Dissertatsiya mavzusiga doir xorijiy ilmiy tadqiqotlar tahlili quyidagi manbalarga asosan bajarilgan: Universal Journal of Computational Mathematics, International Mathematical Journals: Nonlinear Analysis, Applied Mathematical Modelling, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Математическая биология и биоинформатика, Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, Компьютерные исследования и моделирование, Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. <http://www.springer.com/mathematics>; <https://www.aimsciences.org>; <http://www.sciencedirect.com/science/jrnallbooks/sub/mathematics>;

Applications); biseksual populyatsiyaga mos turli xil turlarga bo'lingan urg'ochilar to'plami va faqat bitta turga ega erkaklar populyatsiyasini aniqlovchi evolyusion algebra taklif qilingan (Universidad de Santiago de Compostela, O'zFA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti); avtonom differensial tenglamalar sistemasi yordamida *SIR*, *SEIR* modellari qurilgan, chiziqli va chiziqli bo'lmagan Lyapunov funksiyalaridan foydalangan holda, mos ravishda kasalliksiz va endemik muvozanat holatlari uchun global barqarorlik shartlari o'rnatilgan (Southern University at New Orleans, National Taiwan Normal University, Zhongshan University, Jilin University, Southeast University, Nantong University, Central South University); biseksual populyatsiya uchun to'rt parametrli kvadratik stoxastik Volterra operatorlari oilasi (ya'ni populyatsiyaning har bir organizmi ayol yoki erkak jinsiga tegishli bo'lishi kerak) kiritilgan va parametrlar qanday bo'lishidan qat'i nazar, har bir bunday operator kamida ikkita qo'zg'almas nuqtaga ega ekanligi isbotlangan. Bundan tashqari, ma'lum sharoitlarda, parametrlarga ko'ra, operator cheksiz ko'p qo'zg'almas nuqtalarga egaligi isbotlangan (University of California, O'zFA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti); *SIR*, *SEIR* epidemik modellarining stoxastik chetlanishlari ishlab chiqilib, stoxastik Lyapunov funksiyalaridan foydalangan holda, uzoq vaqt davomida ikkita stoxastik tizimning xatti-harakatlarini kasallik tarqalishi dinamikasi bazali reproduktiv songa muvofiq o'rganilgan (University of Oxford, Mathematisches Institut, RWTH Aachen University, Universidad Carlos III de Madrid Paris Mathematics Center, Université Paris-Dauphine, Moskva davlat universiteti, Kozoq milliy universiteti).

Dunyoda epidemiologik jarayonlar dinamikasini uzluksiz modellarini sonli modellashtirish bo'yicha qator ustuvor yo'nalishlarda ilmiy tadqiqot ishlari olib borilmoqda, jumladan, infeksiyalarning tarqalishini oddiy differensial tenglamalar sistemalarini yordamida tadqiqot qilish; ularda turg'un holatlarini aniqlash; Lyapunov funksiyalarini qurish; bu usullarga alternativ bo'lgan aholi sonining tebranish dinamikasini tartibga solish orqali ehtimoliy panjarasimon taqsimotlar va avtomatlar usuli bilan o'rganish; bu turdagi modellar orqali tadqiqot o'tkazishdan asosiy maqsad bazali reproduktiv sonni topishdan iborat.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Matematika uchun amaliy muammolarni hal qilish asosida yangi yo'nalishlarni shakllantirish xarakterlidir. Xususan, klassik tahlillar fizika, mexanika va geometriya masalalarini tadqiq qilish va yechish asosida paydo bo'ldi. Biroq, aniq muammolarni hal qilish jarayonida matematikaning ko'lam kengligi hech kimga sir emas. Hozirgi kunda kimyo, texnologiya, muhandislik, tabiatshunoslik, iqtisodiyot, biologiya, ekologiya, epidemiologiya va populyatsion genetikasining aksariyat masalalari matematik va funksional analiz usullari, hamda graflar nazariyasi ob'ektlaridan foydalanilgan holda tadqiq qilinadi. Bunday muammolarni hal qilishda o'rganilayotgan jarayonlarning diskretligini e'tiborga olish lozim va bu juda muhim o'ringa ega. Fizika, mexanika va boshqa fanlar doirasida klassik tahlil masalalarini shakllantirishga olib keladigan muammolarning aksariyatida uzluksiz modellarni qo'llash maqsadga muvofiqdir. Bu tushunarli albatta, chunki bunda matematik

tadqiqot ob'ekti uzluksiz jarayon, traektoriyalar, maydonlar va boshqalar. Biologiyada esa, bunda o'rganilayotgan ob'ektlarning tizimliliği bilan tavsiflanadi.

Differensial tenglamalarning sifat nazariyasidan kelib chiqqan uzluksiz dinamik sistemalarning asoschilari – A. Puankare, J. Birkhoff, A. Andronov, A.N. Kolmogorov va boshqalardir. Uzluksiz dinamik sistemalar asosan differensial tenglamalar yechimlari hatti–harakatining topologik xususiyatlarini ko'pxilliklarda o'rganadi. So'nggi yillarda dinamik tizimlar nazariyasi ko'plab yo'nalishlarda jadal rivojlanmoqda. Shu munosabat bilan biz chiroyli matematik ob'ektlar – Mandelbrot va Julia to'plamlariga e'tibor bersak, ular deyarli oxirgi o'n yilda rivojlana boshladi va bu ob'ektlar bilan bog'liq tadqiqotlarning aksariyati kvadratik funksiyalarning iteratsiyalariga qaratilgan. So'nggi ikki asr davomida ko'pgina matematiklar populyatsion genetik masalalarini tadqiq qilish bilan shug'ullanishmoqda. Ushbu masalalarni tadqiq qilishda chekli o'lchamli simpleksda aniqlangan kvadratik akslantirishlar asosiy o'rin egallashi tabiiy albatta. Dastlab genetik sistemalarning eng sodda modellariga Tomas Robert Maltus (1766-1834) va Per Fransua Ferxyulst (1804-1849)lar asos solishgan. O'zaro ta'sir etuvchi populyatsiya jarayonlari va ularning matematik modellarini tadqiq qilish bilan bog'liq tadqiqotlarning tarixiga nazar solsak – bu o'tgan asrning 20-yillari o'rtalarida Alfred Lotka va Vito Volterralar tomonidan taklif qilingan ikkita chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalar sistemasi ekanligi hech kimga sir emas. Shu bilan birga G.X.Xardi, Yu.I.Lyubich, G.Kesten, S.N.Bernshteyn, E.Fermi, J.Pasta, S.Ulam, G.F.Gauze, A.A. Lyapunov, A.N. Kolmogorov, Yu.M. Svirejev, D.S. Chernavskiy, Yu.M. Romanovskiy, N.V. Stepanov, G.R. Ivaniskiy, V.I. Krinskiy va hokazolarning matematik biologiyaning rivojlanishiga qo'shgan xissalarini alohida ta'kidlash maqsadga muvofiqdir.

Dastlab O'zbekistonda dinamik sistemalarni tadqiq qilishda ehtimolliklar usullarini qo'llashga akademik T.A.Sarimsakov asos soldi. Uning tashabbusi bilan Toshkent matematiklar maktabi diskret dinamik sistemalarni batafsil o'rganishga kirishdi. Graflar nazariyasi va differensial tenglamalarning sifat nazariyasidan qo'llagan holda kvadratik stoxastik Lotka-Volterra operatorlari nazariyasining rivojlanishi R.N.G'anixo'jaev ishlari bilan bog'liq. Ushbu nazariya kvadratik akslantirishlar traektoriyalari harakatlarini o'rganishga asoslangan. Chekli o'lchamli simpleksda aniqlangan kubik stoxastik operatorlar asosan N.N.G'anixodjaev, U.A.Rozikov, F.A.Muxammedov, U.U.Jamilov, M.Ladra, A.Yu.Xamraev, F.A.Shahidi, M.Saburovlarning ilmiy ishlarida o'z aksini topgan. K.A.Kurganovning ilmiy natijalari umumiy holda bo'lgan kososimmetrik matritsaga ega Lotka-Volterra dinamik sistemalarining qo'zg'almas nuqtalari tasnifi, hamda to'rt o'lchamli simpleksda aniqlangan Lotka-Volterra akslantirishlarning ergodik hossalarni o'rganishga bag'ishlangan. Lekin shunga qaramay Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalari va ularning kompozitsiyalarini aniq epidemiologik va ekologik jarayonlarga qo'llash bilan bog'liq masalalar hozirgi kungacha ochiq qolmoqda.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti

Toshkent davlat transport universitetining ilmiy tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq, 28/2022-sonli “Real seysmik ta’sirlarda temir yo‘l ko‘priklari elementlarining nohiziqli o‘zaro ta’sirini hisobga olib hisoblash dasturlari kompleksini yaratish” (2022-2023) mavzusidagi ilmiy tadqiqot loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi havo-tomchi yo‘li va jinsiy yo‘l orqali yuqadigan kasalliklar tarqalishi hamda ekosistemada biogenlar aylanishining diskret modellarini qurish va ularning sonli-analitik yechish usullarini ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqot vazifalari:

aynigan kososimmetrik matritsaga ega Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalarning musbat va manfiy traektoriyalar limit nuqtalari to‘plamlarining mavjudlik shartlarini topish;

havo-tomchi yo‘li orqali tarqaluvchi kasalliklarning diskret modellarini qurish; bu jarayonlar uchun modelning musbat (kasallikning boshlanishi) va manfiy traektoriyalari (kasallikning tugashi)ning limit nuqtalari to‘plamini aniqlash;

ikki o‘lchamli simpleksda aniqlangan Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalari kompozitsiyalari asimptotik xarakterining dinamikasini tahlil qilish va ular asosida jinsiy yo‘l orqali yuqadigan virusli kasalliklarni tarqalish jarayonining diskret modellarini qurish; populyatsiyaning infeksiyalangan qismining basseyini aniqlash;

S^{m-1} da aniqlangan bir jinsli turnirlarga mos Lotka-Volterra akslantirishlarining toq sondagi noldan farqli koordinatali qo‘zg‘almas nuqtalarining mavjudlik mezonlarini topish va qo‘zg‘almas nuqtalar kartasini qurish;

simpleksning uchlaridan tashqari, kuchli yoqlarga tegishli boshqa qo‘zg‘almas nuqtalarini topish algoritmini tuzish va uchlari shu qo‘zg‘almas nuqtalarda bo‘lgan invariant egri chiziqlar va invariant sirt mavjudligini isbotlash; olingan analitik natijalar asosida biogenlarning ekosistemada aylanish siklini ifodalovchi diskret modellar qurish;

har bir qurilgan diskret modellarning polinomial tenglamalarining turg‘un va turg‘un bo‘lmagan yechimlarini topish algoritmini tuzish; modellarning amaliy dasturlar majmuini tuzish; sonli taxlil qilish va buning natijasida fazali portretlarini vizualizatsiya qilish; olingan natijalarni real jarayonlarda tekshirish.

Tadqiqotning ob’ekti – aynigan Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalari bilan ifodalanuvchi havo-tomchi va jinsiy yo‘l orqali yuqadigan yuqumli kasalliklarning tarqalish jarayoni, to‘rt o‘lchamli simpleksda aniqlangan bir jinsli Lotka-Volterra akslantirishlari yordamida tavsiflanuvchi uglerod va fosforlarning ekosistemada aylanish siklidan iborat.

Tadqiqotning predmeti – simpleksning kvadratik avtomorfizmlari, aynigan va aynimagan kososimmetrik matritsaga ega Lotka-Volterra akslantirishlari va ularning kompozitsiyalari. Havo-tomchi va jinsiy yo‘l orqali yuqadigan yuqumli kasalliklarning tarqalish jarayoni, hamda to‘rt o‘lchamli simpleksda aniqlangan bir jinsli Lotka-Volterra akslantirishlari yordamida tavsiflanuvchi uglerod va fosforning

ekosistemada aylanish siklining diskret modellarini ishlab chiqish, analitik va sonli yechimlarini topish, fazali portretini qurishdan iborat.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiya ishida funksional va matematik analiz, umumiy algebra, topologiya va dinamik sistemalar nazariyasi, graflar nazariyasi, polinomial tenglamalarini hisoblash usullari, iteratsiya usullari qo'llanilgan. Dasturiy majmualarni tuzishda Python 3.10.0, Delphi 10 Lite programmalashtirish tillarida va Wolfram Mathematica 10 tizimidan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

aynigan kososimmetrik matritsaga ega Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalarining musbat va manfiy traektoriyalar limit nuqtalari to'plamlarini mavjudlik shartlari Lyapunov funksiyalarini qurish orqali topilgan;

havo-tomchi yo'li orqali yuqadigan virusli kasalliklar tarqalishining diskret kompartmentar *SIR*, *SEIR*, *SEIRS*, *SIRD* modellari Lotka-Volterra operatorlari asosida qurilgan;

ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalar kompozitsiyalari asimptotik harakatining dinamikasi aniqlangan;

jinsiy yo'l orqali yuqadigan virusli kasalliklar tarqalish jarayonining diskret modellari ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalar kompozitsiyalari yordamida qurilgan;

retsidiv va retsidiv bo'lmagan kasalliklar bilan zararlangan populyatsiyaning infeksiyalangan qismini basseynlari Lotka-Volterra akslantirishlari yordamida aniqlangan;

S^{m-1} simpleksda aniqlangan bir jinsli turnirlarga mos Lotka-Volterra akslantirishlarini noldan farqli toq koordinatali qo'zg'almas nuqtalarining mavjudligi topilgan;

simpleksning uchlaridan tashqari, kuchli yoqlarga tegishli qo'zg'almas nuqtalarni topish algoritmlari qurilgan, uchlari shu qo'zg'almas nuqtalarda bo'lgan invariant egri chiziqlar va invariant sirt mavjudligi isbotlangan hamda olingan analitik natijalar asosida ekosistemada uglerod va fosforning aylanish sikli uchun diskret modellar qurilgan;

havo-tomchi va jinsiy yo'l orqali yuqadigan virusli kasalliklarning tarqalish jarayoni hamda ekosistemada uglerod va fosforning aylanish sikli jarayoni diskret modellari uchun polinomial tenglamalarning turg'un va turg'un bo'lmagan yechimlari to'rt o'lchamli simpleksda aniqlangan bir jinsli turnirlarga mos Lotka-Volterra akslantirishlari yordamida topilgan;

virusli kasalliklar tarqalishi va ekosistemada biogenlarni aylanish siklining diskret modellari uchun sonli yechish algoritmlari qurilgan hamda amaliy dasturlar majmui yaratilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

olingan tadqiqot natijalari va dissertatsiya ishida olingan analitik usullar populyatsion genetika, epidemiologiyada qo'llanilgan;

qurilgan diskret modellar havo-tomchi (COVID-19 va sil kasalliga) va jinsiy yo'l orqali yuqadigan (OIV/OITS) virusli kasalliklarni populyatsiyada tarqalish dinamikasini qurishda qo'llanilgan;

toq sondagi noldan farqli koordinatali qo'zg'almas nuqtalarining mavjudlik mezonlari, Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalari uchun qurilgan qo'zg'almas nuqtalari kartalari uglerod va fosfor ekosistemada aylanish siklini tadqiq qilishda qo'llanilgan.

Tadqiqotlar natijalarining ishonchliligi matematik va funksional analiz usullari, algebra, topologiya, dinamik sistemalar nazariyasi, graflar nazariyasi, shuningdek matematik fikrlashning qat'iyiligi bilan asoslanadi. Analitik natijalar asosida jarayonlarning diskret modellari qurilib, analitik natijalar bilan sonli natijalar tahlil qilingan va ularning aniqligi baholangan. Olingan analitik natijalar Python 3.10.0, Delphi 10 Lite, hamda Wolfram Mathematica 10 tizimida yozilgan matematik dasturlar majmui yordamida tasdiqlanib, ham analitik, ham sonli tahlillar real epidemiologik va ekologik jarayonlarga muvofiq ravishda nazariy jihatdan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati S^4, S^6 simplekslarda aniqlangan aynigan Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalari asosida qurilgan aerazol, fekal-og'iz va jinsiy yo'l bilan tarqaladigan yuqumli kasalliklarning diskret kompartmentar *SIR, SEIR, SEIRS, SIRD* modellarini modifikatsiya qilishdan iborat. Shuningdek, uglerod va fosforning ekosistemada aylanish sikllarini tadqiq qilish uchun qurilgan diskret modellar boshqa murakkab biogenlarning, masalan, azotning ekosistemada aylanish siklini tahlil qilish uchun modifikatsiya qilinishi bilan izohlanadi.

Olingan tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati diskret dinamik sistemalarni matematik biologiya, epidemiologiya, ekologiya, hamda iqtisodiyotning konkret masalalarini yechishda keng qo'llash imkoniyati bilan tasdiqlanadi. Qurilgan diskret modellar va ulardan olingan amaliy natijalarni laboratoriya tadqiqotlarida, xususan uglerod va fosfor aylanishini tahlil qilish, havo-tomchi va jinsiy yo'l bilan yuqadigan kasalliklar tarqalishining oldini olish va zararlangan populyatsiyaning basseynlarni ajratish, hamda ularni kamaytirish maqsadida hizmat qilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiya ishida analitik va sonli yechish bo'yicha olingan ilmiy natijalar asosida:

ixtiyoriy o'lchamli simpleksning kvadratik gomeomorfizmlari va ular kompozitsiyalarining dinamik xossalarini tavsiflash natijalari, ularning ichki nuqtalari traektoriyalarining asimptotik harakatlari dinamikasini o'rganishda, OT–F4–31 “Nokommutativ modullar, Leybnis algebralari va simpleksda polinomial kaskadlar” mavzusidagi fundamental loyihada aynigan kososimmetrik matritsaga ega Lotka–Volterra akslantirishlari dinamikasini graflar nazariyasi elementlari yordamida tadqiq qilishda, bir jinsli turnirlarga mos Lotka-Volterra akslantirishlarining noldan farqli toq koordinatali qo'zg'almas nuqtalarini topish algoritmini qurishda, ular uchun invariant sirt mavjudligini isbotlashda foydalanilgan (O'zbekiston Milliy universitetining 2023 yil 22 maydagi 04/11–3068-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo'llanilishi bu dinamik sistemalarni epidemiologik jarayonlarga tadqiq qilish uchun qo'llash maqsadida *SIR, SEIR, SEIRS, SIRD* diskret modellarini qurish hamda ikki o'lchamli simpleksda

aniqlangan Lotka-Volterra akslantirishlarining qo'zg'almas nuqtalar xarakterini to'liq tasniflash va kartalarini qurish imkonini bergan;

Lotka-Volterra sistemalari uchun qo'zg'almas nuqtalari kartalarini tuzish asosida uglerod va fosforni ekosistemada aylanish sikli dinamikasini tahlil qilishda UMT/CRIM/2-2/2/14 «Kuch kabelining koeffitsientini topish uchun o'zgartirilgan gomotopik tahlil usuli» ilmiy grantida simpleksning kvadratik gomeomorfizmlari, aynigan va aynimagan kososimmetrik matritsalar uchun Lotka-Volterra akslantirishini aniqlashda foydalanilgan (Malaziya Terengganu universitetining 2023 yil 30 maydagi UMT/FTKKI/500-35-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi, aynigan Lotka-Volterra akslantirishlari va ularning kompozitsiyalari uchun musbat va manfiy traektoriyalarining dinamikasini tahlil qilish imkonini bergan. Analitik yondashuv, fazali portretni qurish va modellarning to'liq sonli tahlilini amalga oshirish imkonini bergan;

ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan Lotka-Volterra operatorlari va ularning kompozitsiyalari analitik yechimlaridan 28/2022-sonli "Real seysmik ta'sirlarda temir yo'l ko'priklari elementlarining noxiziqli o'zaro ta'sirini hisobga olib hisoblash dasturlari kompleksini yaratish" mavzusidagi ilmiy-tadqiqot loyihasida temir yo'l ko'prigining texnik holatini baholash imkoniyati – seysmik holatdagi turli zilzilalarni real qayd etishda foydalanuvchi tomonidan kiritilgan va mavjud bo'lgan ko'prik tuzilmalari uchun yaratilayotgan dasturiy ta'minot paketining ishchi interfeysida ko'rsatilgan ma'lumotlarni tekshirishda foydalanilgan (Toshkent davlat transport universitetining 2023 yil 19 iyundagi № 04/01-3729-sonli ma'lumotnoma). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi, temir yo'l ko'priklariga seysmik ta'sirlarni baholash imkonini bergan;

bir jinsli turnirlarga mos Lotka-Volterra akslantirishlar va ular kompozitsiyalari ichki nuqtalari traektoriyalari dinamikasi, havo-tomchi va jinsiy yo'l bilan yuqadigan virusli kasalliklar tarqalishining diskret modellalaridan PID2020-115155GB-100 (European FEDER support included, EU)-«Homology, homotopy and categorical invariants in groups and nonassociative algebras» grant loyihasida biseksual populyatsiyaga mos turli xil turlarga ajratilgan urg'ochilar to'plami, hamda faqat bitta turga ega erkaklar populyatsiyasini aniqlovchi evolyutsion algebralarni aniqlashda foydalanilgan (Ispaniyaning Santyago de Kompostella Universiteti ma'lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi, parametrlar uchun topilgan shartlar asosida epidemiya populyatsiyaning qaysi qismida boshlanib, qaysi qismida tugashini topish uchun qo'llash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Tadqiqot natijalari 21 ta xalqaro va 12 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida, hamda O'zFA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining "Operator algebralari va ularning tatbiqlari" nomli hamda O'zMU ning akademik T.A. Sarimsoqov nomidagi "Funksional analiz va uning tatbiqlari", Raqamli texnologiyalar va sun'iy intellektni rivojlantirish ilmiy-tadqiqot institutining "Murakkab tizimlarni modellashtirish" laboratoriyasi ilmiy seminarlarida aprobatsiyadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinishi. Dissertatsiya ishi mavzusi bo'yicha jami 50 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy

attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 17 ta ilmiy maqola, jumladan, 12 tasi xorijiy (8 tasi Scopus halqaro bazaga kiritilgan jurnallarda, shu jumladan 2 tasi Q2 kvartil) jurnallarda va 33 ta tezislar anjumanlar nashrlarida e'lon qilingan. O'zbekiston Respublikasi Adliya Vazirligi huzuridagi intellektual mulk agentligidan 8 ta dasturlar majmuasiga guvohnoma(DGU)lar olingan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, to'rtta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 198 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY QISMI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning O'zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalari taraqqiyotining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, tadqiqotning maqsad va vazifalari belgilab olingan hamda tadqiqot ob'ekti va predmeti aniqlangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning ishonchliligi asoslab berilgan, ularning nazariy va amaliy ahamiyati ochilgan, tadqiqot natijalarini amalda joriy qilish holati, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiya ishining birinchi bobi "**Lotka-Volterra sistemalarining diskret va uzluksiz modellari**" deb nomlanib, bunda populyatsion genetika va epidemiologiya jarayonlarini ifodalovchi uzluksiz modellariga, hamda Lotka-Volterra diskret akslantirishlariga oid aniq faktlar va aynigan kososimmetrik matritsaga ega diskret Lotka-Volterra akslantirishlariga oid yangi natijalar keltirilgan. Ushbu bobning birinchi paragrafida uzluksiz vaqtli dinamik sistemalarni sifat analizi elementlari tasvirlangan, uzluksiz vaqtli dinamik sistemalarning qo'zg'almas nuqtalarining to'liq tavsifi berilgan, traektoriyalarning limit nuqtalari to'plamlari haqida ma'lumotlar keltirilgan. Ikkinchi paragrafda turlararo munosabatlarning matematik nazariyasi, hamda uzluksiz Lotka-Volterra modeli yordamidan tasvirlangan turlararo munosabatlarning tasnifi, shuningdek V. O. Kermak va A. G. Makkendriklar (1927 y) tomonidan kiritilgan klassik kompartmentar *SIR* modeli haqida ma'lum bo'lgan ma'lumotlar keltirilgan.

Bobning uchinchi paragrafi diskret Lotka-Volterra dinamik sistemalari va ularning xususiyatlarini tavsiflashga bag'ishlangan.

Aytaylik \square^m fazoda $(m-1)$ -o'lchamli simpleks quyidagicha aniqlansin:

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \subset \square^m. \quad (1)$$

Ma'lumki, R.N.G'anixo'jaevning ilmiy ishlarida $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ Lotka-Volterra diskret akslantirishining kanonik ko'rinishi keltirilgan:

$$V : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad (2)$$

bunda $a_{ki} = -a_{ik}, |a_{ki}| \leq 1, k, i = \overline{1, m}$.

Kelgusida quyidagilardan foydalanamiz:

1-ta'rif. Agar kososimmetrik matritsaning barcha juft tartibli bosh minorlari noldan farqli bo'lsa, u holda bu kososimmetrik matritsa umumiy holda deyiladi.

1-teorema. Lotka-Volterra akslantirishi S^{m-1} simpleksning avtomorfizmidir.

2-teorema. Aytaylik $A = (a_{ki}), k, i = \overline{1, m}$ – kososimmetrik matritsa bo'lsin. U holda

$$P = \left\{ x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \geq 0, k = \overline{1, m} \right\}, \quad Q = \left\{ x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \leq 0, k = \overline{1, m} \right\}$$

to'plamlar bo'sh bo'lmagan qavariq ko'pyoqlardir.

Qator tatbiqiy masalalarda jarayonlar aynigan kososimmetrik matritsaga ega diskret Lotka-Volterra akslantirishlari orqali tavsiflanishi ma'lum, lekin bu ko'rinishdagi akslantirishlar hozirgi kunga qadar o'rganilmagan. Dissertatsiya ishida aynigan kososimmetrik matritsaga ega diskret Lotka-Volterra sistemalari asosida epidemiologiya va ekologiyaning o'ziga xos muammolarining diskret modellari qurilgan. Bobning to'rtinchi paragrafi esa shu turdagi akslantirishlarning yangi analitik natijalarini bayon qilishga bag'ishlangan.

Birinchi bobning asosiy natijalarini keltiramiz:

3-teorema. Ixtiyoriy ichki $x \in S^2$ nuqtaning traektoriyasi P to'plamda boshlanadi va Q to'plamda tugaydi, ya'ni $\alpha(x) \in P$ va $\omega(x) \in Q$.

Bunda $\alpha(x)$ va $\omega(x)$ lar mos ravishda manfiy va musbat traektoriyalarning limit nuqtalari to'plami.

1-izoh. Grobman-Xartman teoremasiga ko'ra, ixtiyoriy nuqtaning traektoriyasi invariant egri chiziqda yotadi.

Quyidagi $V : S^3 \rightarrow S^3$ Lotka-Volterra sistemasini qaraylik:

$$x'_1 = x_1(1 - ax_2 - bx_4),$$

$$x'_2 = x_2(1 + ax_1 - cx_3),$$

$$x'_3 = x_3(1 + cx_2 + dx_4),$$

$$x'_4 = x_4(1 + bx_1 - dx_3),$$

bunda $0 < a, b, c, d \leq 1$. Bu shartlarda V avtomorfizm bo'ladi. Aytaylik $\Gamma_{123} - S^3$ simpleksning $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ va $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ uchlariga tortilgan yog'i bo'lsin. Ma'lumki simpleksning ixtiyoriy yog'i yana simpleks, bunda ixtiyoriy yoq V akslantirishga nisbatan invariant va V akslantirishning ixtiyoriy yog'iga nisbatan toraytmasi yana Lotka-Volterra akslantirishi bo'ladi.

4-teorema. V akslantirishning ixtiyoriy traektoriyasi yaqinlashadi. Agar boshlang'ich nuqta S^3 simpleksning ichki nuqtasi bo'lsa, u holda

$$\alpha(x^0) \in \left\{ \left(\frac{(1-t)a+c}{a+c}, 0, \frac{ta}{a+c}, 0 \right) \right\}, \quad \omega(x^0) \in \left\{ \left(\frac{(1-t)b+d}{b+d}, 0, \frac{tb}{b+d}, 0 \right) \right\},$$

bunda $0 < t \leq 1$. Demak, manfiy va musbat traektoriyalar limit nuqtalari to'plami

Γ_{13} qirraga tegishlidir. Agar biror sistemaning evolyutsiya qonuni V akslantirishi bilan aniqlansa, u holda evolyutsiya boshi va oxiri Γ_{13} qirraga tegishlidir.

Shu bilan birga birinchi bobning oxirgi paragrafida polinomial tenglamalarni yechishning taqribiy usullari haqida ma'lumotlar keltirilgan. Polinomial (ayirmali) tenglamalarning turg'ur va turg'un bo'lmagan yechimlarini topish algoritmi berilgan.

Ishning ikkinchi bobi "**Havo-tomchi yo'li orqali tarqaluvchi virus kasalliklarning diskret modellari**" deb nomlangan. Aytaylik, quyidagi diskret dinamik sistema havo-tomchi yo'li bilan yuqadigan virus kasalliklari tarqalishining diskret modelini aniqlasin;

$$V : S^2 \rightarrow S^2 : \begin{cases} x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} (1 - a_{12} x_2^{(n)}), \\ x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} (1 + a_{12} x_1^{(n)} - a_{23} x_3^{(n)}), \\ x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)} (1 + a_{23} x_2^{(n)}) \end{cases} \quad (3)$$

bunda $x_i, i = \overline{1,3}$ o'zgaruvchilar quyidagi epidemiologik ma'noni anglatadi:

x_1 – sog'lom, ammo infeksiyaga moyil shaxslar, – S guruhi (susceptible);

x_2 – infeksiyalangan va boshqa shaxslarni yuqtirishga moyil, – I (infected);

x_3 – tuzalgan va immunitetga ega bo'lgan shaxslar – R (recovered).

U holda bu belgilashlarda (3) operator quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$V_{SIR} : \begin{cases} S^{(n+1)} = S^{(n)} - aS^{(n)}I^{(n)}, \\ I^{(n+1)} = I^{(n)} + aI^{(n)}S^{(n)} - bI^{(n)}R^{(n)}, \\ R^{(n+1)} = R^{(n)} + bI^{(n)}R^{(n)}. \end{cases} \quad (4)$$

Modelda uchchala guruh ishtirokchilari teng taqsimlangan populyatsiya qaralgan bo'lib, har bir individ boshqasi bilan bir hil ehtimollik bilan aloqa o'rnatishi mumkin. Bunda inkubatsion jarayon juda kichik bo'lganligi sababli, uni inobatga olmaymiz. Modelning uzluksiz modeldan asosiy farqi – uchinchi tenglamadagi $I^{(n)} \cdot R^{(n)}$ ko'paytma, ya'ni tuzalgan individning yana infeksiyaga moyil ekanligini anglatadi. Model inkubatsiya davrini hisobga olmaganligi sababli, uni juda kichik inkubatsiya davrli virusli infeksiyalarni tadqiq qilish uchun qo'llash mumkin.

5-teorema. Agar diskret SIR model (4) sistema bilan aniqlansa, u holda simpleksning ixtiyoriy ichki $x^0 \in S^2$ nuqtasining traektoriyasi Γ_{SR} qirrada yotadi va

bu qirrada ajratuvchi neytral $N\left(\frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b}\right) \in \Gamma_{SR}$ nuqta mavjud bo'lib, bunda quyidagilar o'rinli

$$P = \left\{ x \in S^2 : Ax \geq 0 \right\} = \left\{ \left(\frac{a + (1-\lambda)b}{a+b}; 0; \frac{\lambda b}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

$$Q = \left\{ x \in S^2 : Ax \leq 0 \right\} = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)a}{a+b}; 0; \frac{b+\lambda a}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Agar boshlang'ich nuqta I uch va neytral N nuqtani birlashtiruvchi egri chiziqdan chapda yotsa, u holda kasallik avjiga chiqadi, lekin muayyan vaqtgacha. Agar nuqtaning traektoriyasi bu egri chiziqdan o'ngga o'tsa, u holda epidemiya ortga qaytadi, bu esa Q to'plamda sodir bo'ladi.

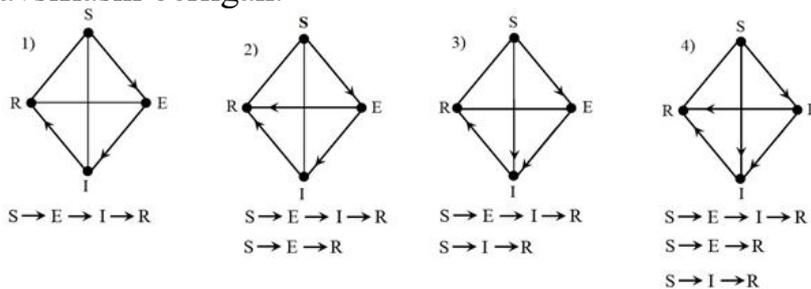
6-teorema. Agar \overline{SN} kesmaga tegishli qo'zg'almas nuqtalar \overline{NR} kesmaga tegishli qo'zg'almas nuqtalar bilan (p, q) juftlikni tashkil etsa, u holda \overline{NR} kesmaga tegishli ixtiyoriy qo'zg'almas nuqtaning biror atrofida V akslantirish lokal diffeomorfizm bo'ladi, hamda \overline{SN} va \overline{NR} kesmaga tegishli (p, q) juftlikni tashkil etuvchi nuqtalarni tutashtiruvchi invariant egri chiziq mavjud.

7-teorema. Musbat traektoriyalarning limit nuqtalar to'plami $\omega(x^0) \subset Q$ va manfiy traektoriyalarning limit nuqtalar to'plami $\alpha(x^0) \subset P$, ya'ni kasallik P to'plamda boshlanib, Q to'plamda tugaydi.

2-izoh. Grobman-Xartman teoremasiga ko'ra, agar ixtiyoriy nuqtaning traektoriyasi uchun $\alpha(x^0) \subset P$, $\omega(x^0) \subset Q$ o'rinli bo'lsa, u holda musbat va manfiy traektoriyalarni o'z ichiga olgan invariant egri chiziq mavjud.

1-tasdiq. Quyidagi $M = \{x \in S^{m-1} : \varphi_p(x) \geq C\}$ to'plam shunday xususiyatga egaki, $\forall x^0 \in M$ uchun manfiy traektoriyalar shu M to'plamga tegishli bo'ladi. Bu erga $\varphi_p(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3}$ – Lyapunov funksiyasi.

Bobning ikkinchi paragrafida aynigan kososimmetrik matritsaga ega uch o'lchamli simpleksda aniqlangan diskret Lotka-Volterra akslantirishlari dinamikasi qaralgan. Bu sistemalar havo-tomchi yo'li orqali yuqadigan, inkubatsion (latent) jarayonga ega, residiv bo'lmagan virus kasalliklarni tarqalishini tadqiq qiluvchi *SEIR* diskret model sifatida taklif etilgan. *SEIR* diskret modeli sifatida aynigan kososimmetrik matritsaga ega, uch o'lchamli simpleksda aniqlangan diskret Lotka-Volterra akslantirishlari va ularga mos qisman-orientirlangan graflar soni to'rttani tashkil etadi. Quyida keltirilgan modellar (1-rasmga qarang) alohida jarayonni tavsiflaganligi sababli, dissertatsiya ishida har bir model alohida tahlil qilingan va ishning 1-ilovasida har bir model qaysi turdagi kasalliklarning tarqalish dinamikasini tavsiflashi berilgan.



1-rasm. Havo-tomchi yo'li bilan yuqadigan, inkubatsion (latent) jarayonga ega, residiv bo'lmagan virus kasalliklari tarqalishini aks etuvchi qisman-orientirlangan graflar.

1-rasmdagi 1-modelda guruhdan-guruhga faqat bitta o'tish $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$ mavjud va sistema quyidagi ko'rinishga ega:

$$V_1: \begin{cases} S' = S(1 - aE), \\ E' = E(1 + aS - dI), \\ I' = I(1 + dE - fR), \\ R' = R(1 + fI). \end{cases}$$

8-teorema. Agar kasallikni tarqalishini 1-model tasvirlasa, u holda P va Q to'plamlar quyidagiga teng:

$$P = \left\{ \left(\frac{d + (1 - \lambda)a}{a + d}; 0; \frac{\lambda a}{a + d}; 0 \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, Q = \left\{ \left(0; \frac{(1 - \lambda)f}{f + b}; 0; \frac{d + \lambda f}{f + b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

2- modelning ko'rinishi:

$$V_2: \begin{cases} S' = S(1 - aE), \\ E' = E(1 + aS - dI - eR), \\ I' = I(1 + dE - fR), \\ R' = R(1 + eE + fI). \end{cases}$$

9-teorema. Agar epidemiologik model quyidagi ikkita $S \rightarrow E \rightarrow R$ va $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$ o'tishlarni o'z ichiga olsa, u holda bu o'tishlarning har biri uchun quyidagi shartlar o'rinli:

1) $S \rightarrow E \rightarrow R$. Bu o'tishda individlarda kasallik ochiq holda aks etmaydi, ya'ni faqat latent jarayonida kechadi. Bunda butun jarayon simpleksning Γ_{SER} yog'ida

kechadi, ya'ni Γ_{SR} qirrada ajratuvchi shunday neytral $N_1 \left(\frac{e}{a + e}; 0; 0; \frac{a}{a + e} \right)$ nuqta

mavjudki, bunda

$$P = \left\{ \left(\frac{a + (1 - \lambda)e}{a + e}; 0; 0; \frac{\lambda e}{a + e} \right); \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1 - \lambda)a}{a + e}; 0; 0; \frac{e + \lambda a}{a + e} \right); \right\}, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Agar boshlang'ich nuqta E uch va neytral N_1 nuqtani birlashtiruvchi egri chiziqlardan chapda yotsa, u holda kasallik muayyan vaqtgacha avjiga chiqadi. Agar nuqtaning traektoriyasi bu egri chiziqdan o'ngga o'tsa, u holda epidemiya ortga qaytadi, bu esa Q to'plamda sodir bo'ladi.

2) $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$. Bunda individ kasallikning barcha jarayonlaridan o'tadi. Jarayon qisman-orientirlangan grafni butunlay qamraydi. U holda kasallik Γ_{SI}

qirraning qismida boshlanadi $P = \left\{ \left(\frac{a + (1 - \lambda)d}{a + d}; 0; \frac{\lambda d}{a + d}; 0 \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$ va Γ_{SR}

qirraning qismida tugaydi, ya'ni $Q = \left\{ \left(\frac{(1 - \lambda)a}{a + e}; 0; 0; \frac{e + \lambda a}{a + e} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$.

Oxirgi 3-4-modellar uchun quyidagi natijalar olingan.

10-teorema. Agar epidemiologik model kasallikni quyidagi ikkita o'tish jarayonini qamrasa, ya'ni $S \rightarrow I \rightarrow R$ va $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$, u holda

1) $S \rightarrow I \rightarrow R$ o'tish uchun quyidagilar o'rinli: bunday o'tishda kasallik darhol rivojlanadi, vaziyat simpleksning Γ_{SIR} yog'ida bo'lib, Γ_{SR} qirrada neytral

$N_2 \left(\frac{f}{b+f}; 0; 0; \frac{b}{b+f} \right) \in \Gamma_{SR}$ nuqta mavjud. Surunkali kasalliklarga chalingan individlarning kasalligi simpleksning uchlari S , I va neytral N_2 nuqtasini bog'laydigan qismida boshlanadi, ya'ni, kasallikning boshlanishi va uning rivojlanishi simpleksning ichki nuqtalarida, Γ_{SR} qirra qismining qo'zg'almas nuqtalari yaqinida sodir bo'ladi va oxiri Γ_{SR} ning boshqa qismida bo'ladi, ya'ni

$$P = \left\{ \left(\frac{b+(1-\lambda)f}{b+f}; 0; 0; \frac{\lambda f}{b+f} \right) \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)b}{b+f}; 0; 0; \frac{f+\lambda b}{b+f} \right) \right\}, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Agar boshlang'ich nuqta I uch va neytral N_2 nuqtani birlashtiruvchi egri chiziqlardan chapda yotsa, u holda kasallik muayyan vaqtgacha avjiga chiqadi. Agar nuqtaning traektoriyasi bu egri chiziqdan o'ngga o'tsa, u holda epidemiya ortga qaytadi, bu esa Q to'plamda sodir bo'ladi.

2) $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$ da individlar kasallikning barcha jarayonlarini o'tkazadilar. Infeksiyalangan individlar butun simpleks bo'ylab yurishadi. Kasallik simpleks Γ_{SR} qirrasining bir qismi atrofida individlarda boshlanadi, ya'ni

$$P = \left\{ \left(\frac{b+(1-\lambda)f}{b+f}; 0; 0; \frac{\lambda f}{b+f} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

Γ_{ER} qirraning qismida esa kasallik tugaydi

$$Q = \left\{ \left(0; \frac{(1-\lambda)d}{d+f}; 0; \frac{f+\lambda d}{d+f} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

11-teorema. Agar epidemiologik jarayon uchta o'tishni o'z ichiga olsa, ya'ni $S \rightarrow I \rightarrow R$, $S \rightarrow E \rightarrow R$, $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$, u holda quyidagilar o'rinli:

1) $S \rightarrow I \rightarrow R$: Bunda jarayon Γ_{SIR} yoqda o'tadi, ya'ni Γ_{SR} qirrada neytral

$N_3 \left(\frac{f}{f+b}, 0, 0, \frac{b}{f+b} \right) \in \Gamma_{SR}$, nuqta mavjud va

$$P = \left\{ \left(\frac{b+(1-\lambda)f}{f+b}; 0; 0; \frac{\lambda f}{f+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)b}{f+b}; 0; 0; \frac{f+\lambda b}{f+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Agar boshlang'ich nuqta I uch va neytral N_3 nuqtani birlashtiruvchi egri chiziqdan chapda yotsa, u holda kasallik muayyan vaqtgacha avjiga chiqadi. Agar nuqtaning traektoriyasi bu egri chiziqdan o'ngga o'tsa, u holda epidemiya ortga qaytadi, bu esa Q to'plamda sodir bo'ladi.

2) $S \rightarrow E \rightarrow R$: Bu kasallikni latent xolda o'tkazadigan individlarga mos bo'lib, jarayon Γ_{SER} yoqda o'tadi. U holda Γ_{SR} qirrada neytral $N_4 \left(\frac{e}{a+e}, 0, 0, \frac{a}{a+e} \right) \in \Gamma_{SR}$

nuqta mavjud va

$$P = \left\{ \left(\frac{a+(1-\lambda)e}{a+e}; 0; 0; \frac{\lambda e}{a+e} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)a}{a+e}; 0; 0; \frac{e+\lambda a}{a+e} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Agar boshlang'ich nuqta E uch va neytral N_4 nuqtani birlashtiruvchi egri chiziqlardan chapda yotsa, u holda kasallik avjiga muayyan vaqtgacha chiqadi. Agar nuqtaning traektoriyasi bu egri chiziqdan o'ngga o'tsa, u holda epidemiya ortga qaytadi, bu esa Q to'plamda sodir bo'ladi.

3) $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$. Bunda individlar barcha jarayonlarni boshdan kechiradilar: agar $eb < af$ bo'lsa

$$P = \left\{ \left(\frac{b+(1-\lambda)f}{f+b}; 0; 0; \frac{\lambda f}{f+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)a}{a+e}; 0; 0; \frac{e+\lambda a}{a+e} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

agar $eb > af$ bo'lsa, u holda

$$P = \left\{ \left(\frac{a+(1-\lambda)e}{a+e}; 0; 0; \frac{\lambda e}{a+e} \right) \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)b}{f+b}; 0; 0; \frac{f+\lambda b}{f+b} \right) \right\}; 0 \leq \lambda \leq 1.$$

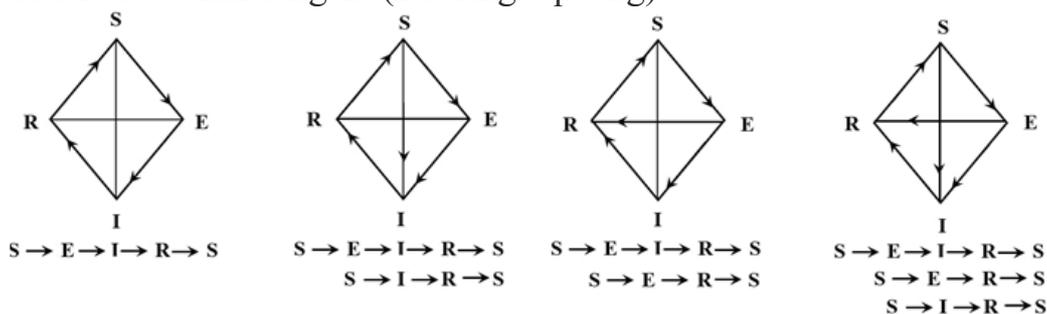
Qurilgan modellarni adekvat va ishonchliligini tekshirish maqsadida O'zbekistonda 2020 yil 15 martdan 31 dekabrgacha bo'lgan muddatda COVID-19 kasalligining tarqalish dinamikasini tekshiramiz. Modelimiz bu kasallikni



2-rasm. O'zbekistonda COVID-19 kasalligining 15.03.2020-31.12.2020 muddatdagi tarqalish dinamikasi. $0 < t \leq 100$ oraliqda aniq bashorat qiladi. Qizil egri chiziq – $A[i]$ – aniq statistik ma'lumot, yashil egri chiziq esa – $B[i]$ – bizning bashorat. Model adekvatligini tekshirish uchun $t=150$ dagi qiymatni boshlang'ich qiymat sifatida olib, uning trayektoriyasini quramiz (ko'k chiziq), ko'rib turganingizdek, keyingi 100 kundagi ma'lumotni aniq ko'rsatmoqda. Modelda $\varepsilon = 10^{-4}$ deb olingan.

Bobning uchinchi paragrafi residiv kasalliklarni modellashtirishga bag'ishlangan. Dissertatsiya ishida aynigan kososimmetrik matritsaga ega S^3 da

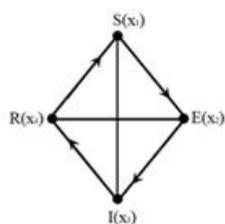
aniqlangan diskret dinamik sistemalarning to'rttasi bu turdagi jarayonlarning diskret modellari sifatida taklif etilgan. (2-rasmga qarang).



3-rasm. Havotomchi yo'li bilan yuqadigan, inkubatsion (latent) jarayonga ega, residiv xarakterga ega virus kasalliklari tarqalishini aks etuvchi qisman-orientirlangan graflar.

Ushbu modellarning har biri uchun epidemiologik vaziyatning boshlanishi va tugashini tavsiflovchi natijalar olingan va dissertatsiya ishida batafsil yoritilgan.

Quyidagi qisman-orientirlangan graf va unga mos sistemani qaraylik:



$$V_1: \begin{cases} S' = S(1 - aE + cR), \\ E' = E(1 + aS - dI), \\ I' = I(1 + dE - fR), \\ R' = R(1 - cS + fI). \end{cases}$$

12-teorema. Agar V_1 akslantirishning koeffitsientlari uchun $af = cd$ shart o'rinli bo'lsa, u holda P va Q to'plamlar ustma-ust tushadi:

$$P = Q = \left\{ \left(\frac{d\alpha}{a+d}; \frac{c(1-\alpha)}{a+c}; \frac{a\alpha}{a+d}; \frac{a(1-\alpha)}{a+c} \right), 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}.$$

13-teorema. Agar V_1 akslantirishning koeffitsientlari uchun $af < cd$ o'rinli bo'lsa, u holda P to'plam Γ_{ER} qirraning qismidan, Q to'plam esa Γ_{SI} qirraning qismidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$P = \left\{ \frac{a}{a+c} \leq R \leq \frac{d}{d+f} \right\}, \quad P = \left\{ \frac{f}{d+f} \leq E \leq \frac{c}{c+a} \right\},$$

$$Q = \left\{ \frac{f}{f+c} \leq S \leq \frac{d}{d+a} \right\}, \quad Q = \left\{ \frac{a}{d+a} \leq I \leq \frac{c}{c+f} \right\}.$$

14-teorema. Agar V_1 akslantirish uchun $af > cd$ o'rinli bo'lsa, u holda P to'plam Γ_{SI} qirraning qismi, Q to'plam esa Γ_{ER} qirraning qismidan iborat:

$$P = \left\{ \frac{d}{a+d} \leq S \leq \frac{f}{c+f} \right\}, \quad P = \left\{ \frac{c}{c+f} \leq E \leq \frac{a}{d+a} \right\},$$

$$Q = \left\{ \frac{c}{a+c} \leq S \leq \frac{f}{d+f} \right\}, \quad Q = \left\{ \frac{d}{d+f} \leq I \leq \frac{a}{c+a} \right\}.$$

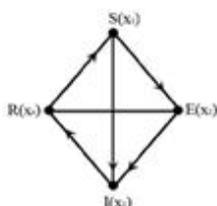
Epidemiologik jihatdan P to'plam jarayonning boshlanishini, Q to'plam esa uning tugashini aniqlaydi va uchta holga bo'linadi:

1) $af = cd$. Bunda P va Q to‘plamlar bitta to‘plamni aks ettiradi. Bu esa kasallik bitta to‘plamda ham boshlanadi, ham tugashini anglatadi. Bunday epidemiologik jarayon real hayotda mavjud emas.

2) $af < cd$. Bunda P to‘plam Γ_{ER} qirraning qismida, Q to‘plam esa Γ_{SI} qirraning qismida bo‘ladi. Bu epidemiya Γ_{ER} qirraga tegishli kesmada boshlanishini, Γ_{SI} qirraga tegishli kesmada esa tugashini anglatadi.

3) $af > cd$. Bu hol avvalgi holga qarama-qarshi jarayonni anglatadi, ya’ni P to‘plam Γ_{SI} qirraga tegishli kesmada, Q esa Γ_{ER} qirraga tegishli kesmada joylashadi. Boshqacha qilib aytganda, epidemiologik vaziyatning holati individlarning bir guruhdan boshqa guruhlariga o‘tish koeffitsientlariga nisbatan sezuvchan.

Quyidagi modelni qaraylik:



$$V_2: \begin{cases} S' = S(1 - aE - bI + cR), \\ E' = E(1 + aS - dI), \\ I' = I(1 + bS + dE - fR), \\ R' = R(1 - cS + fI). \end{cases}$$

15-teorema. Agar epidemiologik vaziyat V_2 akslantirish bilan aniqlansa, u holda Γ_{SIR} yoqda ichki qo‘zg‘almas nuqta $N\left(\frac{f}{b+c+f}; 0; \frac{c}{b+c+f}; \frac{b}{b+c+f}\right) \in \Gamma_{SIR}$ mavjud. Bu nuqta simpleks uchun ham P , ham Q nuqta bo‘ladi.

Teoremaning epidemiologik ma’nosi – individ kasallikni latent o‘tkazadimi yoki ochiq shakldami, residiv xarakterga ega bo‘ladi, ya’ni individ kasallikdan tiklanadi, ammo moyilligi qoladi.

Oxirgi paragrafda havo-tomchi yo‘li orqali yuqadigan virusli kasalliklarning o‘lim holatini hisobga oladigan jarayonni aks ettiruvchi Lotka-Volterra akslantirishlaridan biri diskret model sifatida taklif qilingan:

$$V: \begin{cases} x_1' = x_1(1 - a_{12}x_2), \\ x_2' = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4), \\ x_3' = x_3(1 + a_{23}x_2), \\ x_4' = x_4(1 + a_{24}x_2). \end{cases}$$

16-teorema. Agar kososimmetrik matritsaning koeffitsientlari uchun $a_{23} > a_{24}$ o‘rinli bo‘lsa, u holda P to‘plam Γ_{134} yoqning bir qismidan, ya’ni

$$P = \left\{ \left(\frac{a_{23} - \lambda a_{24}}{a_{12} + a_{24}} x_3 + \frac{(1 - \lambda) a_{24}}{a_{12} + a_{24}}; 0; x_3, x_4 \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{\lambda a_{23}}{a_{12} + a_{23}} - \frac{(1 - \lambda) a_{23} + a_{24}}{a_{12} + a_{23}} x_4; 0; x_3, x_4 \right) \right\},$$

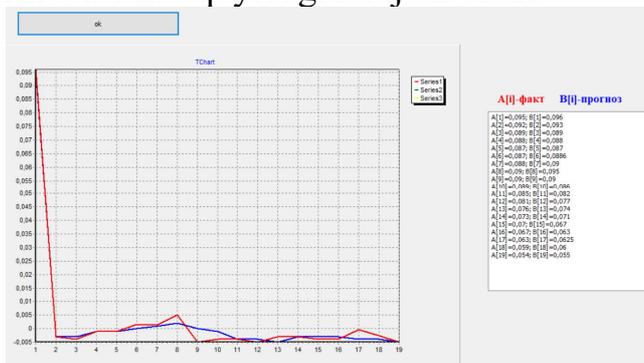
bunda $0 \leq \lambda \leq 1$ va $\frac{a_{23} - a_{24}}{a_{12} + a_{24}} x_3 + \frac{a_{24}}{a_{12} + a_{24}} \leq x_1 \leq 1$, $\frac{a_{23}}{a_{12} + a_{23}} - \frac{a_{23} + a_{24}}{a_{12} + a_{23}} x_4 \leq x_1 \leq 1$.

Q to‘plam esa Γ_{134} yoqning qolgan qismidan, ya’ni

$$Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)a_{24}}{a_{12} + a_{24}} x_3 + \frac{a_{23} - \lambda a_{24}}{a_{12} + a_{24}}; 0; x_3; x_4 \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{\lambda a_{23}}{a_{12} + a_{23}} - \frac{(1-\lambda)a_{23} + a_{24}}{a_{12} + a_{23}} x_4; 0; x_3; x_4 \right) \right\},$$

bunda $0 \leq \lambda \leq 1$ va $0 \leq x_1 \leq \frac{a_{24}}{a_{12} + a_{24}} x_3 + \frac{a_{23} - a_{24}}{a_{12} + a_{24}}$, $0 \leq x_1 \leq \frac{a_{23}}{a_{12} + a_{23}} - \frac{a_{23} + a_{24}}{a_{12} + a_{23}} x_4$.

Ikkinchi bobda qurilgan modellar boshlang'ich nuqta tanloviga nisbatan sezuvchandir. Bu modellarimizni Rossiyada sil kasalligini 2000-2018 yillardagi statistik ma'lumotlarni tekshirib quyidagi natijani oldik:



4-rasm. Rossiya Federatsiyasida sil kasalligi statistik ma'lumotlari tekshiruvi (2000-2018 yillar).

Bu yerda qizil chiziqlar aniq statistik ma'lumotlar – $A[i]$, ko'k chiziq esa bizning boshorat – $B[i]$. Modelda iteratsiyaning aniqligi $\varepsilon = 10^{-4}$ deb olingan bo'lib, ayirmali tenglamalarning turg'un bo'lmagan yechimlari Shturm teoremasi va kesmani teng ikkiga bo'lish usuli yordamida dissertatsiya ishining birinchi bobining oxirgi paragrafidagi algoritmgaga muvofiq topiladi.

“Jinsiy yo'l bilan yuqadigan virusli kasalliklarning diskret modellari” deb nomlangan uchinchi bob ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan aynigan va aynimagan kososimmetrik matritsaga ega ikkita Lotka-Volterra akslantirishlarining kompozitsiyasini tahlil qilishga bag'ishlangan. Ko'rib chiqilgan kompozitsiyalar orasida jinsiy yo'l bilan yuqadigan virusli kasalliklarni tarqalishini tasvirlaydiganlari ajratilgan. Bobning birinchi paragrafida kompozitsiyani qo'zg'almas nuqtalarining xarakteriga oid asosiy ta'riflar, qo'zg'almas nuqta kartalari tushunchasi kiritilgan.

Quyidagi operatorlarni qaraylik:

$$V_1 : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad V_2 : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m b_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Ta'kidlaganimizdek, Lotka-Volterra akslantirishi S^{m-1} simpleksning avtomorfizmidir, ularning kompozitsiyasi $V_1 \circ V_2$ ham avtomorfizm bo'ladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$V_1 \circ V_2 : x'_k = x_k \left(1 + f_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) \right), \quad k = \overline{1, m}.$$

Ikkita Lotka-Volterra akslantirishlarining kompozitsiyalari ham simpleksni o'zida saqlaydi, ammo ma'lum bo'lishicha, ichki nuqtalar traektoriyalarining dinamikasi va qo'zg'almas nuqtalar xarakterlari tubdan o'zgaradi.

Aytaylik, $x \in S^{m-1}$ simpleksning ixtiyoriy ichki nuqtasi bo'lsin, u holda quyidagi iteratsion ketma-ketlik traektoriya deyiladi:

$$x, Vx, V^2x, V^3x, \dots;$$

$Vx = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi x nuqta V akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi. Agar $x, Vx, V^2x, V^3x, \dots, V^{k-1}x$ nuqtalar juft-jufti bilan har xil bo'lib, $V^kx = x$ o'rinli bo'lsa, u holda bu nuqtalar k davrli siklni hosil qiladi;

$M \subset S^{m-1}$ to'plamning atrofi deb, har qanday ochiq to'plamni o'z ichiga olgan to'plamni tushunamiz. Aytaylik A to'plam V ning ixtiyoriy tortuvchi to'plami bo'lsin, ya'ni ω – limit nuqtalar to'plami. A to'plam yopiq va $VA = A$. Agar $Ax = A$ o'rinli bo'lsa, u holda x nuqta A to'plam bilan tortiladi.

Aytaylik, $B(A)$ – to'plam S^{m-1} simpleksning A to'plam orqali tortiluvchi nuqtalaridan tashkil topsin. Agarda $Ax = A$ shart o'rinli bo'lsa, u holda $B(A)$ tortuvchi to'plam $x \in S^{m-1}$ ning barcha nuqtalaridan tashkil topadi. Ma'lumki, har bir V_1 va V_2 akslantirishlarga turnirlar yoki qisman-orientirlangan graflarni mos qo'yish mumkin. Lekin ularning kompozitsiyasi uchun bu tushunchalarni kiritib bo'lmaydi. Shu sababli dissertatsiya ishida bu akslantirishlar kompozitsiyasi uchun qo'zg'almas nuqtalar kartasi tushunchasini kiritilgan. Qo'zg'almas nuqtalar kartasining xarakteri undagi nuqtalarning topologik xarakteri (tortuvchi, itaruvchi va egar nuqta) bilan aniqlanadi, bunda V_1 va V_2 akslantirishlarni tashkil etuvchi kososimmetrik matritsalarining elementlari qanday shartlarni qanoatlantirganda bu nuqtalar attraktor, repeller yoki egar bo'ladi degan savolga javob berilgan. Ikkinchi paragrafda tranzitiv turnirlarga mos ikkita Lotka-Volterra akslantirishlarining kompozitsiyalari to'liq o'rganilgan. Bobning uchinchi va to'rtinchi paragraflari mos ravishda residiv va residiv bo'lmagan xarakterga ega, jinsiy yo'l orqali yuqadigan viruslarni keyingi avlodga o'tish dinamikasini tahlil qilishga ba g'ishlangan.

Aytaylik, gipertekislik $H_p = \left\{ x \in \square^m : \sum_{i=1}^m x_i = p \right\}$ va simpleks

$$S^{m-1} = \left\{ x \in \square^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \subset H_p \text{ berilgan bo'lsin.}$$

2-ta'rif. V akslantirishining $K(V)$ to'ldirilgan Jyulia to'plami deb, V ga nisbatan chegaralangan orbitaga ega $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \square^m$ nuqtalar to'plamiga aytiladi, ya'ni

$$K(V) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : V^n(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \infty \text{ nu } n \rightarrow \infty \right\}.$$

3-ta'rif. Jyuliya to'plami deb to'ldirilgan Jyulia to'plamining umumiy chegarasiga aytiladi, ya'ni $J(V) = \partial K(V)$.

17-teorema. $V : \square^m \rightarrow \square^m$ operator uchun to'ldirilgan Jyulia to'plami bu S^{m-1} simpleksdir.

Agar V akslantirishni \square^m fazoda qarajak, u holda 17-teoremaga asosan $R^m \setminus S^{m-1}$ to'plamning barcha nuqtalari cheksizlikka intiladi, lekin S^{m-1} simpleksning nuqtalari o'zida saqlanadi. Shu sababli simpleksning ichida qiziq dinamika mavjud. Bobning uchinchi paragrafida o'zaro qarama-qarshi yo'nalgan, kuchli turnirlarga mos Lotka-Volterra akslantirishlarining kompozitsiyalari

dinamikasi ko'rsatilgan va bu kompozitsiyani jinsiy aloqa yo'li bilan yuqadigan residiv xarakterga ega virusli kasalliklarning tarqalish jarayonini modellashtirishga tatbiq qilingan. Taklif etilayotgan model faqatgina geteroseksual munosabatlar uchun mo'ljallangan. Aytaylik, erkaklar va ayollar populyatsiyasida kasallikning tarqalishi mos ravishda quyidagi qonunlar bilan aniqlansin:

$$V_m : \begin{cases} S'_m = S_m (1 - I_m + R_m), \\ I'_m = I_m (1 + S_m - R_m), \\ R'_m = R_m (1 - S_m + I_m), \end{cases} \quad V_w : \begin{cases} S'_w = S_w (1 + I_w - R_w), \\ I'_w = I_w (1 - S_w + R_w), \\ R'_w = R_w (1 + S_w - I_w). \end{cases}$$

Har bir akslantirish diskret *SIRS* modelini ifodalaydi. Bunda

S_m – kasallikka moyil erkaklar; I_m – kasallikka chalingan erkaklar;

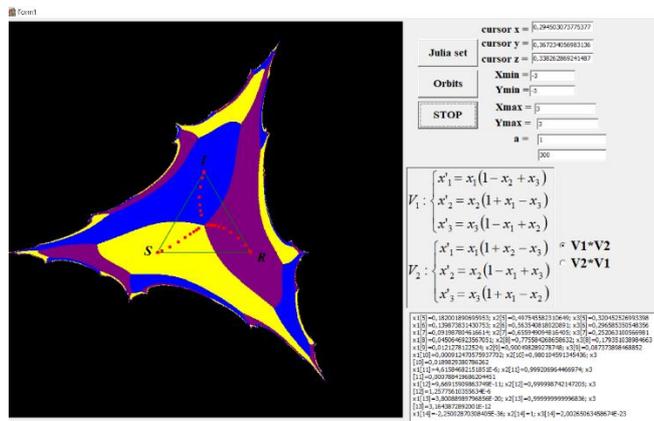
R_m – tuzalgan erkaklar.

S_w – kasallikka moyil ayollar; I_w – kasallangan ayollar; R_w – tuzalgan ayollar.

U holda ularning kompozitsiyasi aloqadan keyin kasallikning keyingi avlodga o'tishini bildiradi:

$$V_m \circ V_w : \begin{cases} S'_m = S_m (1 + I_w - R_w) [1 - I_w (1 - S_w + R_w) + R_w (1 + S_w - I_w)], \\ I'_m = I_w (1 - S_w + R_w) [1 + S_w (1 + I_w - R_w) - R_w (1 + S_w - I_w)], \\ R'_m = R_w (1 + S_w - I_w) [1 - S_w (1 + I_w - R_w) + I_w (1 - S_w + R_w)]. \end{cases}$$

$V_m \circ V_w$ va $V_w \circ V_m$ kompozitsiyalarning qo'zg'almas nuqtalari kartasining fazali protreti quyidagicha:



5-rasm. *SIRS* modellari kompozitsiyalarining fazali portreti. Sariq rangda populyatsiyaning kasallikka moyil, ko'k rangda zararlangan va siyoh rangda tuzalgan qatlamining basseyni.

18-teorema. $V_m \circ V_w$ kompozitsiya yettita qo'zg'almas nuqtalarga ega va ular:

- Simpleksning uchlarini $e_1(1; 0; 0)$, $e_2(0; 1; 0)$, $e_3(0; 0; 1)$ – attraktorlar.
- Har bir qirrada bittadan qo'zg'almas nuqtalar bor va ular

$$C'_1 \left(0; \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \in \Gamma_{23}, \quad C'_2 \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; 0; \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \in \Gamma_{13},$$

$$C'_3 \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; 0 \right) \in \Gamma_{12} - \text{egor nuqtalar.}$$

3. Kompozitsiyaning kartasida ichki qo'zg'almas repeller nuqta $N\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ saqlanadi.

2-tasdiq. Ikkala kompozitsiyaning ham ichida uchtdan seperatrissa (ajratuvchi) egri chiziqlar mavjud bo'lib, ular

– $V_m \circ V_w$ uchun – $\mathbb{N}C_1, \mathbb{N}C_2, \mathbb{N}C_3$:

– $\mathbb{N}C_1$ va $\mathbb{N}C_3$ infeksiyalanganlar sinfini moyillar va tuzalغانlar sinfidan ajratadi, ya'ni $B(I)$ basseyin $\mathbb{N}C_1, \mathbb{N}C_3$ separatrissalar va N nuqta bilan ajratilgan;

– $\mathbb{N}C_1$ va $\mathbb{N}C_2$ seperatrissalar tuzalغانlarni moyillar va kasallikka chalinganlar sinfidan ajratadi, ya'ni $B(R)$ basseyin $\mathbb{N}C_1, \mathbb{N}C_2$ chiziqlar va N nuqta bilan ajratilgan;

– $\mathbb{N}C_2$ va $\mathbb{N}C_3$ moyillarni kasallikka chalingan va tuzalغانlardan ajratadi, ya'ni $B(S)$ basseyin $\mathbb{N}C_2, \mathbb{N}C_3$ chiziqlar va N nuqta bilan ajratilgan;

– $V_w \circ V_m$ kompozitsiya uchun ham xuddi shu kabi separatrissalar mavjud $\mathbb{N}C'_1, \mathbb{N}C'_2, \mathbb{N}C'_3$.

Separatrissa – bu egar nuqtada boshlanuvchi va tugallanuvchi egri chiziq.

Endi $V_{13} \circ V_{14}$ kompozitsiyani qaraymiz:

$$V_{13} \circ V_{14} : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + b_{12}x_2 - b_{13}x_3)(1 - a_{12}x_2(1 - b_{12}x_1 + b_{23}x_3) + a_{13}x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)), \\ x'_2 = x_2(1 - b_{12}x_1 + b_{23}x_3)(1 + a_{12}x_1(1 + b_{12}x_2 - b_{13}x_3) - a_{23}x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)), \\ x'_3 = x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)(1 - a_{13}x_1(1 + b_{12}x_2 - b_{13}x_3) + a_{23}x_2(1 - b_{12}x_1 + b_{23}x_3)). \end{cases}$$

Bu kompozitsiya uchun:

– simpleksning uchlari qo'zg'almas nuqtalar – attraktorlar – $e_1(1; 0; 0), e_2(0; 1; 0), e_3(0; 0; 1)$;

– Har bir qirrada esa bittadan qo'zg'almas nuqtalar mavjud:

$$M_1 \left(\frac{(b_{12} + 2)\sqrt{a_{12}} - \sqrt{b_{12}(a_{12}b_{12} + 4)}}{2b_{12}\sqrt{a_{12}}}, \frac{(b_{12} - 2)\sqrt{a_{12}} + \sqrt{b_{12}(a_{12}b_{12} + 4)}}{2b_{12}\sqrt{a_{12}}}; 0 \right) \in \Gamma_{12},$$

$$M_2 \left(\frac{(b_{13} - 2)a_{13} - \sqrt{a_{13}b_{13}(a_{13}b_{13} + 4)}}{2a_{13}b_{13}}; 0; \frac{(b_{13} + 2)a_{13} - \sqrt{a_{13}b_{13}(a_{13}b_{13} + 4)}}{2a_{13}b_{13}}; 0 \right) \in \Gamma_{13}$$

$$M_3 \left(0; \frac{(b_{23} + 2)\sqrt{a_{23}} - \sqrt{b_{23}(a_{23}b_{23} + 4)}}{2b_{23}\sqrt{a_{23}}}, \frac{(b_{23} - 2)\sqrt{a_{23}} + \sqrt{b_{23}(a_{23}b_{23} + 4)}}{2b_{23}\sqrt{a_{23}}}; 0 \right) \in \Gamma_{23}$$

3-izoh. Ushbu modelda har bir populyatsiya ichida (jinsiy bo'lmagan) aloqa mavjud, ya'ni har bir populyatsiyada allaqachon kasallikni yuqtirgan individlar mavjud va infeksiya jinsiy bo'lmagan (masalan, tibbiy) yo'l bilan o'tishi mumkin. Buni har bir modeldagi quyidagi ko'paytmalar izohlaydi:

$$\begin{cases} S_m \cdot I_m, S_m \cdot R_m, I_m \cdot R_m \\ S_w \cdot I_w, S_w \cdot R_w, I_w \cdot R_w \end{cases} \quad \begin{cases} S_m \cdot I_m, S_m \cdot R_m, I_m \cdot R_m \\ S_w \cdot I_w, S_w \cdot R_w, I_w \cdot R_w \end{cases}$$

Kasallikning jinsiy aloqadan so'ng keyingi avlodga o'tishini $W(V_m \circ V_w)$ va $W(V_w \circ V_m)$ kompozitsiyalar va ularning dinamikasi aniqlaydi.

Oxirgi paragrafda residiv bo'lmagan xarakterga ega jinsiy yo'l bilan yuqadigan virusli kasalliklar tarqalishining diskret modeli kiritilib, tadqiq qilingan. Bu model sifatida ikkita diskret *SIR* modellarining kompozitsiyalari olingan bo'lib, ular

$$V_{19} : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + a_{13}x_3) \\ x'_2 = x_2(1 - a_{23}x_3) \\ x'_3 = x_3(1 - a_{13}x_1 + a_{23}x_2) \end{cases}, \quad V_{20} : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - b_{13}x_3) \\ x'_2 = x_2(1 + b_{23}x_3) \\ x'_3 = x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2) \end{cases}$$

Ularning kompozitsiyasi $V_{19} \circ V_{20}$

$$V_{19} \circ V_{20} : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - b_{13}x_3)(1 + a_{13}x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)) \\ x'_2 = x_2(1 + b_{23}x_3)(1 - a_{23}x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)) \\ x'_3 = x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)(1 - a_{13}x_1(1 - b_{13}x_3) + a_{23}x_2(1 + b_{23}x_3)) \end{cases}$$

19-teorema. $V_{19} \circ V_{20}$ kompozitsiya uchun

$$A_1 \left(\frac{\sqrt{a_{13}}(b_{13} - 2) + \sqrt{b_{13}(a_{13}b_{13} + 4)}}{2b_{13}\sqrt{a_{13}}}, 0, \frac{\sqrt{a_{13}}(b_{13} + 2) - \sqrt{b_{13}(a_{13}b_{13} + 4)}}{2b_{13}\sqrt{a_{13}}} \right) \text{ qўzg'almas}$$

nuqtasi bo'lib, u

- koeffitsientlarning $b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{13} + 1}$ shartida $e_3(0,0,1)$ uchga o'tadi;
- koeffitsientlarning $b_{13} = \frac{a_{13}}{1 - a_{13}}$ shartida esa $e_1(1,0,0)$ uchga o'tadi;
- qolgan hollarda esa Γ_{13} qirraga tegishli bo'ladi va repeller bo'ladi.

Qo'zg'almas nuqta

$$A_2 \left(0, \frac{\sqrt{a_{23}}(b_{23} + 2) - \sqrt{b_{23}(a_{23}b_{23} + 4)}}{2a_{23}\sqrt{b_{23}}}, \frac{\sqrt{a_{23}}(b_{23} - 2) + \sqrt{b_{23}(a_{23}b_{23} + 4)}}{2a_{23}\sqrt{b_{23}}} \right)$$

- koeffitsientlarning $b_{23} = \frac{a_{23}}{1 - a_{23}}$ shartida $e_3(0,0,1)$ uchga o'tadi;
- koeffitsientlarning $b_{23} = \frac{a_{23}}{1 + a_{23}}$ shartida esa $e_2(0,1,0)$ ga o'tadi;
- qolgan hollarda esa Γ_{23} qirraga tegishli bo'ladi va repeller bo'ladi.

Har bir V_{19} va V_{20} akslantirishlar Γ_{23} qirrada neytral qo'zg'almas nuqtaga ega:

$$N_{19} \left(\frac{a_{23}}{a_{13} + a_{23}}; \frac{a_{13}}{a_{13} + a_{23}}; 0 \right) \text{ va } N_{20} \left(\frac{b_{23}}{b_{13} + b_{23}}; \frac{b_{13}}{b_{13} + b_{23}}; 0 \right),$$

u holda ularning $V_{19} \circ V_{20}$ kompozitsiyasi ham quyidagi neytral nuqtaga ega bo'ladi:

$$N^* \left(\frac{b_{13}a_{23}}{(b_{13} + 1)(a_{13} + a_{23})}; \frac{b_{13}a_{13} + a_{13} - b_{13}}{(b_{13} + 1)(a_{13} + a_{23})}; 0 \right).$$

Quyida 1993-2021 yillarda jahonda OIT/OITS virusi bilan zararlanganlar dinamikasi keltirilgan.



6-rasm. 1993-2021 yillarda jahonda OIT/OITS virusi bilan zararlanganlar dinamikasi. Qizil rang aniq fakt, yashil rangda bashorat, ko'k rangda boshlang'ich shartni o'zgartirilgan bashorat.

“Diskret Lotka-Volterra dinamik sistemalar va ularning ekosistemadagi biogenlarning aylanish siklini modellashtirishda qo'llanilishi” nomli oxirgi bobning maqsadi – to‘rt o‘lchovli simpleksda aniqlangan bir jinsli diskret Lotka-Volterra dinamik sistemalar traektoriyalarining asimptotik harakatlari dinamikasini tahlil qilish va ularning xususiyatlarini ixtiyoriy o‘lchamli simpleks uchun umumlashtirishdan iborat. Bunda diskret dinamik sistemaning qo‘zg‘almas nuqtalari kartalaridan foydalanib, toq sondagi noldan farqli koordinatali qo‘zg‘almas nuqtalarning mavjudlik mezonlari topilgan va bu natijalar ixtiyoriy o‘lchamli simpleksda aniqlangan akslantirishlar uchun umumlashtirilgan. Olingan analitik natijalar ekosistemada uglerod va fosforning aylanish siklini tadqiq qilishga qo‘llanilgan.

Birinchi paragrafning asosiy natijalari:

20-teorema. Agar simpleks S^{m-1} ning Γ_α yog‘i ichki qo‘zg‘almas nuqtaga ega bo‘lsa, u holda α uchli T_m turnirosti kuchlidir.

Bunda $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $\alpha \subset I$, $X = \{x(\alpha) : \alpha \subset I\}$ – qo‘zg‘almas nuqtalar to‘plami.

21-teorema. V akslantirishning uchta musbat x_i, x_j, x_k koordinatali qo‘zg‘almas nuqtasi mavjud bo‘lishi uchun uchlari i, j va k da bo‘lgan T turnirosti siklik uchlikka izomorf bo‘lishi zarur va yetarli.

3-lemma. Agar $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ lar turli xil ishoraga ega bo‘lsa, u holda qo‘zg‘almas nuqtalar kartasi tranzitiv uchlikni tashkil etadi va simpleks ichki qo‘zg‘almas nuqtaga ega emas.

4-lemma. Agar $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ larning ishoralari bir xil bo‘lsa, u holda qo‘zg‘almas nuqtalar kartasi gamilton siklini tashkil etadi va simpleks ichki qo‘zg‘almas nuqtaga ega.

Bunda $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ – kososimmetrik matritsaning juft tartibli bosh minorlari.

22-teorema. T_m turnirda ixtiyoriy ikkita kuchli uchliklar qo‘shnidir, bunda birining ichki qo‘zg‘almas nuqtasi – P nuqta, ikkinchisi esa – Q nuqta.

23-teorema. Agar G_{m-1} – tranzitiv turnir bo‘lsa, u holda V simpleksga tegishli besh va undan ortiq toq sondagi noldan farqli koordinatali qo‘zg‘almas nuqtaga ega emas.

24-teorema. G_{m-1} – kuchli turnir. U xolda V operator S^{m-1} simpleksga tegishli besh va undan ortiq toq sondagi noldan farqli koordinatali qo‘zg‘almas nuqtaga ega.

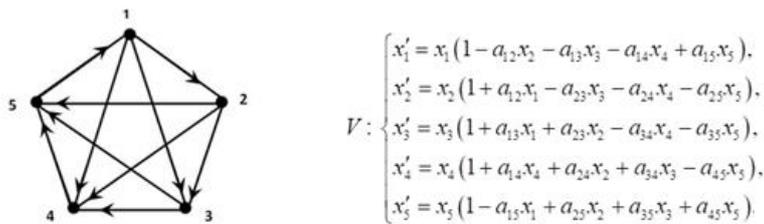
Ikkinchi paragrafda ikkita qo‘shni qo‘zg‘almas nuqtalarni tutashtiruvchi invariant egri chiziq mavjudligi isbotlangan. Qo‘zg‘almas nuqtalar kartasi va uning xarakteriga asoslangan holda, uchlari kuchli yoqlarning ichki qo‘zg‘almas nuqtalarida bo‘lgan invariant sirt mavjudligi va bu sirt to‘liq itaruvchi qo‘zg‘almas nuqtalardan iborat ekanligi isbotlangan.

25-teorema. Agar C_* va C_{**} qo‘zg‘almas nuqtalar (p, q) juftlikni tashkil qilsa, u holda C_* nuqtaning biror atrofida V akslantirish lokal diffeomorfizm bo‘ladi va C_* va C_{**} nuqtalarni tutashtiruvchi invariant egri chiziq mavjud.

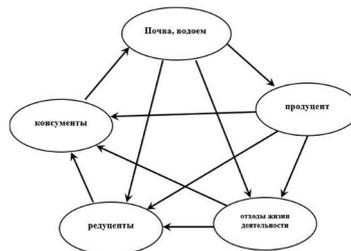
26-teorema. Agar kuchli yoqlar uchun ham p , ham q xarakterga ega qo‘zg‘almas nuqtalar qo‘shni bo‘lsa, u holda shu nuqtalardan o‘tuvchi invariant sirt mavjud bo‘lib, bu sirt butun simpleks uchun ham p , ham q xarakterdagi qo‘zg‘almas nuqtalardar iborat bo‘ladi.

27-teorema. Agar S^4 da aniqlangan bir jinsli turnirlarga mos Lotka-Volterra akslantirishi uchun $\Delta_i = 0, i = \overline{1,5}$ bo‘lsa, u holda kuchli yoqlar ichki qo‘zg‘almas nuqtalarining qavariq qobig‘i repeller nuqtalardan iborat invariant sirt bo‘ladi.

Bobning oxirgi paragrafi oldingi ikki paragraflardan olingan analitik natijalarni ekosistemada uglerod va fosforning aylanish siklini tadqiq qilish uchun qo‘llanilgan. Quyidagi Lotka-Volterra akslantirishi va unga mos turnirni qaraymiz:



Ushbu akslantirish va uning turniri ekosistemada moddaning aylanishini tavsiflovchi modeldir: 1-uch tuproq yoki rezervuar, 2-uch produtsentlar (ishlab chiqaruvchilar), 3-uch barcha organizmlarning chiqindilari va ularning o‘lik biomassasi, 4-uch redutsentlar (tiklovchilar) va nihoyat, 5-uch konsumentlar (iste‘molchilar)ni aniqlasin. Modelni bu tushunchalarga muvofiq shakllantiramiz:



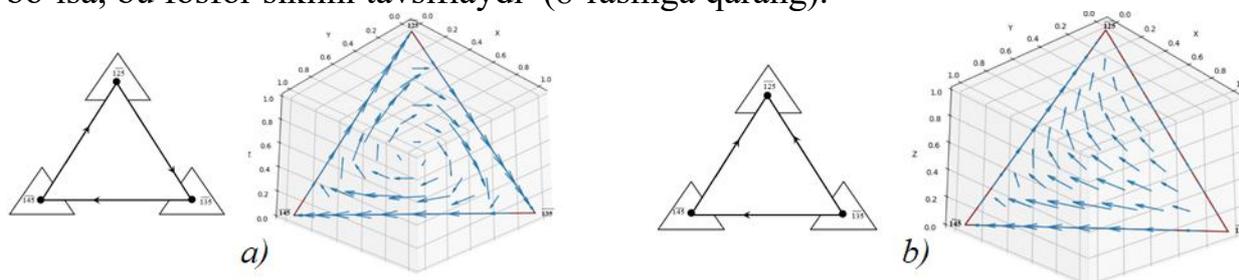
7-rasm. Ekosistemada moddaning aylanish modeli.

28-teorema. Agar qo‘zg‘almas nuqtalar kartasi G_V tranzitiv turnirni tashkil qilsa, u holda V akslantirish S^4 simpleksda beshta koordinatasi noldan farqli ichki qo‘zg‘almas nuqtaga ega emas.

29-teorema. Agar qo‘zg‘almas nuqtalar kartasi G_V kuchli turnirni tashkil qilsa, u holda V akslantirish S^4 simpleksda beshta koordinatasi noldan farqli ichki qo‘zg‘almas nuqtaga ega.

2-natija. Agar V akslantirishning beshta noldan farqli koordinatali ichki qo‘zg‘almas nuqtasi yagona bo‘lsa, u holda $\overline{125}$, $\overline{135}$ va $\overline{145}$ siklik uchliklarning ichki qo‘zg‘almas nuqtalari gamilton siklni tashkil qiladi, teskarisi umuman olganda o‘rinli emas.

Karta kuchli uchlikni tashkil qilsa, bu uglerod siklini, tranzitiv uchlik xosil bo‘lsa, bu fosfor siklini tavsiflaydi (8-rasmga qarang).



8-rasm. a) Uglerod siklining kartasi va fazali portreti; b) fosfor siklining kartasi va fazali portreti.

XULOSA

Mazkur dissertatsiya ishi havo tomchi va jinsiy yo‘l bilan yuqadigan residiv va residiv bo‘lmagan virusli kasalliklarni, shuningdek ekosistemada uglerod va fosforning aylanish siklini matematik modellashtirish masalalariga bag‘ishlangan. Dissertatsiya ishida olib borilgan ilmiy natijalar asosida quyidagi xulosalar olingan:

- aynigan kososimmetrik matritsaga ega Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalarining ichki nuqtalari traektoriyalarining dinamikasi tahlil qilingan. Graflar nazariyasi elementlaridan foydalangan holda, ko‘rib chiqilayotgan akslantirishlar ichki nuqtalari traektoriyalarining asimptotik holati tatqiq qilingan. Kvadratik akslantirishlar simpleksning avtomorfizmlari bo‘lganligi sababli, ularning musbat va manfiy traektoriyalarining limit nuqtalari to‘plami mavjudligi isbotlangan;

- aynigan kososimmetrik matritsaga ega Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalari asosida havo-tomchi yo‘li orqali yuqadigan virusli kasalliklar tarqalishini izohlaydigan diskret SIR , $SEIR$, $SEIRS$, $SIRD$ modellari qurilgan. Bu modellarda epidemiya (kasallik) ning boshlanishini tavsiflovchi manfiy traektoriyaning limit nuqtalari to‘plami va tugashini aniqlovchi musbat traektoriyaning limit nuqtalari to‘plami topilgan. Olingan natijalar asosida modellarda populyatsiyaning barcha qatlami uchun raqamli va qiyosiy tahlil qilingan, hamda natijalarning vizualizatsiyasi olingan. Modellar O‘zbekistonda COVID-19 kasalligi ефкйфдшқршоqimini (15.03.2020 dan 31.12.2020 gacha), Rossiyada tuberkulyoz (2000-2018 yillar)ning oqimi tekshirilgan.

– ikki o‘lchamli simpleksda aniqlangan aynigan va aynimagan kososimmetrik matritsaga ega Lotka-Volterra akslantirishlari kompozitsiyalarining ichki nuqtalari traektoriyalarining asimptotik harakatining dinamikasi tahlil qilingan va ular qo‘zg‘almas nuqtalarining kartalari qurilgan. Kompozitsiyalar asosida residiv va residiv bo‘lmagan jinsiy yo‘l bilan yuqadigan kasalliklarni tarqalish jarayoni modellashtirilgan; modellar jahon miqyosida OIT/OITS virusining 1993-2021 yillarda tarqalishining statistik ma’lumotlarida tekshirilgan;

– ixtiyoriy $(m-1)$ -o‘lchamli simpleksda aniqlangan bir jinsli turnirlarga mos Lotka-Volterra diskret dinamik sistemalari traektoriyalarining asimptotik harakatlarining dinamikasi tahlil qilingan, qo‘zg‘almas nuqtalarning kartalari qurilgan;

– toq sondagi noldan farqli koordinataga ega qo‘zg‘almas nuqtalarning mavjudlik mezonlari topilgan va ushbu natijalar ixtiyoriy o‘lchamli simpleksda aniqlangan Lotka-Volterra sistemalarining holatiga umumlashtirilgan;

– simpleksning uchlaridan tashqari uning kuchli yoqlariga tegishli qo‘zg‘almas nuqtalarini topish algoritmi tuzilgan va bu qo‘zg‘almas nuqtalarni tutashtiruvchi invariant egri chiziqlar mavjudligi isbotlangan;

– kuchli yoqlarga tegishli qo‘zg‘almas nuqtalardan o‘tuvchi invariant sirt mavjudligi va uning repeller nuqtalardan iborat ekanligi isbotlangan; olingan analitik natijalar ekologik masalalar, xususan, uglerod va fosforning ekosistemada aylanish siklini tavsiflash uchun qo‘llanilgan;

– barcha qurilgan modellarning dinamikasini vizual ko‘rish maqsadida, Delphi10Lite va Python 3.10.10 dasturlash tillarida amaliy dasturlar majmui tuzilgan; ichki nuqtalarning traektoriyalari dinamikasini sonli yechish algoritmlari va dasturlar majmuasi ishlab chiqilgan va buning asosida modellarning fazali portretlari vizualizatsiya qilingan;

– dissertatsiya ishi 6 ta ilovalardan iborat bo‘lib, ularda har bir qurilgan model qaysi kasallikni tavsiflashi haqida ma’lumotnoma, dissertatsiyaning asosiy qismiga kiritilmagan ba’zi sonli algoritmlar, dasturlar komandalari va guvohnomalar keltirilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА по
ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК**

**ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТРАНСПОРТНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

ЭШМАМАТОВА ДИЛФУЗА БАХРОМОВНА

**ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ЭПИДЕМИОЛОГИИ, ЭКОЛОГИИ:
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ**

**05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ
(физико-математические науки)**

**АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ (DSc) ДИССЕРТАЦИИ
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент-2023

Тема докторской (DSc) диссертации по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за B2023.3.DSc/FM231.

Диссертация выполнена в Ташкентском государственном транспортном университете.

Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) и информационно-образовательном портале «Ziynet» (www.ziynet.uz).

Научный консультант:	Ганиходжаев Расул Набиевич доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Темирбеков Нурлан Муханович доктор физико-математических наук, профессор академик (Казахстан) Жамилов Уйгун Умирович доктор физико-математических наук, профессор Садуллаева Шахло Азимбаевна доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация	Самаркандский государственный университет

Защита диссертации состоится «___» _____ 2023 года в ___ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2023 года.
(протокол рассылки №___ от _____ 2023 года).

М.Арипов
Председатель Научного совета по
присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Учёный секретарь Научного совета по
присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

А.С.Матякубов
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской (DSc) диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Огромный объём исследований, проводимых во всем мире направлены методам описания различных структур и процессов в нелинейной динамике, их эволюции во времени и пространстве, а также процессам, которые вовлечены сложные структуры. Все это составляет костяк многочисленных научных исследований с практическими приложениями, которые в итоге приводят к изучению динамических свойств квадратичных отображений. Являясь наиболее развитой областью современной математики, эти отображения тесно связаны с математическим и функциональным анализом, дифференциальными уравнениями, теорией вероятностей и теорией графов, на основе которых строятся математические модели, в том числе важной неотъемлемой частью остаётся совершенствование способов решения численных методов этих задач.

Ни для кого не секрет, что на сегодняшний день в мире математическое моделирование эпидемиологических и экологических процессов играет важную роль в развитии науки, экономики и технологий. Особое место при этом среди квадратичных отображений занимают дискретные отображения Лотки-Вольтерры. Актуальность исследований данных отображений объясняется тем, что они применимы для моделирования инфекционных заболеваний, передающихся аэрозольным и половым путём, а также для моделирования круговорота биогенов в экосистеме. На современном этапе в борьбе с инфекционными заболеваниями достигнут значительный прогресс, и это, в свою очередь, привело к обманчивому впечатлению, что эпидемиология инфекционных заболеваний решила свои основные проблемы. Но, несмотря даже на то, что достигнуто существенное снижение уровня заболеваемости инфекционными болезнями, они продолжают причинять большой ущерб здоровью людей и экономике любой страны. Отметим, что при решении практических задач такого типа выявление всех свойств дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры, то есть нахождение их неподвижных точек, анализ их локальных и глобальных характеров, анализ динамики асимптотического поведения траекторий внутренних точек, а также анализ асимптотического поведения траекторий композиций этих отображений с использованием элементов теории графов составляют основу целенаправленных научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется таким актуальным направлениям, как динамические системы с научным и практическим внедрением фундаментальных наук, разработка методов численного и аналитического решения их естественных и практических задач. Это и составляет основу для установления тесных и взаимовыгодных связей между математиками и учеными из других областей. В этом ключе нужно отметить технические и экономические науки, так как среди специалистов этих сфер устойчиво функционируют совместные коллективы, но в биологии и эпидемиологии, особенно в экологии этот процесс пока находится в

зачаточном состоянии. Проведение исследований на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» является одним из основных задач деятельности института Математики им. В.И. Романовского АН РУз.¹ В целях обеспечения исполнения постановления важным является развитие решений задач эпидемиологии, экологии с применением дискретных динамических систем

Настоящая диссертационная работа в определённой степени служит решению задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», № УП-5847 от 8 октября 2019 года «Об утверждении концепции развития системы высшего образования республики Узбекистан до 2030 года», № УП-6198 от 27 апреля 2018 года «О совершенствовании системы государственного управления в сфере развития научной и инновационной деятельности», в Постановлениях ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», а также в других нормативно-правовых документах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в Республике. Данная диссертационная работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации².

Научные исследования, направленные на исследование квадратичных отображений Лотки-Вольтерры, действующих в конечномерном симплексе, проводятся в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, среди них University of California (AQШ), Universidad de Santiago de Compostela (Испания), Institute for Calculus Applications (Италия), University of Oxford (Великобритания), Mathematisches Institut, RWTH Aachen University (Германия), Universidad Carlos III de Madrid (Испания), Southern University at New Orleans, National Taiwan Normal University (Тайвань), Zhongshan University, Jilin University, Southeast University, Nantong University,

¹ Постановление Президента Республики Узбекистан «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 7.05.2020 г. № 4708.

² Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации составлен на основе следующих источников: Universal Journal of Computational Mathematics, International Mathematical Journals: Nonlinear Analysis, Applied Mathematical Modelling, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Математическая биология и биоинформатика, Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, Компьютерные исследования и моделирование, Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. <http://www.springer.com/mathematics>; <https://www.aimsociences.org>; <http://www.sciencedirect.com/science/jrnallbooks/sub/mathematics>;

Central South University (Китай), Paris Mathematics Center, Université Paris-Dauphine (Франция), Московский государственный университет (Россия), Казахский национальный университет (Казахстан), Национальный университет Узбекистана, Самаркандский государственный университет, институт математики имени В.И. Романовского АН РУз и др.

Всемирные исследования динамики процессов математической биологии и популяционной генетики, характеризующиеся непрерывными и дискретными динамическими системами, дали ряд научных результатов, в том числе, разработаны итерационные методы для систем вариационных включений с использованием аккреционных операторов и их приложений (Institute for Calculus Applications); определена эволюционная алгебра в популяционной генетике, соответствующая двуполой популяции с набором самок, разделённых на конечное число различных типов, и самцами, имеющими только один тип (Universidad de Santiago de Compostela, институт математики имени В.И. Романовского АН РУз); с помощью автономных систем дифференциальных уравнений построены модели *SIR*, *SEIR*, и с использованием линейной и нелинейной функции Ляпунова установлена глобальная стабильность равновесия без болезней и состояния эндемического равновесия, соответственно (Southern University at New Orleans, National Taiwan Normal University, Zhongshan University, Jilin University, Southeast University, Nantong University, Central South University); введено семейство четырёхпараметрических квадратичных стохастических операторов Вольтерры для бисексуальной популяции (т.е. каждый индивид популяции должен принадлежать либо к женскому, либо к мужскому полу); доказано, что независимо от параметров каждый такой оператор имеет по крайней мере две фиксированные точки. Более того, при некоторых условиях по параметрам оператор имеет бесконечно много фиксированных точек (University of California, институт математики имени В.И. Романовского АН РУз); разработаны стохастические возмущения в эпидемических моделях *SIR* и *SEIR* с насыщенной заболеваемостью и исследованы их динамика в соответствии с базовым репродуктивным числом, изучая поведение двух стохастических систем в течение длительного времени с использованием стохастических функций Ляпунова (University of Oxford, Mathematisches Institut, RWTH Aachen University, Universidad Carlos III de Madrid Paris Mathematics Center, Université Paris-Dauphine, институт математики АН России, Московский государственный университет, Казахский национальный университет).

Ряд научных исследований, проводимые в мире по ряду приоритетных направлений, направленные численным моделированием непрерывных моделей, связаны с динамикой эпидемиологических процессов, включая распространение инфекций с использованием систем простых дифференциальных уравнений; определение в них стационарных состояний; построение функций Ляпунова; исследование методами вероятностных клеточных автоматов, аналогичные колебаниям, наблюдаемых в возбудимых системах обыкновенных дифференциальных уравнениях. При этом

предлагаемые компартментарные модели с динамическим регулированием численности популяции демонстрируют, как стационарные режимы, соответствующие устойчивым состояниям равновесия в модели среднего поля, так и отсутствующий в ней режим самоподдерживающихся колебаний с выраженной периодической составляющей, а также в моделях такого типа актуально нахождение базового репродуктивного числа.

Степень изученности проблемы. Приоритетное назначение математики на основе решений прикладных задач – это формирование новых направлений. В ходе развития задач физики, механики, а также геометрии возродился весь классический анализ. При решении конкретных задач выявляется, что сфера применения математики выходит далеко за их пределы. В современное время многие задачи химии, техники, технологии, естествознания, биологии, экологии, эпидемиологии, популяционной генетики, а также экономике решаются методами математического и функционального анализа с применением теории графов. При решении задач такого рода нельзя недооценивать дискретность исследуемых процессов. В классическом анализе в качестве модели исследуемых явлений принято использовать в основном непрерывные модели. Этот факт особенно выделяется в задачах как физики, так и механики, так как здесь объектом математического изучения являются непрерывные среды, траектории, поля и т. п. Касательно биологии и эпидемиологии, то для этих наук важной характеристикой является структурированность изучаемых объектов.

Основоположниками непрерывных динамических систем, возникших из качественной теории дифференциальных уравнений являются А. Пуанкаре, Дж. Биркгоф, А. Андроноу, А. Н. Колмогоров и другие. Непрерывные динамические системы в основном исследуют глобальную топологическую картину поведения решений дифференциальных уравнений на многообразиях. В последние годы теория динамических систем бурно развивается по многим направлениям. В связи с этим отметим прекрасные математические объекты – множества Мандельброта и Жюлиа – им едва ли исполнилось десять лет, и большая часть исследований, связанных с этими объектами, сосредоточена вокруг итераций квадратичных функций. За последние два века достаточно много математиков занимаются исследованием задач популяционной генетики. В этих задачах естественным образом возникают квадратичные отображения конечномерного симплекса. Впервые простейшие модели генетических систем были исследованы в работах Томаса Роберта Мальтуса (1766-1834) и Пьера Франсуа Ферхюльста (1804-1849). Рассматривая историю исследований, направленных изучению взаимодействующих популяционных процессов и их математическому моделированию, ни для кого не секрет, что она описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений, которую в середине 20-х годов прошлого века независимо друг от друга предложили Алфред Лотка и Вито Волтерра. При этом нельзя не учесть вклад в развитии математической биологии таких учёных как Г. Х. Харди, Ю. И. Любич, Г. Кестен, С. Н. Бернштейн, Э. Ферми, А. А. Ляпунов, Г. Ф. Гаузе,

Ж.Паста, С.Улам, А.Н.Колмогоров, Ю.М.Свирижев, Д.С.Чернавский, Ю.М.Романовский, Н.В.Степанов, Г.Р.Иваницкий, В.И.Кринский и др.

В Узбекистане вероятностные методы к изучению динамических систем впервые применил академик Т.А.Сарымсаков. По его инициативе школа Ташкентских математиков начала детально изучать дискретные динамические системы. В развитии качественной теории дифференциальных уравнений, теории квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа с применением теории графов нельзя не отметить роль Р.Н.Ганиходжаева, основу которой составляет изучение предельного поведения траекторий квадратичных отображений. Кубические стохастические операторы, заданные на конечномерном симплексе исследованы в научных трудах Н.Н.Ганиходжаева, У.А.Розикова, Ф.А.Мухаммедова, У.У.Жамилова М.Ладра, А.Ю.Хамраева, Ф.А.Шахиди, М.Сабурова. Задачи, связанные с классификацией неподвижных точек динамических систем Лотки-Вольтерры с кососимметрическими матрицами, не являющимися матрицами общего положения, а также эргодические свойства отображений Лотки-Вольтерры для четырёхмерного симплекса рассмотрены в работах К.А. Курганова. Но вопросы, касающиеся конкретного применения дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры и их композиций к эпидемиологическим и экологическим ситуациям, до сегодняшнего дня остаются открытыми.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего учебного заведения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование проводилось в рамках научно-исследовательского проекта №28/2022 «Создание комплекса расчётных программ с учетом нелинейного взаимодействия элементов железнодорожных мостов при реальных сейсмических воздействиях», согласно плана научно-исследовательских работ Ташкентского государственного транспортного университета.

Целью исследования являются построение дискретных моделей заболеваний, передающихся воздушно-капельным и половым путём, а также круговорота биогенов в экосистеме и разработка численно-аналитических решений.

Задачи исследования:

выявление условий существования множеств предельных точек положительной и отрицательной траекторий, вырожденных дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры;

построение дискретных моделей, вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём; определение для них множества предельных точек положительной и отрицательной траектории, означающих начало болезни (очаг болезни) и её конец;

для композиций дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры анализировать динамику асимптотического поведения траекторий внутренних точек, построение их карт неподвижных точек и на основе этого построение

дискретных моделей течения вирусных заболеваний, передающихся половым путём. Выявление бассейнов инфицированной части популяции;

выявление критерий существования неподвижных точек с нечётными ненулевыми координатами для отображений Лотки-Вольтерры с однородными турнирами, действующих в S^{m-1} , построение для них карт неподвижных точек;

составление алгоритма для нахождения неподвижных точек помимо вершин симплекса, принадлежащих сильным граням и доказать для этих отображений существование инвариантных кривых и инвариантной поверхности, проходящих через неподвижные точки, принадлежащие сильным граням; на основе аналитических результатов построить дискретную модель, описывающую цикл круговорота биогенов в экосистеме;

составить алгоритм для нахождения устойчивых и неустойчивых решений полиномиальных уравнений для каждой построенной модели; составить комплекс прикладных программ; сделать численный анализ и визуализировать фазовые портреты моделей. Проверить полученные результаты для реальных ситуаций.

Объект исследования – течение инфекционных заболеваний, передающиеся воздушно-капельным и половым путём, описываемые вырожденными дискретными динамическими системами Лотки-Вольтерры. Цикл круговоротов углерода и фосфора, описываемые однородными динамическими системами Лотки-Вольтерры, действующие в S^4 .

Предмет исследования – вырожденные и невырожденные квадратичные автоморфизмы симплекса Лотки-Вольтерры и их композиции. Дискретные модели, описывающие течение инфекционных заболеваний, передающиеся воздушно-капельным и половым путём, а также цикл круговоротов углерода и фосфора, описываемые однородными динамическими системами Лотки-Вольтерры, действующие в S^4 , нахождение аналитических и численных решений, построение их фазового портрета.

Методы исследования. В данной диссертации использованы методы функционального и математического анализа, общей алгебры, топологии и теории динамических систем, теории графов, вычислительные методы полиномиальных уравнений, методы итераций. При построении комплекса прикладных программ использованы языки программирования Python 3.10.0, Delphi 10 Lite и система Wolfram Mathematica 10.

Научная новизна диссертационного исследования следующая:

найлены условия существования множеств предельных точек положительной и отрицательной траекторий, вырожденных дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры;

построены дискретные компартментарные *SIR*, *SEIR*, *SEIRS*, *SIRD* модели течения вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём;

анализирована динамика асимптотического поведения траекторий внутренних точек для композиций дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры;

на основе композиций построены дискретные модели течения вирусных заболеваний, передающихся половым путём; определены бассейны инфицированной части популяции рецидивными и нерецидивными инфекциями;

найлены критерии существования неподвижных точек с нечётными ненулевыми координатами для отображений Лотки-Вольтерры с однородными турнирами, действующих в S^{m-1} ;

построен алгоритм для нахождения неподвижных точек помимо вершин симплекса, принадлежащих сильным граням и доказаны существования инвариантных кривых и инвариантной поверхности, проходящие через неподвижные точки, принадлежащие сильным граням; на основе аналитических результатов построена дискретная модель, описывающая цикл круговоротов углерода и фосфора в экосистеме;

найлены устойчивые и неустойчивые решения полиномиальных уравнений для дискретных моделей течения заболеваний, передающихся воздушно-капельным и половым путём, а также для цикла круговоротов углерода и фосфора в экосистеме;

построены алгоритмы для численных решений дискретных моделей течения вирусных заболеваний и круговорота биогенов в экосистеме, а также созданы комплексы прикладных программ.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

полученные результаты исследований и методы использованы в вопросах популяционной генетики, эпидемиологии;

дискретные модели, построенные в работе, применены в диагностике течения вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным (COVID-19, туберкулёз) и половым путём (ВИЧ инфекция);

найденные критерии существования неподвижных точек с нечётными ненулевыми координатами, построенные карты неподвижных точек для дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры применены к исследованию круговорота углерода и фосфора в экосистеме.

Достоверность результатов исследований обоснована использованием методов математического и функционального анализа, топологии, теории динамических систем, теории графов, а также строгостью математических рассуждений. На основе аналитических результатов были построены дискретные модели процессов, численные результаты были сопоставлены с аналитическими результатами и оценена их точность. Полученные аналитические результаты подтверждены использованием комплекса прикладных программ, написанных на языках Python 3.10.0, Delphi 10 Lite, а также в системе Wolfram Mathematica 10. Также как аналитический, так и численный анализы теоретически обоснованы в соответствии с реальными эпидемиологическими и экологическими процессами.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость полученных результатов диссертационной работы заключается в модификации построения дискретных компартментарных

моделей *SIR*, *SEIR*, *SEIRS*, *SIRD*, для дальнейшего исследования течения заболеваний, передающихся аэрозольным, фекально-оральным и половым путём, основанные на вырожденных дискретных динамических системах Лотки-Вольтерры, действующих в S^4, S^6 . Также построенные дискретные модели для исследования круговоротов углерода и фосфора развить для круговоротов других сложных биогенов, например, азота.

Практическая значимость определяется широким диапазоном применения дискретных моделей при решении конкретных задач в эпидемиологии и экологии, а также применение этих моделей в экономике и в других областях. Полученные модели можно применить в лабораторных исследованиях для изучения круговорота углерода и фосфора, в проверке статистических данных развития заболеваний, передающихся воздушно-капельным и половым путём. Практические результаты, построенных дискретных моделей, объясняются лабораторными исследованиями, в частности анализом циркуляции углерода и фосфора, предотвращением распространения заболеваний, передающихся воздушно-капельным и половым путём, а также выделением и уменьшением бассейна инфицированной части популяции.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в диссертационной работе использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты описания квадратичных гомеоморфизмов конечномерного симплекса и динамических свойств их композиций, при исследовании динамики асимптотических поведений траекторий их внутренних точек, при решении задач теории дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры использованы в рамках гранта ОТ-Ф4-31 «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексах». Идеи используется при исследовании вырожденных случаев отображений Лотки-Вольтерры с применением теории графов, для получения алгоритма нахождения неподвижных точек с нечётными ненулевыми координатами отображений Лотки-Вольтерры с однородными турнирами и в доказательстве существования инвариантной поверхности для них (справка Национального университета Узбекистана от 22 мая 2023 года, № 04/11-3068). Применение научного результата позволило построить дискретные модели *SIR*, *SEIR*, *SEIRS*, *SIRD* с целью применения этих динамических систем для исследования эпидемиологических процессов, а также полностью классифицировать и построить карты неподвижных точек отображений Лотки-Вольтерры, действующие двумерном симплексе;

на основе построения карт неподвижных точек для систем Лотки-Вольтерры анализированы циклы круговоротов углерода и фосфора в экосистеме и эти результаты использованы в научном проекте UMT/CRIM/2-2/2/14 (2019-2020 гг.) «Модифицированный метод гомотопического анализа для нахождения коэффициента силового кабеля» для определения свойств квадратичных гомеоморфизмов симплекса, а также вырожденных и

невырожденных отображений Лотки-Вольтерры (Справка Малазийского университета Теренггану от 30 мая 2023 года, № УМТ/ФТККИ/500-35). Применение научных исследований позволило для вырожденных отображений Лотки-Вольтерры проанализировать динамику как положительной, так и отрицательной траекторий внутренних точек, а также для их композиций. Аналитический подход дал возможность для полного анализа построенных моделей для построения их фазового портрета и численного анализа;

полученные аналитические и численные результаты составленных комплекса прикладных программ для композиции отображений Лотки-Вольтерры, действующих в двумерном симплексе использованы в рамках исследовательского проекта № 28/2022 “Создание комплекса расчетных программ с учетом нелинейного взаимодействия элементов железнодорожных мостов при реальных сейсмических воздействиях” дали возможность оценки технического состояния железнодорожного моста – реалистичную регистрацию различных землетрясений в сейсмическом состоянии, а также использованы для проверки данных, отображаемых в рабочем интерфейсе программного комплекса, создаваемого для введённых и доступных пользователю мостовых сооружений (справка Ташкентского государственного транспортного университета от 19 июня 2023 года, № 04/01-3729). Применение научных результатов позволило оценить сейсмические воздействия на железнодорожные мосты;

результаты об асимптотическом поведении траектории дискретных отображений Лотки-Вольтерры с однородными турнирами, а также динамика внутренних точек композиции этих отображений, описание динамического поведения свойств некоторых классов генетических алгебр, в частности, для моделирования течения вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным и половым путём, а также для моделирования круговорота биогенов использованы в различных типах алгебр бисексуальных популяций в исследовательском проекте PID2020-115155GB-100 (European FEDER support included, EU) «Homology, homotopy and categorical invariants in groups and nonassociative algebras» Университета Сантьяго де Компостелла (Справка Университета Сантьяго де Компостелла). Это позволило применить научные результаты, связанные с условиями, найденных для параметров, выяснить в какой части населения начинается эпидемия и в какой части она заканчивается.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации представлены и обсуждены на 33-х научно-практических конференциях, в том числе на 21 международных и 12 республиканских, а также в научном семинаре института математики имени В.И.Романовского академии наук РУз «Операторные алгебры и её приложения», на семинаре имени Т.А.Саримсакова «Функциональный анализ и его приложения» НУУз, а также на семинаре лаборатории “Моделирование сложных систем” в научно-

исследовательском институте «Развития цифровых технологий и искусственного интеллекта».

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 50 научных работ, из них 17 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора наук (DSc), в том числе 12 из них опубликованы в зарубежных журналах (8 из них входят в базу данных Scopus), 5 в республиканских научных изданиях и 33 тезисов докладов в материалах научных конференций, а также получены 8 сертификатов на пакет прикладных программ из Агентства интеллектуальной собственности при Министерстве юстиции Республики Узбекистан.

Структура и объем диссертации. Структура диссертации состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованной литературы, и приложений. Объем диссертации составляет 198 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Дискретные и непрерывные модели систем Лотки-Вольтерры**», приведены известные факты о непрерывных моделях, описывающих процессы в популяционной генетике и эпидемиологии, а также известные факты о дискретных отображениях Лотки-Вольтерры и новые результаты их вырожденных случаев. В первом параграфе этой главы описаны элементы качественного анализа динамических систем с непрерывным временем и приведено полное описание точек покоя динамических систем с непрерывным временем, предельных множеств траекторий. Во втором параграфе приведены понятия из математической теории межвидовых отношений и классификация межвидовых отношений, описываемых непрерывной моделью Лотки-Вольтерры, а также приведена классическая компартментарная модель *SIR*, введённая В.О.Кермаком и А.Г.Маккендриком (1927 г). Третий параграф главы посвящён описанию дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры и их свойствам.

Пусть $(m-1)$ -мерный симплекс в \square^m определяется соотношениями

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \subset \square^m. \quad (1)$$

В работах Р.Н.Ганиходжаева была введена каноническая форма дискретной динамической системы Лотки-Вольтерры $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$, имеющий вид:

$$V : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad (2)$$

здесь $a_{ki} = -a_{ik}, |a_{ki}| \leq 1, k, i = \overline{1, m}$.

В дальнейшем мы будем опираться на следующие факты.

Определение 1. Кососимметрическая матрица называется матрицей общего положения, если все её главные миноры чётного порядка отличны от нуля.

Теорема 1. Отображение Лотки-Вольтерры есть автоморфизм симплекса S^{m-1} .

Теорема 2. Пусть $A = (a_{ki}), k, i = \overline{1, m}$ – кососимметрическая матрица. Тогда

$$P = \left\{ x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \geq 0, k = \overline{1, m} \right\}, \quad Q = \left\{ x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \leq 0, k = \overline{1, m} \right\}$$

выпуклые непустые многогранники.

Оказалось, что в ряде прикладных задач процессы более точно описываются вырожденными случаями дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры, которые до сих пор не были рассмотрены. В работе исследованы дискретные модели конкретных задач эпидемиологии и экологии, построенных на основе вырожденных случаев систем Лотки-Вольтерры. Четвёртый параграф главы посвящён новым аналитическим результатам для вырожденных случаев дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры. Приведём основные результаты первой главы.

Теорема 3. Траектория любой внутренней точки $x \in S^2$ начинается во множестве P и заканчивается во множестве Q , т.е. $\alpha(x) \in P$ и $\omega(x) \in Q$.

Здесь $\alpha(x)$ – множество предельных точек отрицательной траектории, а $\omega(x)$ – множество предельных точек положительной траектории.

Замечание 1. Согласно теореме Гробмана-Хартмана любая траектория содержится в инвариантной кривой.

Рассмотрим систему Лотки-Вольтерры которая задаётся отображением $V : S^3 \rightarrow S^3$, при условии $0 < a, b, c, d \leq 1$. При этих ограничениях V является автоморфизмом.

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - ax_2 - bx_4), \\ x'_2 = x_2(1 + ax_1 - cx_3), \\ x'_3 = x_3(1 + cx_2 + dx_4), \\ x'_4 = x_4(1 + bx_1 - dx_3). \end{cases}$$

Пусть Γ_{123} – грань симплекса S^3 , натянутая на вершины $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1, 0)$. Отметим, что любая грань симплекса также является симплексом, причем она инвариантна при отображении V , и сужение V на эту грань также является отображением Лотки-Вольтерры.

Следовательно, на гранях Γ_{123} и Γ_{134} динамика траекторий описывается этой системой, а на остальных гранях поведение траекторий тривиально.

Теорема 4. Любая траектория отображения V сходится. Если начальная точка находится внутри симплекса S^3 , то

$$\alpha(x^0) \in \left\{ \left(\frac{(1-t)a+c}{a+c}, 0, \frac{ta}{a+c}, 0 \right) \right\}, \quad \omega(x^0) \in \left\{ \left(\frac{(1-t)b+d}{b+d}, 0, \frac{tb}{b+d}, 0 \right) \right\},$$

где $0 < t \leq 1$. Следовательно, пределы отрицательной и положительной траекторий принадлежат грани Γ_{13} .

Это означает, что если закон эволюции какой-либо системы определяется отображением V , тогда начало и конец эволюции находятся на грани Γ_{13} .

Вторая глава называется «**Дискретные модели вирусных заболеваний, передающиеся воздушно-капельным путём**». Рассмотрим дискретную модель распространения вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём, которая описывается дискретной динамической системой Лотки-Вольтерры

$$V: S^2 \rightarrow S^2: \begin{cases} x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)}(1 - a_{12}x_2^{(n)}), \\ x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)}(1 + a_{12}x_1^{(n)} - a_{23}x_3^{(n)}), \\ x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)}(1 + a_{23}x_2^{(n)}) \end{cases} \quad (3)$$

и приведём эпидемиологический смысл всех неизвестных x_i , $i = \overline{1,3}$:

x_1 – здоровые, но восприимчивые к инфекции особи, – группа S (susceptible);
 x_2 – инфицированные и склонные к заражению других особей, – группа I (infected);

x_3 – выздоровевшие и имеющие иммунитет к болезни особи – группа R (recovered). Тогда отображение Лотки-Вольтерры (3) примет вид:

$$V_{SIR}: \begin{cases} S^{(n+1)} = S^{(n)} - aS^{(n)}I^{(n)}, \\ I^{(n+1)} = I^{(n)} + aI^{(n)}S^{(n)} - bI^{(n)}R^{(n)}, \\ R^{(n)} = R^{(n)} + bI^{(n)}R^{(n)}. \end{cases} \quad (4)$$

В модели все три класса равномерно перемешаны – каждая особь имеет одинаковую вероятность контакта с особью из другого класса. При этом мы пренебрегаем инкубационным периодом. Преимущество предлагаемой нами модели над непрерывной – член $I^{(n)} \cdot R^{(n)}$ в третьем уравнении, который означает, что выздоровевшая особь опять подвержена инфекции. Так как модель не учитывает инкубационный период, она предназначена для моделирования процессов вирусных инфекций с очень маленьким инкубационным периодом, которым можно пренебречь.

Теорема 5. Если дискретная модель SIR описывается системой (4), тогда траектория любой начальной точки $x^0 \in riS^2$ лежит на ребре Γ_{SR} . Более того,

на этом ребре существует разделяющая нейтральная неподвижная точка $N\left(\frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b}\right) \in \Gamma_{SR}$. При этом

$$P = \left\{ x \in S^2 : Ax \geq 0 \right\} = \left\{ \left(\frac{a + (1-\lambda)b}{a+b}; 0; \frac{\lambda b}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

$$Q = \left\{ x \in S^2 : Ax \leq 0 \right\} = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)a}{a+b}; 0; \frac{b + \lambda a}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Это означает, что если начальная точка лежит слева от кривой, соединяющей вершину I и нейтральную точку N , тогда болезнь прогрессирует, но до определенного времени, и как только траектория пересекает эту кривую, то эпидемия идет на спад во множестве Q .

Теорема 6. Если неподвижные точки, принадлежащие полуотрезку \overline{SN} , составляют (p, q) пару с неподвижными точками, принадлежащими отрезку \overline{NR} , при этом в некоторой окрестности любой из точек из отрезка \overline{NR} отображение V является локальным диффеоморфизмом. Тогда существует инвариантная кривая, соединяющая пары неподвижных точек из \overline{SN} с неподвижными точками из \overline{NR} , т.е. соединяющая неподвижные точки, составляющие пару (p, q) .

Теорема 7. Множество предельных точек положительной траектории $\omega(x^0) \subset Q$ и множество предельных точек отрицательной траектории $\alpha(x^0) \subset P$. То есть это означает, что история болезни начинается во множестве P и заканчивается во множестве Q .

Замечание 2. Согласно теореме Гробмана-Хартмана, если для траектории $\alpha(x^0) \subset P$, $\omega(x^0) \subset Q$, тогда существует инвариантная кривая, содержащая как положительные так и отрицательные траектории.

Предложение 1. Множество $M = \{x \in S^{m-1} : \varphi_p(x) \geq C\}$ обладает тем свойством, что из $x^0 \in M$, следует, что вся отрицательная траектория также принадлежит множеству M . Здесь $\varphi_p(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3}$ – функция Ляпунова.

Во втором параграфе главы рассмотрены дискретные динамические системы Лотки-Вольтерры, действующие в трёхмерном симплексе, с вырожденной кососимметрической матрицей. Эти системы мы предлагаем, как дискретную модель *SEIR* – исследования нерезидивирующих вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём, с латентным периодом. Среди дискретных динамических систем с вырожденной кососимметрической матрицей течение вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём, с нерезидивирующим характером, описывают четыре случая (см. рисунок 1). В работе каждый случай проанализирован

отдельно, так как каждая модель отличается как описываемой болезнью, так и её течением.

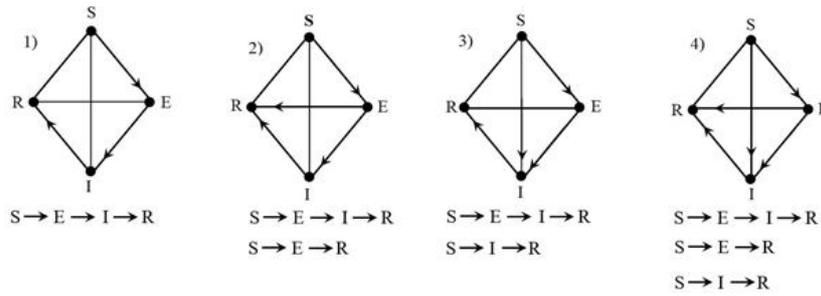


Рисунок 1. Частично-ориентированные графы, соответствующие дискретным моделям вирусных инфекций, передающихся воздушно-капельным путём, без повторного характера.

Модель 1. Как показано на рисунке 1, здесь существует только один переход из группы в группы: $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$, и система имеет вид:

$$V_1: \begin{cases} S' = S(1 - aE), \\ E' = E(1 + aS - dI), \\ I' = I(1 + dE - fR), \\ R' = R(1 + fI). \end{cases}$$

Теорема 8. Если течение заболевания описывается моделью 1, тогда множества P и Q суть следующие:

$$P = \left\{ \left(\frac{d + (1 - \lambda)a}{a + d}; 0; \frac{\lambda a}{a + d}; 0 \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, Q = \left\{ \left(0; \frac{(1 - \lambda)f}{f + b}; 0; \frac{d + \lambda f}{f + b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Итак, модель 2 имеет следующий вид:

$$V_2: \begin{cases} S' = S(1 - aE), \\ E' = E(1 + aS - dI - eR), \\ I' = I(1 + dE - fR), \\ R' = R(1 + eE + fI). \end{cases}$$

Теорема 9. Если эпидемиологическая модель описывает заболевания, при которых наблюдается два перехода $S \rightarrow E \rightarrow R$ и $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$, тогда для каждого из них выполняются следующие условия:

1) $S \rightarrow E \rightarrow R$. Этот переход соответствует тем особям, у которых заболевание не проявляет себя явно, т.е. индивид находится в латентном периоде, ситуация возникает на грани Γ_{SER} графа и на ребре Γ_{SR} существует

нейтральная разделяющая точка $N_1 \left(\frac{e}{a + e}; 0; 0; \frac{a}{a + e} \right)$. Тогда получаем

$$P = \left\{ \left(\frac{a + (1 - \lambda)e}{a + e}; 0; 0; \frac{\lambda e}{a + e} \right); \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1 - \lambda)a}{a + e}; 0; 0; \frac{e + \lambda a}{a + e} \right) \right\}, \text{ где } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Если начальная точка лежит слева от кривой, соединяющей вершину E и нейтральную точку N_1 , тогда болезнь прогрессирует, но до определенного

времени, и как только траектория пересекает эту кривую, то эпидемия идёт на спад во множестве Q .

2) $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$. Эта ситуация возникает у тех индивидуумов, которые полностью проходят все стадии заболевания. Здесь картина соответствует всему частично-ориентированному графу. Заболевание начинается на части

$$\text{ребра } \Gamma_{SI} - P = \left\{ \left(\frac{a + (1 - \lambda)d}{a + d}; 0; \frac{\lambda d}{a + d}; 0 \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

$$\text{и заканчивается на части ребра } \Gamma_{SR} - Q = \left\{ \left(\frac{(1 - \lambda)a}{a + e}; 0; 0; \frac{e + \lambda a}{a + e} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Для моделей 3 и 4 из рисунка 2 доказаны следующие результаты.

Теорема 10. Если эпидемиологическая модель описывает заболевания, при которых происходят переходы $S \rightarrow I \rightarrow R$ и $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$, тогда

1) для перехода $S \rightarrow I \rightarrow R$ выполняется следующее: при таком переходе болезнь прогрессирует немедленно, ситуация возникает на грани симплекса Γ_{SIR} . На ребре Γ_{SR} этой грани существует нейтральная точка

$$N_2 \left(\frac{f}{b + f}; 0; 0; \frac{b}{b + f} \right) \in \Gamma_{SR}. \text{ Болезнь особей, с хроническими заболеваниями}$$

начинается на части симплекса, соединяющего вершины S , I и нейтральную точку N_2 , т.е. начало болезни и её прогресс происходит во внутренних точках симплекса, в окрестности неподвижных точек части ребра Γ_{SR} , а конец в другой части этого ребра –

$$P = \left\{ \left(\frac{b + (1 - \lambda)f}{b + f}; 0; 0; \frac{\lambda f}{b + f} \right) \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1 - \lambda)b}{b + f}; 0; 0; \frac{f + \lambda b}{b + f} \right) \right\}, \text{ где } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Это означает, что если начальная точка находится слева от кривой, соединяющей вершину I и нейтральную точку N_2 , то болезнь прогрессирует до определенного времени, и как только траектория пересекает эту кривую, тогда эпидемия идет на спад, это соответствует множеству Q .

2) в случае перехода $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$ особи проходят все стадии заболевания. Заражённые особи, блуждают по всему симплексу. Болезнь начинается у особей, попавших в окрестности части ребра Γ_{SR} , т.е.

$$P = \left\{ \left(\frac{b + (1 - \lambda)f}{b + f}; 0; 0; \frac{\lambda f}{b + f} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

а затухание заболевания и конец эпидемии соответствует части ребра Γ_{ER}

$$Q = \left\{ \left(0; \frac{(1 - \lambda)d}{d + f}; 0; \frac{f + \lambda d}{d + f} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Теорема 11. Если в эпидемиологической ситуации существуют три перехода $S \rightarrow I \rightarrow R$, $S \rightarrow E \rightarrow R$, $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$, тогда для каждого из них выполняются следующие условия:

1) $S \rightarrow I \rightarrow R$: Тогда траектория любой начальной точки $x^0 \in S^3$ лежит на грани Γ_{SIR} . Более того, на ребре Γ_{SR} существует нейтральная точка

$$N_1 \left(\frac{f}{f+b}, 0, 0, \frac{b}{f+b} \right) \in \Gamma_{SR}. \text{ При этом}$$

$$P = \left\{ \left(\frac{b+(1-\lambda)f}{f+b}; 0; 0; \frac{\lambda f}{f+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)b}{f+b}; 0; 0; \frac{f+\lambda b}{f+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Если начальная точка лежит левее кривой, соединяющую вершину I и нейтральную точку N_1 , тогда болезнь прогрессирует, но до определённого времени, как только траектория перейдёт эту кривую, тогда эпидемия идёт на спад во множестве Q .

2) $S \rightarrow E \rightarrow R$: Этот переход соответствует тем особям, для которых болезнь не показывает себя явно, в модели траектория любой начальной точки $x^0 \in S^3$ лежит на грани Γ_{SER} . Более того, на ребре Γ_{SR} существует нейтральная точка

$$N_2 \left(\frac{e}{a+e}, 0, 0, \frac{a}{a+e} \right) \in \Gamma_{SR}. \text{ При этом}$$

$$P = \left\{ \left(\frac{a+(1-\lambda)e}{a+e}; 0; 0; \frac{\lambda e}{a+e} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)a}{a+e}; 0; 0; \frac{e+\lambda a}{a+e} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Если начальная точка лежит левее кривой, (т.е. состояние особи) соединяющую вершину E и нейтральную точку N_2 тогда болезнь прогрессирует, но до определённого времени, а как только траектория перейдет эту кривую, тогда эпидемия идет на спад во множестве Q .

3) $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$. Здесь ситуация происходит для тех особей, которые полностью проходят все этапы болезни, т.е. если коэффициенты переходов из групп-в группы удовлетворяют условиям:

– если $\frac{b}{f} < \frac{a}{e}$, тогда

$$P = \left\{ \left(\frac{b+(1-\lambda)f}{f+b}; 0; 0; \frac{\lambda f}{f+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)a}{a+e}; 0; 0; \frac{e+\lambda a}{a+e} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

– если $\frac{b}{f} > \frac{a}{e}$, тогда

$$P = \left\{ \left(\frac{a+(1-\lambda)e}{a+e}; 0; 0; \frac{\lambda e}{a+e} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)b}{f+b}; 0; 0; \frac{f+\lambda b}{f+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Для того, чтобы проверить адекватность предлагаемых нами моделей, приведём анализ конкретной ситуации на примере COVID-19 в Узбекистане с 15 марта 2020 года по 31 декабря этого же года (290 дней). Как мы видим по динамике, предлагаемые нами модели дают точную информацию в периоде $0 < t \leq 100$. Красная линия это фактическая статистика – $A[i]$, зелёная кривая

наш прогноз – $B[i]$. Как мы уточняли выше модели чувствительны относительно выбора начальной точки, поэтому для наглядности мы взяли новую начальную точку при $t=150$ (синяя кривая). Модель даёт точную картину для следующих 100 дней, точность итерации $\varepsilon = 10^{-4}$.



2-рasm. Сравнительная картина динамики COVID-19 в Узбекистане в период с 15.03.2020-31.12.2020 гг.

Третий параграф посвящён исследованию и моделированию рецидивирующих вирусных заболеваний. В работе показано, что среди дискретных динамических систем с вырожденной кососимметрической матрицей, действующих в S^3 , течение рецидивирующих вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём описывают четыре случая (см. рисунок 2).

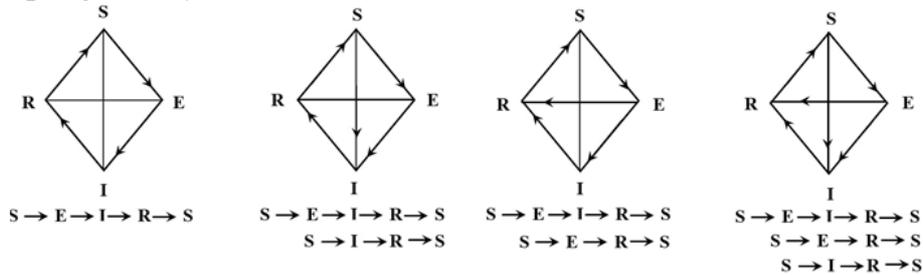
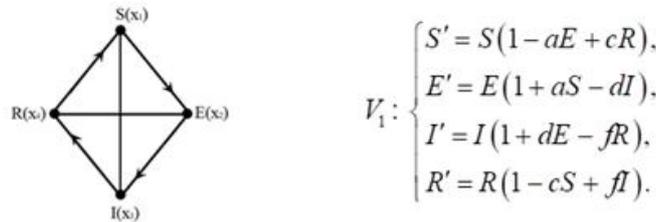


Рисунок 3. Частично-ориентированные графы, соответствующие дискретным моделям рецидивирующих вирусных инфекций, передающихся воздушно-капельным путём.

Для каждой из этих моделей получены аналитические результаты (теоремы), описывающие начало и конец эпидемиологической ситуации. Рассмотрим систему и соответствующей ей частично-ориентированный граф:



Теорема 12. Если коэффициенты отображения V_1 удовлетворяют условию $af = cd$, тогда множества P и Q совпадают и состоят из отрезка, определяемого следующим образом:

$$P = Q = \left\{ \left(\frac{d\alpha}{a+d}; \frac{c(1-\alpha)}{a+c}; \frac{a\alpha}{a+d}; \frac{a(1-\alpha)}{a+c} \right), 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}.$$

Для второго случая, когда $af < cd$, доказана

Теорема 13. Если коэффициенты отображения V_1 удовлетворяют условию $af < cd$, тогда множество P состоит из отрезка на ребре Γ_{ER} , а множество Q – на ребре Γ_{SI}

$$P = \left\{ \frac{a}{a+c} \leq R \leq \frac{d}{d+f} \right\}, \quad P = \left\{ \frac{f}{d+f} \leq E \leq \frac{c}{c+a} \right\},$$

и

$$Q = \left\{ \frac{f}{f+c} \leq S \leq \frac{d}{d+a} \right\}, \quad Q = \left\{ \frac{a}{d+a} \leq I \leq \frac{c}{c+f} \right\}.$$

Наконец, для третьего случая $af > cd$ доказана

Теорема 14. Если коэффициенты отображения V_1 удовлетворяют условию $af > cd$, тогда множество P состоит из отрезка на ребре Γ_{SI} , а множество Q из отрезка ребра Γ_{ER}

$$P = \left\{ \frac{d}{a+d} \leq S \leq \frac{f}{c+f} \right\}, \quad P = \left\{ \frac{c}{c+f} \leq E \leq \frac{a}{d+a} \right\},$$

$$Q = \left\{ \frac{c}{a+c} \leq S \leq \frac{f}{d+f} \right\}, \quad Q = \left\{ \frac{d}{d+f} \leq I \leq \frac{a}{c+a} \right\}.$$

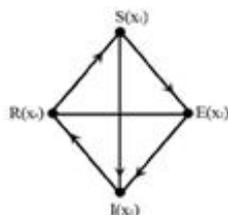
С эпидемиологической точки зрения, множество P соответствует началу эпидемии, а множество Q – её концу, т.е. спаду эпидемиологической ситуации. В результате мы получили три группы ситуации, в которых:

1) $af = cd$. Здесь множества P и Q пересекаются. Это означает, что заболевание (эпидемия болезни) начинается и заканчивается в одном отрезке. Такой эпидемиологической ситуации не существует, так как в реальности начало и конец вирусных заболеваний совпадать не может.

2) $af < cd$. Здесь множество P содержится на ребре Γ_{ER} , т.е. на части этого ребра, а множество Q соответствует отрезку на ребре Γ_{SI} . Это означает, что начало эпидемии лежит на отрезке, принадлежащем ребру Γ_{ER} , а конец эпидемии – на отрезке, принадлежащем ребру Γ_{SI} .

3) $af > cd$. Картина эпидемиологической ситуации в этом случае противоположна предыдущей. Здесь множество P состоит из отрезка на ребре Γ_{SI} , а множество Q – из отрезка на ребре Γ_{ER} . Другими словами, состояние эпидемиологической ситуации чувствительно относительно коэффициентов перехода индивидов из групп в группы.

Для модели



$$V_2: \begin{cases} S' = S(1 - aE - bI + cR), \\ E' = E(1 + aS - dI), \\ I' = I(1 + bS + dE - fR), \\ R' = R(1 - cS + fI). \end{cases}$$

доказана

Теорема 15. Если эпидемиологическая ситуация описывается моделью V_2 , тогда внутри грани Γ_{SIR} существует неподвижная точка

$$N\left(\frac{f}{b+c+f}; 0; \frac{c}{b+c+f}; \frac{b}{b+c+f}\right) \in \Gamma_{SIR}. \text{ Эта точка является и } P \text{ точкой, и } Q$$

– точкой для всего симплекса и для грани содержащей её.

Эпидемиологический смысл этой теоремы заключается в том, что особь, заболевшая вирусным заболеванием, с рецидивизирующим характером, независимо от того, перейдёт ли она латентный период, или же болезнь будет проходит в открытой форме, выздоравливает, но особь все равно подвержена заболеванию.

Последний параграф посвящён исследованию течения вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём, с летальным исходом особей. Дискретная модель для этих ситуаций имеет вид:

$$V: \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - a_{12}x_2), \\ x'_2 = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4), \\ x'_3 = x_3(1 + a_{23}x_2), \\ x'_4 = x_4(1 + a_{24}x_2). \end{cases}$$

Теорема 16. Если коэффициенты кососимметрической матрицы удовлетворяют условию $a_{23} > a_{24}$, тогда множество P состоит из части грани Γ_{134} :

$$P = \left\{ \left(\frac{a_{23} - \lambda a_{24}}{a_{12} + a_{24}} x_3 + \frac{(1-\lambda)a_{24}}{a_{12} + a_{24}}; 0; x_3, x_4 \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{\lambda a_{23}}{a_{12} + a_{23}} - \frac{(1-\lambda)a_{23} + a_{24}}{a_{12} + a_{23}} x_4; 0; x_3, x_4 \right) \right\},$$

$$P = \left\{ \left(\frac{a_{23} - \lambda a_{24}}{a_{12} + a_{24}} x_3 + \frac{(1-\lambda)a_{24}}{a_{12} + a_{24}}; 0; x_3, x_4 \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{\lambda a_{23}}{a_{12} + a_{23}} - \frac{(1-\lambda)a_{23} + a_{24}}{a_{12} + a_{23}} x_4; 0; x_3, x_4 \right) \right\},$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$ и $\frac{a_{23} - a_{24}}{a_{12} + a_{24}} x_3 + \frac{a_{24}}{a_{12} + a_{24}} \leq x_1 \leq 1$, либо $\frac{a_{23}}{a_{12} + a_{23}} - \frac{a_{23} + a_{24}}{a_{12} + a_{23}} x_4 \leq x_1 \leq 1$.

Множество Q лежит на другой части грани Γ_{134}

$$Q = \left\{ \left(\frac{(1-\lambda)a_{24}}{a_{12} + a_{24}} x_3 + \frac{a_{23} - \lambda a_{24}}{a_{12} + a_{24}}; 0; x_3, x_4 \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{\lambda a_{23}}{a_{12} + a_{23}} - \frac{(1-\lambda)a_{23} + a_{24}}{a_{12} + a_{23}} x_4; 0; x_3, x_4 \right) \right\},$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$ и $0 \leq x_1 \leq \frac{a_{24}}{a_{12} + a_{24}} x_3 + \frac{a_{23} - a_{24}}{a_{12} + a_{24}}$ либо $0 \leq x_1 \leq \frac{a_{23}}{a_{12} + a_{23}} - \frac{a_{23} + a_{24}}{a_{12} + a_{23}} x_4$.

Эта модель также чувствительна относительно выбора начальной точки. В качестве примера приведём случай туберкулёза в России в период с 2000-2018 гг (см. рисунок 4). Красная линия это фактическая статистика – $A[i]$, синяя кривая наш прогноз – $B[i]$. В модели точность итерации $\varepsilon = 10^{-4}$. Неустойчивые решения разностных уравнений находим согласно

приведёному алгоритму, применяя теорему Штурма и метод деления отрезка пополам.

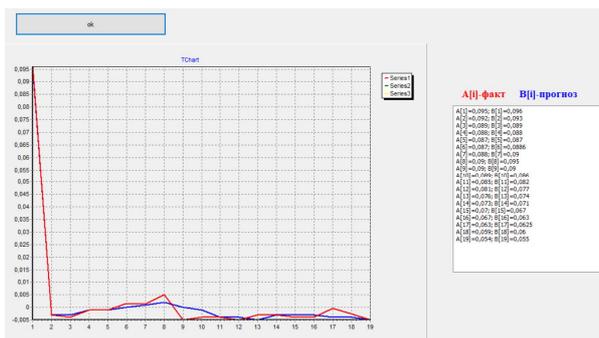


Рисунок 4. Туберкулёз в России в периоды 2000-2018 гг.

Третья глава, названная «**Дискретные модели вирусных заболеваний, передающихся половым путём**», посвящена исследованию композиции двух отображений Лотки-Вольтерры, действующих в двумерном симплексе. Среди рассмотренных композиций выделены те, которые описывают течение вирусов, передающихся половым путём. В первом параграфе главы введены основные определения, касающиеся характера точек покоя композиции, а также введено понятие карты неподвижных точек.

Рассмотрим отображения Лотки-Вольтерры, действующие в S^{m-1} и имеющие следующий вид:

$$V_1 : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad V_2 : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m b_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Как было упомянуто выше, отображение Лотки-Вольтерры есть автоморфизм симплекса S^{m-1} в себя, откуда следует, что композиция $V_1 \circ V_2$ также является автоморфизмом, причем она представима в виде:

$$V_1 \circ V_2 : x'_k = x_k \left(1 + f_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) \right), \quad k = \overline{1, m}.$$

Композиция двух отображений Лотки-Вольтерры также сохраняет симплекс в себя, но, как оказалось, динамика траекторий внутренних точек и характеры неподвижных точек меняются. Всякая внутренняя $x \in S^{m-1}$ точка симплекса порождает траекторию, т.е. итерационную последовательность x, Vx, V^2x, V^3x, \dots . Если $Vx = x$, тогда x – неподвижная точка отображения V . Если точки $x, Vx, V^2x, V^3x, \dots, V^{k-1}x$ попарно различны и $V^kx = x$, тогда эти точки образуют цикл периода k .

Окрестностью множества $M \subset S^{m-1}$ назовём всякое множество, содержащее открытое множество. Пусть A – произвольное притягивающее множество отображения V , т.е. ω – предельное множество. Очевидно, что множество A замкнуто и $VA = A$. Если $Ax = A$, тогда точка x притягивается множеством A .

Пусть $B(A)$ – множество, состоящее из точек S^{m-1} , которые притягиваются множеством A . Притягивающееся множество $B(A)$ состоит из тех точек $x \in S^{m-1}$, для которых $Ax = A$.

Известно, что с каждым из отображений V_1 и V_2 мы можем связать понятие турнира. Но оказалось, что для композиции это понятие ввести невозможно. Поэтому для композиции отображений Лотки-Вольтерры нами было введено понятие карты неподвижных точек.

Поскольку структура карты неподвижных точек определяется топологическим характером неподвижной точки (притягивающий фокус, отталкивающий фокус, седловая точка), то приходится исследовать, при каких значениях коэффициентов кососимметрических матриц, составляющих отображения V_1 и V_2 , та или иная неподвижная точка является притягивающей, отталкивающей или седловой. Во втором параграфе полностью исследованы композиции двух отображений Лотки-Вольтерры с транзитивными турнирами. Третий и четвёртые параграфы главы включили в себя моделирование течение рецидивирующих и нерецидивирующих заболеваний, передающихся половым путём.

Пусть $H_p = \left\{ x \in \square^m : \sum_{i=1}^m x_i = p \right\}$ – гиперплоскость и стандартный симплекс

$$S^{m-1} = \left\{ x \in \square^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \subset H_p.$$

Определение 2. Заполненным множеством Жюлиа $K(V)$ отображения V называется множество всех точек $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \square^m$, имеющих ограниченную орбиту относительно отображения V

$$K(V) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : V^n(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty \right\}.$$

Определение 3. Множество Жюлиа – это общая граница заполненного множества Жюлиа, т.е. $J(V) = \partial K(V)$.

Теорема 17. Для оператора $V : \square^m \rightarrow \square^m$ заполненным множеством Жюлиа является симплекс S^{m-1} .

Если рассматривать отображение V в \square^m , тогда согласно теореме 17 все точки множества $R^m \setminus S^{m-1}$ стремятся к бесконечности, но все точки, принадлежащие симплексу S^{m-1} , остаются в нём. Из этого следует, что в симплексе наблюдается интересная динамика. В третьем параграфе исследовано асимптотическое поведение внутренних точек композиции двух дискретных отображений Лотки-Вольтерры с сильными турнирами. Эту композицию мы предлагаем – как дискретную модель вирусных заболеваний, передающихся половым путём с рецидивирующим характером, т.е. эта композиция двух моделей *SIRS*. Модель предназначена только для гетеросексуальных отношений и предполагается, что распространены беспорядочные половые связи. Рассмотрим популяцию, состоящую из двух взаимодействующих классов – мужчин и женщин. Инфекция передается от представителя одного класса к представителю другого. Так как каждому отображению соответствует сильная тройка, то оно представляет модель *SIRS*.

Течение болезни в сексуально активной мужской и женской популяции представляют отображения V_m и V_w , соответственно

$$V_m : \begin{cases} S'_m = S_m(1 - I_m + R_m), \\ I'_m = I_m(1 + S_m - R_m), \\ R'_m = R_m(1 - S_m + I_m), \end{cases} \quad V_w : \begin{cases} S'_w = S_w(1 + I_w - R_w), \\ I'_w = I_w(1 - S_w + R_w), \\ R'_w = R_w(1 + S_w - I_w), \end{cases}$$

где S_m – восприимчивый слой мужской популяции;

I_m – инфицированный слой мужской популяции;

R_m – устраненный от болезни слой мужской популяции.

S_w – восприимчивый слой женской популяции;

I_w – инфицированный слой женской популяции;

R_w – устраненный от болезни слой женской популяции.

Тогда аналитический вид половых взаимоотношений двух популяций – мужской и женской – выглядит следующим образом:

$$V_m \circ V_w : \begin{cases} S'_m = S_m(1 + I_w - R_w)[1 - I_w(1 - S_w + R_w) + R_w(1 + S_w - I_w)], \\ I'_m = I_w(1 - S_w + R_w)[1 + S_w(1 + I_w - R_w) - R_w(1 + S_w - I_w)], \\ R'_m = R_w(1 + S_w - I_w)[1 - S_w(1 + I_w - R_w) + I_w(1 - S_w + R_w)]. \end{cases}$$

Композиционное отображение $V_m \circ V_w$ представляет собой процесс заражения мужской популяции каждой из подгрупп женской популяции. Для каждого из отображений V_m и V_w , включенных в композицию, мы можем ввести понятие турнира, фазовый портрет, соответствующий графу (карта неподвижных точек) для композиционного отображения $V_m \circ V_w$ имеет вид:

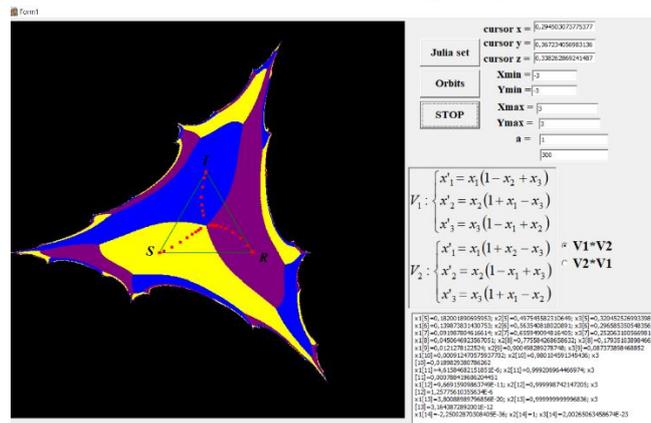


Рисунок 5. Фазовый портрет композиций моделей SIRS. Бассейн восприимчивой чпсти популяции выделен желтым цветом, поврежденных синим и вылеченных фиолетовым.

Теорема 18. Композиция $V_m \circ V_w$ имеет семь неподвижных точек:

1. Все вершины симплекса $e_1(1; 0; 0)$, $e_2(0; 1; 0)$, $e_3(0; 0; 1)$ – аттракторы.

2. На всех рёбрах существует по одной неподвижной точке

$$C'_1 \left(0; \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \in \Gamma_{23}, \quad C'_2 \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; 0; \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \in \Gamma_{13},$$

$C'_3 \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; 0 \right) \in \Gamma_{12}$, которые являются седловыми.

3. Внутренняя отталкивающая неподвижная точка $N \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$ отображений V_m и V_w сохраняется и для композиционного отображения $V_w \circ V_m$, характер точки также сохраняется.

Утверждение 1. В каждой из двух композиций внутри симплекса существуют три разделительные кривые (сепаратрисы):

– для $V_m \circ V_w$ – $\mathbb{N}C_1, \mathbb{N}C_2, \mathbb{N}C_3$;

– $\mathbb{N}C_1$ и $\mathbb{N}C_3$ разделяют инфицированное население от восприимчивых и выздоровевших, т.е. бассейн $B(I)$ ограничен кривыми $\mathbb{N}C_1, \mathbb{N}C_3$ и точкой N ;

– кривые $\mathbb{N}C_1$ и $\mathbb{N}C_2$ разделяют выздоровевшее население от восприимчивых и инфицированных, т.е. бассейн $B(R)$ ограничен кривыми $\mathbb{N}C_1, \mathbb{N}C_2$ и точкой N ;

– $\mathbb{N}C_2$ и $\mathbb{N}C_3$ разделяют восприимчивое население от инфицированных и выздоровевших т.е. бассейн $B(S)$ ограничен кривыми $\mathbb{N}C_2, \mathbb{N}C_3$ и точкой N ;

– для $V_w \circ V_m$ такие же функции выполняют кривые $\mathbb{N}C'_1, \mathbb{N}C'_2, \mathbb{N}C'_3$;

– точнее сказать, кривые $\mathbb{N}C_1, \mathbb{N}C_2, \mathbb{N}C_3, \mathbb{N}C'_1, \mathbb{N}C'_2, \mathbb{N}C'_3$ выполняют роль сепаратрис.

Сепаратриса – кривая, начинающаяся и заканчивающаяся в точке седлового состояния.

Теперь рассмотрим композицию $V_{13} \circ V_{14}$

$$V_{13} \circ V_{14} : \begin{cases} x'_1 = x_1 (1 + b_{12}x_2 - b_{13}x_3)(1 - a_{12}x_2(1 - b_{12}x_1 + b_{23}x_3) + a_{13}x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)), \\ x'_2 = x_2 (1 - b_{12}x_1 + b_{23}x_3)(1 + a_{12}x_1(1 + b_{12}x_2 - b_{13}x_3) - a_{23}x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)), \\ x'_3 = x_3 (1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)(1 - a_{13}x_1(1 + b_{12}x_2 - b_{13}x_3) + a_{23}x_2(1 - b_{12}x_1 + b_{23}x_3)). \end{cases}$$

Эта композиция имеет следующие неподвижные точки:

– вершины симплекса $e_1(1; 0; 0), e_2(0; 1; 0), e_3(0; 0; 1)$;

– в каждом ребре по одной неподвижной точке

$$M_1 \left(\frac{(b_{12} + 2)\sqrt{a_{12}} - \sqrt{b_{12}(a_{12}b_{12} + 4)}}{2b_{12}\sqrt{a_{12}}}; \frac{(b_{12} - 2)\sqrt{a_{12}} + \sqrt{b_{12}(a_{12}b_{12} + 4)}}{2b_{12}\sqrt{a_{12}}}; 0 \right) \in \Gamma_{12},$$

$$M_2 \left(\frac{(b_{13} - 2)a_{13} - \sqrt{a_{13}b_{13}(a_{13}b_{13} + 4)}}{2a_{13}b_{13}}; 0; \frac{(b_{13} + 2)a_{13} - \sqrt{a_{13}b_{13}(a_{13}b_{13} + 4)}}{2a_{13}b_{13}}; 0 \right) \in \Gamma_{13}$$

$$M_3 \left(0; \frac{(b_{23} + 2)\sqrt{a_{23}} - \sqrt{b_{23}(a_{23}b_{23} + 4)}}{2b_{23}\sqrt{a_{23}}}; \frac{(b_{23} - 2)\sqrt{a_{23}} + \sqrt{b_{23}(a_{23}b_{23} + 4)}}{2b_{23}\sqrt{a_{23}}}; 0 \right) \in \Gamma_{23}$$

Замечание 3. В данной модели каждая популяция внутри себя имеет контакт (не половой), т.е. в каждой популяции уже существуют инфицированные, и инфекция может переходить не половым (например, медицинским) путём. Этим и объясняются следующие умножения внутри каждой модели *SIRS*:

$$S_m \cdot I_m, S_m \cdot R_m, I_m \cdot R_m \\ S_w \cdot I_w, S_w \cdot R_w, I_w \cdot R_w$$

Переход инфекции в следующем поколении после полового контакта двух полов мы получаем в композициях $W(V_m \circ V_w)$ и $W(V_w \circ V_m)$.

В последнем параграфе исследуется дискретная модель вирусных заболеваний, передающихся половым путём с нерезидивирующим характером. Рассмотрены два дискретные отображения, соответствующие моделям *SIR*:

$$V_{19} : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + a_{13}x_3), \\ x'_2 = x_2(1 - a_{23}x_3), \\ x'_3 = x_3(1 - a_{13}x_1 + a_{23}x_2), \end{cases}, \quad V_{20} : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - b_{13}x_3), \\ x'_2 = x_2(1 + b_{23}x_3), \\ x'_3 = x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2), \end{cases}$$

их композиция $V_{19} \circ V_{20}$ имеет вид:

$$V_{19} \circ V_{20} : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - b_{13}x_3)(1 + a_{13}x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)), \\ x'_2 = x_2(1 + b_{23}x_3)(1 - a_{23}x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)), \\ x'_3 = x_3(1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2)(1 - a_{13}x_1(1 - b_{13}x_3) + a_{23}x_2(1 + b_{23}x_3)). \end{cases}$$

Теорема 19. Для композиции $V_{19} \circ V_{20}$ следующая точка неподвижная

$$A_1 \left(\frac{\sqrt{a_{13}}(b_{13} - 2) + \sqrt{b_{13}(a_{13}b_{13} + 4)}}{2b_{13}\sqrt{a_{13}}}, 0, \frac{\sqrt{a_{13}}(b_{13} + 2) - \sqrt{b_{13}(a_{13}b_{13} + 4)}}{2b_{13}\sqrt{a_{13}}} \right). \text{ Тогда она}$$

– при условии $b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{13} + 1}$ сдвинется к вершине $e_3(0,0,1)$;

– при условии $b_{13} = \frac{a_{13}}{1 - a_{13}}$ сдвинется к вершине $e_1(1,0,0)$;

– в остальных случаях эта точка принадлежит ребру Γ_{13} и является репеллером.

$$\text{Точка } A_2 \left(0, \frac{\sqrt{a_{23}}(b_{23} + 2) - \sqrt{b_{23}(a_{23}b_{23} + 4)}}{2a_{23}\sqrt{b_{23}}}, \frac{\sqrt{a_{23}}(b_{23} - 2) + \sqrt{b_{23}(a_{23}b_{23} + 4)}}{2a_{23}\sqrt{b_{23}}} \right)$$

также является неподвижной точкой. Она

– при условии $b_{23} = \frac{a_{23}}{1 - a_{23}}$ сдвинется к вершине $e_3(0,0,1)$;

– при условии $b_{23} = \frac{a_{23}}{1+a_{23}}$ сдвинется к вершине $e_2(0,1,0)$;

– в остальных случаях она принадлежит ребру Γ_{23} и также является репеллером.

Каждое из отображений V_{19} и V_{20} имеет на ребре Γ_{23} нейтральную неподвижную точку, соответственно

$$N_{19} \left(\frac{a_{23}}{a_{13} + a_{23}}; \frac{a_{13}}{a_{13} + a_{23}}; 0 \right) \text{ и } N_{20} \left(\frac{b_{23}}{b_{13} + b_{23}}; \frac{b_{13}}{b_{13} + b_{23}}; 0 \right),$$

тогда их композиция тоже сохраняет нейтральную точку $V_{19} \circ V_{20}$ и имеет вид

$$N^* \left(\frac{b_{13}a_{23}}{(b_{13} + 1)(a_{13} + a_{23})}; \frac{b_{13}a_{13} + a_{13} - b_{13}}{(b_{13} + 1)(a_{13} + a_{23})}; 0 \right).$$

Адекватность моделей проверены для распространения ВИЧ инфекции в мире в период с 1993 года по 2021 год (29 лет).

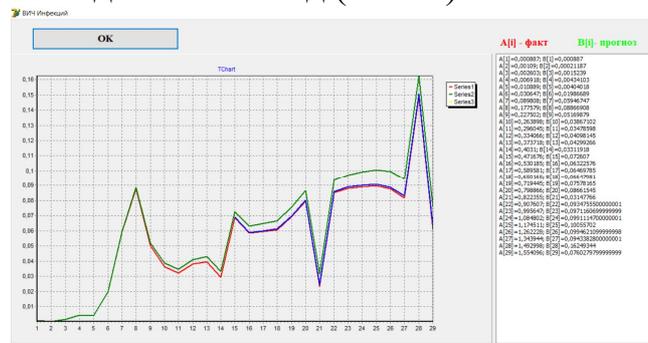


Рисунок 6. Сравнительная картина динамики ВИЧ инфекции в мире в период с 1993 по 2021 гг. Красная линия $A[i]$ – это фактическая статистика, зелёная кривая $B[i]$ наш прогноз. Композиции $SIRS \times SIRS$ и $SIR \times SIR$ также чувствительны относительно выбора начальной точки.

Наконец, целью последней главы под названием «**Дискретные динамические системы Лотки-Вольтерры и их приложения в моделировании биогенного цикла в экосистеме**» является исследование динамики асимптотического поведения траекторий дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры с однородными турнирами, действующих в четырёхмерном симплексе и обобщение их свойств для случая произвольного симплекса. В главе для квадратичных отображений Лотки-Вольтерры построены карты неподвижных точек, которые позволяют описать динамику рассматриваемых систем. С помощью карт неподвижных точек дискретной динамической системы в частном случае даны критерии существования неподвижных точек с нечётными ненулевыми координатами, и эти результаты о расположении неподвижных точек систем Лотки-Вольтерры соответственно обобщены на случай произвольного симплекса. Карта неподвижных точек выделяет в симплексе конкретную область, наиболее важную и интересную для изучения динамики этих отображений. Показано, что полученные аналитические результаты применимы в задачах экологии, в частности, для

описания и изучения круговоротов углерода и фосфора. Основными результатами первого параграфа являются

Теорема 20. Если грань Γ_α симплекса S^{m-1} имеет внутреннюю (относительно грани) неподвижную точку, то подтурнир турнира T_m с вершинами из α является сильным.

Здесь $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $\alpha \subset I$, $X = \{x(\alpha) : \alpha \subset I\}$ – множество неподвижных точек.

Теорема 21. Для существования неподвижной точки V с тремя положительными координатами, скажем x_i, x_j, x_k , необходимо и достаточно, чтобы подтурнир T с вершинами i, j и k был изоморфен циклической тройке.

Лемма 3. Если $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ имеют разные знаки, тогда в карте неподвижных точек образуется транзитивная тройка, и симплекс S^4 не имеет внутренних неподвижных точек.

Лемма 4. Если знаки всех $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ совпадают, тогда в карте образуется гамильтонов цикл (силовая тройка), и в симплексе S^4 существует внутренняя неподвижная точка.

Здесь $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ – главные миноры чётного порядка кососимметрической матрицы.

Теорема 22. Любые две циклические тройки в T_m смежны, причем из определяемых неподвижных точек одна – P точка, а другая – Q точка для грани, содержащей их.

Теорема 23. Если G_{m-1} – транзитивный турнир, то отображение V не имеет в симплексе S^{m-1} неподвижных точек с пятью и более ненулевыми координатами.

Теорема 24. Если в G_{m-1} существует циклическая тройка, то существует неподвижная точка с пятью и более ненулевыми координатами.

Во втором параграфе, при условии, что эти неподвижные точки – изолированные, даётся алгоритм нахождения неподвижных точек помимо вершин симплекса, принадлежащих сильным граням. Также для этих отображений доказано существование инвариантных кривых, соединяющих некоторую пару неподвижных точек, которые состоят сплошь из неподвижных точек. Исходя из этого доказано существование инвариантной поверхности, проходящей через неподвижные точки, принадлежащие сильным граням.

Теорема 25. Если неподвижные точки C_* и C_{**} образуют (p, q) пару, причём в некоторой окрестности точки C_* оператор V_1 является локальным диффеоморфизмом, тогда существует инвариантная кривая, соединяющая C_* и C_{**} .

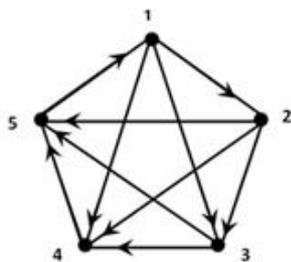
Теорема 26. Пусть существуют три попарно смежных неподвижных точек, которые являются как p точками, так и q точками для граней, содержащих

их. Тогда существует инвариантная поверхность, проходящая через эти неподвижные точки. Вся инвариантная поверхность состоит из неподвижных точек, являющихся и p , и q точками для всего симплекса.

Теорема 27. Если все $\Delta_i = 0, i = \overline{1,5}$ четвёртого порядка равны нулю, тогда выпуклая оболочка, натянутая на внутренние неподвижные точки сильных граней, является инвариантной поверхностью, состоящей сплошь из репеллеров для произвольного отображения Лотки-Вольтерры, действующего в S^4 , с однородными турнирами.

Последний параграф посвящён приложению полученных результатов главы к задачам экологии. В частности, здесь вводится дискретная модель круговорота углерода и фосфора в экосистеме.

Рассмотрим динамическую систему Лотки-Вольтерры и турнир, соответствующий ей, исследованные в предыдущих параграфах:



$$V: \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}x_5), \\ x'_2 = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5), \\ x'_3 = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5), \\ x'_4 = x_4(1 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 - a_{45}x_5), \\ x'_5 = x_5(1 - a_{15}x_1 + a_{25}x_2 + a_{35}x_3 + a_{45}x_4). \end{cases}$$

Эта система описывает модель экосистемы – как круговорот вещества. Пусть вершина 1 – определяет почву или резервуар, вершина 2 – продуценты, вершина 3 – отходы жизнедеятельности всех организмов и их мёртвую биомассу, вершина 4 – редуценты и, наконец, вершина 5 – консументы. Переведём турнир в соответствии этими соотношениями (см. рисунок 7).

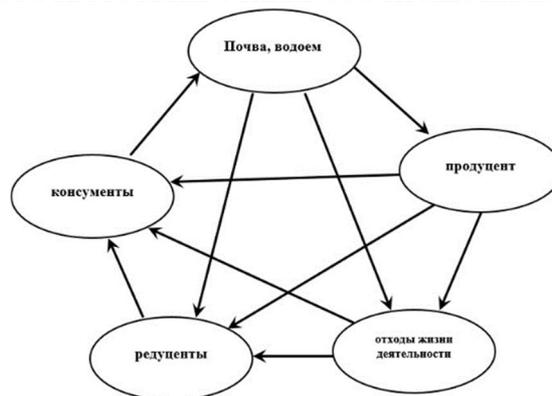


Рисунок 7. Модель экосистемы как круговорота вещества.

Теорема 28. Если карта G_V является транзитивным турниром, тогда отображение V не имеет неподвижных точек с пятью ненулевыми координатами в симплексе S^4 .

Теорема 29. Если в G_V существует циклическая тройка, тогда существует неподвижная точка с пятью ненулевыми координатами.

Следствие 2. Если количество неподвижных точек отображения V с пятью ненулевыми координатами равно одному, тогда циклические тройки $\overline{125}$, $\overline{135}$ и $\overline{145}$ образуют гамильтонов цикл, а обратное, вообще говоря, не верно.

Если в карте образуется сильная тройка, то это соответствует описанию углеродного цикла, если же транзитивная тройка, то это соответствует циклу фосфора (см. рисунок 8).

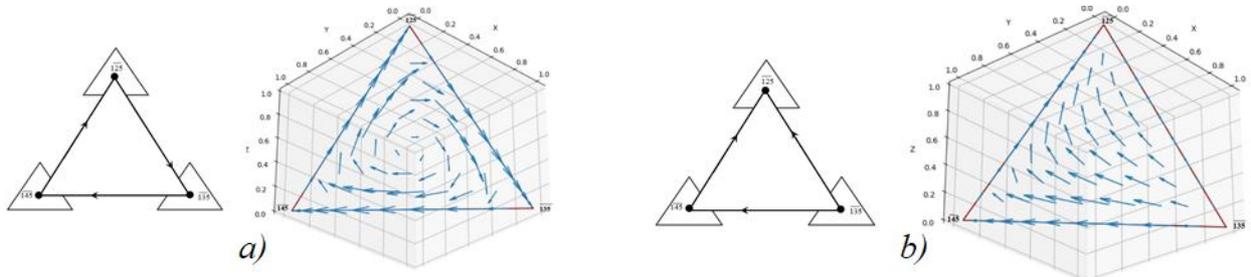


Рисунок 8. а) Карта и фазовый портрет, соответствующий углеродному циклу; б) карта и фазовый портрет, соответствующий циклу фосфора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена решению проблем математического моделирования течения рецидивирующих и нерецидивирующих вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным и половым путём, а также круговороту углерода и фосфора в экосистеме. На основе проведённых в диссертационной работе исследований представлены следующие выводы:

– проанализирована динамика траекторий внутренних точек дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей. С помощью элементов теории графов исследовано асимптотическое поведение траекторий внутренних точек рассматриваемых отображений. Так как квадратичные отображения являются автоморфизмами симплекса, доказаны существование множества предельных точек положительной и отрицательной траекторий;

– на основе вырожденных случаев отображений Лотки-Вольтерры построены дискретные модели *SIR*, *SEIR*, *SEIRS* и *SIRD* вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём. Для этих моделей построены множества предельных точек положительной и отрицательной траекторий, которые означают начало болезни (очаг болезни) и её конец; На основе этих результатов приведены численные результаты, построенных моделей для всех групп особей, сделан сравнительный анализ и визуализированы полученные результаты. А также приведены численные факты заболеваний COVID-19 в Узбекистане (с 15.03.2020-31.12.2020), туберкулёз в России (с 2000-2018 гг) и прогнозированный результат с помощью программ, составленных для построенных моделей;

– исследована динамика асимптотического поведения траекторий внутренних точек, построены карты неподвижных точек для композиций дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры, действующих в двумерном симплексе. На основе композиций смоделированы процессы течения рецидивирующих и нерецидивирующих заболеваний, передающихся половым путём. Построенные модели проверены в статистике распространения вируса ВИЧ инфекции во всем мире в период с 1993 по 2021 год;

– исследована динамика асимптотического поведения траекторий дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры с однородными турнирами, действующих в произвольном $(m-1)$ -мерном симплексе, а также для них построены карты неподвижных точек;

– найдены критерии существования неподвижных точек с нечётными ненулевыми координатами, и эти результаты о расположении неподвижных точек систем Лотки-Вольтерры обобщены на случай произвольного симплекса;

- составлен алгоритм для нахождения неподвижных точек помимо вершин симплекса, принадлежащих сильным граням, и доказано существование инвариантных кривых, проходящих через эти неподвижные точки;
- доказано существование инвариантной поверхности, проходящей через неподвижные точки, принадлежащее сильным граням, состоящие сплошь из репеллеров. Полученные аналитические результаты применены в задачах экологии, в частности, для описания круговорота углерода и фосфора;
- для визуального исследования всех моделей составлены комплексы прикладных программ на языках программирования Delphi10Lite и Python 3.10.10. Этот анализ позволяет увидеть визуально результаты математических исследований, сделан численный анализ динамики траекторий внутренних точек и на основе этого построена картина фазового портрета исследуемых моделей.
- диссертационная работа включила в себя 6 приложений, в которых даётся информационная справка об инфекционных заболеваниях, для которых построены модели. А также, численные результаты и фазовые портреты, которые не включены в основную часть диссертации, программные команды и сертификаты (DGU).

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY

ESHMAMATOVA DILFUZA BAKHROMOVNA

**DISCRETE MODELS OF EPIDEMIOLOGY, ECOLOGY:
MATHEMATICAL AND COMPUTER RESEARCH**

**05.01.07 – Mathematical modeling. Numerical methods and complexes of applications
(physical and mathematical sciences)**

**CONTENT OF DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR (DSc)
OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2023

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission under the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan B2023.3.DSc/FM231.

The dissertation was carried out at the Tashkent State Transport University.

The abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) is placed on the website of the Scientific Council (www.ik-fizmat.nuu.uz) and on the website of “ZiyoNet” information-educational portal (www.ziyo.net)

Scientific supervisor: **Ganikhodzhaev Rasul Nabiyeovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents: **Temirbekov Nurlan Mukhanovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor, Academician (Kazakhstan)

Jamilov Uygun Umirovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Sadullayeva Shakhlo Azimbayevna
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent

Leading organization: **Samarkand State University**

Defense will take place on “_____” _____ 2023 at _____ at the meeting of Scientific council number DSc.27.06.2017.FM.01.02 at the National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

The dissertation is possible to review in Information-resource centre at the National University of Uzbekistan (registered № _____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on “_____” _____ 2023 year
(mailing report № _____ on “_____” _____ 2023 year).

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
d.ph.-m.s., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, d.ph.-m.s.

A.S. Matyakubov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
d.ph.-m.s.

INTRODUCTION (Doctor of Science's Thesis Annotation (DSc))

The aim of the research is to build discrete models of airborne and sexually transmitted diseases, as well as the cycle of biogens in the ecosystem and the development of numerical and analytical solutions.

Research tasks include:

identification of conditions for the existence of a set of limit points of positive and negative trajectories, degenerate discrete Lotka-Volterra dynamical systems;

construction of discrete models of viral diseases transmitted by airborne droplets; determination of a set of limit points of positive and negative trajectory for them, meaning the beginning of the disease (the focus of the disease) and its end;

for compositions of discrete dynamic Lotka-Volterra systems, analyze the dynamics of the asymptotic behavior of the trajectories of interior points, the construction of their maps of fixed points and, based on this, the construction of discrete models of the course of sexually transmitted viral diseases. Identification of basins of the infected part of the population;

identification of criteria for the existence of fixed points with odd non-zero coordinates for Lotka-Volterra mappings with homogeneous tournaments operating in S^{m-1} and construction of fixed point cards;

drawing up an algorithm for finding fixed points in addition to the vertices of the simplex belonging to strong faces and proving for these maps the existence of invariant curves and an invariant surface passing through fixed points belonging to strong faces; based on analytical results, construct a discrete model describing the cycle of the biogens cycle in the ecosystem;

to make an algorithm for finding stable and unstable solutions of polynomial equations for each constructed model; to make a set of application programs; to make numerical analysis and visualize phase portraits of models. Check the results obtained for real situations.

The object of the research.

The object of research is the course of infectious diseases transmitted by airborne droplets and sexually, described by degenerate discrete dynamic systems of Lotka-Volterra. The cycle of carbon and phosphorus cycles described by homogeneous dynamic systems of Lotka-Volterra operating in S^4 .

Scientific novelty of the research work:

conditions for the existence of a set of limit points of positive and negative trajectories, degenerate discrete Lotka-Volterra dynamical systems are found;

discrete compartmental *SIR*, *SEIR*, *SEIRS*, *SIRD* models of the course of viral diseases transmitted by airborne droplets are constructed;

the dynamics of the asymptotic behavior of internal point trajectories for compositions of discrete Lotka-Volterra dynamical systems is analyzed;

based on the compositions, discrete models of the course of sexually transmitted viral diseases are constructed; basins of the infected part of the population with recurrent and non-recurrent infections are deter;

the criteria for the existence of fixed points with odd non-zero coordinates for Lotka-Volterra mappings with homogeneous tournaments operating in the S^{m-1} are found;

an algorithm for finding fixed points in addition to the vertices of the simplex belonging to strong faces is constructed and the existence of invariant curves and an invariant surface passing through fixed points belonging to strong faces is proved;

based on the analytical results, a discrete model describing the cycle of carbon and phosphorus cycles in the ecosystem is constructed;

stable and unstable solutions of polynomial equations have been found for discrete models of the course of airborne and sexually transmitted diseases, as well as for the cycle of carbon and phosphorus cycles in the ecosystem;

algorithms for numerical solutions of discrete models of the course of viral diseases and the cycle of biogens in the ecosystem have been constructed, and application software complexes have been created.

Implementation of the research results:

The results of the dissertation research were implemented in the following areas:

the results of the description of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex and the dynamic properties of their compositions, in the study of the dynamics of asymptotic behaviors of the trajectories of their internal points, in solving problems of the theory of discrete dynamical systems of Lotka-Volterra are used in the framework of the grant OT-F4-31 "Noncommutative modules, Leibniz algebras and polynomial cascades on simplexes". The ideas are used in the study of degenerate cases of Lotka-Volterra mappings using graph theory, to obtain an algorithm for finding fixed points with odd non-zero coordinates of Lotka-Volterra mappings with homogeneous tournaments and in proving the existence of an invariant surface for them (reference of the National University of Uzbekistan dated May 22, 2023, No. 04/11-3068). The application of the scientific result made it possible to construct discrete models of *SIR*, *SEIR*, *SEIRS*, *SIRD* in order to use these dynamic systems to study epidemiological processes, as well as to fully classify and construct cards of fixed points of Lotka-Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex;

based on the construction of fixed point cards for the Lotka-Volterra systems, the cycles of carbon and phosphorus cycles in the ecosystem are analyzed and these results are used in determining the UMT/CRIM scientific project/2-2/2/14 (2019-2020) "Modified homotopy analysis method for finding the power cable coefficient" for determining the properties of quadratic homeomorphisms of the simplex, and also degenerate and non-degenerate Lotka-Volterra mappings (Reference of the Malaysian University of Terengganu dated May 30, 2023, № UMT/FTKKI/500-35). The application of scientific research made it possible to analyze the dynamics of both positive and negative trajectories of internal points for degenerate Lotka-Volterra mappings, as well as for their compositions. The analytical approach made it possible for a complete analysis of the constructed models to construct their phase portrait and numerical analysis;

the obtained analytical and numerical results of the compiled complex of application programs for the composition of Lotka-Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex were used in the framework of the research project No. 28/2022 “Creation of a complex of calculation programs taking into account the nonlinear interaction of elements of railway bridges under real seismic impacts” made it possible to assess the technical condition of a railway bridge – realistic registration of various earthquakes in a seismic state, and also used to verify the data displayed in the working interface of the software package created for bridge structures entered and accessible to the user (reference of the Tashkent State Transport University dated June 19, 2023, №. 04/01-3729). The application of scientific results made it possible to assess the seismic effects on railway bridges;

results on the asymptotic behavior of the trajectory of discrete tray mappings – Volterra with homogeneous tournaments, as well as the dynamics of the internal points of the composition of these mappings, a description of the dynamic behavior of the properties of some classes of genetic algebras, in particular, for modeling the course of viral diseases transmitted by airborne droplets and sexually, as well as for modeling the cycle of biogens, various types of algebras of bisexual populations are used in the PID2020-115155GB research project-100(European FEDER support included, EU) "Homology, homotopy and categorical invariants in groups and nonassociative algebra" of the University of Santiago de Compostella (Reference of the University of Santiago de Compostella) This allowed us to apply scientific results related to the conditions found for the parameters, to find out in which part of the population the epidemic begins and in which part it ends.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of introduction, 4 chapters, conclusion, list of used literature and appendices. The total volume of the dissertation is 198 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; part I)

1. Eshmamatova, D.B., Tadzhieva, M.A., Ganikhodzhaev, R.N. Criteria for internal fixed points existence of discrete dynamic Lotka–Volterra systems with homogeneous tournaments // *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika*. 30(6), 2023, 702-716 (3. Scopus IF=0.28).

2. Таджиева М.А., Эшмаматова Д.Б., Ганиходжаев Р.Н., Квадратичные стохастические операторы вольтерровского типа с однородным турниром // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2021. 67(4), 783-794 (2. IF=0.425).

3. Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A., Eshmamatova D.B. Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex // *Journal of Mathematical Sciences*, March. 2020, 245(3), 398-402 (3. Scopus. IF=0.314).

4. Eshmamatova D. B., Seytov Sh. J., Narziev N. B. Classification of basins of fixed points of the composition of the Lotka-Volterra mappings // *Lobachevskii journal of mathematics*. 2023, 44(2), 558-569 (3. Scopus. IF=0.8.).

5. Seytov Sh. J., Eshmamatova D.B. Discrete Dynamical Systems of Lotka–Volterra and Their Applications on the Modeling of the Biogen Cycle in Ecosystem // *Lobachevskii journal of mathematics*. 2023, 44(4), 1462-1476 (3. Scopus. IF=0.8).

6. Eshmamatova, D.B., Tadzhieva, M.A., Ganikhodzhaev, R.N. Criteria for the Existence of Internal Fixed Points of Lotka-Volterra Quadratic Stochastic Mappings with Homogeneous Tournaments Acting in an $(m-1)$ -Dimensional Simplex // *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*. 2023, 12(4), 679-688 (3. Scopus. IF=0.21).

7. Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories // *Vladikavkaz. Mat. Zh.* 2006, 8(2), 12-28 (2. IF=0.333).

8. Eshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1} // *AIP Conference Proceedings*. 2021, 2365, 060005-1-060005-7 (3. Scopus. IF=0.16).

9. Eshmamatova D.B. Discrete analog of the SIR model // *AIP Conference Proceedings*. 2023. 2781. P. 020024-1-10 (3. Scopus. IF=0.16).

10. Eshmamatova D.B., Tadzhieva M.A., Ganikhodzhaev R.N. Degenerate cases in Lotka–Volterra systems // *AIP Conference Proceedings*. 2023, 2781, 020034-1-8 (3. Scopus. IF=0.16).

11. Eshmamatova D. B. Compositions of Lotka-Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex, relation to viral diseases and their numerical analysis // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 3(41), 2022, 79-92. (01.00.00, №9).

12. Эшмаматова Д.Б. Дискретные модели вирусных заболеваний с повторным воздействием, передающихся воздушно капиллярным путём //

Проблемы вычислительной и прикладной математики. 4(42), 2022, 36-54 (01.00.00, №9).

13. Eshmatova D.B. Some Lotka-Volterra mappings with a degenerate skew-symmetric matrix, and their relation to epidemiological situations // *Uzbek Mathematical Journal*. 2023, 67(2), 39-48 (01.00.00, №6).

14. Эшмаматова Д.Б. О некоторых свойствах асимптотического поведения траекторий внутренних точек отображений Лотки-Вольтерры // *Илм Сарчашмалари*. 2023, 5(2), 8-11(01.00.00, №12).

15. Эшмаматова Д.Б., Таджиева М.А., Юсупов Ф.А. Асимптотическое поведение траекторий некоторых отображений Лотки-Вольтерры, действующих в двумерном симплексе с транзитивными турнирами // *Бюллетень Института математики*. 2022, 5(6), 182-188 (01.00.00, №6).

16. Эшмаматова Д.Б. Каримов Д. И. Исследование динамики траекторий некоторых отображений Лотки-Вольтерра с вырожденной кососимметрической матрицей // *Eurasian journal of mathematical theory and computer sciences*. 2022, 2(6), 89–94 (23. Scientific Journal Impact Factor).

17. Эшмаматова Д.Б., Асатов Ж. О. Исследование динамики траекторий композиции отображений Лотки-Волтерра, действующих в одномерном симплексе // *Eurasian journal of mathematical theory and computer sciences*. 2022, 2(6), 86–88 (23. Scientific Journal Impact Factor).

II bo'lim (II часть; II Part)

1. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б. О неподвижных точках квадратичных гомеоморфизмов конечномерного симплекса // *Republic scientific conference with participation foreign scientists «Modern problems of dynamical systems and their applications»*. – Tashkent, 2017. May 1-3. – P. 25-26.

2. Эшмаматова Д.Б. О композициях операторов Лотки-Вольтерра // *Conference problems of modern topology and its applications*. – Tashkent, 2017. May 11-12. – P. 185-186.

3. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б. Условия гиперболичности неподвижных точек операторов вольтерровского типа. // *Conference problems of modern topology and its applications*. Tashkent, 2017. May 11-12. – P. 188-190.

4. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б. О композиции операторов Лотки-Вольтерры // *Республиканская научная конференция “Новые результаты математики и их приложения”*. – Самарканд, 2018. 14-15 мая. – С. 144-146.

5. Эшмаматова Д.Б. Построение функций Ляпунова для динамических систем вольтерровского типа // *Республиканская научная конференция “Новые результаты математики и их приложения”* – Самарканд, 2018. 14-15 мая. – С. 175-177.

6. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б. Свойства карт неподвижных точек операторов вольтерровского типа // *International conference. Mathematical*

analysis and application to mathematical physics. – Samarkand, 2018. September 17-20. – P. 118-119.

7. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б. Карты неподвижных точек операторов вольтерровского типа // International conference. Mathematical analysis and application to mathematical physics. – Samarkand, 2018. September 17-20. – P.117-118.

8. Эшмаматова Д.Б. О построении функций Ляпунова для динамических систем вольтерровского типа // Conference problems of modern topology and its applications. – Tashkent, 2018. September 11-12. – P. 40-42.

9. Эшмаматова Д.Б., Ганиходжаев Р.Н. О некоторых свойствах карт неподвижных точек операторов вольтерровского типа // Conference problems of modern topology and its applications. – Tashkent, 2018. September 11-12. – P. 46–48.

10. Eshmamatova D.B. On asymptotical behavior of trajectories of Volterra type operators // Uzbek-Israel joint International Conference, STEMM. – Tashkent, 2019. May 13-17. – P. 44-45.

11. Ganikhodzhaev R.N, Eshmamatova D.B. Transversality of Volterra type operators acting in the simplex S^{m-1} // Uzbek-Israel joint International Conference, STEMM. – Tashkent, 2019. May 13-17. – P. 55-56.

12. Ganikhodzhaev R.N, Eshmamatova D.B. On cards of fixed points of Volterra type transversal operators. // Scientific conference. Actual problems of applied mathematics and information technologies. – Tashkent, 2019. November 14-15. – P. 150-151.

13. Eshmamatova D.B. On cards of fixed points of Volterra type quadratic stochastic operators. // Scientific conference. Actual problems of applied mathematics and information technologies. – Tashkent, 2019. November 14-15. – P. 149-150.

14. Eshmamatova D.B., Tadzhiyeva M.A., Ganikhodzhaev R.N. A cards of fixed points of Volterra operators with a homogeneous number in the simplex S^{m-1} . // Proceedings of scientific conference. Actual problems of stochastic analysis. – Tashkent, 2021. February 20-21. – P. 430-433.

15. Eshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1} . // Uzbekistan-Malaysia international online conference. Computational models and technologies. 2020. August 24-25.

16. Eshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1} . // AIP Proceeding of sciematic. 2021.

17. Eshmamatova D.B. Discrete analog of the *SIR* model. // International Conference. Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies. al-Khwarizmi. 2021. November 15-17. 2021.

18. Eshmamatova D.B., Tadzhiyeva M.A., Ganikhodzhaev R.N. Degenerate cases in Lotka-Volterra systems. Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies. al-Khwarizmi. 2021. November 15-17. 2021.

19. Эшмаматова Д.Б. Эпидемиологические модели и их связь с системами Лотки-Вольтерры. // International scientific and practical conference. Modern problems of Mathematics, Physics and Mathematical Modeling. – Karshi, 2021. December 3-4.

20. Эшмаматова Д.Б., Таджиева М.А., Ганиходжаев Р.Н. Динамика квадратичных отображений Лотки-Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей (случай малых размерностей). // VI Международная научная конференция. Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики. – Нальчик-Эльбрус, 2021. 5-9 декабря.

21. Eshmamatova D.B. Modeling of the biogen cycle using discrete dynamic Lotka-Volterra systems with homogeneous tournaments. Международная научная конференция. Актуальные проблемы теорий оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений. – Бишкек, 2022. Июнь 23-25. – С. 139–144.

22. Eshmamatova D.B. Discrete models of viral diseases transmitted by airborne capillaries. // International Conference. Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics. – Samarkand, 2022. September 23–24.

23. Eshmamatova D.B., Yusupov F.A. Dynamics of compositions of some Lotka-Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex. // International Conference. Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics. – Samarkand, 2022. September 23–24.

24. Eshmamatova D.B., Tadzhiyeva M.A., Ganikhodzhaev R.N. Behavior dynamics of the Lotka-Volterra mapping composition, with transitive tournaments describing models of sexually transmitted diseases. // International Conference. Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics. – Samarkand, 2022. September 23-24.

25. Эшмаматова Д.Б. Модели вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капиллярным путём. // Республиканская научно-практическая конференция. Теоретические основы и прикладные задачи современной математики. – Андижан, 2022. 28 марта. – С. 303-306.

26. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б., Таджиева М.А. Динамика квадратичных отображений Лотки-Вольтерры, действующих в четырёхмерном симплексе с вырожденной кососимметрической матрицей. // Международная научно-практическая конференция. Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий. – Бухара, 2022. 11-12 мая. – С. 61–62.

27. Эшмаматова Д.Б. Динамика композиции квадратичных отображений Лотки-Вольтерры, действующих в двумерном симплексе, соответствующих сильным турнирам. // Международная научно-практическая конференция. Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий. – Бухара, 2022. 11-12 мая. – С. 81–82.

28. Eshmamatova D.B. Compositions of Lotka-Volterra mappings as a model for the study of viral diseases. // Sixth International Conference on Analysis and

Applied Mathematics. Conference ICAAM-2022. October 31-November 6. – Turkey. Antalya. ISBN 978-601-08-2786-8.

29. Eshmamatova D.B. Toshmatova M.M. Asymptotic behavior of discrete dynamical systems of Volterra type // Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics. Conference ICAAM-2022. October 31-November 6. – Turkey. Antalya. ISBN 978-601-08-2786-8.

30. Эшмаматова Д.Б. Динамика композиции траекторий некоторых отображений Лотки-Вольтерра, действующих в двумерном симплексе, с одним взаимно-обратно направленным ребром. // Республиканская научная конференция. Операторные алгебры, неассоциативные структуры и смежные проблемы. – Ташкент, 2022. 14–15 сентября. – С. 322–324.

31. Eshmamatova D.B., Yusupov F.A. Ikki o‘lchovli simpleksda aniqlangan ba’zi novolterra tipidagi operatorlarning dinamikasi. // Республиканская научная конференция. Операторные алгебры, неассоциативные структуры и смежные проблемы. – Ташкент, 2022. 14–15 сентября. – С. 324–326.

32. Эшмаматова Д.Б., Каримов Д.И. Динамика некоторых квадратичных отображений, действующих в трёхмерном симплексе. // Республиканская научно-практическая конференция. Актуальные вопросы алгебры и анализа. – Термез, 2022. 18–19 ноября. – С. 97-100.

33. Eshmamatova D.B., Asatov J.O. Bir o‘lchovli simpleksda aniqlangan kvadratik stoxastik operatorlar kompozitsiyalari. // Республиканская научно-практическая конференция. Актуальные вопросы алгебры и анализа. – Термез, 2022. 18–19 ноября. – С. 26–28.

34. Eshmamatova D.B. DGU 20212177. Ikki o‘lchovli simpleksda ba’zi kvadratik akslantirishlar traektoriyalarining vizualizatsiyasi. 28.06.2021.

35. Tadjieva M.A., Ganixodjaev R. N. Eshmamatova D.B., Alimov A.A., Raximova M. A. DGU 20212135. Aynigan kososimmetrik matritsali Lotka-Volterra turidagi kvadratik akslantirishlar dinamikasini (kichik o‘lchamdagi hol) o‘rganish. 23.06.2021.

36. Eshmamatova D.B., Turaeva S.F. DGU 20220107. Yuqumli venerik kasalliklarni modellashtirish uchun dastur. 13.01.2022.

37. Eshmamatova D.B. DGU 20220202. Kuchli va mavsumiy yuqumli kasalliklarni yuqish dinamikasini Lotka-Volterra turidagi ayirmali tenglamalar kompozitsiyalari orqali tekshirish. 19.01.2022.

38. Eshmamatova D.B., Seytov Sh.J. DGU 20235525. Jinsiy yo‘l bilan yuqadigan virusli kasalliklari tarqalish jarayonini ikkita diskret SIR modellari kompozitsiyasi yordamida dinamikasini tekshirish. 22.06.23.

39. Eshmamatova D.B., Tadjieva M.A. DGU 202213115. Inkubatsion jarayoniga bog‘liq havo-kapillyar (tomchi) yo‘l bilan yuqadigan yuqumli takroriy xususiyatiga ega bo‘lmagan kasalliklar dinamikasini diskret model yordamida tekshirish. 27.05.2022.

40. Tadjieva M.A., Alimov A.A., Raximova M. A., Eshmamatova D.B., DGU 20213116. Havo-kapillyar (tomchi) yo‘l bilan yuqadigan yuqumli takroriy xususiyatiga ega kasalliklar dinamikasini o‘rganish. 27.05.2022.

41. Eshmamatova D.B., Yusupov F.A. DGU 23811. Qisman–orientirlangan (yarim sikl) qarama–qarshi yo’nalishga ega graflarga mos Lotka-Volterra operatorlari kompozitsiyalari traektoriyalarining dinamikasi. 20.02.2023.

Avtoreferat Toshkent davlat transport universitetining «TDTU xabarları» jurnali tahririyatida 2023 yil 6 noyabrda tahrirdan o'tkazildi.

Bichimi: 84x60 ¹/₁₆. «Times New Roman» garniturası.

Raqamli bosma usulda bosildi.

Shartli bosma tabog 'i: 4. Adadi 100. Buyurtma №43-24/2023.

Nashrga ruxsat etildi: 6.11.2023 y.

Guvohnoma № 8057, 2021-04-13

«Transport» nashriyoti

Toshkent davlat transport universiteti bosmaxonasida chop etilgan.

Bosmaxona manzili: 100167, Toshkent sh., Temiryo'chilar ko'chasi, 1.