

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM,
FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
UNIVERSITY OF BUSINESS AND SCIENCE
NODOLAT OLIY TA’LIM MUASSASASI**

**“Menejment va raqamlashtirish”
KAFEDRASI**

**“AMALIY MATEMATIKA”
FANI BO‘YICHA
O‘QUV-USLUBIY M A J M U A**

Tuzuvchi: t.f.n.,A.I.Karimov.

Bilim soxasi:	400000 -	Iqtisod
Ta’lim:	310000 -	Iqtisod
Ta’lim yo‘nalishi:	60310100 -	Iqtisod(t.s.b)

Namangan-2023

Fanning o‘quv-uslubiy majmuasi o‘quv, ishchi o‘quv reja va OTFIVning 2023 yil « 4 » aprelda tasdiqlangan va BD-60410500__raqami bilan ro‘yxatga olingan «Amaliy matematika» fanining o‘quv dasturi asosida ishlab chiqildi.

Tuzuvchi: t.f.n.,A.I.Karimov.
Taqrizchilar:

1. B.Jalilov – NamMTI f-m f-n, dotsent v.b.
2. A. Mashrabbaev - NamDU f-m f-n, dotsent

“Menejment va raqamlashtirish” kafedrasining 2023-yil 28-avgustdagi 1-sonli majlisida muhokama qilingan va tasdiqqa tavsiya etilgan.

“Iqtisodiyotr” fakul’teti kengashining 2023-yil 29-avgustdagi 1-sonli majlisida ma’qullangan va tasdiqqa tavsiya etilgan.

UBS O‘quv-uslubiy Kengashining 2023-yil 30-avgustdagi 1-sonli majlisida muhokama qilingan va tasdiqlangan.

Fakultet Kengashi raisi: A. Ilyosov
Kelishildi: UBS o‘quv-uslubiy
bo‘lim boshlig‘i: (PhD) E. Abdurazzoqov

1.Maruza matni.....	4
2.Amaliyot materiallar.....	129
3. Sillabus+Glossariy.....	192
4.Fan dasturi va Ishchi fan dasturi	199
7.Mustaqqil topshiriklar va Testlar.....	210

1-Maruza. Matritsalar va ular ustida amallar.

Determinantlar nazariyasi.

Reja.

1. Matritsalar ustida amallar. Texnologik matritsa.
2. Texnologik matritsa.
3. Determinantlar.

1. Matematikada matritsa va determinant tushunchalaridan ko'pgina iqtisodiy masalalarning matematik modeini qurishda keng foydalanamiz. Matritsa tushunchasi ko'p tarmoqli axborotlarni tartiblashga va ular ustidagi masalalarni yechishga yordam beradi.

Matematikaning iqtisoddagi tatbiqlarida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga to'g'ri keladi. Bunday sistemalarni yechishda, ular bilan bog'liq bo'lgan kvadrat matritsalamini xarakterlash uchun determinant deb nomlanuvchi son mos qo'yiladi.

1-ta'rif. O'lchamlari $m \times n$ bo'lgan matritsa deb, satrlar soni m ga, ustunlar soni n ga teng bo'lgan, $m \cdot n$ ta sondan tashkil topgan to'g'ri to'rtburchak shakldagi jadvalga aytiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsada a_{ij} - son (bu yerda birinchi indeks satr nomerini, ikkinchisi esa ustun nomerini ko'rsatadi va ularning kesishgan joyida a_{ij} element turadi $i=1,2,\dots,m$ va $j=1,2,\dots,n$) matritsaning elementi deb ataladi.

2-ta'rif. Satrlar soni ham. ustunlar soni ham n ga teng bo'lgan, ya'ni $n \times n$ o'lchamli matritsa n — tartibli kvadrat matritsa deb ataladi.

$A=(a_{ij})$ kvadrat matritsa uchun $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda A matritsa diagonal matritsa deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$A=(a_{ij})$ kvadrat matritsada $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ $i = j \Rightarrow a_{ii} = 1$ bo'lsa, bu matritsa birlik matritsa deyiladi va bu matritsa odatda E belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Agar $A=(a_{ij})$ kvadrat matritsa uchun $a_{ij} = 0$, $i > j$ ($i < j$) bajarilsa, u holda A matritsaga yuqori (quyi) uchburchak matritsa deyiladi. $1 \times n$ o'lchamli matritsaga satr matritsa, $m \times 1$ o'lchamli matritsa ustun matritsa deyiladi,

Vektorlar algebrasida ustun-matritsa va satr-matritsalar ustun-vektor va satr-vektor deb ataladi. Bu matritsalar ustun-vektor va satr-vektor deb ataladi. Bu matritsalar ustun-vektor va satr-vektor deb ataladi. Bu matritsalar ustun-vektor va satr-vektor deb ataladi.

3-ta'rif. Agar A va B matritsalar bir xil o'lchamga ega bo'lib, ularning barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, bunday matritsalar teng deyiladi va $A = B$ ko'rinishda yoziladi.

Matritsalar ustida qo'shish, songa ko'paytirish va ko'paytirish bajariladi.

O'lchamlari aynan teng bo'lgan matritsalar ustidagi bajariladi. A va B matritsalarini qo'shish uchun, ularning qo'shiladi:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Xuddi shuningdek, ikkita matritsa ayirmasi, ya'ni matritsalarini qo'shish kabi amalga oshiriladi: $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$.

Biror haqiqiy λ sonni matritsaga ko'paytirish matritsaning har bir elementiga ko'paytiriladi: $\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$.

Har bir elementi nolga teng bo'lgan matritsaga nol matritsa deyiladi.

Matritsalarini qo'shish va songa ko'paytirish axiomalarga bo'ysinadi:

- | | |
|--|---|
| 1) $A + B = B + A$, | 5) $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2) A$, |
| 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, | 6) $A + O = O + A = A$; (O — nol matritsa) |
| 3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, | 7) $A + (-A) = O$; |
| 4) $(\lambda_1 + \lambda_2) A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$, | 8) $1 \cdot A = A$; |

9) Agar $\lambda = 0$ bo'lsa, u holda $\lambda A = O$ nol matritsa bo'ladi.

Bu yerda A, B, C — bir xil o'lchamli ixtiyoriy matritsalar, λ_1, λ_2 — ixtiyoriy sonlar.

4-ta'rif. A matritsaning ustunlar soni B matritsaning satrlari soni bilan teng bo'lsa, A va B matritsalar o'zaro zanjirlangan matritsalar deyiladi.

Ko'paytirish amali o'zaro zanjirlangan matritsalar ustida bajariladi. $m \times k$ o'lchamli A matritsaning $k \times n$ o'lchamli B matritsaga ko'paytirilishi $m \times n$ o'lchamli matritsa deb, elementlari

2. Texnologik matritsa.

Iqtisodiy masalalarni matematik modellashtirishda, ya'ni, iqtisodiy muammoni matematik ifodalar yordamidagi ifodasida, matritsalaridan keng foydalaniladi. Bunda muhim tushunchalardan biri texnologik matritsa tushunchasidir. Bu matritsa, masalan, bir nechta turdagi resurslardan bir nechta tovar turlarini ishlab chiqarishni rejalashtirish (programmallashtirish), tarmoqlararo balansni modellashtirish kabi muhim iqtisodiy masalalarda asosiy rolni o'ynaydi. Faraz qilaylik o'rganilayotgan iqtisodiy jarayonda n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun m xil ishlab chiqarish faktorlari (resurslar) zarur bo'lsin. i — mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun j -turdagi resursdan a_{ij} miqdori sarflansin. a_{ij} elementlardan tuzilgan $m \times n$ o'lchamli A matritsa texnologik matritsa deb ataladi.

1-turdagi mahsulotdan x_1 miqdorda, 2-turdagi mahsulotdan x_2 miqdorda, ..., n -turdagi mahsulotdan x_n birlik miqdorda ishlab chiqarish

talab qilinsin. Bu rejani $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ustun vektor ($n \times 1$ o'lchamli) shaklida ifodalaymiz.

U holda 1-turdagi resurs sarfi $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$ ga teng. Umuman aytganda, i -turdagi resurs sarfi $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ ga teng. Umuman aytganda, j -turdagi resurs sarfi $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n$ birlikka teng. Bu miqdorlarni sifatlarda yozsak aynan AX ko'paytmani hosil qilamiz.

j – mahsulotning bir birligining narxi c_j bo'lsin.

$C = (c_1, \dots, c_n)$ ko'rinishda ifodalaymiz. U holda CX ko'paytirish qoidasiga ko'ra, skalyar miqdor, ya'ni sonni ishlab chiqarishdan olingan daromadni ifodalaydi.

Misol. Korxona ikki turdagi transformatorlar ishlab chiqaradi. 1-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 5 kg temir va 3 kg sim, 2-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 3 kg temir va 2 kg sim sarflanadi. Bir birlik transformatorlarni sotishdan mos ravishda 6 va 5 sh.p.b. miqdorida daromad olinadi. Korxonaning omborida 4,5 tonna temir va 3 tonna sim mavjud. Texnologik matritsa, narxlar vektori va resurs zahirasini ifodalovchi vektorni tuzing.

$$\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix} \text{ rejalar joiz reja bo'la oladimi?}$$

Yechish. Korxona ikki turdagi resursdan foydalanib 2-turda ishlab chiqaradi. Narxlar vektori $C = (6, 5)$. Resurs

$$B = \begin{pmatrix} 4500 \\ 3000 \end{pmatrix}. \text{ Texnologik (resurs sarfi normasi) matritsa } A =$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ rejani qaraymiz. Bu rejani bajarishdagi resurs}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

ga teng. Bu sarf zahiradan oshib ketmasligi kerak, ya'ni $AX \leq B$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 4500,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 3000.$$

Joiz reja yuqoridagi tengsizliklarni qanoatl

1) $X = \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 2700 \end{pmatrix}.$$

ya'ni bu reja joiz reja. Bu reja asosida olinadigan daro

$$CX = \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix} = (6000) \text{ sh.p.b. ga teng.}$$

2) $X = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix}.$$

Bundan ko'rish mimkinki, 1-turdagi resurs sarfi 4800 ga
resurs zahirasi 4500 dan katta. Shu sababli, qaralayotgan reja joiz

3. Determinantlar.

A kvadrat matritsaning skalyar (sonli) miqdorni aniqlash tushunchasining kiritilishi chiziqli tenglamalar sistemalarining chambarchas bog'liq.

Bizga n -tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matritsa berilgan bo'lsin.

n -tartibli determinant $\det(A)$, $|A|$ yoki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi.

n -tartibli determinant $n!$ ta hadning yig'indisidir. Yig'indining har bir hadi matritsaning turli satrlari va turli ustunlari bo'yida joylashgan n ta elementi ko'paytmasidan iborat. Yig'indining ko'paytmalarning yarmi ($n!/2$ tasi) o'z ishorasi bilan, qolgan yarmi qarshi ishora bilan olingan.

2-tartibli kvadrat matritsaning determinanti quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Uchinchi tartibli determinant uchun quyidagi ifodani foydalanish mumkin:

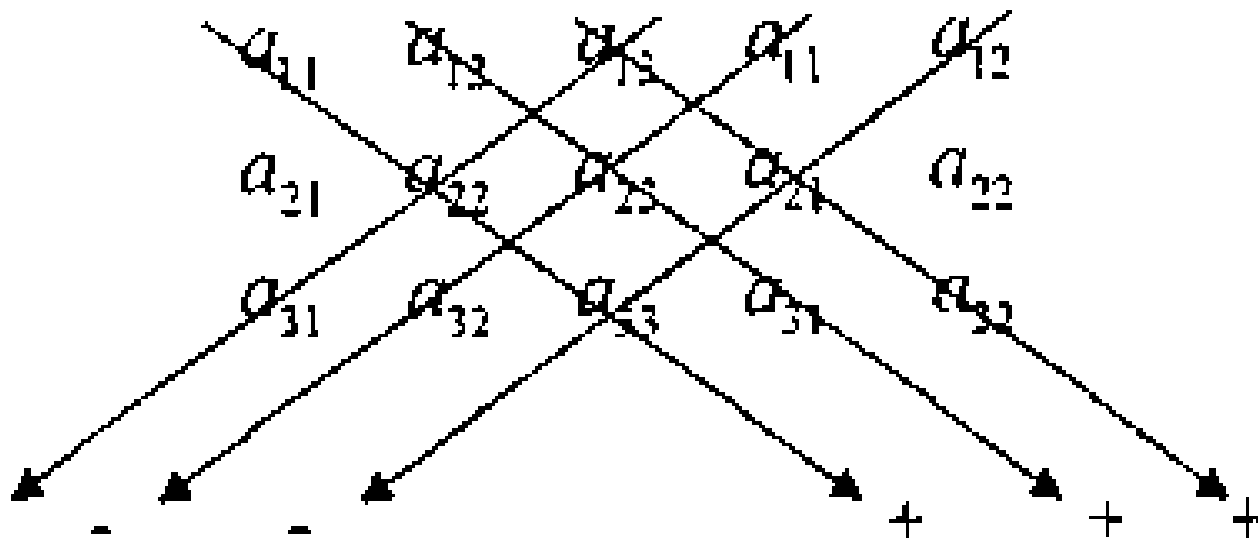
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Determinantlarni hisoblash metodlari

Uchburchak usuli. Uchinchi tartibli determinantTM hisoblashning uchburchak usuli quyidagicha sxematik ko'rinishda amalga oshiriladi:

$$A = + \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarryus qoidasi quyidagicha amalga oshiriladi. Determinant ustunlarining o'ng yoniga chapdagi birinchi va ikkinchi ustunlar ko'chirib yoziladi. Hosil bo'lgan kengaytirilgan jadvalda bosh diagonal yo'nalishida joylashgan elementlar ko'paytirilib musbat ishora bilan, ikkilamchi diagonal yo'nalishidagi elementlar ko'paytirilib manfiy ishora bilan olinib yig'indi tuziladi. Bu yig'indi uchinchi tartibli determinantning qiymatidan iborat. Buni sxema ko'rinishida quyidagicha tasvirlash mumkin:



2-Maruza. Matritsa rangi . Teskari matritsa.

Reja.

1. Matritsa rangi .
2. Teskari matritsa.

1. Bizga quydagi matritsa berilgan bo'lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

A matritsaning rangi deb noldan farqli minorlarning eng yuqori tartibiga aytiladi va $\text{rang}(A)$ kabi ifodalanadi.

Matritsa rangi ikki usulda topiladi:

1. Matritsa rangi ta'rifga asoslangan "minorlar ajratish" usuli.
2. Elementar almashtirishlar bajarib diagonal matritsaga keltirishga asoslangan "Gauss algoritmi".

Misol 1. Matritsa rangini hisoblang:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad A \text{ matritsa } 3 \times 5 \text{ tartibli, demak uning rangi } 3 \text{ dan yuqori bo'lmaydi.}$$

Uchinchi tartibli minorlarni hisoblaymiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 10 - 12 + 12 + 4 + 10 = 0 \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -32 - 2 + 8 - 8 + 32 + 2 = 0$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 14 - 16 + 16 + 8 - 14 = 0 \quad M_4 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -40 - 3 + 4 - 10 + 48 + 1 = 0$$

$$M_5 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 21 - 8 + 20 + 12 + 7 = 0 \quad M_6 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 14 + 160 - 4 + 20 - 168 = 0$$

$$M_7 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 7 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 14 - 64 + 4 + 56 - 8 = 0 \quad M_8 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 42 + 16 - 40 - 14 - 24 = 0$$

$$M_9 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 80 + 6 - 8 + 20 - 2 - 96 = 0 \quad M_{10} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 128 - 28 - 8 + 16 - 112 = 0$$

Barcha uchinchi tartibli minorlar nolga teng. Ikkinchi tartibli minorlarni hisoblaymiz:

$$M'_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \quad M'_1 \neq 0 \quad r(A) = 2$$

Bu usulda noldan farqli minor topilgunga qadar hisoblashlar davom etadi. Shuning uchun tartibi kattaroq matritsa rangini hisoblash birmuncha qiyinchiliklarga olib keladi.

Misol 2. Matritsa rangini elementarni almashtirishlar yordamida nollar yig'ib hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bu matritsaning rangi } \begin{pmatrix} 31 & 17 & 43 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ matritsa rangiga teng.}$$

$$\begin{vmatrix} 31 & 17 & 43 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \quad r \begin{pmatrix} 31 & 17 & 43 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Demak, berilgan matritsaning rangi ham 3 ga teng. $r(A) = 3$

I. L. Gamov

2. Teskari matritsa

Bizga ma'lumki I birlik matritsa va $A \cdot I = I \cdot A = A$ tenglik o'rinli.

1-Ta'rif. A matritsa uchun $A \cdot B = I$ tenglikni

qanoatlantiruvchi B matritsa A ga *teskari* matritsa deyiladi va u $B = A^{-1}$ ko'rinishda belgilanadi.

2-Ta'rif. Barcha satr vektorlari chiziqli erkli matritsa *xosmas* (aynimagan) matritsa, barcha satr vektorlari chiziqli bog'langan matritsa *xos* (aynigan) matritsa deb ataladi.

Xosmas matritsalariga doir quyidagi ikkita teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-Teorema. Xosmas matritsani elementar almashtirishlar yordamida birlik matritsaga keltirish mumkin.

2-Teorema. Xosmas matritsaga teskari matritsa mavjud va yagonadir. (Teoremaning isbotlari A.G.Kuroshning «Oliy algebra kursi» kitobida keltirilgan).

Teskari matritsani topish.

Aytaylik, n -tartibli kvadrat, xosmas A matritsa berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsaga teskari B matritsani topish uchun, uni quyidagi ko'rinishda

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \quad (1)$$

yozamiz:

Chap tomonida berilgan A matritsa, o'ng tomonda I birlik matritsa yozilgan. Bu matritsalarining ikkalasiga bir vaqtda A matritsani birlik I matritsaga keltiradigan satrlar bo'yicha elementar almashtirishlar qo'llaymiz.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right) \dots \dots \dots (2)$$

(2) ning o'ng tomonidagi matritsa xuddi A ga teng teskari B matritsani ifodalaydi, ya'ni $A \cdot B = I$ bo'ladi. A matritsa o'z navbatida B ga teskari bo'lganligi sababli $B \cdot A = I$ ham bajariladi.

Misol. Berilgan A matritsaga teskari bo'lgan A^{-1} matritsani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Yechish. Buning uchun quyidagi matritsani tuzamiz:

Birinchi ustunni 1 ga, so'ngra -2 ga ko'paytirib, mos ravishda ikkinchi va uchinchi ustunga qo'shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ikkinchi ustunni 2 ga va 1 ga ko'paytirib, mos ravishda birinchi va uchinchi ustunga qo'shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Uchinchi ustunni -3 ga ko'paytirib, birinchi ustunga qo'shamiz va ikkinchi ustunni -1 ga ko'paytiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ikkinchi va uchinchi ustunlarni almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Natijada A ga teskari A^{-1} matritsaga ega bo'lamiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar:

I. E. Gamov

1. Matritsa nima?
2. Matritsalar ustidagi amallarni izohlang.
3. Qanday shartda matritsalarini qo'shish mumkin?
4. Qanday shartda matritsalarini ko'paytirish mumkin?
5. Teskari matritsa deb nimaga aytiladi?
6. Kvadrat matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Birlik matritsa deb nimaga aytiladi?
8. Matritsani songa ko'paytirishning xossalari ayting.

3-Maruz

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari.

Reja.

1. Matritsa rangi. Teskari matritsa.
2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi.
3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari.

Ixtiyoriy o'lchamli matritsaning bir necha satr yoki ustunlarini o'chirishdan hosil bo'lgan kvadrat matritsa determinantiga matritsa osti minori deyiladi. Bu kvadrat matritsa tartibi matritsa osti minorining tartibi deyiladi. Agar berilgan matritsa kvadrat shaklda bo'lsa, uning eng katta tartibli minori o'ziga teng.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning 1-satr va 1-ustunini o'chirishdan

2-tartibli minor $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$, 2-satr va 3-ustunini o'chirishdan 2-tartibli minor

$M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ va hokazo minorlarni hosil qilish mumkin.

10-ta'rif. A matritsaning rangi deb, noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va $\text{rang}(A) = r(A)$ ko'rinishida ifodalanadi.

Matritsa rangining xossalari:

- 1) agar A matritsa $m \times n$ o'lchovli bo'lsa, u holda $\text{rang} A \leq \min(m, n)$;
- 2) A matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda $\text{rang} A = 0$;
- 3) agar A matritsa n -tartibli kvadrat matritsa va $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda $\text{rang} A = n$.

(1 -2)

I. E. Gamov

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang.

Yechish. Berilgan matritsa (3×2) o'lchamli bo'lgani uchun satrlar va ustunlar sonini taqqoslaymiz va kichigini, ya'ni 2 ni tanlaymiz. Matritsadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning qiymatini hisoblaymiz. Bu jarayonni noldan farqli ikkinchi tartibli minor topilguncha davom ettiramiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Berilgan matritsadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta'rifga binoan, A matritsa rangi 2 ga teng, ya'ni $\text{rang}(A) = 2$.

Matritsa rangini aniqlashning yuqoridagi usuli «minorlar ajratib hisoblash» usuli deb ataladi.

Matritsa rangi uning ustida quyidagi almashtirishlar bajarganda o'zgarmaydi:

1. Matritsa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko'paytirganda;
2. Matritsa satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilganda;
3. Matritsa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror noldan farqli songa ko'paytirib, so'ngra qo'shganda;

4. Matritsa transponirlanganda.

Teorema. Elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi.

Matritsa rangini aniqlashni aniq misollarda ko'rib chiqaylik.

Misol. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

matritsada birinchi satrni 2 ga va ikkinchi satrni -3 ga ko'paytirib, birinchini ikkinchiga qo'shsak, so'ngra yana birinchi satrni 5 ga, uchunchi satrni 3 ga ko'paytirib, natijalarni qo'shsak,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Yuqorida qo'llaniladigan almashtirishlar matritsani elementar almashtirishlardan iborat bo'lgani uchun, ular matritsaning rangini o'zgartirmaydi. Shu sababli, birinchi misolda $r(A) = 3$ bo'ladi, chunki A da uchta nolmas satr bor. Ikkinchi misolda esa $r(B) = 2$ bo'ladi.

11-ta'rif. Agar A kvadrat matritsa uchun $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ tenglik bajarilsa, A^{-1} matritsa A matritsaga teskari matritsa deyiladi.

Bu yerda E birlik matritsa bo'lib, uning o'lchami A matritsaning o'lchami bilan bir xil.

Agar A xosmas matritsa bo'lsa ($\det A \neq 0$), u holda uning uchun yagona A^{-1} matritsa mavjud bo'ladi va u quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

Bu yerda $\tilde{A}$ matritsa A kvadrat matritsaning har bir elementini unga mos algebraik to'ldiruvchisi bilan almashtirish natijasida olingan matritsa ustida transponirlash amalini bajarishdan hosil bo'lgan matritsa.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Xos matritsa ($\det A = 0$) uchun teskari matritsa mavjud emas. Boshqacha qilib aytganda, biror n -tartibli matritsa uchun $r < n$ bo'lsa, uning uchun teskari matritsa mavjud emas.

Endi A kvadrat matritsaga A^{-1} teskari matritsani elementar almashtirishlar yordamida topamiz. Bu usul quyidagicha amalga oshiriladi:

1. A matritsaning o'ng tarafiga tartibi uning tartibiga teng bo'lgan E birlik matritsa yoziladi va kengaytirilgan $A|E$ matritsa tuziladi.

2. Parallel ravishda $A|E$ kengaytirilgan matritsaning chap va o'ng qismlari satr (ustun)lari ustida elementar almashtirishlar bajarilib, chap qismi birlik matritsa ko'rinishiga keltiriladi. U holda uning o'ng qismida A^{-1} teskari matritsa hosil bo'ladi.

$$A|E \sim E|A^{-1}.$$

Teskari matritsa quyidagi xossalariga ega:

- 1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- 3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

X noma'lum matritsaning oddiy ko'rinishdagi matritsali tenglamasi quyidagi ko'rinishlarda bo'ladi

$$A \cdot X = B, \quad (1)$$

$$X \cdot A = B, \quad (2)$$

Agar 1-va 2- tenglamalarda A xosmas matritsa bo'lsa, u holda yechim quyidagicha ifodalanadi.

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Misollar

1. Elementar almashtirishlar metodida quyidagi matritsaning rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Elementar almashtirishlar yordamida matritsani pog'onasimon ko'rinishga keltiramiz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot II - I, 2 \cdot III - I} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + 3 \cdot II} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan pog'onasimon matritsa ikkita noldan farqli satrga ega, demak uning rangi ikkiga teng. Shuning uchun berilgan matritsaning rangi ikkiga teng.

2. Berilgan matritsaga teskari matritsani toping: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$

Yechish. 1) A matritsaning determinantini topamiz:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -48 - 2 \cdot (-42) + 3 \cdot (32 - 35) = -48 + 84 - 9 = 27 \neq 0.$$

$\det A \neq 0$ demak A^{-1} mavjud.

2) A matritsa barcha elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3;$$

$$3) \tilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \text{ matritsani yozamiz.}$$

4) A^{-1} matritsani topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tekshiramiz: } A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi.

Asosiy tushunchalar. Kroneker-Kapelli teoremasi

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

tenglamalar sistemasiga n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ sonlar sistemaning koeffitsiyentlari, $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar noma'lumlar, $b_1, b_2, \dots, b_m$ sonlar esa ozod hadlar deyiladi. a_{ij} koeffitsiyentda birinchi indeks i tenglamaning nomerini, ikkinchi indeks j esa nomalumning nomerini bildiradi.

(1) sistema va uning yechimlarini to'liqroq tahlil qilish uchun ba'zi tushunchalarni kiritib olishimiz kerak.

I. Ergashev

Oldingi paragraflarda aytilganidek matritsaning ustunlarini ustun vektor, satrlarini esa satr vektor sifatida qarash mumkin.

Bizga

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ustun vektorlar va $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar Y vektor uchun

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda Y vektor $X_1, X_2, \dots, X_m$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

Bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sonlar chiziqli kombinatsiya koeffitsiyentlari deb ataladi.

Agar $X_1, X_2, \dots, X_m$ vektorlar uchun

$$\Theta = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m$$

tenglik faqat va faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ holdagina bajarilsa, u holda $X_1, X_2, \dots, X_m$ vektorlar chiziqli erkin vektorlar deb ataladi.

Agar $X_1, X_2, \dots, X_m$ vektorlar uchun

$$\Theta = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m$$

tenglik hech bo'lmaganda bitta λ_i uchun $\lambda_i \neq 0$ bo'lgan holda bajarilsa, u holda $X_1, X_2, \dots, X_m$ vektorlar chiziqli bog'liq vektorlar deb ataladi

4-Maruza. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer va matritsa usulida yechish.

Reja.

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish

2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish

1. Bizga n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

(1)

koefitsiyentini hamda shu tenglamaning ozod hadini b_i orqali belgilaymiz.

bir tenglamasini ayniyatga aylantirsa, u holda bu sonlar sistemasi (1) chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi deb ataladi.

sistema birgalikdagi sistema, aksincha bo'lsa birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

aniq sistema, agar cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, bunday sistema aniqlanmagan sistema deyiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

tenglamasini esa $-a_{12}$ ga ko'paytirib, ularni qo'shsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

Xuddi shu amalni x_2 o'zgaruvchini topish uchun ham qo'llaymiz va natijada

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1$$

ni hosil qilamiz. So'ngra

(3)

deb faraz qilib,

(4)

quyidagi tartibda topamiz:

xil bo'lib, u (3) determinantga teng;

2) $x_i = (i = 1, 2)$ noma'lumning surati esa (3) determinantda i - ustunni, ya'ni qidirilayotgan noma'lumning koeffitsiyentlari ustuni (2) sistemaning ozod hadlaridan iborat ustun bilan almashtirishdan hosil bo'ladigan determinantdan iborat bo'ladi.

Bu keltirgan qoida ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning **Kramer qoidasi** deb ataladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{bo'lsa, u holda}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \quad \text{bo'ladi.}$$

Xuddi shu qoidani uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemalari uchun ham qo'llash mumkin.

2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish

Matrisalar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga o'tamiz.

(1) tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

belgilashlarni kiritamiz. Endi yuqoridagi sistemani matrisalarni ko'paytirish qoidasidan foydalanib,

$$AX = B$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\det A \neq 0$ bo'lsa, teskari matritsa A^{-1} mavjud va $A^{-1}AX = A^{-1}B$ hosil bo'ladi. Shunday qilib, noma'lum X matritsa $A^{-1}B$ matrisaga teng bo'ladi, yaxni

$$X = A^{-1}B.$$

Bu (1) tenglamalar sistemasini yechishning **matrisaviy yozuvini** bildiradi.

Agar (1) chiziqli tenglamalar sistemasi echimga ega bo'lsa, u birgalikda, agar echimga ega bulmasa, u birgalikda emas deyiladi. quyidagi elementar almashtirishlar natijasida tenglamalar sistemasi uziga teng kuchli sistemaga almashadi.

1) Istalgan ikki tenglamani urinlarini almashtirilsa;

2) Tenglamalardan istalgan birini ikkala tomonini noldan farkli songa kupaytirilsa;

3) Tenglamalardan birini istalgan xakikiy songa kupaytirib, boshqa tenglamaga qo'shilsa.

2-misol. Matrisalar yordamida ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

Yechish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

I. Igamov

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisalar yordamida berilgan tenglamalar sistemasini

$$AX = B \quad (**)$$

ko'rinishda yozamiz. Endi A matrisaning determinantini hisoblaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 2.$$

A matrisaning determinanti 0 dan farqli bo'lganligi uchun, unga teskari yagona A^{-1} matrisa mavjud va tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi. Endi A^{-1} teskari matrisani topish uchun Δ determinant elementlarining hamma algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Teskari A^{-1} matrisani topish formulasiga asosan,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

(**) tenglikning ikki tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytirsak, $A^{-1}AX = A^{-1}B$ yoki $X = A^{-1}B$ bo'lib, yaxni

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ -2,5 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + (-1,5) \cdot 2 \\ 0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 4 + 0,5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tenglik hosil bo'ladi.

$$\text{Shunday qilib, } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{yoki} \quad x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1.$$

5-Maruza. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi.

Fundamental yechimlar sistemasi.

Reja.

1. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi.

2. Fundamental yechimlar sistemasi.

1. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.

n ta noma'lum va m ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

2-teorema. (Kroneker-Kapelli teoremasi). Agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng bo'lsa, ya'ni $r(A) = r(\bar{A})$ bo'lsa, u holda sistema birgalikda bo'ladi, ya'ni yechimga ega bo'ladi.

Xulosalar

1. Agar $r(A) = r(\bar{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'ladi.

2. Agar $r(A) \neq r(\bar{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.

3. Agar $r(A) = r(\bar{A}) = n$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

4. Agar $r(A) = r(\bar{A}) < n$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi (1) da ozod hadlar nolga teng bo'lsa, ya'ni $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ bo'lsa, hosil bo'lgan tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi, ya'ni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Bu sistema kengaytirilgan matritsaning oxirgi ustuni elementlari nolga teng bo'lgani uchun sistema matritsasi va kengaytirilgan matritsalar rangi teng bo'ladi,

ya'ni $r(A) = r(\bar{A})$ bo'ladi. Shuning uchun Kroneker-Kapelli teoremasiga ko'ra bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda bo'ladi.

Masalan, $(0,0,\dots,0)=0$ sistemaning trivial yechimi (nol yechim) bo'ladi.

(2) tenglamalar sistemasining matritsa ko'rinishi quyidagidan iborat:

$$AX = 0. \quad (3)$$

Yuqorida keltirilgan 1-4 xulosalarga ko'ra, agar $r(A) = n$ bo'lsa (2)-sistema yagona, nol yechimga ega, agarda $r(A) < n$ bo'lsa, cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Demak $m = n$ bo'lgan holda (2) sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli bo'lar ekan.

I. L. Gamov

Agar (2) sistemada $m < n$ bo'lsa, ya'ni tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, (2) sistema albatta noldan farqli yechimlarga ega bo'ladi (cheksiz ko'p), chunki bu holda $r(A) \leq m$ va demak $r(A) < n$ bo'ladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, agar

$X_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ va $X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ vektorlar (3) sistema yechimi bo'lsa, u holda istalgan λ_0 va λ_1 sonlar uchun, $\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1$ -vektor ham (3) sistema yechimi bo'ladi, **haqiqatan ham,**

$$A(\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1) = \lambda_0 AX_0 + \lambda_1 AX_1 = \lambda_0 0 + \lambda_1 0 = 0. \quad (4)$$

Bu tengliklar matritsalarini qo'shish, songa ko'paytirish va ko'paytirish ta'riflaridan kelib chiqadi. (4) tenglikdan shuni xulosa qilish mumkinki, (3) sistema yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi ham (3)-sistemaning yechimi bo'lar ekan.

2. Fundamental yechimlar sistemasi.

1-ta'rif. Agar (3) sistemaning $X_1, X_2, \dots, X_k$ -chiziqli erkli yechimlar sistemasi berilgan bo'lib, bu sistemaning istalgan X yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, ya'ni shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sonlar mavjud bo'lsaki,

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$$

bo'lsa, u holda bu sistema fundamental yechimlar sistemasi deyiladi

Ta'rifda $X_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, k$, ko'rinishda bo'lgani uchun, $k \leq n$ bo'ladi.

Teorema. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun, uning asosiy matritsasining rangi r noma'lumlar soni n dan kichik bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni $r < n$.

Faraz qilamiz, n noma'lumli n ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Teorema. n noma'lumli n ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun, uning Δ determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni $\Delta = 0$.

Misol. Quyidagi bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Yechish. Asosiy matritsani tuzib olamiz va uning rangini topamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2 \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \right), \quad n = 3.$$

Sistema cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega, chunki $r < n$. Shuning uchun uni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

Oxirgi sistemani Kramer usulida yechamiz:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3$$

bo'lganligi sababli, umumiy yechim

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$$

Umumiy yechimga $x_3 = 0$ qiymatni quyib $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ xususiy yechimga

ega bo'lamiz. Shuningdek, $x_3 = 1$ deb olsak $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ xususiy yechim hosil

bo'ladi va hakoza.

(2) sistemaning $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ yechimlarini $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ satr ko'rinishida yozib olamiz.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlari quyidagi xossalarga ega:

1) Agar $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ satr (2) sistemaning yechimi bo'lsa, u holda $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \dots, \lambda k_n)$ satr ham shu sistemaning yechimi bo'ladi. Bu yerda λ ixtiyoriy son.

2) Agar $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ va $e_2 = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ satrlar (1) sistemaning yechimlari bo'lsa, u holda ixtiyoriy c_1 va c_2 sonlar uchun ularning

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1 k_1 + c_2 l_1, c_1 k_2 + c_2 l_2, \dots, c_1 k_n + c_2 l_n)$$

chiziqli kombinatsiyasi ham shu sistemaning yechimi bo'ladi.

3-teorema. Agar (3) sistema uchun $r(A) < n$ bo'lsa, u holda istalgan fundamental yechimlar sistemasi $k = n - r(A)$ ta yechimdan iborat bo'ladi.

Isboti. $r(A) < n$ bo'lsin, u holda (3) sistemaning kengaytirilgan matritsasi elementar almashtirishlar natijasida quyidagi ko'rinishga keladi,

$$\begin{array}{ccccccc} x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ir} & \cdots & x_{in} & \\ \hline \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & | & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & | & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

bu yerda $r = r(A)$ bo'lib, $c_{ii} \neq 0, i = \overline{1, r}$. Agar buni tenglama ko'rinishida yozsak quyidagini hosil qilamiz.

$$c_{11} x_{i1} + c_{12} x_{i2} + \cdots + c_{1r} x_{ir} + c_{1r+1} x_{ir+1} + \cdots + c_{1n} x_{in} = 0$$

$$c_{22} x_{i2} + \cdots + c_{2r} x_{in} + c_{2r+1} x_{ir+1} + \cdots + c_{2n} x_{in} = 0$$

$$c_{rr} x_{ir} + c_{rr+1} x_{ir+1} + \cdots + c_{rn} x_{in} = 0$$

bu yerda oxirgi tenglamadan x_{ir} ni $x_{ir+1}, \dots, x_{in}$ lar orqali ifodalab, undan oldingi tenglamadagi x_{ir} ning o'rniga qo'ysak, x_{ir-1} ning $x_{ir+1}, \dots, x_{in}$ larning chiziqli kombinatsiya ekanligi kelib chiqadi.

Shu tariqa yuqoriga ko'tarilib, natijada quyidagilarni hosil qilamiz.

$$x_{i1} = \lambda_{i1} x_{ir+1} + \lambda_{i2} x_{ir+2} + \cdots + \lambda_{in} x_{in}$$

$$x_{i2} = \lambda_{21} x_{ir+1} + \lambda_{22} x_{ir+2} + \cdots + \lambda_{2n} x_{in}$$

$$x_{ir} = \lambda_{r1} x_{ir+1} + \lambda_{r2} x_{ir+2} + \cdots + \lambda_{rn} x_{in}$$

Bu yerda $x_{ir-1}, x_{ir+2}, \dots, x_{in}$ lar erkli o'zgaruvchilar deb ataladi. Ularning soni $n - r = n - r(A) = k$ ga teng bo'ladi. Bu o'zgaruvchilardan birini 1 ga, qolganlarini 0 ga teng qilib olib, quyidagi k ta chiziqli erkli bo'lgan yechimlar sistemasini hosil qilamiz.

I. E. Gamov

$$X_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{r1}, 1, 0, \dots, 0)$$

$$X_2 = (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{r2}, 0, 1, \dots, 0)$$

$$X_k = (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \dots, \lambda_{rk}, 0, 0, \dots, 1)$$

Shuni ta'kidlash lozimki, bir jinsli bo'lmagan n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi $AX = B$ ning umumiy yechimi, unga mos keluvchi $AX = 0$ bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi va $AX = B$ tenglamaning biron-bir xususiy yechimi yig'indisiga teng bo'ladi.

1-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini toping.

Yechish. Bu sistemada $r=2$, $n=5$. Demak, sistemaning har qanday fundamental yechimlar sistemasi $n-r=3$ ta yechimdan iborat bo'ladi. Bu yerda x_3, x_4, x_5 noma'lumlarni erkli noma'lumlar deb hisoblab sistemani yechamiz va quyidagi umumiy yechimni hosil qilamiz:

Misol. Faraz qilamiz, korxona A, B, C turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun S_1, S_2, S_3 xom ashyolardan foydalanadi. Bitta mahsulotni tayyorlash uchun xom ashyolarning bir kunlik sarf normasi quyida berilgan jadvaldagidek bo'lsin:

Xom ashyo turi	Bitta mahsulotni tayyorlash uchun xom ashyoning sarf normasi			Xom ashyoning bir kunlik sarf miqdori
	A	B	C	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Har bir tur mahsulotning bir kunlik ishlab chiqarish hajmi topilsin.

Yechish. Agar korxona bir kunda A mahsulotdan x_1 dona, B mahsulotdan x_2 dona va C mahsulotdan x_3 dona ishlab chiqarsa, u holda yuqoridagi jadvalga asosan:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 800, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu sistemani yuqorida keltirilgan usullardan biri bilan yechsak: (200; 300; 200). Bu esa korxona bir kunda A mahsulotdan 200 dona, B mahsulotdan 300 dona va C mahsulotdan 200 dona ishlab chiqarishini bildiradi.

3.3. Ko'p tarmoqli iqtisod modeli (Balans modeli)

Balans modelining asosiy masalasi, makroiqtisodiyotni tashkil etadigan ko'p tarmoqli iqtisodiyot faoliyatini maqsadga muvofiq tarzda samarali olib borishdan iborat bo'lib, bu masala quyidagicha qo'yiladi: n ta tarmoqli xo'jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo'lganda ehtiyoj to'la qondiriladi? Bu yerda shuni e'tiborga olish kerakki, n ta tarmoqning har biri ishlab chiqargan mahsulotning bir qismi shu tarmoq ehtiyoji uchun, bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lmagan ehtiyojlar uchun sarf etiladi.

Ishlab chiqarishning ma'lum bir davridagi, aytaylik, bir yillik faoliyatini qaraylik. x_i deb i -tarmoqning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmining pul birligida ifodalangan qiymatini, bu yerda $i = 1, 2, \dots, n$. x_{ij} deb i -tarmoq mahsulotining j -tarmoq ehtiyoji uchun sarf etilgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz. y_i deb i tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz. Tabiiyki, i tarmoq ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmi x_i , n ta tarmoq ehtiyojlari va noishlab chiqarish ehtiyojlari uchun sarf etilgan mahsulotlar hajmlarining pul miqdorlari yig'indisiga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

(8) tenglamalar balans munosabatlari deb nomlanadi.

Agar $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) belgilash kiritsak, a_{ij} - j -tarmoqning mahsulot hajmi birligi uchun sarf etilgan i -tarmoq mahsulot hajmi qiymatini bildiradi. a_{ij} -bevosita xarajatlar koeffitsienti deb nomlanadi. a_{ij} -koeffitsientlarni qaralayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qo'llanilayotgan texnologiya aniqlaydi. Qanchalik yangi, samarador texnologiya qo'llanilsa, a_{ij} -koeffitsientlar shunchalik kichik, sarf-xarajatlar shunchalik kam bo'lib, samaradorlik yuqori bo'ladi. Qaralayotgan davr ichida a_{ij} koeffitsientlarni o'zgarmas deb olib, ya'ni sarf-xarajatlarni yalpi

xarajatlarga chiziqli bog‘liq deb qaraymiz.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Shu munosabat bilan ko‘rilgan ko‘p tarmoqli iqtisodiyot modelini chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. (1) tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishga keladi.

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Endi quyidagi belgilashlarni kiritaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bu yerda A -texnologik matritsa, X -yalpi mahsulot vektori, Y -yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan (9) tenglikning quyidagi matritsa ko‘rinishini hosil qilamiz.

$$X = AX + Y. \quad (10)$$

Ko‘p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy mahsulot vektori va bevosita xarajatlar matritsasi A - ga ko‘ra X -yalpi mahsulot vektorini topishdan iborat bo‘ladi, ya’ni (10) tenglamani noma’lum vektor X ga nisbatan yechish kerak. Buning uchun uni quyidagi ko‘rinishga olib kelimiz $(E - A)X = Y$.

Agar $\det(E - A) \neq 0$ bo‘lsa, u holda teskari $(E - A)^{-1}$ matritsa mavjud bo‘lib, yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$X = (E - A)^{-1} Y \quad (11)$$

$S = (E - A)^{-1}$ -matritsa bevosita xarajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma’nosini tushunish uchun $Y_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ i -o‘rnida 1, qolgan joylarda 0 bo‘lgan yakuniy mahsulot birlik vektorlarini qaraymiz. Ularga mos keluvchi (11) tenglama yechimlari quyidagiga teng bo‘ladi.

$$X_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demak, $S = (s_{ij})$ matritsaning s_{ij} -elementi i -tarmoqning j -tarmoq birlik yakuniy mahsuloti Y'_j ni, ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi zarur bo‘lgan mahsulot miqdori qiymatini bildiradi.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra, (11) tenglamada

$y_i \geq 0$, $(i = \overline{1, n})$, $a_{ij} \geq 0$ $(i, j = \overline{1, n})$ bo‘lib, tenglama yechimi uchun $x_i \geq 0$ $(i = \overline{1, n})$ bo‘lishi kerak.

Bu holatni biz $Y \geq 0$, $A \geq 0$ va $X \geq 0$ deb belgilaymiz.

Agar istalgan $Y \geq 0$ vektor uchun $X \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (11) ning yechimi mavjud

bo'lsa. $A \geq 0$ matritsa samarali matritsa deyiladi. Bu holda Leontev modeli ham samarali model deyiladi.

A matritsaning samarali bo'lishi uchun, bir nechta kriteriyalar mavjud. Ulardan biri shundan iboratki, agar A matritsaning har bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan katta bo'lmay, hech bo'lmaganda biron-bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan kichik bo'lsa, u holda A samarali matritsa bo'ladi, ya'ni: $\max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$, bo'lib, shunday j_0 mavjudki, uning uchun $\sum_{i=1}^n a_{ij_0} < 1$ o'rinli bo'lsa, A -samarali matritsa bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.
4. Kroneker- Kapelli teoremasi.
5. Qaysi hollarda yagona yechim, qaysi hollarda cheksiz ko'p yechim bo'ladi?
6. Balans modeli nima?

6-Maruza. Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo va operatorlar.

Reja.

1.Chiziqli fazo va uning o'lchovi.

2.Evklid fazolari. Chiziqli operatorlar.

1. Chiziqli fazo va uning o'lchovi.

Chiziqli fazo tushunchasi matematikadagi asosiy tushunchalardan biri bo'lib, iqtisodda ham muhim ahamiyatga ega.

1-ta'rif. Agar bo'sh bo'lmagan L -to'planning istalgan x, y, z elementlari va λ son uchun qo'shish- $x + y \in L$, songa ko'paytirish- $\lambda x \in L$ aniqlangan bo'lib, bu amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'lsa,

1. $x + y = y + x$ (qo'shish amalining kommutativligi);
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (qo'shishning assosiativligi);
3. L da shunday 0 (nol) element mavjudki, istalgan $x \in L$ uchun $x + 0 = x$;
4. Har bir $x \in L$ uchun, L da shunday $-x$ elementi mavjudki, uning uchun $x + (-x) = 0$;
5. α va β sonlar va $x \in L$ uchun $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6. $1 \cdot x = x$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

u holda u chiziqli yoki vektor fazo deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda songa ko'paytirish amali deganda ikki holatni farqlash kerak. Agar ta'rifdagi sonlar haqiqiy sonlar to'plami $R = (-\infty, +\infty)$ dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo haqiqiy

I. Igamov

chiziqli fazo deyiladi, agarda bu sonlar kompleks sonlar to'plami C dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo kompleks chiziqli fazo deyiladi.

2-ta'rif. Agar shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar topilib, ular uchun

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda chiziqli fazo elementi x vektor $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

3-ta'rif. Agar hammasi ham nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar topilib, ular uchun

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deyiladi, aks holda, ya'ni (1) tenglik o'rinli ekanligidan $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ bo'lsa, ular chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi.

Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar orasida nol vektor bo'lsa, u holda ular chiziqli bog'liq bo'ladi. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlardan bir nechitasi chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ularning o'zi ham chiziqli bog'liq bo'ladi.

4-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda n tasi chiziqli erkli va istalgan $n+1$ tasi bog'liq bo'lgan vektorlar mavjud bo'lsa, ya'ni chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni n ga teng bo'lsa, u holda L fazo n o'lchovli chiziqli fazo deyiladi.

5-ta'rif. n o'lchovli chiziqli fazodagi istalgan n ta chiziqli erkli vektorlar sistemasi chiziqli fazoning bazisi deyiladi.

1-teorema. Chiziqli fazoning har bir elementini yagona usul bilan bazisning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifoda qilish mumkin.

Isbot. $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ vektorlar L dagi bazis bo'lsin, agar $x \in L$ ($x \neq 0$) bo'lsa, u holda

$x, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'ladi, ya'ni hammasi ham nol bo'lmagan shunday $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sonlar mavjudki, bunda $\lambda_0 x + \lambda_1 \ell_1 + \dots + \lambda_n \ell_n = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\lambda_0 \neq 0$ bo'lishi kerak, aks holda $\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \dots + \lambda_n \ell_n = 0$ bo'lib, $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\lambda_0 \neq 0$ bo'lishi kerak, u holda

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \ell_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \ell_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} \ell_n \quad (2)$$

tenglik hosil qilamiz, ya'ni x vektor $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ larning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekan. Endi x ni (2) tenglik orqali yagona usulda ifodalash mumkinligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $x \in L, x \neq 0$ uchun ushbu

$$x = \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \dots + \alpha_n \ell_n$$

$$x = \beta_1 \ell_1 + \beta_2 \ell_2 + \dots + \beta_n \ell_n$$

tengliklar o‘rinli bo‘lsin, bu tengliklar ayirmasini olsak, u holda

$(\alpha_1 - \beta_1)\ell_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\ell_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\ell_n = 0$ tenglikni hosil qilamiz. $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ lar chiziqli erkli bo‘lgani uchun

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$$

ya'ni $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$ kelib chiqadi. Demak, x vektor (2) tenglik orqali yagona ko‘rinishda ifodalanar ekan. Teorema isbot bo‘ldi.

2-teorema. Agar L dagi $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lib, istalgan x -vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, u holda bu vektorlar L da bazisni tashkil etadi.

Isbot. $x \in L$ bo‘lsin, u holda teorema shartiga ko‘ra $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar mavjudki, ular uchun

$x = \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \dots + \lambda_n \ell_n$ bo‘ladi. Bundan esa $1 \cdot x - \lambda_1 \ell_1 - \lambda_2 \ell_2 - \dots - \lambda_n \ell_n = 0$ tenglik kelib chiqadi,

ya'ni $x, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ vektorlar chiziqli bog‘liq ekan, u holda ta'rifga ko‘ra $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ vektorlar bazisni tashkil etadi. Teorema isbot bo‘ldi.

$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ vektorlar bazis bo‘lib, x vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsin, ya'ni

$x = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n$, u holda $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar x vektorning $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ bazis bo‘yicha

koordinatalari deb yuritiladi. n o'lchovli L chiziqli fazoda ikkita $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ va $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$

bazislar berilgan bo‘lsin, u holda $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$ lar uchun

$$\ell_1^* = a_{11} \ell_1 + a_{12} \ell_2 + \dots + a_{1n} \ell_n$$

$$\ell_2^* = a_{21} \ell_1 + a_{22} \ell_2 + \dots + a_{2n} \ell_n$$

$$-----$$

$$\ell_n^* = a_{n1} \ell_1 + a_{n2} \ell_2 + \dots + a_{nn} \ell_n$$

tengliklarni hosil qilamiz, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ ----- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ bazisdan $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$ bazisga o‘tish matritsasi deyiladi. Shuni ta'kidlaymizki,

A matritsa xos bo‘lmagan matritsa bo‘ladi, shuning uchun unga teskari A^{-1} matritsa mavjud

bo‘lib, bu matritsa $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$ bazisdan $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ bazisga o‘tish matritsasi bo‘ladi.

Endi berilgan vektorning turli bazislardagi koordinatalari orasidagi bog‘lanishni qaraymiz, $x \in L$ vektor uchun

$$X = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n = x_1^* \ell_1^* + x_2^* \ell_2^* + \dots + x_n^* \ell_n^*$$

bo‘lsin, u holda

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

deb belgilasak, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz: $X = A'X^*$ ёки $X^* = (A^{-1})'X$ bu yerda $A' - A$ matritsaning transponirlangan matritsasidir.

n o'lchovli chiziqli fazoga misol keltiramiz. Elementlari tartiblangan n ta haqiqiy sonlar majmuasidan iborat bo'lgan

$$R^n = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in (-\infty, +\infty), \quad i = \overline{1, n}\}$$

to'plamda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ lar uchun qo'shish:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ va λ songa ko'paytirish amalini: $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ kiritsak, bu amallar chiziqli fazo ta'rifidagi 1-8 xossalarni qanoatlantiradi. Demak, R^n kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil etar ekan. Bundan tashqari

$$\ell_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\ell_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\text{-----}$$

$$\ell_n = (0, 0, \dots, 1)$$

birlik vektorlar sistemasi R^n da bazisni tashkil etadi, chunki $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ vektorni

$$x = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n \text{ ko'rinishda ifodalash mumkin.}$$

2. Evklid fazolari. Chiziqli operatorlar

6-ta'rif. Agar L chiziqli fazo berilgan bo'lib, $\forall x, y \in L$ elementlar uchun shunday $(x; y)$ son mos qo'yilgan bolsa va u quyidagi xossalarni qanoatlantirsa:

$$1. (x, y) = (y, x), (x, y \in L);$$

$$2. (x, y + z) = (x, y) + (x, z), (x, y, z \in L);$$

$$3. (\alpha x, y) = \alpha(x, y), (\alpha \in R, x, y \in L);$$

$$4. (x, x) \geq 0 \text{ va faqat } x = 0 (x \in L) \text{ bo'lganda } (x; x) = 0,$$

U holda bu chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan deyiladi.

Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo evklid fazosi deyiladi.

Skalyar ko'paytma yordamida vektorning normasi (uzunligi) tushunchasini kiritish mumkin. x vektorning uzunligi (normasi) $|x|$ deb, quyidagicha aniqlangan songa aytiladi.

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

Norma quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1. $|x|=0$ faqat va faqat shu holdaki, agar $x=0$, bo'lsa.

2. Istalgan λ son uchun $|\lambda x|=|\lambda| \cdot |x|$

3. $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ -Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi

4. $|x+y| \leq |x|+|y|$ uchburchak tengsizligi

Ikkita x va y vektorlar orasidagi burchak θ quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\cos \theta = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}, \text{ bu yerda } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ deb qaraladi.}$$

Normaning 1-va 2-xossalari to'g'ridan-to'g'ri skalyar ko'paytma ta'rifidan kelib chiqadi. 3- va 4-xossalarni isbot qilaylik. Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga va 1-,2-xossalarga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + 2\alpha(x, y) + \alpha^2(y, y);$$

bu yerda $\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$ deb olsak, quyidagi hosil bo'ladi.

$$0 \leq (x, x) - 2 \cdot \frac{(x, y)^2}{(y, y)} + \frac{(x, y)^2 \cdot (y, y)}{(y, y)^2} = |x|^2 - \frac{(x, y)^2}{|y|^2} \Rightarrow (x, y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$$

Demak, Koshi –Bunyakovskiy tengsizligi isbot bo'ladi. Endi 4-xossa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi:

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$$

Agar x va y vektorlar ortogonal vektorlar orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo'lsa, ya'ni $(x, y)=0$

bo'lsa, u holda ular ortogonal vektorlar deyiladi.

Agarda n o'lchovli evklid fazosidagi $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ vektorlar uchun $(\ell_i, \ell_j)=0 \quad i \neq j$ bo'lib, $|\ell_i|=1$,

$i=1, 2, \dots, n$, bo'lsa, u holda ular bu fazoning ortonormal bazisi deyiladi.

Misol. Korxona jadvalda ko'rsatilgan miqdorda 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi.

Mahsulot turlari	B_1	B_2	B_3	B_4
Mahsulot miqdori (birlik)	50	80	20	120
Bir birlik mahsulot uchun xomashyo sarfi	7	3,5	10	4
Mahsulot hajmining o'zgarishi	+5	-4	-2	+10

Mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan umumiy xomashyo miqdori va mahsulot hajmining o'zgarishidagi uning o'zgarishini toping.

Yechish. Umumiy xomashyo miqdori S $x = (50; 80; 20; 120)$ va $y = (7; 3,5; 10; 4)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi bo'ladi:

$$S = (x, y) = 50 \cdot 7 + 80 \cdot 3,5 + 20 \cdot 10 + 120 \cdot 4 = 1310 (kg)$$

Skalyar ko'paytmaning xossasidan, umumiy xomashyo miqdorining o'zgarishini topamiz.

$$\Delta S = (x + \Delta x, y) - (x, y) = (\Delta x, y) = +5 \cdot 7 - 4 \cdot 3,5 - 2 \cdot 10 + 10 \cdot 4 = 41 (kg).$$

Har qanday n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazoda skalyar ko'paytmani aniqlash orqali uni Yevklid fazosiga aylantirish mumkin.

Yevklid fazosida x vektorning uzunligi (normasi) deb uning skalyar kvadratidan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Vektorning uzunligi uchun quyidagi xossalar o'rinlidir:

3-teorema. Har qanday n o'lchovli L evklid fazosida ortonormal bazis mavjuddir.

Isbot. $f_1, f_2, \dots, f_n$ vektorlar L Evklid fazosidagi bazis bo'lsin, shu bazis asosida biz ortonormal

bazisni hosil qilamiz. 1-qadamda $\ell_1 = \frac{f_1}{|f_1|}$ deb olamiz, tabiiy $|\ell_1| = 1$ bo'ladi.

2-qadamda $f_2^* = \lambda_1 \ell_1 + f_2$ vektor uchun λ_1 ni shunday tanlaymizki, $(f_2^*, \ell_1) = 0$ bo'lsin, ya'ni $0 = (f_2^*, \ell_1) = \lambda_1 (f_1, \ell_1) + (f_2, \ell_1) = \lambda_1 + (f_2, \ell_1)$ demak, $\lambda_1 = -(f_2, \ell_1)$ deb olsak $(f_2^*, \ell_1) = 0$ bo'lar ekan,

endi $\ell_2 = \frac{f_2^*}{|f_2^*|}$ deb olsak, $|\ell_2| = 1$ va $(\ell_1, \ell_2) = 0$ bo'ladi.

$k < n$ uchun $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ ortonormal vektorlar hosil qilingan bo'lsin, $k+1$ qadamda

$f_{k+1}^* = \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \dots + \lambda_k \ell_k + f_{k+1}$ vektor uchun $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sonlarni shunday tanlaymizki $(\ell_i, f_{k+1}^*) = 0, i = \overline{1, k}$ tengliklar o'rinli bo'lsin, buning uchun $\lambda_i = -(f_{k+1}, \ell_i), i = 1, 2, \dots, k$ deb olish

yeterlidir. Agar biz $\ell_{k+1} = \frac{f_{k+1}^*}{|f_{k+1}^*|}$ deb olsak, $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k, \ell_{k+1}$ ortonormal sistemani tashkil qiladi.

Natijada n ta qadamdan so'ng $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ ortonormal sistema hosil bo'ladi. Istalgan ortonormal sistema chiziqli erkli bo'ladi, chunki agar $\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \dots + \lambda_i \ell_i + \dots + \lambda_n \ell_n = 0$ bo'lsa, u holda

istalgan $i = 1, 2, \dots, n$ uchun

$$(\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \dots + \lambda_i \ell_i + \dots + \lambda_n \ell_n, \ell_i) = \lambda_i (\ell_i, \ell_i) = \lambda_i = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ chiziqli erkli ekan, L fazo n o'lchovli bo'lgani uchun

$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ ortonormal bazis ekanligi kelib chiqadi.

Evklid fazosiga misol tariqasida chiziqli n o'lchovli fazo R^n ni keltirish mumkin. R^n da $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb quydagini olamiz:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Kiritilgan skalyar ko'paytma 6-ta'rifdagi barcha xossalarni qanoatlantiradi. R^n da kiritilgan skalyar ko'paytmaga mos ravishda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ vektorning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

R^n Evklid fazoda $\ell_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\ell_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $\ell_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektorlar ortonormal bazisni tashkil etadi.

7-ta'rif. Agar L_1 chiziqli fazoning har bir elementi $x \in L_1$ uchun biron qoida, qonunga asosan L_2 chiziqli fazoning aniq elementi mos qo'yilgan bo'lsa, L_1 ni L_2 ga akslantiruvchi operator berilgan deyiladi. Bu operatorni A deb belgilab, akslantirishni $A: L_1 \rightarrow L_2$ shaklda ifoda etiladi, bu akslantirishda x ning y ga mos kelishi $Ax = y$ kabi yoziladi.

8-ta'rif. Agar istalgan $x \in L_1$, $y \in L_2$ va λ son uchun

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A: L_1 \rightarrow L_2$ operator chiziqli operator deyiladi.

$A: L_1 \rightarrow L_2$ va $B: L_2 \rightarrow L_3$ chiziqli operatorlar bo'lsa, A va B operatorlarning ko'paytmasi (yoki kompozitsiyasi) deb ushbu $(AB)(x) = A(Bx)$ ko'rinishda aniqlangan operatorga aytiladi. Bu yerda $AB: L_1 \rightarrow L_3$ va $C = AB$ chiziqli operatoridir.

Agar $A: L \rightarrow L$ va $B: L \rightarrow L$ chiziqli operatorlar bo'lsa, bunday operatorlar uchun $A + B$, $\lambda \cdot A$ va $A \cdot B$ chiziqli operatorlarni aniqlashimiz mumkin bo'ladi. L chiziqli fazoning o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha chiziqli operatorlar to'plamini $\mathfrak{I}(L)$ deb belgilaymiz, operatorlarni qo'shish va songa ko'paytirishga nisbatan $\mathfrak{I}(L)$ to'plam chiziqli fazoni tashkil etadi.

9-ta'rif. Agar $A \in \mathfrak{I}(L)$ operator uchun shunday λ son mavjud bo'lib,

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x vektor A operatorning xos vektori deyiladi.

$A: R^n \rightarrow R^m$ chiziqli operator bo'lsin. Biz A operatorning matritsa ko'rinishini hosil qilamiz.

Buning uchun R^n da $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ va R^m da esa $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_m^*$ bazislarni olaylik.

$x \in R^n$, $Ax = y \in R^m$, $A\ell_i \in R^m$ uchun ushbu tengliklarni yoza olamiz:

$$x = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n$$

$$Ax = y = y_1 \ell_1^* + y_2 \ell_2^* + \dots + y_m \ell_m^*$$

$$A\ell_i = a_{1j} \ell_1^* + a_{2j} \ell_2^* + \dots + a_{mj} \ell_m^*, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Bu yerdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Ax = \sum_{j=1}^n x_j A \ell_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \ell_i^* = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \ell_i^*$$

$$Ax = y = \sum_{i=1}^m y_i \ell_i^*$$

$$\text{demak, } y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

tenglilar hosil bo'ladi. Agar biz ushbu matritsalarini kiritsak,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

u holda yuqoridagi tengliklarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$AX = Y$$

bu yerda A matritsa qaralayotgan A operatorning berilgan bazislardagi matritsasi deyiladi.

$A \in \mathfrak{S}(R^n)$ bo'lsin, u holda bunday operatorga mos keladigan matritsa kvadratik matritsa bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ vektor A chiziqli operatorning λ xos soniga mos keluvchi xos vektor, ya'ni

$$Ax = \lambda x \text{ bo'lsin.}$$

Agar $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektor matritsa bo'lsa, u holda ushbu tenglik hosil bo'ladi

$$AX = \lambda X.$$

Bu yerdan E birlik matritsa uchun, quyidagi $(A - \lambda E)X = 0$ tenglikni yoza olamiz. Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim nol $x = 0$ yechimga ega. U noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun, ya'ni xos vektorning mavjud bo'lishi uchun $|A - \lambda E| = 0$ bo'lishi, ya'ni

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ekanligi zarur va yetarlidir. Bu determinant λ ga nisbatan n -tartibli ko'phaddan iborat bo'ladi, uni A operatorning yoki A matritsaning xarakteristik ko'phadi, (1) tenglama A operatorning (matritsaning) xarakteristik tenglamasi deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, xarakteristik ko'phad qaralayotgan bazisga bog'liq bo'lmaydi.

I. L. Gamov

A operator n ta chiziqli erkli $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ xos vektorlarga ega bo'lib, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ xos sonlari bo'lsin, u holda A operatorning $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ bazisga mos keluvchi A matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ya'ni A matritsa diagonal matritsa bo'lar ekan.

Aksincha, biron-bir bazisda A operator matritsasi diagonal ko'rinishga ega bo'lsa, u holda bu bazis vektorlari A operatorning xos vektorlari bo'lib, matritsa diagonalidagi sonlar uning xos sonlaridan iborat bo'ladi.

Agar A operator n ta turli xos sonlarga ega bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli erkli bo'lib, shu vektorlar hosil qilgan bazisda A operator matritsasi diagonal ko'rinishga ega bo'ladi.

3. Balans modelining asosiy masalasi,

Bu masala quyidagicha qo'yiladi: n ta tarmoqli xo'jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo'lganda ehtiyoj to'la qondiriladi? Bu yerda shuni e'tiborga olish kerakki, n ta tarmoqning har biri ishlab chiqargan mahsulotning bir qismi shu tarmoq ehtiyoji uchun, bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lmagan ehtiyojlar uchun sarf etiladi.

Ishlab chiqarishning ma'lum bir davridagi, aytaylik, bir yillik faoliyatini qaraylik. x_i deb i -tarmoqning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmining pul birligida ifodalangan qiymatini,

bu yerda $i = 1, 2, \dots, n$. x_{ij} deb i -tarmoq mahsulotining j -tarmoq ehtiyoji uchun sarf etilgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz.

y_i deb i tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz. Tabiiyki, i tarmoq ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmi x_i , n ta tarmoq ehtiyojlari va noishlab chiqarish ehtiyojlari uchun sarf etilgan mahsulotlar hajmlarining pul miqdorlari yig'indisiga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8+1)$$

(8+1) tenglamalar balans munosabatlari deb nomlanadi.

Agar $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) belgilash kiritsak, a_{ij} - j -tarmoqning mahsulot hajmi birligi uchun sarf etilgan i -tarmoq mahsulot hajmi qiymatini bildiradi.

a_{ij} -bevosita xarajatlar koeffitsienti deb nomlanadi. a_{ij} -koeffitsientlarni qaralayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qo'llanilayotgan texnologiya aniqlaydi.

Qanchalik yangi, samarador texnologiya qo'llanilsa, a_{ij} -koeffitsientlar shunchalik kichik, sarf-xarajatlar shunchalik kam bo'lib, samaradorlik yuqori bo'ladi. Qaralayotgan davr ichida a_{ij} koeffitsientlarni o'zgarmas deb olib, ya'ni sarf-xarajatlarni yalpi xarajatlarga chiziqli bog'liq deb qaraymiz.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Shu munosabat bilan ko'rilgan ko'p tarmoqli iqtisodiyot modelini chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. (1) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga keladi.

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9+2)$$

Endi quyidagi belgilashlarni kiritaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bu yerda A -texnologik matritsa, X -yalpi mahsulot vektori, Y -yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan (9) tenglikning quyidagi matritsa ko'rinishini hosil qilamiz.

$$X = AX + Y. \quad (10+3)$$

Ko'p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy mahsulot vektori va bevosita xarajatlar matritsasi A -ga ko'ra X -yalpi mahsulot vektorini topishdan iborat bo'ladi, ya'ni (10) tenglamani noma'lum vektor X ga nisbatan yechish kerak. Buning uchun uni quyidagi ko'rinishga olib kelamiz $(E - A)X = Y$.

Agar $\det(E - A) \neq 0$ bo'lsa, u holda teskari $(E - A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$X = (E - A)^{-1} Y \quad (11+4)$$

$S = (E - A)^{-1}$ -matritsa bevosita xarajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma'nosini tushunish uchun $Y_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ i -o'rnida 1, qolgan joylarda 0 bo'lgan yakuniy mahsulot birlik vektorlarini qaraymiz. Ularga mos keluvchi (11+4) tenglama yechimlari quyidagiga teng bo'ladi.

$$X_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demak, $S = (s_{ij})$ matritsaning s_{ij} -elementi i -tarmoqning j -tarmoq birlik yakuniy mahsuloti Y'_j ni,

ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi zarur bo'lgan mahsulot miqdori qiymatini bildiradi.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, (11+4) tenglamada

$y_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, n}), \quad a_{ij} \geq 0 \quad (i, j = \overline{1, n})$ bo'lib, tenglama yechimi uchun $x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, n})$ bo'lishi kerak.

Bu holatni biz $Y \geq 0, \quad A \geq 0$ va $X \geq 0$ deb belgilaymiz.

Agar istalgan $Y \geq 0$ vektor uchun $X \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (11+4) ning yechimi mavjud bo'lsa, $A \geq 0$ matritsa samarali matritsa deyiladi. Bu holda Leontev modeli ham samarali model deyiladi.

A matritsaning samarali bo'lishi uchun, bir nechta kriteriyalar mavjud. Ulardan biri shundan iboratki, agar A matritsaning har bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan katta bo'lmay, hech bo'lmaganda biron-bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan kichik bo'lsa, u holda A samarali matritsa bo'ladi, ya'ni: $\max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$, bo'lib, shunday j_0 mavjudki, uning uchun $\sum_{i=1}^n a_{ij_0} < 1$ o'rinli bo'lsa, A -samarali matritsa bo'ladi.

7-Maruz. Kvadratik formalar.

Reja.

1. Kvadratik formalar.

2. Kvadratik formalarning asosiy xossalari.

3. Iqtisodiy masalalarda kvadratik formalar.

Turli amaliy masalalarni yechishda kvadratik formalar hosil qilib, ularni o'rganishga to'g'ri keladi.

1-ta'rif. n ta o'zgaruvchining kvadratik formasi deb

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

tenglik orqali aniqlangan **f funksiyaga** aytiladi.

Bu yerda a_{ij} -lar kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi. Ular haqiqiy sonlar bo'lib,

$a_{ij} = a_{ji}$ shartlarni qanoatlantiradi. Shu koeffitsientlar yordamida tuzilgan

$A = (a_{ij}) \quad (i, j = \overline{1, 2, \dots, n})$ matritsa kvadratik formaning matritsasi deyiladi.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

shart bajarilgani uchun bunday matritsalar simmetrik matritsalar ko'rinishida ifoda qilish mumkin:

$$f(X) = X'AX \quad (3)$$

bu yerda $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ - matritsa ustundan iboratdir.

Agarda barcha $i \neq j$ lar uchun $a_{ij} = 0$ bo'lsa, ya'ni $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2$ u holda

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \text{ forma kanonik kvadratik forma deyiladi.}$$

2. Quyidagi teoremlar o'rinlidir:

1-teorema. Istalgan kvadratik formani xos bo'lmagan chiziqli almashtirish yordamida kanonik ko'rinishga olib kelish mumkin.

Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi koeffitsientlari ma'nosida yagona bo'lmaydi. Lekin quyidagi teorema o'rinlidir:

2-teorema. (Kvadratik forma uchun inertsia qonuni). Kvadratik formaning barcha kanonik ko'rinishlaridagi musbat va manfiy hadlari soni bir xil bo'ladi.

Kvadratik formaga mos keluvchi matritsaning rangi shu kvadratik formaning rangi deb atalib, kvadratik formaning kanonik ko'rinishdagi noldan farqli koeffitsientlar soniga teng bo'ladi.

yuqoridagi teorema ko'ra kvadratik formaning barcha xos bo'lmagan chiziqli almashtirishlari uchun uning rangi o'zgarmas bo'ladi.

Agarda barcha $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ uchun $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ ($f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan deyiladi.

3-teorema. $f = X'AX$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun A matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lishi uchun esa $(-1)^i \Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Misol. Kvadratik formani normal va kanonik ko'rinishga keltiring.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$$

Yechish. Lagranj metodini qo'llab

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1, x_2, x_3) &= \left[x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 \right] - \\
&- (2x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - \\
&- 4x_2^2 - 8x_2x_3 - 4x_3^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 = y_1^2 - 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 3x_3^2 = \\
&= y_1^2 - 3 \left[x_2^2 + 2x_2(2x_3/3) + (2x_3/3)^2 \right] + 3(2x_3/3)^2 - 3x_3^2 = \\
&= y_1^2 - 3(x_2 + 2x_3/3)^2 - 5x_3^2/3 = y_1^2 - 3y_2^2 - 5y_3^2/3,
\end{aligned}$$

bu yerda $y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$, $y_2 = x_2 + 2x_3/3$, $y_3 = x_3$. Ma'lumki o'zgaruvchilarni bu almashtirilishi maxsus emas. Normal ko'rinishga keltirish uchun bu kvadratik formada $y_1 = z_1$, $y_2 = \frac{z_2}{\sqrt{3}}$, $y_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}z_3$ o'zgaruvchilarni almashtirishni qo'llash zarur u holda

$$\Phi(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

Misollar

1-misol. $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ kvadratik forma berilgan uni matritsali ko'rinishda yozing.

Yechish. Bu kvadratik forma matritsasi quyidagi ko'rinishga ega asosiy diagonalda o'zgaruvchilarning kvadratlaridagi koeffitsiyentlar joylashgan.

$$\Phi = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

3.6. Iqtisodiy masalalarni yechishning ba'zi metodlari.

Leontev modeli

Matritsali hisoblar. Quyida korxonalar ish faoliyatini o'rganish va tahlil qilishda matritsaviy hisoblardan foydalanishga misollar ko'rib chiqamiz.

Misol. Jadvalda 3 xil xomashyo turidan foydalangan holda 4 xil mahsulotni ishlab chiqaruvchi 5 ta korxonaning kunlik ishlab chiqarishi

haqida ma'lumot berilgan, hamda bir yilda har bir korxonaning ish muddati va har bir xomashyoning narxi keltirilgan.

Mahsulot turi	Korxonalarning mehnat unumdorligi (bir kunda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori)					Xomashyo sarfi (bir birlik mahsulot uchun)		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
Bir yildagi ish kunlari soni						Xomashyo bahosi		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	170	120	140	40	50	60

Topshiriqlar:

1. Har bir korxonaning har bir turdagi mahsulot bo'yicha yillik ishlab chiqarish unumdorligini toping.
2. Har bir korxonaning xomashyoning har bir turi bo'yicha yillik talabini toping.
3. Jadval asosida ko'rsatilgan turlarda va miqdorda mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan xomashyolarni sotib olish uchun har bir korxonaning yillik kreditini toping.

Yechish. Ushbu misolda bizni qiziqtirayotgan ishlab chiqarishning butun iqtisodiy spektrni xarakterlovchi matritsalarini tuzishimiz kerak, so'ngra esa ular ustida bajariladigan amallar yordamida berilgan masalaning yechimini olishimiz mumkin. Eng avvalo korxonalarning mahsulotning barcha turlari bo'yicha ishlab chiqarish unumdorligi matritsasini keltiramiz.

Ishlab chiqarish unumdorligi

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{max sulot} \\ \text{turi} \\ \downarrow \end{matrix}$$

Bu matritsaning har bir ustuni alohida korxonaning mahsulotning har bir turi bo'yicha kunlik ishlab chiqarish unumdorligiga mos keladi. Bundan kelib chiqadiki j - korxonada mahsulotning har bir turi bo'yicha yillik ishlab

chiqarish unumdorligi A matritsada j -ustunning har bir korxona uchun yildagi ish kunlari soniga ($j=1,2,3,4,5$) ko'paytirishdan kelib chiqadi. Shunday qilib har bir korxonada mahsulotning har bir turi bo'yicha yillik ishlab chiqarish unumdorligi quyidagi matritsa bilan tavsiflanadi.

$$A_{yil} = \begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}$$

Mahsulot birligiga ketadigan xomashyo xarajatlari matritsasi (bu ko'rsatgichlar shartga ko'ra har bir korxona uchun bir xil) quyidagi ko'rinishga ega.

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Mahsulot turi} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{xomashyo} \\ \text{turi} \\ \downarrow \end{matrix}$$

Korxonalardagi xomashyoning har bir turi bo'yicha kunlik xarajat B matritsani A matritsaga ko'paytirish bilan aniqlanadi:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix}$$

Bu yerda i – satr xomashyo turidan nomeriga mos keladigan j – ustun esa korxonaning nomeriga mos keladi ($i=1,2,3$ $j=1,2,3,4,5$). Masalaning 2-savoliga javobni A_{yil} matritsa kabi, ya'ni BA matritsa ustunlarini korxonaning yillik ish kunlari soniga ko'paytirish orqali olamiz bu har bir korxonaning xomashyoning har bir turiga yillik talabini beradi.

$$B \cdot A_{yil} = \begin{pmatrix} 11000 & 18900 & 9010 & 7440 & 8120 \\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780 \\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480 \end{pmatrix}$$

Xomashyo narxi matritsasini kiritamiz $Q=(40 \ 50 \ 60)$. U holda har bir korxona uchun xomashyoning umumiy yillik zahirasi Q narx matritsasini BA matritsaga ko'paytirish orqali hosil qilinadi.

$$P = QBA_{yil} = (2008000 \ 3496500 \ 1878500 \ 1494000 \ 1552600).$$

Demak xomashyoni sotib olish uchun korxonalarning kreditlashtirish summasi P matritsaning elementlari bilan aniqlanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasidan foydalanish. Chiziqli tenglamalar sistemasini tuzishga va yechishga olib keluvchi masalalarni ko'rib chiqamiz.

Misol. Korxona xomashyoning uch turini qo'llab, mahsulotning uch turini ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishning zaruriy xarakteristikalari jadvalda ko'rsatilgan. Xomashyoning berilgan zaxiralarida mahsulotning har bir turini ishlab chiqarish hajmini aniqlash talab etiladi.

Xomashyo turi	Mahsulot turlari uchun xomashyo sarfi			Xomashyo hajmi
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Yechish. Mahsulot ishlab chiqarish hajmlarini x_1, x_2, x_3 orqali belgilaymiz. U holda xomashyoning har bir turi uchun zahiralarining to'liq ishlatilishi shartida balans munosabatlarini yozish mumkin. Ular uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini tashkil qiladi.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550 \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini ixtiyoriy usul bilan yechib, xomashyoning berilgan zahiralarida mahsulot ishlab chiqarish hajmlarini topamiz. Har bir tur bo'yicha mos ravishda $x_1 = 150, x_2 = 250, x_3 = 100$ ni tashkil qiladi.

Tarmoqlararo balansning matematik modeli. Chiziqli algebra usullari masalan, chiziqli tenglamalar sistemi nazariyasi keng ko'lamda iqtisodiyotni rejalashtirish va tashkil etish bilan bog'liq masalalarni yechishda qo'llaniladi. Biz quyida asosan tarmoqlararo balansning matematik modeli bilan tanishamiz.

Iqtisodiy sistemaning yalpi mahsuloti uning n ta o'zaro bog'liq tarmoqlarida ishlab chiqariladi deylik. Ishlab chiqarish sikli yakunlanadigan vaqtni o'z ichiga olgan davrni qaraymiz.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – mos ravishda, birinchi, ikkinchi, ..., n – tarmoqlarning natural birliklarda ishlab chiqaradigan yalpi mahsulot hajmlari bo'lsin. Aytaylik, qarayotgan davrda x_1 – metallurgiya tarmog'ining tonna hisobida ishlab chiqaradigan metall miqdori, x_2 – kimyo tarmog'ining ishlab chiqaradigan mahsuloti miqdori, x_3 – avtomobilsozlik tarmog'ining ishlab chiqaradigan yengil avtomobillari soni bo'lsin va hokazo.

$x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – sistemaning yalpi mahsulot vektori deyiladi.

k – tarmoqning x_k birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i – tarmoq mahsuloti sarfini x_{ik} orqali belgilaymiz. Masalan, misolimizda x_3 dona avtomobil ishlab chiqarish uchun 1-tarmoq mahsuloti, ya'ni metallning sarfi miqdorini x_{13} bilan belgilaymiz. i -tarmoqning ishlab chiqarish sohasiga qaytmaydigan yakuniy mahsulot miqdori y_i bo'lsin. U holda $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – sistemaning yakuniy mahsulot vektori deyiladi.

Sistemaning i -tarmog'i mahsuloti x_i uchun moddiy balans sxemasini «mahsulot ishlab chiqarish va uni taqsimlash» prinsipi bo'yicha quyidagicha tasvirlash mumkin.

Ishlab chiqarish iste'moli	Yakuniy mahsulot	Yalpi mahsulot
$x_{11} \quad x_{12} \quad L \quad x_{1n}$	y_1	x_1
$x_{21} \quad x_{22} \quad L \quad x_{2n}$	y_2	x_2
$L \quad L \quad L \quad L$	K	L
$x_{n1} \quad x_{n2} \quad L \quad x_{nn}$	y_n	x_n

Moddiy balansning oqimlar tenglamalarini

$$x_i = \sum_{k=1}^n x_{ik} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Yuqoridagilarni quyidagi jadvalda tasvirlash mumkin

$i \setminus k$	1	2	...	n	$\sum x$
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	$\sum_{k=1}^n x_{1k}$
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	$\sum_{k=1}^n x_{2k}$
...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	$\sum_{k=1}^n x_{nk}$
yalpi mahsulot	x_1	x_2	...	x_n	
yakuniy mahsulot	y_1	y_2	...	y_n	

k – mahsulotning bir (shartli) birligini ishlab chiqarish uchun i – mahsulotning bevosita sarfi miqdori a_{ik} bo'lsin. a_{ik} kattaliklarga bevosita xarajat koeffitsiyentlari yoki texnologik koeffitsiyentlar, deyiladi.

Masalan, misolimizga qaytsak, $a_{13} = 1$ dona avtomobil ishlab chiqarish uchun bevosita sarflanadigan metall miqdoridir.

O'z-o'zidan ko'rinadiki, i – mahsulotning k – tarmoqqa jami sarfi x_{ik} k – tarmoqning bir birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i – mahsulotning bevosita sarfi a_{ik} ning ushbu tarmoq ishlab chiqaradigan mahsulot miqdori x_k ga ko'paytirilganiga teng.

$x_{ik} = a_{ik}x_k$ ya'ni, ishlab chiqarish sarflarida chiziqlilik prinsipi o'rinli bo'lsin. U holda

$$x_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k + y_i, \quad i=1,2,\dots,n$$

Oxirgi sistemani, o'z navbatida, vektor-matritsa ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$X - AX = Y \text{ yoki } (E - A)X = Y \quad (L)$$

Bu yerda, E – n -tartibli birlik matritsa, $A=(a_{ik})$ – bevosita xarajat koeffitsiyentlari matritsasi yoki texnologik matritsa deb ataladi. a_{ik} kattaliklarni o'zgarimas deb qaraymiz.

(L) tenglamaga Leontevning chiziqli modeli deyiladi. Agar $Y = \theta$ bo'lsa, Leontev modeli yopiq, $Y \neq \theta$ bo'lganda esa model ochiq deyiladi.

Masala quyidagi hollarning biri ko'rinishida qo'yilishi mumkin:

1. Yakuniy mahsulot hajmlari vektori Y ga qarab sistema yalpi mahsulot hajmi vektori X ni hisoblash;

2. X ga qarab Y ni hisoblash.

Rejalashtirishning asosiy masalalaridan biri bu birinchi masaladir, ya'ni Y vektorning berilishiga qarab, X vektorni hisoblashdir. Leontevning ochiq modeliga tegishli asosiy masala – tegishli model ixtiyoriy yakuniy ehtiyoj Y ni qondira oladimi, degan savolga javob berishdan iborat. Ma'nosiga ko'ra X nomanfiy bo'lgani uchun iqtisodiy sistema A matritsa qanday bo'lganda nomanfiy yechimga ega bo'lishini tekshirishdan iborat.

$X_0 - AX_0$ vektorning nomanfiyligini ta'minlaydigan manfiymas X_0 vektor mavjud bo'lsa, A matritsaga (shu jumladan, modelga) samarali matritsa (model), deyiladi.

Ochiq model uchun A matritsaning samaralilik zaruriy va yetarli shartlari isbotlangan. Ularning biriga ko'ra, ochiq (L) model samarali bo'lishi uchun manfiymas A matritsaning barcha xos qiymatlari moduli bo'yicha 1 dan kichik bo'lishi yetarli.

Agar (2) modelda nomanfiy A matritsa samarali bo'lsa, u holda ixtiyoriy berilgan nomanfiy Y vektor uchun (L) tenglamalar sistemasi yagona manfiymas X yechimga ega bo'ladi. Boshqacha aytganda, har bir yakuniy mahsulot nomanfiy Y vektoriga, yagona manfiymas ishlab chiqarish hajmi X vektori mos keladi.

A matritsa samarali bo'lsa, nomanfiy $(E - A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, asosiy masala yechimi

$$X = (E - A)^{-1}Y$$

formula bo'yicha topiladi.

Misol. Quyidagi

Ishlab chiqarish sohasi	Iste'mol qilish		Yakuniy mahsulot	Yalpi ishlab chiqarish
	energetika	mashinasozlik		
energetika	7	21	72	100
mashinasozlik	12	15	123	150

jadvaldan foydalanib, agar energetika tarmog'ni ikki marta oshirib mashinasozlikni o'zgartirmasak, har bir tarmoqdagi zaruriy yalpi ishlab chiqarish hajmini toping.

Yechish. Bu yerda

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 150, \quad x_{11} = 7, \quad x_{12} = 21, \quad x_{21} = 12, \quad x_{22} = 15, \quad y_1 = 72, \quad y_2 = 123.$$

U holda

$$a_{11} = 0,07, \quad a_{12} = 0,14, \quad a_{21} = 0,12, \quad a_{22} = 0,1.$$

Yani

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Bundan foydalanib

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}$$

matritsani topamiz.

Shart bo'yicha $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$. $X = (E - A)^{-1}Y$ formuladan foydalansak

$$X = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Demak, energetika tarmog'idagi yalpi ishlab chiqarishni 179,0 sh. b. gacha, mashinasozlikda esa 160,5 sh. b. gacha o'ttirish kerak.

2. Iqtisodda chiziqli modellar

Matritsaning xos vektori va xos sonini topishga olib keladigan iqtisodiy jarayonning matematik modeli sifatida xalqaro savdo modelini keltirish mumkin.

$S_1, S_2, \dots, S_n$ n -ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1, x_2, \dots, x_n$ larga teng bo'lsin. a_{ij} - S_j -mamlakatning S_i -mamlakatdan sotib olgan tovarlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'raligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan tovar xaridi uchun sarf bo'ladi deb hisoblaymiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Quyidagi matritsani qaraylik

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi deb nomlanadi. Istalgan S_i ($i = \overline{1, n}$) mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo'lgan tushumi $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo'lishi uchun har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo'lishi kerak, ya'ni har bir mamlakat savdosidan hosil bo'lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo'lmasligi kerak. Ya'ni

$$P_i \geq x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Agar $P_i > x_i$ deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$P_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k > x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

bu yerdan

$$\sum_{i=1}^n P_i > \sum_{i=1}^n x_i,$$

ya'ni

$$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right) x_k = \sum_{k=1}^n x_k > \sum_{k=1}^n x_i$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak, $P_i \geq x_i$ tengsizlik o'rniga $P_i = x_i$ tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko'rolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi uchun

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorni kiritsak u holda $P_i = x_i$, ya'ni $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = x_i$, $i = \overline{1, n}$ tengliklardan quyidagi

tenglamani hosil qilamiz: $AX = X$, ya'ni, qaralayotgan masala A matritsaning $\lambda = 1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

8-Maruza. Analitik geometriya elementlari.

Reja.

1. Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamasi.

2. Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar tenglamasi.

3. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik tenglamasi.

Tayanch so'z va iboralar: koordinatalar sistemasi, kesma, to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi, to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi, to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti tenglamasi, to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi.

Analitik geometriya — sodda geometrik obrazlar (nuqtalar, to'g'ri chiziqlar, tekisliklar, ikkinchi tartibli egri chiziqlar va sirtlar) koordinatalar usuli asosida algebraik vositalar bilan o'rganiladi.

1. Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamasi.

$$Ax + By + C = 0, (A^2 + B^2 \neq 0) \quad (1)$$

(1)- tekislikda to'g'ri chiziqni umumiy tenglamasi deyadi.

To'g'ri chiziqning (1)- umumiy tenglamasini hususiy hollari:

a) $C=0$; $Ax + By = 0$; $(0, 0)$ -tenglamani yechimi, t/ch-koordinata boshidan o'tadi.

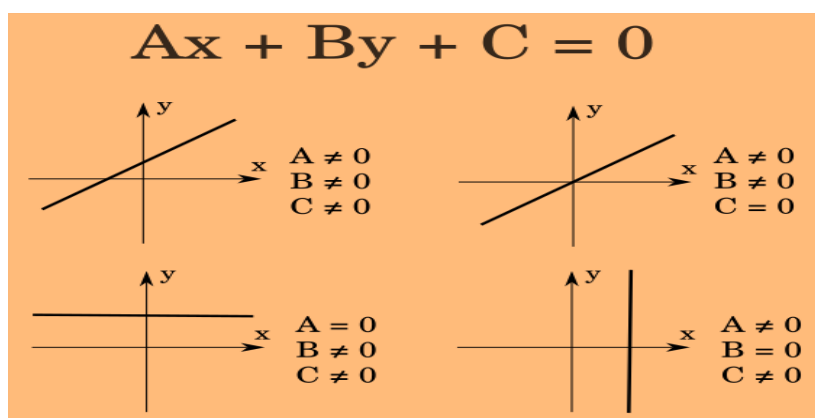
b) $B = 0$; $Ax + C = 0$; $x = -\frac{C}{A}$; t/ch $0y$ — ordinata o'qiga parallel bo'ladi.

c) $A = 0$; $By + C = 0$; $y = -\frac{C}{B}$; t/ch $0x$ — abssitsa o'qiga parallel bo'ladi.

d) $B = C = 0$; $Ax = 0$; $x = 0$; t/ch $0y$ -o'q tenglamasini ifodalaydi;

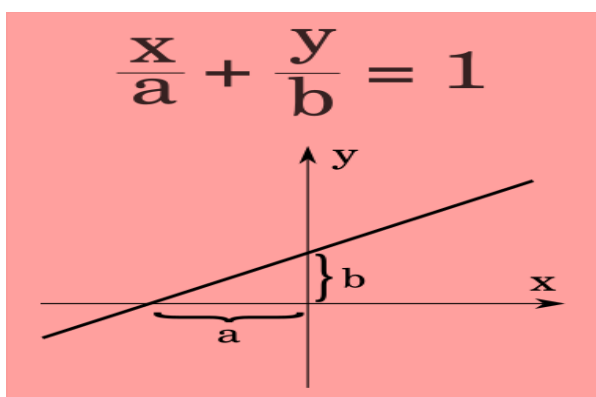
e) $A = C = 0$; $By = 0$; $y = 0$; t/ch $0x$ -o'q tenglamasini ifodalaydi;

$$B \neq 0; Ax + By + C = 0; y = kx + b; k = -\frac{A}{B}; b = -\frac{C}{B}$$



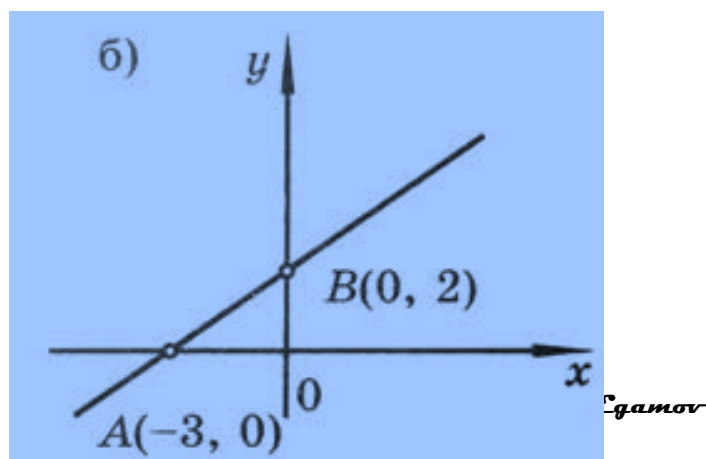
To'g'ri chiziq tenglamasida $ABC \neq 0$ bo'lsa:

$$Ax + By + C = 0; \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; a = -\frac{C}{A}; b = -\frac{C}{B};$$



Ikki nuqtadan: $A(x_1; y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ o'tuvchi t/ch tenglamasi:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



Umumiy tenglamalari $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ bo'lgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

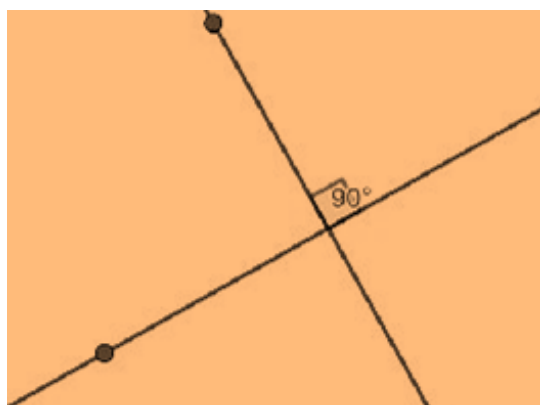
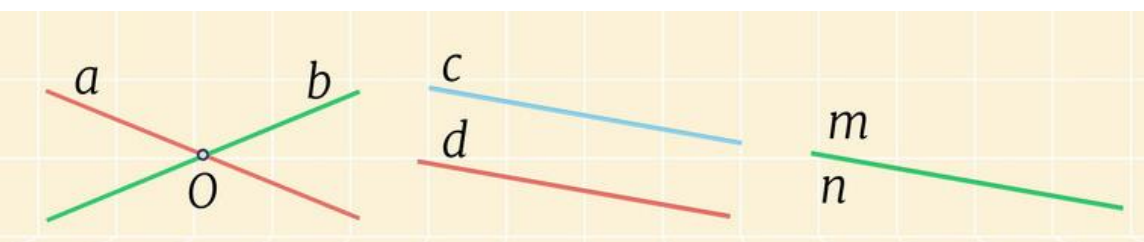
$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (9)$$

Bundan ikkita to'g'ri chiziqning

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{parallellik;}$$

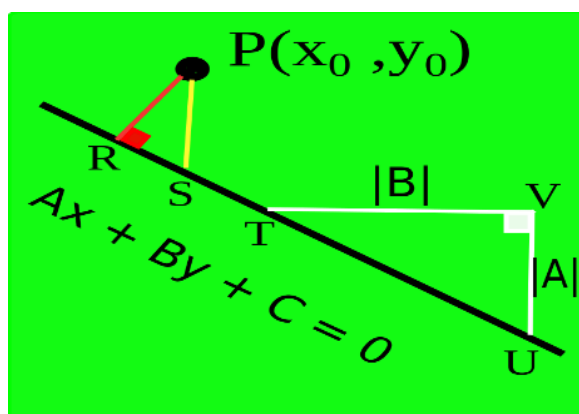
$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad \text{perpendikulyarlik}$$

shartlari kelib chiqadi.



Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha masofa.

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$



2. Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlarning tenglamalari.

1-ta'rif. x va y o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad (1)$$

ko'rinishidagi algebraik tenglama bilan aniqlangan chiziq, ikkinchi tartibli egri chiziq deyiladi.

(1) da agar $A = C \neq 0, B = 0$ bo'lsa aylana tenglamasi hosil bo'ladi.

Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlarning turlari:

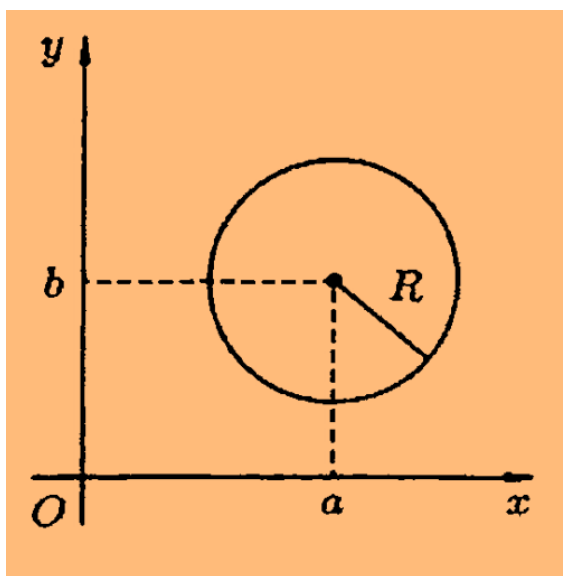
1.AYLANA. 2. ELLIPS. 3. GIPERBOLA

2-ta'rif. Fiksirlangan $M_0(a,b)$ nuqtadan bir xil R - masofada yotgan nuqtalarning geometrik o'rniga aylana deyiladi.

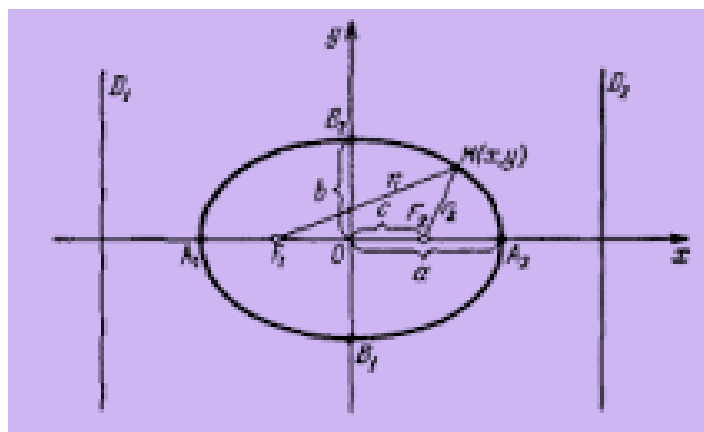
Bu yerda $M_0(a,b)$ nuqta markaz deb, R masofa esa radius deb ataladi.

Aylana tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ aylana chizig'ida yotgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $|M_0M| = R$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (2)$$

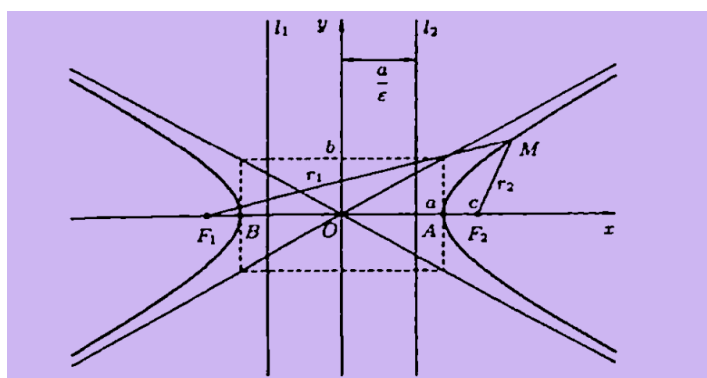


2. Ellips deb, tekislikdagi shunday nuqtalar to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslari deb ataluvchi ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas miqdordir. Fokuslari Ox o'qda koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik yotuvchi ellipsning kanonik tenglamasi ushbu ko'rinishga eg

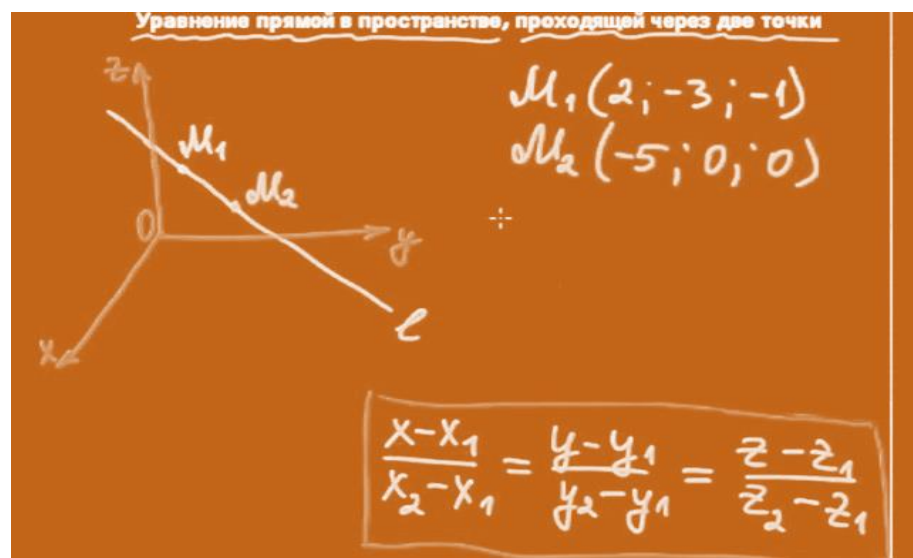


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

3. Giperbola- deb tekislikdagi shunday nuqtalar to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslari deb ataluvchi ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar ayirmalarining absolyut qiymatlari o'zgarmas miqdordir. Fokuslari Ox o'qda koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik yotuvchi giperbolaning kanonik tenglamasi ushbu ko'rinishga ega:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



3. Fazoda to'g'ri chiziq va egri chiziqlar tenglamasi.

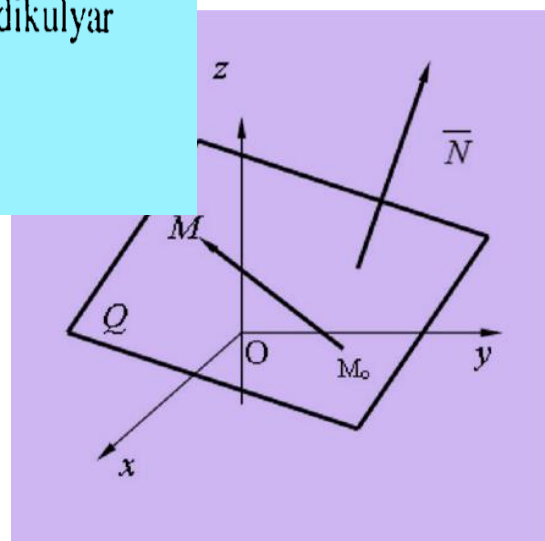
1) Fazoda to'g'ri chiziq tenglamasi.

I. Lqamov

2) Fazoda tekislik tenglamasi.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{n} = (A; B; C)$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$



9-Maruza. R^n - fazoda nuqtalarning o'zaro joylashishi.

Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti.

Reja.

I. E. Gamov

1. Sonli ketma-ketlik. Yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketligi

Sonlar ketma-ketligi tushunchasi.

2. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari.

3. Cheksiz katta miqdorlar. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog'lanish.

1-ta'rif. Agar N to'plamdan olingan har bir x elementga biror f qoida yoki qonunga ko'ra R to'plamning bitta y elementi mos qo'yilgan bo'lsa, N to'plamni R to'plamga akslantirish berilgan deyiladi va

$$f : N \rightarrow R \text{ yoki } x \xrightarrow{f} y, \quad (x \in N, y \in R)$$

kabi belgilanadi. Bimda N to'plam f -akslantirishning aniqlanish to'plami deyiladi. Har bir natural n songa biror haqiqiy a_n sonini mos qo'yuvchi

$$f : n \rightarrow a_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

akslantirishni qaraymiz.

2-ta'rif. 1-akslantirishning akslaridan iborat ushbu

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (2)$$

to'plam sonlar ketma-ketligi deyiladi. U holda a_1 bu ketma-ketlikning birinchi hadi, a_2 -ikkinchi, ..., a_n - n -hadi deyiladi. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ kema- ketlik $\{a_n\}$ kabi belgilanadi.

3-ta'rif. Ketma-ketlikning istalgan hadini shu hadning nomeri orqali ifodalaydigan formulaga (agar shunday formula mavjud bo'lsa) ketma- ketlikning umumiy n -hadi formulasi deyiladi.

Masalan:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots \text{ ketma-ketlik } a_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ formula bilan berilgan.}$$

4-ta’rif. Ketma-ketlikning biror hadidan boshlab ixtiyoriy hadini, bir yoki bir nechta oldingi hadlar yordamida ifoda qiladigan formula rekurrent formula deyiladi.

Masalan, $a_1 = 1, a_2 = 1$ va $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \geq 1$ rekurrent formula bilan

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Sonlar ketma-ketligi aniqlanadi. Bu ketma-ketlikni tashkil etgan sonlar “Fibonachchi sonlari” nomi bilan yuritiladi.

5-ta’rif. Agar ketma-ketlikning har bir keyingi hadi oldingisidan katta (kichik), ya’ni $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) bo’lsa, bu ketma-ketlik o’suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, $\frac{n+1}{3n-1}$ ketma-ketlik kamayuvchidir. Haqiqatan ham,

$$a_n = \frac{n+1}{3n-1} \text{ va } a_{n+1} = \frac{n+2}{3n+2} \text{ bo'lgani uchun}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{3n+2} - \frac{n+1}{3n-1} = \frac{3n^2 + 5n - 2 - 3n^2 - 5n - 2}{(3n+2)(3n-1)} = -\frac{4}{(3n+2)(3n-1)} < 0$$

$n \in N$ bo’lganda oxirgi kasr maxraji musbatdir. $a_{n+1} - a_n < 0$ dan $a_{n+1} < a_n$.

6-ta’rif. Agar ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$) o’rinli bo’lsa, bunday ketma-ketlik kamaymaydigan (o’smaydigan) ketma-ketlik deyiladi.

O’smaydigan va kamaymaydigan ketma-ketliklar monoton ketma-ketliklar deyiladi.

7-ta’rif. Agar shunday $m(M)$ soni mavjud bo’lsaki, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $a_n \geq m$ ($a_n < M$) tengsizlik o’rinli bo’lsa, bu ketma-ketlik quyi (yuqori) dan chegaralangan deyiladi. Agar ketma-ketlik quyidan (m bilan) yuqoridan (M bilan) chegaralangan bo’lsa unga chegaralangan ketma-ketlik deyiladi (ya’ni bu holda $m \leq a_n \leq M$ bo’ladi). Masalan,

$$-3, -8, -13, -18, \dots, (2-5n), \dots$$

ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan.

8-ta’rif. Agar ixtiyoriy kichik musbat ε soni uchun shunday N natural sonni ko’rsatish mumkin bo’lsaki $\{a_n\}$ ketma-ketlikning N dan katta (n) nomerli barcha hadlari uchun

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik o’rinli bo’lsa, o’zgarmas chekli a soniga $\{a_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va bu quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

2. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari.

Faraz qilaylik, $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo’lsin.

11-ta’rif. Agar $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng, ya’ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

bo’lsa, $\{\alpha_n\}$ - **cheksiz kichik miqdor** deyiladi.

Masalan,

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad \text{ba} \quad \alpha_n = q^n, \quad (|q| < 1)$$

ketma-ketliklar cheksiz kichik miqdorlar bo’ladi.

Cheksiz kichiklarning ba’zi xossalari bilan tanishamiz.

1. Chekli sondagi cheksiz kichiklarning algebraik yig’indisi cheksiz kichik bo’ladi.

2. Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichikning ko’paytmasi cheksiz kichikdir.

3. O’zgarmas son bilan cheksiz kichikning ko’paytmasi ham cheksiz kichikdir.

4. Ikki cheksiz kichikning ko’paytmasi ham cheksiz kichikdir.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1) $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'zgarmas, ya'ni $\{x_n\} = c$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = c$;

2) $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, m – o'zgarmas son bo'lsa, u holda: $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, $\{mx_n\}$, $\{x_n^m\}$ ketma-ketliklar ham

yaqinlashuvchi bo'ladi va quyidagilar o'rinli bo'ladi:

$$a) \lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k + y_k\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k\} + \lim_{k \rightarrow \infty} \{y_k\};$$

$$b) \lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k y_k\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k\} \lim_{k \rightarrow \infty} \{y_k\};$$

$$c) \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x_k}{y_k} \right\} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k\}}{\lim_{k \rightarrow \infty} \{y_k\}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \{y_k\} \neq 0;$$

$$d) \lim_{k \rightarrow \infty} \{mx_k\} = m \lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k\};$$

$$e) \lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k^m\} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k\} \right)^m;$$

3) Agar $x_k \leq y_k$ bo'lsa, u holda $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$;

4) Agar $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a$ va $x_k \leq z_k \leq y_k$ bo'lsa, u holda $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a$.

3. Cheksiz katta miqdorlar. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog'lanish.

12-ta'rif. Agar har qanday M soni olinganda ham shunday natural n_0 soni topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun

$$|x_n| > M$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **limiti cheksiz** deyiladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

kabi belgilanadi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz bo'lsa, $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Masalan,

$$x_n = (-1)^n \cdot n$$

ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi.

Endi cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi tasdiqlarni keltiramiz:

1) Agar $\{x_n\}$ cheksiz kichik miqdor ($x_n \neq 0$) bo‘lsa, u holda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

2) Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor bo‘lsa, u holda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz kichik

Ushbu $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ($n=1, 2, 3, \dots$) ketma-ketlikning limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bu e soni irratsional son bo‘lib,

$$e = 2,718281828459045\dots$$

bo‘ladi.

Misol.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-7}{3n+2}$ ni hisoblang.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-7}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{7}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{7}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}} = \frac{4-0}{3+0} = \frac{4}{3}.$$

3-misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right)$ ni hisoblang.

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 + 3n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \\ &= \frac{n^2 + 3n - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \right)} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)} + 1} = \frac{3}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} + 1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

10-Maruza. Bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o'rni. Kobb-Duglas funksiyasi.

Reja.

1. Bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar.
2. Funksiyaning juftligi, toqligi va davriyligi.
3. Murakkab funksiya. Funksiyalar kompozitsiyasi.
4. Monoton, teskari va chegaralangan funksiya
5. Iqtisodiyotda funksiyalar

6. Kobb-Duglas funksiyasi.

1. Bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar.

Aytaylik, $X \subset R, Y \subset R$ to'plamlar berilgan bo'lib, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin: $x \in X, y \in Y$.

1-ta'rif. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko'ra Y to'plamdan bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deyiladi va

$$y = f(x)$$

kabi belgilanadi.

X to'plam funksiyaning *aniqlanish sohasi*, Y esa funksiyaning *o'zgarish sohasi* deyiladi.

Shuningdek, x *erkli o'zgaruvchi* yoki *argument*, y esa *erksiz o'zgaruvchi* deyiladi.

Shuni ham alohida ta'kidlash kerakki, $y = f(x)$ funksiya:

R^1 fazoda $y = f(x)$ ko'rinishda;

R^2 fazoda $y = f(x_1, x_2)$ yoki $y = f(\vec{x}(x_1, x_2))$ ko'rinishda;

R^3 fazoda $y = f(x_1, x_2, x_3)$ yoki $y = f(\vec{x}(x_1, x_2, x_3))$ va R^n fazoda $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yoki $y = f(M)$ ($M(x_1, x_2, \dots, x_n)$) ko'rinishda yoziladi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga doir misollar keltiramiz. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'rinishda ifoda etamiz.

Misollar.

$$1. Z = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Bu funksiyaning aniqlanish soxasi

$$D(z) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$$

to'plamdan iborat. Bu to'plam markazi koordinata boshida $(0, 0)$, radiusi R ga ($R > 0$) teng bo'lgan doiradir.

$$2. Z = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} \text{ funksiyaning aniqlanish soxasi}$$

$$D(z) = \{(x_1, x_2) : x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$$

to'plamdan iborat. Bu to'plam $X_1 O X_2$ tekisligidan $O X_1$ va $O X_2$ koordinata o'qlarini chiqarib tashlashdan hosil bo'ladi.

3. $Z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ funksiya chiziqli funksiya deyiladi, bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ o'zgarmas sonlar.

2. Funksiyaning juftligi, toqligi va davriyligi.

$f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(-x) = f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ *juft funksiya* deyiladi. Juft funksiya grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ *toq funksiya* deyiladi. Toq funksiya grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

4-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas $T (T \neq 0)$ son mavjud bo'lsaki, $\forall x \in X$ uchun

$$1) x - T \in X, x + T \in X$$

$$2) f(x + T) = f(x)$$

bo'lsa, $f(x)$ davriy funksiya deyiladi, T son esa $f(x)$ funksiyaning davri deyiladi.

Masalan, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ funksiyalar davriy funksiyalar bo'lib, ularning davri 2π ga, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ funksiyalarning davri esa π ga teng.

Davriy funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

a) Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri $T (T \neq 0)$ bo'lsa, u holda

$$T_n = nT \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

b) Agar T_1 va T_2 sonlar $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda $T_1 + T_2 \neq 0$ hamda $T_1 - T_2$ ($T_1 \neq T_2$) sonlar ham $f(x)$ funksiyaning davri bo'ladi.

v) Agar $f(x)$ hamda $g(x)$ lar davriy funksiyalar bo'lib, ularning har birining davri $T (T \neq 0)$ bo'lsa, u holda

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar ham davriy funksiyalar bo'lib, T son ularning ham davri bo'ladi.

3. Murakkab funksiya. Funktsiyalar kompozitsiyasi.

Murakkab funksiya. Funktsiyalar kompozitsiyasi. Aytaylik, $u = \varphi(x)$ funksiya X sohada aniqlangan va qiymatlar to'plami $E(\varphi)$ bo'lsin. Shuningdek, $y = f(u)$ funksiya $E(\varphi)$ to'plamda aniqlangan bo'lsa, u holda $y = f(\varphi(x))$ funksiya X to'plamda aniqlangan *murakkab funksiya* yoki φ va f *funktsiyalarning kompozitsiyasi* deyiladi va $f \circ \varphi$ orqali belgilanadi: $f \circ \varphi = f(\varphi(x))$.

Misol.

$$u = \sin x; y = u^2 + 2u + 1;$$

$$\text{Murakkab funksiya: } y = (\sin x)^2 + 2\sin x + 1;$$

4. Monoton, teskari va chegaralangan funksiya.

Funktsiyaning chegaralanganligi. $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. Agar shunday o'zgarma M soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \leq M$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda yuqoridan chegaralangan deyiladi. Agar shunday o'zgarma m soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \geq m$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda quyidan chegaralangan deyiladi.

6-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda chegaralangan deyiladi.

7-ta'rif. Agar har qanday $M > 0$ son olinganda ham shunday $x_0 \in X$ nuqta topilsaki,

$$f(x_0) > M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda yuqoridan chegaralanmagan deyiladi.

8-ta’rif. Agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya X to‘plamda *o’suvchi* deb ataladi.

9-ta’rif. Agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya X to‘plamda *kamayuvchi* deb ataladi.

10-ta’rif. Agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_1) \leq f(x_2)$ (yoki $f(x_1) \geq f(x_2)$) tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya X to‘plamda *kamaymaydigan* (yoki *o’smaydigan*) deyiladi.

O’smaydigan hamda kamaymaydigan funksiyalar umumiy nom bilan monoton funksiyalar deyiladi.

Teskari funksiya. $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, bu funksiyaning qiymatlaridan iborat to‘plam

$$Y_f = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

bo‘lsin.

Faraz qilaylik, biror qoidaga ko‘ra Y_f , to‘plamdan olingan har bir y ga X to‘plamdagi bitta x mos qo‘yilgan bo‘lsin. Bunday moslik natijasida funksiya hosil bo‘ladi. Odatda, bu funksiya $y = f(x)$ ga nisbatan teskari funksiya deyiladi va $x = f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

5. Iqtisodiyotda funksiyalar.

Muhim bo‘lgan foydalilik funksiyalaridan biri CES-funksiya deb ataladi. Bu funksiya nomidagi CES (constant elasticity of substitution) qisqartmasi alternativ (bir-birining o‘mini bosuvchi) tovarlarning o‘zgarmas elastiklikka egaligini bildiradi.

Ikki o‘zgaruvchili holda bu funksiya quyidagicha:

$$u(x_1, x_2) = (\alpha x_1^{\frac{1}{\rho}} + \beta x_2^{\frac{1}{\rho}})^{\rho}$$

Bu funksiyaning xususiy holatlarini qaraymiz.

1) $\rho = 1$ da chiziqli foydalilik funksiyasi hosil bo‘ladi

$$u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2.$$

2) $\rho \rightarrow -\infty$ da Leontev funksiyasi, deb ataluvchi foydalilik funksiyasi hosil bo‘ladi

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$

3) Agar $\alpha + \beta = 1$ bo'lsa, $\rho \rightarrow 0$ da Kobb-Duglas funksiyasi hosil bo'ladi

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta.$$

Misol. Foydalilik funksiyasi $U(x_1, x_2, x_3) = 0,2 \lg x_1 + 0,3 \lg x_2 + 0,5 \lg x_3$ formula bilan aniqlangan bo'lsin. $X_1(10;100;100)$, $X_2(100;10;100)$ tovarlar vektorlarini afzallik munosabati yordamida tekshiring.

Yechish. Foydalilik funksiyasining qiymatlarini topamiz:

$$U(X_1) = U(10, 100, 100) = 1,8; \quad U(X_2) = U(100, 10, 100) = 1,7$$

Bundan, $U(X_1) > U(X_2) \Rightarrow X_1 \succ X_2$.

Yuqoridagi misolda keltirilgan $U(x_1, x_2, x_3) = 0,2 \lg x_1 + 0,3 \lg x_2 + 0,5 \lg x_3$ foydalilik funksiyasi yordamida $10^{U(x_1, x_2, x_3)} = x_1^{0,2} x_2^{0,3} x_3^{0,5}$ Kobb-Duglas foydalilik funksiyasini hosil qilish mumkin.

Kobb-Duglas funksiyasidan ishlab chiqarish funksiyasi sifatida ham foydalaniladi.

$$Q(L, K) = A \cdot L^\alpha K^\beta$$

ishlab chiqarish funksiyasida Q – ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori, L – mehnat resurslariga sarf xarajatni, K – ishlab chiqarishga sarflangan kapitalni, A – texnologik koeffitsiyent, α va β elastiklik koeffitsiyenlarini ifodalaydi. Misol uchun, $Q = L^{0,73} K^{0,27}$ ifodada umumiy ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorida mehnat resurslari ulushi 73%, kapital mablag'lar ulushi 27% ni tashkil qilishini bildiradi.

Namunaviy masala.

F- doimiy harajatlar (ishlab chiqarilgan mahsulotning x birligi soniga bog'liq bo'lmagan).

Bir oyda qilinadigan harajat: $F=125000$ so'm.

O'zgaruchan harajatlar funksiyasi:

$V(x) = 0.7x$ (ming so'm pul birligida) bir birlik mahsulot uchun.

Bir birlik mahsulot narxi: **1200 so'm.**

a) Daromad=0; mahsulot hajmi aniqlansin;

b) Daromad=10500 so'm; 1-oydagi mahsulot hajmi aniqlansin

Yechish:

I. L'gamon

a) x birlik mahsulotni ishlab chiqarish harajatlari

$$C(x) = F + V(x) = 125 + 0,7x \text{ (ming pul birligi).}$$

Mahsulotni sotishdan keladigan daromad: $R(x) = 1,2x$;

$$\text{Foyda: } P(x) = R(x) - C(x) = 1,2x - (125 + 0,7x) = 0,5x - 125;$$

$$\text{a) Daromad}=0; : P(x) = 0; 0,5x - 125 = 0; x = 250 \text{ birlik;}$$

$$\text{b) Daromad}=10500 \text{ so'm; } P(x) = 10500 \text{ so'm; } 0,5x - 125 = 10500; x = 460 \text{ birlik;}$$

11-Maruz. Funksiya limiti va uzluksizligi.

Reja.

1. Funksiya limiti.
2. Ajoyib limitlar.
3. Funksiya uzluksizligi.

1.Funksiya limiti

Amaliyotda funksiya tushunchasi katta ahamiyatga ega bo'lganligi sababli biz funksiyaning atroflicha o'rganib chiqamiz. Bizga ma'lumki, R^1 fazoda x_0 nuqtaning δ atrofi quyidagicha aniqlanadi:

$$U_\delta(x_0) = \{x : |x - x_0| < \delta\}.$$

$y = f(x)$ funksiya biror $X \in R^1$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

1- Koshi tarifi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{kabi belgilanadi.}$$

Ravshanki, $|x - a| < \delta$ tengsizlik, $a - \delta < x < a + \delta$ tengsizlikka ekvivalent.

Agar $a - \delta < x < a$ bo'lganda $|f(x) - A| < \varepsilon$ bo'lsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi chap limiti deyiladi va

I. L. Gamov

$$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

Agar $a < x < a + \delta$ bo'lganda $|f(x) - A| < \varepsilon$ bo'lsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi

o'ng limiti deyiladi va

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$$

kabi yoziladi.

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada limiti mavjud bo'lishi uchun bu funksiya shu nuqtada chap va o'ng limitlarga ega bo'lib, $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

2-ta'rif (Geyne ta'rif). Agar X to'plamga tegishli ixtiyoriy yaqinlashuvchi, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ ketma-ketlik uchun $y = f(x)$ funksiyaning $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ qiymatlaridan tashkil topgan ketma-ketlik ham A soniga yaqinlashsa, intilsa, u holda A soni $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow x_0$ dagi limiti deyiladi.

Bu limit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ko'rinishda yoziladi.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday bir $K(\varepsilon) > 0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, barcha $|x| > K$ munosabatni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda b soni $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi.

$y = f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow -\infty$ limiti ham yuqoridagi kabi ta'riflanadi.

Quyidagi teoremlar limitlar haqidagi asosiy teoremlar deb atalib, funksiya limitlarining asosiy xossalarini ifodalaydi:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ bo'lsin. U holda

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

2. Ajoyib limitlar.

Amaliyotda ko‘p qo‘llaniladigan ajoyib limitlar nomini olgan limitlarni keltirib o‘tamiz:

1- ajoyib limit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$

2- ajoyib limit: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Bu ajoyib limitlarning boshqa shakllari ham mavjud bo‘lib ular quyidagilardir:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e;$ 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1;$

3.Funksiyaning uzluksizligi.

6-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun biror $\delta(\varepsilon) > 0$ son topilib, $|x - x_0| < \delta$ o‘rinli bo‘lganda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning nuqtada uzluksizligi shu nuqta atrofida argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning cheksiz kichik orttirmasi mos kelishidir.

Nuqtada uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar bajarish mumkin. Nuqtada uzluksiz bo‘lgan funksiya shu nuqtaning kichik δ atrofida chegaralangan bo‘lib o‘z ishorasini saqlaydi.

Agar funksiya X to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya X to‘plamda uzluksiz deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda chegaralangan bo‘ladi va o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatlari turli ishorali ($f(a)f(b) < 0$) bo‘lsa, u holda kamida bitta shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki, bunda $f(c) = 0$ tenglik bajariladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz va $f(a) \neq f(b)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f(a) < C < f(b)$ uchun shunday $\xi \in [a, b]$ son topiladiki bunda $f(\xi) = C$ bo'ladi.

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$ tenglik bajarilishi shart.

7-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya uchun $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$ shartning bittasi bajarilmasa yoki u x_0 nuqtada aniqlanmagan bo'lsa, u holda x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

1-Misol. Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$$

bo'lishi isbotlansin.

$f(x) = 3x - 2$ funksiyaning $x \rightarrow 1$ dagi limiti 1 ga teng ekanligini isbotlash uchun ixtiyoriy

$\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilishini ko'rsatish kerakki, $0 < |x - 1| < \delta$ tengsizlikni

qanoatlantiruvchi barcha x larda

$$|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| < \varepsilon$$

tengsizligi bajarilsin. Buning uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib, ushbu

$$|(3x - 2) - 1|$$

ayirmani qaraymiz. Ravshanki,

$$|(3x - 2) - 1| = |3x - 2 - 1| = 3 \cdot |x - 1|.$$

Keyingi munosabatdan ko'rinadiki, $\varepsilon > 0$ songa ko'ra oliradigan δ ni $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ deyilsa, unda

$0 < |x - 1| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda

$$|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| = |3 \cdot (x - 1)| < 3 \cdot |x - 1| < 3\delta < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

tengsizlik bajarildi. Demak, ta'rifga binoan

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$$

bo'ladi.

2-Misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

limit hisoblansin.

Bu limit quyidagicha hisoblanadi

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(x-1)} = 4.$$

3-Misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \quad (a > 0)$$

limit hisoblansin.

Bu limit quyidagicha hisoblanadi

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Agar $y = f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

12-Maruz. Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi va differensial.

Reja.

1. Funksiya hosilasining ta'rifi.
2. Funksiyaning o'ng va chap hosilalari.
3. Hosila jadvali.

Tayanch so'z va iboralar: Funksiya hosilasi, o'ng va chap hosilalari, geometrik va mexanik ma'nolari

1. Funksiya hosilasining ta'rifi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a, b) \subset \mathbb{R}$ da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin.

Ma'lumki ushbu

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. ([2], p. 167, item 6.1)

1-ta'rif. ([2], p. 168, Def. 6.1) Agar ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $\frac{df(x_0)}{dx}$,

yoki $f'(x_0)$, yoki $(f(x))'_{x_0}$ kabi belgilanadi. Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Agar $x_0 + \Delta x = x$ deyilsa, unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \rightarrow 0$ da $x \rightarrow x_0$ bo'lib, (1) munosabat quyidagi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

ko'rinishga keladi.

1-misol. ([2], p. 170, i)) $f(x) = x$, $x_0 \in R$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

bo'ladi. Demak, $f'(x) = (x)' = 1$.

2-misol. ([1], p. 253, Example 10.1.6) $f(x) = |x|$, $x \in R$ bo'lsin.

Agar $x > 0$ bo'lsa, u holda $f(x) = x$ bo'lib, $f'(x) = 1$ bo'ladi.

Agar $x < 0$ bo'lsa, u holda $f(x) = -x$ bo'lib, $f'(x) = -1$ bo'ladi.

Agar $x_0 = 0$ bo'lsa, u holda $\frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$ bo'lib, $x \rightarrow 0$ da bu nisbatlarning limiti mavjud

bo'lmaydi. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi.

3-misol. $f(x) = x|x|$, $x \in R$, $x_0 \in R$ bo'lsin.

a) $x_0 > 0$, $x > 0$, $x \neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0 = 2|x_0|$$

bo'ladi.

b) $x_0 < 0$, $x < 0$, $x \neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = -x - x_0$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -2x_0 = 2|x_0|$$

bo'ladi.

v) $x_0 = 0$, $x \neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

bo'ladi. Demak, $\forall x \in R$ da $f'(x) = (x|x|)' = 2|x|$.

4-misol. Aytaylik,

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bo'lib, $x_0 = 0$ bo'lsin. Unda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

bo'lib, uning $x \rightarrow 0$ dagi limiti mavjud emas. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.

2. Funksiyaning o'ng va chap hosilalari.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0 - \delta, x_0) \subset X$ ($\delta > 0$) bo'lsin.

2-ta'rif. ([2], p. 176, Def. 6.13) Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi chap hosilasi** deyiladi va $f'(x_0 - 0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, x_0 + \delta) \subset X$ ($\delta > 0$) bo'lsin.

3-ta'rif. ([2], p. 176, Def. 6.13) Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi o'ng hosilasi** deyiladi va $f'(x_0 + 0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Masalan, $f(x) = |x|$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi o'ng hosilasi $f'(+0) = 1$, chap hosilasi $f'(-0) = -1$ bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1. ([2], p. 176, Property 6.14) Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada o'ng $f'(x_0 + 0)$ hamda chap $f'(x_0 - 0)$ hosilalarga ega va $f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$ tengliklar o'rinli bo'ladi.
2. ([2], p. 176, Property 6.14) Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ng $f'(x_0 + 0)$ hamda chap $f'(x_0 - 0)$ hosilalarga ega bo'lib, $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega va $f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Hosilalar jadvali

$$1. (c)' = 0, c = const,$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ (bu yerda } \alpha \in R \text{),}$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0, \text{ xususiyl holda, } (e^x)' = e^x,$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1; \text{ xususiyl holda, } (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$5. (\sin x)' = \cos x,$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x,$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$8. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$12. (\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$13. (s/\operatorname{tg} x)' = c/\operatorname{tg} x,$$

$$14. (c/\operatorname{tg} x)' = s/\operatorname{tg} x,$$

$$15. (t/\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{ch^2 x},$$

$$16. (ct/\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

Ta'rif yordamida $f'(x)$ topilsin:

1. $f(x) = x^3 + 2x$

5. $f(x) = \frac{1}{x}$

9. $f(x) = \sqrt{x}$

2. $f(x) = x^3\sqrt{x}$

6. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

10. $f(x) = 2^{x+1}$

3. $f(x) = \ln x$

7. $f(x) = \sin 2x$

11. $f(x) = \operatorname{ctgx} + 2$

4. $f(x) = \arcsin x$

8. $f(x) = \arccos 3x$

12. $f(x) = 7\arctg(x+1)$

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$f(x) = x^2$ bo'lsa, u holda $f'(1)$ ni toping.	2	3	4	5
2.	$f(x) = \sin x$ bo'lsa, u holda $f'(\pi)$ ni toping.	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
3.	$f(x) = x$ bo'lsa, u holda $f'(1000)$ ni toping.	1	2	3	4
4.	$f(x) = x^3 - 500$ bo'lsa, u holda $f'(2)$ ni toping.	12	13	14	15
5.	$f(x) = 2$ bo'lsa, u holda $f'(5000)$ ni toping.	0	1	2	-1
6.	$f(x) = x $ funksiyaning $x = 0$ nuqtada o'ng hosilasini toping.	1	-1	2	-2
7.	$f(x) = x^2 - 5x + 6 $ funksiyaning $x = 2$ nuqtada o'ng hosilasini toping.	1	-10	200	-2
8.	$f(x) = \sqrt{\sin x^2}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada chap hosilasini toping.	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
9.	$f(x) = 2^x - 2 $ funksiyaning $x = 1$ nuqtada chap hosilasini toping.	$-\ln 4$	$\ln 4$	1	-1

10.	$f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x^4} \ln x, & \text{agar } x > 0 \end{cases}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada chap hosilasini toping.	1	2	-2	-3
-----	---	---	---	----	----

Funksiya differensialli.

Funksiya orttirmasidagi $f'(x_0) \cdot \Delta x$ ifoda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensial deyiladi va $df(x_0)$ kabi belgilanadi:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Endi sodda funksiyalarning differensiallarini keltiramiz:

$$1. d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx, \quad (x > 0);$$

$$2. d(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot dx, \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$3. d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e dx, \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1);$$

$$4. d(\sin x) = \cos x dx;$$

$$5. d(\cos x) = -\sin x dx;$$

$$6. d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots);$$

$$7. d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx, \quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots);$$

$$8. d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (-1 < x < 1);$$

$$9. d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (-1 < x < 1);$$

$$10. d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx;$$

$$11. d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx;$$

$$12. d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx;$$

$$13. d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx;$$

$$14. d(\operatorname{th} x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx;$$

$$d(\operatorname{cth} x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx \quad (x \neq 0)$$

Funksiya differensialining sodda qoidalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari (a, b) da berilgan bo'lib, $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $x \in (a, b)$ da

$$\begin{aligned}
&1) d(c \cdot f(x)) = cdf(x), \quad c = \text{const}; \\
&2) d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x); \\
&3) d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x); \\
&d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0).
\end{aligned}$$

12-Maruz. Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi va differensial.

Reja.

1. Funksiya hosilasining ta'rifi.
2. Funksiyaning o'ng va chap hosilalari.
3. Hosila jadvali.

Tayanch so'z va iboralar: Funksiya hosilasi, o'ng va chap hosilalari, geometrik va mexanik ma'nolari

1. Funksiya hosilasining ta'rifi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a, b) \subset \mathbb{R}$ da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin.

Ma'lumki ushbu

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. ([2], p. 167, item 6.1)

1-ta'rif. ([2], p. 168, Def. 6.1) Agar ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $\frac{df(x_0)}{dx}$,

yoki $f'(x_0)$, yoki $(f(x))'_{x_0}$ kabi belgilanadi. Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Agar $x_0 + \Delta x = x$ deyilsa, unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \rightarrow 0$ da $x \rightarrow x_0$ bo'lib, (1) munosabat quyidagi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

ko'rinishga keladi.

1-misol. ([2], p. 170, i)) $f(x) = x$, $x_0 \in \mathbb{R}$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

bo'ladi. Demak, $f'(x) = (x)' = 1$.

2-misol. ([1], p. 253, Example 10.1.6) $f(x) = |x|$, $x \in R$ bo'lsin.

Agar $x > 0$ bo'lsa, u holda $f(x) = x$ bo'lib, $f'(x) = 1$ bo'ladi.

Agar $x < 0$ bo'lsa, u holda $f(x) = -x$ bo'lib, $f'(x) = -1$ bo'ladi.

Agar $x_0 = 0$ bo'lsa, u holda $\frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$ bo'lib, $x \rightarrow 0$ da bu nisbatlarning limiti mavjud

bo'lmaydi. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi.

3-misol. $f(x) = x|x|$, $x \in R$, $x_0 \in R$ bo'lsin.

a) $x_0 > 0$, $x > 0$, $x \neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0 = 2|x_0|$$

bo'ladi.

b) $x_0 < 0$, $x < 0$, $x \neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = -x - x_0$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -2x_0 = 2|x_0|$$

bo'ladi.

v) $x_0 = 0$, $x \neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

bo'ladi. Demak, $\forall x \in R$ da $f'(x) = (x|x|)' = 2|x|$.

4-misol. Aytaylik,

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bo'lib, $x_0 = 0$ bo'lsin. Unda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

bo'lib, uning $x \rightarrow 0$ dagi limiti mavjud emas. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.

2. Funksiyaning o'ng va chap hosilalari.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0 - \delta, x_0) \subset X$ ($\delta > 0$) bo'lsin.

2-ta'rif. ([2], p. 176, Def. 6.13) Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi chap hosilasi** deyiladi va $f'(x_0 - 0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, x_0 + \delta) \subset X$ ($\delta > 0$) bo'lsin.

3-ta'rif. ([2], p. 176, Def. 6.13) Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi o'ng hosilasi** deyiladi va $f'(x_0 + 0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Masalan, $f(x) = |x|$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi o'ng hosilasi $f'(+0) = 1$, chap hosilasi $f'(-0) = -1$ bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1. ([2], p. 176, Property 6.14) Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada o'ng $f'(x_0 + 0)$ hamda chap $f'(x_0 - 0)$ hosilalarga ega va $f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

2. ([2], p. 176, Property 6.14) Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ng $f'(x_0 + 0)$ hamda chap $f'(x_0 - 0)$ hosilalarga ega bo'lib, $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega va $f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Hosilalar jadvali

$$1. (c)' = 0, c = const,$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ (bu yerda } \alpha \in R \text{),}$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0, \text{ xususiyl holda, } (e^x)' = e^x,$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1; \text{ xususiyl holda, } (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$5. (\sin x)' = \cos x,$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x,$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$8. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$12. (\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$13. (s/x)' = c/x,$$

$$14. (c/x)' = s/x,$$

$$15. (t/x)' = \frac{1}{ch^2 x},$$

$$16. (ct/x)' = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

Ta'rif yordamida $f'(x)$ topilsin:

$$1. f(x) = x^3 + 2x$$

$$5. f(x) = \frac{1}{x}$$

$$9. f(x) = \sqrt{x}$$

$$2. f(x) = x^3 \sqrt{x}$$

$$6. f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$10. f(x) = 2^{x+1}$$

$$3. f(x) = \ln x$$

$$7. f(x) = \sin 2x$$

$$11. f(x) = \operatorname{ctg} x + 2$$

$$4. f(x) = \arcsin x$$

$$8. f(x) = \arccos 3x$$

$$12. f(x) = 7 \operatorname{arctg}(x+1)$$

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$f(x) = x^2$ bo'lsa, u holda $f'(1)$ ni toping.	2	3	4	5
2.	$f(x) = \sin x$ bo'lsa, u holda $f'(\pi)$ ni toping.	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
3.	$f(x) = x$ bo'lsa, u holda $f'(1000)$ ni toping.	1	2	3	4
4.	$f(x) = x^3 - 500$ bo'lsa, u holda $f'(2)$ ni toping.	12	13	14	15
5.	$f(x) = 2$ bo'lsa, u holda $f'(5000)$ ni toping.	0	1	2	-1
6.	$f(x) = x $ funksiyaning $x = 0$ nuqtada o'ng hosilasini toping.	1	-1	2	-2
7.	$f(x) = x^2 - 5x + 6 $ funksiyaning $x = 2$ nuqtada o'ng hosilasini toping.	1	-10	200	-2
8.	$f(x) = \sqrt{\sin x^2}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada chap hosilasini toping.	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
9.	$f(x) = 2^x - 2 $ funksiyaning $x = 1$ nuqtada chap hosilasini toping.	$-\ln 4$	$\ln 4$	1	-1
10.	$f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x^4} \ln x, & \text{agar } x > 0 \end{cases}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada chap hosilasini toping.	1	2	-2	-3

Funksiya differensial.

Funksiya orttirmasidagi $f'(x_0) \cdot \Delta x$ ifoda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensial deyiladi va $df(x_0)$ kabi belgilanadi:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Endi sodda funksiyalarning differensiallarini keltiramiz:

I. L'qamov

15. $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx, \quad (x > 0);$
16. $d(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot dx, \quad (a > 0, \quad a \neq 1);$
17. $d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e dx, \quad (x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1);$
18. $d(\sin x) = \cos x dx;$
19. $d(\cos x) = -\sin x dx;$
20. $d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots);$
21. $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx, \quad (x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots);$
22. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (-1 < x < 1);$
23. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (-1 < x < 1);$
24. $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx;$
25. $d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx;$
26. $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx;$
27. $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx;$
28. $d(\operatorname{th} x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx;$
- $d(\operatorname{cth} x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx \quad (x \neq 0)$

Funksiya differensialining sodda qoidalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari (a, b) da berilgan bo'lib, $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $x \in (a, b)$ da

- 4) $d(c \cdot f(x)) = c df(x), \quad c = \text{const};$
- 5) $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x);$
- 6) $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x);$
- $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0).$

14-Maruza. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensial.

Xususiyl hosila va yuqori tartibli differensiallar. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi.

Reja.

1. Yuqori tartibli hosila tushunchasi. Faraz qilaylik, biror (a, b) da hosilaga ega $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila (a, b) da aniqlangan funksiya bo'ladi. Demak, hosil bo'lgan funksiyaning hosilasi, ya'ni hosilaning hosilasi haqida gapirish mumkin.

Agar $f'(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, uni $f(x)$ funksiyaning *ikkinchi tartibli hosilasi* deyiladi va $y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rif bo'yicha $y''(x) = (y')'$ ekan.

Shunga o'xshash, agar ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi mavjud bo'lsa, u uchinchi tartibli hosila

deyiladi va $y''', f'''(x), \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ kabi belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha $y''' = (y'')'$. Berilgan funksiyaning to'rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o'xshash aniqlanadi. Umuman $f(x)$ funksiyaning $(n-1)$ -tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilasining hosilasiga uning n -tartibli hosilasi deyiladi va $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha n -tartibli hosila $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ rekkurent (qaytma) formula bilan hisoblanar ekan.

1-misol. $y = x^4$ funksiya berilgan. $y'''(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $y' = 4x^3, y'' = 12x^2, y''' = 24x$, demak $y'''(2) = 24x \cdot 2 = 48$.

Yuqorida aytilganlardan, funksiyaning yuqori tartibli, masalan, n -tartibli hosilalarini topish uchun uning barcha oldingi tartibli hosilalarini topish zarurligi kelib chiqadi. Ammo ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari uchun umumiy qonuniyatni topish va undan foydalanib formula keltirib chiqarish mumkin.

2. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi. Ikkinchi tartibli hosila sodda mexanik ma'noga ega. Aytaylik, moddiy nuqtaning harakat qonuni $s = s(t)$ funksiya bilan aniqlangan bo'lsin. U holda uning birinchi tartibli hosilasi $v(t) = s'(t)$ harakat tezligini ifodalashi bizga ma'lum. Ikkinchi tartibli $a = v'(t) = s''(t)$ hosila esa harakat tezligining o'zgarish tezligi, ya'ni harakat tezlanishini ifodalaydi.

2-misol. Moddiy nuqta $s = 5t^2 + 3t + 12$ (s metrlarda, t sekundlarda berilgan) qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Uning o'zgarmas kuch ta'sirida harakat qilishini ko'rsating.

Yechish. $s' = (5t^2 + 3t + 12) = 10t + 3, s'' = (10t + 3)' = 10$, bundan $a = 10 \text{ m/s}^2$ bo'lib, harakat tezlanishi o'zgarmas ekan. Nyuton qonuni bo'yicha kuch tezlanishga proporsional.

Demak, kuch ham o'zgarmas ekan.

3. Yuqori tartibli hosilaning xossalari. Leybnits formulasi.

1-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n -tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu ikki funksiya yig'indisining n -tartibli hosilasi uchun

$$(u(x) + v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) + v^{(n)}(x)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot. $\diamond$ Aytaylik, $y = u + v$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz:

$$y' = u' + v', y'' = (y')' = (u' + v')' = u'' + v''.$$

Matematik induksiya metodidan foydalanamiz, ya'ni $n = k$ tartibli hosila

uchun $y^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)}$ tenglik o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz

va $n = k + 1$ uchun $y^{(k+1)} = u^{(k+1)} + v^{(k+1)}$ ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, yuqori tartibli hosilaning ta'rifi, hosilaga ega bo'lgan funksiyalar xossalariidan foydalanib $y^{(k+1)} = (y^{(k)})' = (u^{(k)} + v^{(k)})' = (u^{(k)})' + (v^{(k)})' = u^{(k+1)} + v^{(k+1)}$ ekanligini topamiz.

Matematik induksiya prinsipiga ko'ra $y^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$ tenglik ixtiyoriy natural n uchun o'rinli deb xulosa chiqaramiz. ♦

2-xossa. O'zgarma ko'paytuvchini n -tartibli hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin: $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$.

Bu xossa ham matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlanadi.

4. Yuqori tartibli differensiallar. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya biror (a, b) intervalda berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning $dy = f'(x)dx$ differensial x ga bog'liq bo'lib, $dx = \Delta x$ va Δx ortirma x ga bog'liq emas, chunki x nuqtadagi ortirman x ga bog'liq bo'lmagan holda ixtiyoriy tanlash mumkin. Bu holda differensial formulasidagi dx ko'paytuvchi o'zgarma bo'ladi va $f'(x)dx$ ifoda faqat x ga bog'liq bo'lib, uni x bo'yicha differensiallash mumkin.

Demak, bu funksiyaning differensial mavjud bo'lishi mumkin va u, agar mavjud bo'lsa, funksiyaning *ikkinchi tartibli differensial* deb ataladi.

Ikkinchi tartibli differensial d^2y yoki $d^2f(x)$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, ikkinchi tartibli differensial quyidagicha aniqlanar ekan: $d^2y = d(dy)$.

Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensial ifodasini topish

uchun $dy = f'(x)dx$ formulada dx ko'paytuvchi o'zgarma deb qaraymiz. U holda

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2$$

bo'ladi. Biz kelgusida dx ning darajalarini qavssiz yozishga kelishib olamiz. Bu kelishuvni e'tiborga olsak, $(dx)^2 = dx^2$ bo'ladi va ikkinchi tartibli differensial uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$d^2y = f''(x)dx^2 \quad (1)$$

Shunga o'xshash, uchinchi tartibli differensialni ta'riflash va uning uchun ifodasini keltirib chiqarish mumkin: $d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3$.

Umumiy holda funksiyaning $(n-1)$ -tartibli differensial $d^{(n-1)}y$ dan olingan differensial funksiyaning n -tartibli differensial deyiladi va d^ny kabi belgilanadi, ya'ni $d^ny = d(d^{n-1}y)$. Bu

holda ham funksiyaning n -tartibli differensial uning n -tartibli hosilasi orqali quyidagi

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n \quad (2)$$

ko'rinishda ifodalanishini isbotlash mumkin.

Yuqoridagi formuladan funksiyaning n -tartibli hosilasi uning n -tartibli differensial va erkli o'zgaruvchi differensialining n -darajasi nisbatiga teng ekanligi kelib chiqadi:

$$f^{(n)}(x) = d^n y / dx^n.$$

5. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi. Faraz qilaylik, x argumentning y funksiyasi quyidagicha

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (5)$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Agar $x = \varphi(t)$ funksiya teskarilanuvchi bo'lsa, ya'ni $t = \varphi^{-1}(x)$ mavjud bo'lsa, u

holda $y = \psi(t)$ tenglamani $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ ko'rinishda yozib olish va $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ funksiyaning hosilasini topish masalasini qarash mumkin. Odatda bu masala parametrik tenglamalar bilan berilgan funksiyaning hosilasini topish masalasi deb ham yuritiladi.

8.11-teorema. Aytaylik, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha; \beta]$ da uzluksiz va $(\alpha; \beta)$ da differensiallanuvchi hamda $\varphi'(t)$ shu intervalda ishorasini saqlasin. Agar $x = \varphi(t)$ funksiyaning qiymatlar to'plami $[a, b]$ kesma bo'lsa, u holda $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ tenglamalar $[a, b]$ da uzluksiz, (a, b) da differensiallanuvchi bo'lgan $y = f(x)$ funksiyaning aniq qayd etilishi va

$$y'_x = f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (6)$$

1. 2-o'zgaruvchili funksiya xususiy va to'la orttirmalari.

1. 1-ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiya x o'zgaruvchiga biror Δx orttirma berib, y o'zgaruvchini o'zgarishsiz qoldirsak, funksiya $\Delta_x z$ orttirma
--

olib, bu orttirmaga z funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Xuddi shunday, y o'zgaruvchiga Δy orttirma berib x o'zgarishsiz qolsa, unga z funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

2-ta'rif. x va y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx va Δy orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funksiya $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ to'liq orttirma oladi.

1-ta'rif. a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial x}$ yoki $z'_x = f'_x(x, y)$ bilan belgilanadi.

b) $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$

funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial y}$

yoki $z'_y = f'_y(x, y)$ bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar ta'riflaridan ko'rinadiki, bir argumentli funktsiyani differensiallashning hamma qoida va formulalari o'z kuchida qoladi.

Istalgan chekli sondagi o'zgaruvchilar funksiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

1-misol. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Oldin y ni o'zgarmas deb z'_x ni topamiz:

$$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y,$$

yendi x ni o'zgarmas deb $\frac{\partial z}{\partial y}$ ni topamiz:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y.$$

15-Maruza. Aniqmas integral. Aniq integral

Reja.

1. Boshlang'ich funksiya.

2. Aniqmas integral xossalari va uni hisoblash usullari

3. Aniqmas integral jadvali .

4. Aniq integralni hisoblash. Nyuton-Leybnits formulasi.

1-ta'rif. Agar barcha $x \in (a, b)$ lar uchun

$$F'(x) = f(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a, b) intervalda $f(x)$ funksiya boshlang'ich funksiya deyiladi.

I. E. Gamov

Masalan: $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda $f(x) = x$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya

bo'ladi, chunki

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$$

tenglik barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ lar uchun o'rinlidir.

Berilgan $f(x)$ funksiya bir nechta boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishi mumkin. Masalan,

$$F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \text{ funksiya } f(x) = x \text{ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.}$$

Umumiy holda, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, istalgan o'zgarmas

$c = \text{const}$ uchun $F(x) + c$ funksiya ham $f(x)$ ga boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki

$$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x).$$

2-ta'rif. $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervaldagi barcha boshlang'ich funksiyalari

$$\int f(x) dx$$

ko'rinishda belgilanib, **bu ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi.** Bu yerda

$f(x)$ integral osti funksiyasi, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda deb ataladi.

Demak, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa,

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Masalan,

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Berilgan funksiya uchun uning boshlang'ich funksiyasini, ya'ni uning aniqmas integralini topish, funksiyani integrallash deb ataladi.

2. Aniqmas integral xossalari va uni hisoblash usullari:

1. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng bo'ladi, ya'ni

$$\left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

2. Aniqmas integralning differensial integral ostidagi ifodaga teng bo'ladi, ya'ni

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx.$$

3. Biron bir funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya o'zgarmas songa farq qiladi, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4. Agar a o'zgarmas son bo'lsa, u holda

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

5. Funksiyalar yig'indisining integrali, qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

6. Agar $\int g(t)dt = G(t) + C$ o'rinli bo'lsa, u holda $t = \varphi(x)$ uchun

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

Misol.

$$\int \sin^4 x \cos x dx$$

Bu yerda $t = \sin x$ deb olsak,

$$\sin^4 x \cdot \cos x dx = \sin^4 x d(\sin x) = t^4 dt$$

tenglikni hosil qilamiz va

$$\int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C$$

tenglikka ko'ra,

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

7. Agar $\int f(t)dt = F(t) + c$ bo'lsa, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

8. Quyidagi, bo'laklab integrallash formulasi deb nomlanuvchi formula o'rinli bo'ladi:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Differensiallanuvchi u va v funksiyalar uchun, ko'paytmaning differensial bolgani

$$d(uv) = v du + u dv$$

uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$u dv = d(uv) - v du$$

Bundan esa

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$$

tenglik kelib chiqadi.

Masalan, $\int x \cos x dx$ integralni bo'laklab integrallaylik. Buning uchun

$$u = x, \quad dv = \cos x dx = d(\sin x)$$

deb olsak, $du = dx$ va $v = \sin x$ bo'ladi. Bulardan

$$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

3. Aniqmas integral jadvali .

1. $\int 0 dx = C$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + c$
3. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + c$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad \int e^x dx = e^x + c$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
9. $\int \cos x dx = \sin x + c$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x + c$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x + c$

4. Aniq integralni hisoblashning Nyuton-Leybnits formulasi.

Aniq integralni integral yig'indining limiti sifatida hisoblash hatto oddiy funksiyalar uchun ham ancha qiyinchiliklar tug'diradi. Shu sababli aniq integralni hisoblashning (15.3) formulaga asoslangan, amaliy jihatdan qulay bo'lgan hamda keng qo'llaniladigan usuli bilan tanishamiz.

2-teorema (*integral hisobning asosiy teoremasi*). Agar $F(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $[a; b]$ kesmada $f(x)$ funksiya bilan olingan aniq integral $F(x)$ funksiyaning integrallash oralig'idagi orttirishiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (15.4)$$

(15.4) formulaga *Nyuton-Leybnits formulasi* deyiladi.

$F(b) - F(a)$ ayirmani shartli ravishda $F(x) \Big|_a^b$ deb yozish kelishilgan.

Bu kelishuv natijasida Nyuton-Leybnits formulasi

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \quad (15.5)$$

ko‘inishda ifodalanadi.

Misollar

$$1. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| \Big|_0^3 = \ln|3 + \sqrt{10}| - \ln 1 = \ln|3 + \sqrt{10}|.$$

$$2. \int_1^4 \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} = \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \arctg \frac{x-1}{3} \Big|_1^4 = \frac{1}{3} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{\pi}{12}.$$

Nyuton-Leybnis formulasidan uning qo‘llanish shartlarini hisobga olmagan holda formal foydalanish xato hatijaga olib kelishi mumkin.

Masalan, $\frac{1}{4+x^2}$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya sifatida $\arctg \frac{x}{2}$ ni yoki $\arctg \frac{2}{x}$ ni olish

mumkin. Avval $F(x) = \arctg \frac{x}{2}$ deb olamiz:

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg(-1)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Bunda Nyuton-Leybnis formulasi to‘g‘ri qo‘llanildi, chunki $F(x) = \arctg x$ funksiya $[-2; 2]$ kesmada uzluksiz va $F'(x) = f(x)$ tenglik butun kesmada bajariladi.

Endi $F(x) = \arctg \frac{2}{x}$ deb olamiz:

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2}{x} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg(-1)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Bunda Nyuton-Leybnis formulasi noto‘g‘ri (formal) qo‘llanildi,

chunki $x=0$ da $\arctg \frac{1}{x}$ funksiya uzilishga ega va u $[-2; 2]$ kesmada boshlang‘ich funksiya

bo‘la olmaydi. Natijada xatolik $\left(-\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} \right)$ kelib chiqdi.

Demak, Nyuton-Leybnis formulasini qo‘llashda $F(x)$ boshlang‘ich funksiya berilgan kesmada uzluksiz deb faraz qilinadi (ayrim shartlarda Nyuton-Leybnis formulasi uzilishga ega bo‘lgan funksiyalar uchun ham o‘rinli bo‘lishi mumkin).

Bo‘laklab integrallash usuli.

$$u = u(x) \text{ va } v = v(x)$$

funksiyalar $[a, b]$ oraliqda uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsa, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

O'zgaruvchilarini almashtirish formulasi.

Faraz qilaylik, $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda

$$\int_a^b f(x) dx$$

integral mavjud bo'ladi.

Ayni paytda, bu funksiya $[a, b]$ da boshlang'ich $\Phi(x)$ funksiyaga ega bo'lib,

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

bo'ladi.

Aytaylik, aniq integralda x o'zgaruvchi ushbu

$$x = \phi(t)$$

formula bilan almashtirilgan bo'lib, bunda $\phi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\phi(t) \in C[\alpha, \beta]$ bo'lib, $\phi(t)$ funksiyaning barcha qiymat-lari $[a, b]$ ga tegishli;

2) $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$;

3) $\phi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz $\phi'(t)$ hosilaga ega bo'lsin.

U holda

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt \quad (2)$$

bo'ladi.

Endi aniq integralning ayrim tadbiqlarini ko'rib chiqaylik.

$[a, b]$ oraliqda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz bo'lib, $g(x) \leq f(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin.

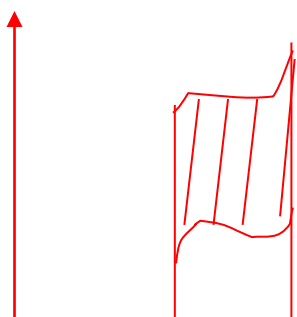
$x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar hamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiya grafiklari bilan chegaralangan S - yuzani hisoblash uchun, quyidagi formula o'rinlidir:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Y

$$y = f(x)$$

B



$$\begin{array}{c} A D \\ y = g(x) \\ a \vee X \end{array}$$

$$S = \int_{ABCD} = \int_{aBCb} - \int_{aADb} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

tenglikni hosil qilamiz.

4. Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari.

Endi aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlarini qaraymiz. 1).

Ma'lumki, mehnat unumdorligi ish kuni mobaynida o'zgaruvchi miqdordir. Mehnat

unumdorligi $y = f(x)$ funksiya bilan ifodalansin, bunda x ish kunining

boshlanishidan hisoblangan vaqt oralig'i, $f(x)$ esa vaqtning shu onidagi (momentidagi) mehnat unumdorligini bildiradi. Mehnat unumdorligining ish kunining 4-soatidagi hajmini hisoblash masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Vaqtning (3,4) oralig'ini eng kattasining uzunligi Δx bo'lgan oraliqlarga bo'lamiz va $f(x)$ funksiya bu kichik oraliqlarda o'zgarmas desak ishlab chiqarish mehnat unumdorligini $f(x) \Delta x$ ko'paytmaga teng bo'ladi. Shunday qilib, ish kunining 4-soatidagi ishlab chiqarish mehnat unumdorligi.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_3^4 f(x) \Delta x = \int_3^4 f(x)dx$$

tenglik bilan ifodalanadi.

2). Mahsulotlar omboriga vaqt birligida keltiriladigan mahsulot miqdorini $f(x)$ va mahsulot omborga kelib tushushidan boshlangan vaqt birligi x bo'lsa, x dan $x + \Delta x$ vaqt oralig'idagi omborga $f(x) \Delta x$ birlik mahsulot keladi. Demak, omborga mahsulot uzluksiz kelib tursa, undagi tovarning zahirasi

$$\int_0^x f(x) dx$$

bilan ifodalanadi.

3). Mashinasozlik sanoati biror xildagi stanoklarni ishlab chiqaradi va yillik ishlab chiqarishi o'zgarmas a ga teng bo'lib, shu stanoklar ishlab chiqarilgan yillar bo'lsin.

Vaqtning onidagi (momentidagi) stanoklar soni (ular ishdan chiqmagan deb olinadi).

$$\int_0^t a dx = [ax]_0^t = at$$

bo'ladi. Agar **mahsulot ishlab chiqarish hajmi** arifmetik progressiya bo'yicha o'suvchi ya'ni.

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

bo'lsa, **stanoklar soni**

$$\int_0^t (a_0 + a_1 x) dx = \left[a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} \right]_0^t = a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

Misol. Ushbu

$$\int_1^2 x \ln x dx$$

integral hisoblansin.

I. Elgamov

Yechilishi. Bu intervalda $u(x) = \ln x$, $dv(x) = x$ deb $du(x) = \frac{1}{x} dx$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$

bo'lishini topamiz. Unda (3) formulaga ko'ra:

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

Misol. Agar kun davomida mehnat unumdorligi $f(t) = -0,1t^2 + 0,8t + 10$ empirik formula bo'yicha o'zgarsa, kunlik ish vaqti 8 soat bo'lgan Q bir kunlik ishlab chiqarilgan mahsulotni toping.

$$\text{Yechish. } Q = \int_0^8 f(t) dt = \int_0^8 (-0,1t^2 + 0,8t + 10) dt = \left(-0,1 \frac{t^3}{3} + 0,8 \frac{t^2}{2} + 10t \right) \Big|_0^8 = 88,53$$

16-Maruz. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Reja.

1. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

2. O'zgaruvchisi ajraladigan tenglamalar.

3. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.

4. To'liq differensialli tenglama.

1. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Differensial tenglamalar matematikada alohida o'rin egallab, tabiiy jarayonlarni tekshirish, jamiyatdagi ayrim qonuniyatlarni o'rganish, differensial tenglamalarni o'z ichiga olgan matematik modellarga keladi.

1-ta'rif. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchilar, noma'lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differentsiallarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Agar izlanayotgan funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa, tenglama oddiy differensial tenglama, ko'p o'zgaruvchili bo'lsa-xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Differensial tenglamaning tartibi deb unda qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Umumiy holda n -tartibli oddiy differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Jumladan, 1- tartibli oddiy differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1^*)$$

kabidir.

Agar (1^*) tenglamani hosilaga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Bu holda tenglama hosilaga nisbatan yechilgan, deyiladi.

Misolalar: $y' = 7x^3$, $(y')^3 y^2 + 5x = 0$, $y' = x^4 \cos y$.

2-ta'rif. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning yechimi deb (a,b) oraliqda (1^*) (xususan (1)) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Yechimning grafigi integral egri chiziq deyiladi. Differensial tenglamalar nazariyasida asosiy masala yechimning mavjudligi va yagonaligidir.

Bu masala (1) tenglama uchun Koshi teoremasi orqali ifodalanadi.

1-teorema. (Koshi teoremasi). Agar $f(x,y)$ funksiya va uning xususiy hosilasi $f'_y(x,y)$ OXY tekislikning biror D sohasida uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in D$ nuqtaning biror atrofida

(1) tenglamaning $x = x_0$ da $y = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

(1) tenglamaning $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlang'ich shartni (Koshi shartini) qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi Koshi masalasi deb ataladi. Buning geometrik ma'nosi integral egri chiziqlar oilasidan D sohaning berilgan (x_0, y_0) nuqtasidan o'tuvchi bittasini tanlab olinadi.

3-ta'rif. (1) tenglamaning umumiy yechimi deb c o'zgarmasning ixtiyoriy qiymatida bu tenglamani qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, c)$ funksiyalar majmuiga aytiladi.

4-ta'rif. $\{\varphi(x, c)\}$ -(1) tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin. (1) tenglamaning D sohasidagi xususiy yechimi deb $c = c_0$ o'zgarmas qiymatda olingan $y = \varphi(x, c_0)$ funksiyaga aytiladi.

2.O'zgaruvchisi ajraladigan tenglamalar

5-ta'rif. Ushbu

$$y' = f_1(x)f_2(y) \quad (2)$$

ko'rinishdagi tenglamalar o'zgaruvchisi ajralgan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $f_1(x)$, $f_2(y)$ - uzluksiz funksiyalar.

Bu tenglamani yechish uchun «o'zgaruvchini ajratish usuli»ni qo'llaymiz: y' hosilani uning ekvivalent formasi dy/dx ga almashtirib, tenglikning ikkala tomonini $\frac{dx}{f_2(y)}$ ga ko'paytiriladi

$$(f_2(y) \neq 0):$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

Tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$\int dy / f_2(y) = \int f_1(x)dx + C,$$

bu yerda C - o'zgarmas kattalik.

Misol: $y' = \frac{x(\sqrt{y^2+1})}{y}$ tenglamaning $(0,1)$ nuqtadan o'tuvchi xususiy yechimini toping.

Yechish: O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$ydy / \sqrt{y^2+1} = xdx$$

$$\text{Bundan, } \int ydy / \sqrt{y^2+1} = \int xdx + C,$$

$$\text{Demak, } \sqrt{y^2 + 1} = \frac{x^2}{2} + c \quad y^2 + 1 = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2 \quad y = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2 - 1}$$

(0,1) nuqtadan o'tuvchi yechim izlanayotgani uchun $C = \pm\sqrt{2}$ topiladi. Demak,

$$y = \sqrt{\left(x^2 / 2 + \sqrt{2}\right)^2 - 1}$$

3. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar

6-ta'rif. Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (3)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $p(x), q(x)$ -uzluksiz funksiyalar. Bu tenglamani

«o'zgarasni variatsiyalash usuli» bilan yechamiz.

Dastlab, (3) ga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi:

$$y' + p(x)y = 0$$

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Shuning uchun $y \neq 0$ deb faraz qilib, ushbuga ega

bo'lamiz:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad (4)$$

$$y = c e^{-\int p(x)dx}$$

C -ixtiyoriy o'zgaras son.

Endi (4) da C ni x ning funksiyasi, deb qaraymiz:

ya'ni

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}, \quad (5)$$

(«o'zgarasni variatsiyalash» deb shu jarayon ko'zda tutiladi).

(5) ni (3) ga qo'yib soddalashtirsak,

$$c'(x) = q(x) e^{\int p(x)dx}.$$

Ushbu tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$c(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c_1, \quad (6)$$

hosil bo'ladi, bu yerda C_1 -ixtiyoriy o'zgaras son.

(6) ni (5) ga qo'ysak, (3) tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y(x) = c_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx. \quad (7)$$

Ba'zi bir chiziqli bo'lmagan tenglamalar ayrim almashtirishlar yo'li bilan chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Bunday tenglamalar qatoriga Bernulli tenglamasini kiritish mumkin:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n = \text{const} \quad (8)$$

Agar $n = 0$ bo'lsa, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan, $n = 1$ da chiziqli, bir jinsli tenglama hosil bo'ladi. Shuning uchun (8) da $n \neq 0$, $n \neq 1$ deb faraz qilinadi.

Yangi $z(x) = z(y(x))$ funksiya kiritamiz:

$$z = y^{1-n}, \quad (9)$$

u holda,

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \quad (10)$$

(8) tenglamaning ikkala tomonini y^n ga bo'lamiz:

$$y^{-n}y' + py^{1-n} = q \quad (11)$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini $(1-n)$ ga ko'paytirib, (9), (10)-tengliklarni hisobga olgan holda $z(x)$ ga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani olamiz.

$$z' + (1-n)pz = (1-n)q \quad (12)$$

1-misol.

$$y' + xy = xy^3$$

Yechish. Bu tenglama Bernulli tenglamasidir $n = 3$. $z = y^{-2}$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$z' = -2y^{-3}y'.$$

(12) da asosan:

$$z' + (-2)xz = -2x$$

(7) ga ko'ra tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$z(x) = Cx^2 + 1$$

Natijada ushbu

$$y = \pm (Cx^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

yechimni olamiz.

4. To'liq differensialli tenglama .

Agar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (13)$$

tenglamaning chap tomoni birorta $U(x, y)$ funksiyaning to'liq differensial, ya'ni

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y)$$

bo'lsa, (13) tenglama *to'liq differensialli tenglama* deyiladi. Bu holda uni quyidagicha yozish mumkin:

$$dU(x, y) = 0$$

Buni integrallash bilan quyidagi umumiy integralni (yechimni) hosil qilamiz:

$$U(x, y) = C$$

Quyidagi savolning yuzaga kelishi tabiiy: qanday shartlarda (1) tenglama to'liq differensialli $dU(x, y) = 0$ tenglama bo'ladi va $U(x, y)$ funksiya qanday topiladi? Quyidagi teorema bu savolga javob beradi.

Teorema. Ushbu

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (14)$$

differensial ifoda (bu yerda $M(x, y)$ va $N(x, y)$ funksiyalar xOy tekislikning D sohasida aniqlangan va uzluksiz bo'lib, uzluksiz

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \text{ va } \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \text{ xususiy hosilalarga ega) birorta } U(x, y) \text{ funksiyaning to'liq}$$

differensialli bo'lishi uchun D sohaning barcha nuqtalarida

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (15)$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

16-Maruz. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Reja.

1. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

2. O'zgaruvchisi ajraladigan tenglamalar.

3. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.

4. To'liq differensialli tenglama .

1. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Differensial tenglamalar matematikada alohida o'rin egallab, tabiiy jarayonlarni tekshirish, jamiyatdagi ayrim qonuniyatlarni o'rganish, differensial tenglamalarni o'z ichiga olgan matematik modellarga keladi.

1-ta'rif. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchilar, noma'lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differensiallarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Agar izlanayotgan funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa, tenglama oddiy differensial tenglama, ko'p o'zgaruvchili bo'lsa-xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Differensial tenglamaning tartibi deb unda qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Umumiy holda n -tartibli oddiy differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Jumladan, 1- tartibli oddiy differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1*)$$

kabidir.

I. Igamov

Agar (1*) tenglamani hosilaga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Bu holda tenglama hosilaga nisbatan yechilgan, deyiladi.

Misollar: $y' = 7x^3$, $(y')^3 y^2 + 5x = 0$, $y' = x^4 \cos y$.

2-ta'rif. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning yechimi deb (a, b) oraliqda (1*) (xususan (1)) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Yechimning grafigi integral egri chiziq deyiladi. Differensial tenglamalar nazariyasida asosiy masala yechimning mavjudligi va yagonaligidir.

Bu masala (1) tenglama uchun Koshi teoremasi orqali ifodalanadi.

1-teorema. (Koshi teoremasi). Agar $f(x, y)$ funksiya va uning xususiy hosilasi $f'_y(x, y)$ OXY tekislikning biror D sohasida uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy $(x_0, y) \in D$ nuqtaning biror atofida

(1) tenglamaning $x = x_0$ da $y = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

(1) tenglamaning $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlang'ich shartni (Koshi shartini) qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi Koshi masalasi deb ataladi. Buning geometrik ma'nosi integral egri chiziqlar oilasidan D sohaning berilgan (x_0, y_0) nuqtasidan o'tuvchi bittasini tanlab olinadi.

3-ta'rif. (1) tenglamaning umumiy yechimi deb c o'zgarmasning ixtiyoriy qiymatida bu tenglamani qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, c)$ funksiyalar majmuiga aytiladi.

4-ta'rif. $\{\varphi(x, c)\}$ -(1) tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin. (1) tenglamaning D sohasidagi xususiy yechimi deb $c = c_0$ o'zgarmas qiymatda olingan $y = \varphi(x, c_0)$ funksiyaga aytiladi.

2. O'zgaruvchisi ajraladigan tenglamalar

5-ta'rif. Ushbu

$$y' = f_1(x)f_2(y) \quad (2)$$

ko'rinishdagi tenglamalar o'zgaruvchisi ajralgan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $f_1(x)$, $f_2(y)$ - uzluksiz funksiyalar.

Bu tenglamani yechish uchun «o'zgaruvchini ajratish usuli»ni qo'llaymiz: y' hosilani uning ekvivalent formasi dy/dx ga almashtirib, tenglikning ikkala tomonini $\frac{dx}{f_2(y)}$ ga ko'paytiriladi

$$(f_2(y) \neq 0):$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

Tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$\int dy / f_2(y) = \int f_1(x)dx + C,$$

bu yerda C - o'zgarmas kattalik.

Misol: $y' = \frac{x(\sqrt{y^2+1})}{y}$ tenglamaning (0,1) nuqtadan o'tuvchi xususiy yechimini toping.

Yechish: O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$ydy/\sqrt{y^2+1} = xdx$$

$$\text{Bundan, } \int ydy/\sqrt{y^2+1} = \int xdx + C,$$

$$\text{Demak, } \sqrt{y^2+1} = \frac{x^2}{2} + c \quad y^2+1 = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2 \quad y = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2 - 1}$$

(0,1) nuqtadan o'tuvchi yechim izlanayotgani uchun $C = \pm\sqrt{2}$ topiladi. Demak,

$$y = \sqrt{\left(x^2/2 + \sqrt{2}\right)^2 - 1}$$

3. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar

6-ta'rif. Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (3)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $p(x), q(x)$ -uzluksiz funksiyalar. Bu tenglamani «o'zgarasni variatsiyalash usuli» bilan yechamiz.

Dastlab, (3) ga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi:

$$y' + p(x)y = 0$$

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Shuning uchun $y \neq 0$ deb faraz qilib, ushbuga ega

bo'lamiz:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad (4)$$

$$y = c e^{-\int p(x)dx}$$

C -ixtiyoriy o'zgaras son.

Endi (4) da C ni x ning funksiyasi, deb qaraymiz:

ya'ni

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}, \quad (5)$$

(«o'zgarasni variatsiyalash» deb shu jarayon ko'zda tutiladi).

(5) ni (3) ga qo'yib soddalashtirsak,

$$c'(x) = q(x) e^{\int p(x)dx}.$$

Ushbu tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c_1, \quad (6)$$

hosil bo'ladi, bu yerda C_1 -ixtiyoriy o'zgaras son.

(6) ni (5) ga qo'ysak, (3) tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y(x) = c_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx. \quad (7)$$

I. Igamov

Ba'zi bir chiziqli bo'lmagan tenglamalar ayrim almashtirishlar yo'li bilan chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Bunday tenglamalar qatoriga Bernulli tenglamasini kiritish mumkin:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n = \text{const} \quad (8)$$

Agar $n = 0$ bo'lsa, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan, $n = 1$ da chiziqli, bir jinsli tenglama hosil bo'ladi. Shuning uchun (8) da $n \neq 0$, $n \neq 1$ deb faraz qilinadi.

Yangi $z(x) = z(y(x))$ funksiya kiritamiz:

$$z = y^{1-n}, \quad (9)$$

u holda,

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \quad (10)$$

(8) tenglamaning ikkala tomonini y^n ga bo'lamiz:

$$y^{-n}y' + py^{1-n} = q \quad (11)$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini $(1-n)$ ga ko'paytirib, (9), (10)-tengliklarni hisobga olgan holda $z(x)$ ga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani olamiz.

$$z' + (1-n)pz = (1-n)q \quad (12)$$

1-misol.

$$y' + xy = xy^3$$

Yechish. Bu tenglama Bernulli tenglamasidir $n = 3$. $z = y^{-2}$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$z' = -2y^{-3}y'.$$

(12) da asosan:

$$z' + (-2)xz = -2x$$

(7) ga ko'ra tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$z(x) = Cx^2 + 1$$

Natijada ushbu

$$y = \pm (Cx^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

yechimni olamiz.

4. To'liq differensialli tenglama .

Agar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (13)$$

tenglamaning chap tomoni birorta $U(x, y)$ funksiyaning to'liq differensial, ya'ni

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y)$$

bo'lsa, (13) tenglama *to'liq differensialli tenglama* deyiladi. Bu holda uni quyidagicha yozish mumkin:

$$dU(x, y) = 0$$

Buni integrallash bilan quyidagi umumiy integralni (yechimni) hosil qilamiz:

$$U(x, y) = C$$

Quyidagi savolning yuzaga kelishi tabiiy: qanday shartlarda (1) tenglama to'liq differensialli $dU(x, y) = 0$ tenglama bo'ladi va $U(x, y)$ funksiya qanday topiladi? Quyidagi teorema bu savolga javob beradi.

Teorema. Ushbu

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (14)$$

differensial ifoda (bu yerda $M(x, y)$ va $N(x, y)$ funksiyalar xOy tekislikning D sohasida aniqlangan va uzluksiz bo'lib, uzluksiz

$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ va $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega) birorta $U(x, y)$ funksiyaning to'liq

differensialli bo'lishi uchun D sohaning barcha nuqtalarida

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (15)$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

18-Maruza. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.

Reja.

1. Differensial tenglamalar sistemasi.
 2. Ikkita tenglamadan iborat bir jinsli avtonom sistemasi.
 3. Iqtisodiyotda differensial tenglamalar apparati
- Umumiy holda differensial tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (1)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar differensial tenglamalar sistemasida noma'lum funksiyaning hosilasi differensial tenglamaning chap tomonida bo'lib, o'ng tomonida hosilalar qatnashmasa bunday differensial tenglamalar sistemasiga normal differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.

(I) -sistemasi -normal differensial tenglamalar sistemasidir.

(1) tenglamalar sistemasining yechimi, deb 1- tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lib, (1) tenglamalar sistemasini ayniyatga aylantiradigan har qanday $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ funksiyalarga aytiladi.

(1) differensial tenglamalar sistemasi uchun

Koshi masalasi, deb

$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (1) tenglamalar sistemasining $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ yechimiga aytiladi.

(1) differensial tenglamalar sistemasining yechimini topish quyidagicha amalga oshiriladi.

Quyidagi o'zgaras koeffitsiyentli normal differensial tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (2)$$

I. Iqamov

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2.\end{aligned}$$

Bu sistemaning asosiy matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Differensial tenglamalar sistemasining xarakteristik tenglamasi

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (6)$$

ga teng. Bu tenglamaning ildizlarini (xarakteristik sonlarni yoki matritsa xos sonlarini) topamiz.

Maktab kursidan bizga ma'lumki, bunda uch holat ro'y berishi mumkin.

$$1) \quad D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0.$$

Bu holatda (6) tenglama ikkita bir-biridan farqli ildizlarga ega:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{D}$$

Ularga mos xos vektorlarni
 $(A - \lambda_k E) \alpha_k = 0$
 tenglamalar sistemasidan topamiz:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix}.$$

Demak, bir jinsli tenglamalar

sistemasining umumiy yechimi

$$y_1 = C_1 a_{12} e^{\lambda_1 x} + C_2 a_{12} e^{\lambda_2 x},$$

$$y_2 = C_1 (\lambda_1 - a_{11}) e^{\lambda_1 x} + C_2 (\lambda_2 - a_{11}) e^{\lambda_2 x}.$$

Misoi.
 Bu yerda : $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = y + 2x \end{cases}$ (1)
 $x=x(t), y=y(t)$ - nomalun fuksiyalar;
 Yechim:

a) (1) sistemaning asosiy matritsasini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

b) (1) -differensial tenglamalar sistemasining xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$d(A) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)^2 - 4 = 0; \quad \lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = -1;$$

Demak, sistemaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlash mumkin:

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-1t}; \quad y(t) = a_1 e^{3t} + a_2 e^{-1t} \quad (3)$$

(3) ni (1) qo'yib, c_i va a_i orasidagi quyidagi bog'lanishlarni aniqlaymiz:

$$a_1 = c_1; \quad a_2 = -c_2$$

Natijada (1) ni (3)-yechimi quyidagini hosil qilamiz:

I. L. Gamov

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{-1t}; \\y(t) &= c_1 e^{3t} - c_2 e^{-1t}\end{aligned}$$

3. Iqtisodiyotda differensial tenglamalar apparati

Differensial tenglamalar nazariyasining iqtisodiy jarayonlarning modellarida qo'llanishiga doir misollarni qaraymiz.

Bu yerda erkli o'zgaruvchi bo'lib t -vaqt ishtirok etadi. Bunday modellar uzoq vaqt mobaynida iqtisodiy sistemalar evolyutsiyasini tekshirishda foydalidir, ular iqtisodiy dinamikani tahlil etishning asosini tashkil etadi.

Ishlab chiqarishning tabiiy o'sish modeliga birinchi tartibli differensial tenglamalarni tadbig'i.

Faraz qilaylik, qandaydir mahsulot p narx bilan sotiladi, $Q(t)$ funksiya t vaqt mobaynida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori o'zgarishini bildiradi desak, u holda vaqt davomida $pQ(t)$ ga teng daromad olinadi. Aytaylik olingan daromadning bir qismi mahsulot ishlab chiqarish investitsiyasiga sarf bo'lsin, ya'ni

$$I(t) = mpQ(t) \quad (1)$$

m - investitsiya normasi, o'zgarmas son va $0 < m < 1$.

Agar bozor yetarlicha ta'minlangan va ishlab chiqarilgan mahsulot to'la sotilgan degan tasavvurdan kelib chiqilsa, ishlab chiqarish tezligining yana oshishiga (akselatorga) olib keladi.

Ishlab chiqarish tezligi esa investitsiyaning o'sishiga proporsional, ya'ni

$$Q = \frac{1}{l} I(t) \quad (2)$$

bu yerda $1/l$ - akselator normasi. (1) formulani (2) ga qo'yib

$$Q' = kQ, \quad k = lmp \quad (3)$$

ni olamiz. (3) differensial tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama. Bu tenglama umumiy yechimining ko'rinishi $Q = Ce^{kt}$, bunda C - ixtiyoriy o'zgarmas son.

Faraz qilaylik, boshlang'ich moment $t = t_0$ da mahsulot ishlab chiqarish hajmi Q_0 berilgan. U

holda bu shartdan o'zgarmas C ni ifodalash mumkin:

$Q_0 = Ce^{kt_0}$, bundan $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Natijada (3) tenglama uchun Koshi masalasining yechimini

topamiz:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \quad (4)$$

Shunga e'tibor berish kerakki, matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Biologik tajribalardan kelib chiqadiki, bakteriyalarning ko'payish jarayoni (4) formula bilan ifodalanadi. Radioaktiv parchalanish jarayoni ham (4) formula bilan ifodalanadigan qonuniyatga bo'ysunadi.

Raqobat sharoitida ishlab chiqarishning o'sishi

Faraz qilaylik, $p = p(Q)$ -kamayuvchi funksiya ya'ni mahsulot hajmining ortishi bilan bozorda uning narxi kamayadi: $dp/dQ < 0$. (1)-(3) formulalardan Q ga nisbatan chiziqli bo'lmagan, o'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglama hosil qilamiz:

$$Q' = \alpha p(Q)Q, \alpha = \text{lm} \quad (5)$$

Tenglamaning o'ng tomonidagi barcha ko'paytuvchilar musbatligidan $Q' > 0$, ya'ni $Q(t)$ funksiya o'suvchi.

Funksiyaning o'sish xarakteri uning ikkinchi tartibli hosilasi bilan aniqlanadi. (5) tenglamadan ushbu

$$Q'' = \alpha \left[Q'p(Q) + Q \frac{dp}{dQ} Q' \right] = \alpha Q' \left(p + \frac{dp}{dQ} Q \right).$$

tenglik kelib chiqadi.

Talab elastikligini kiritib, bu tenglikning ko'rinishini o'zgartirish mumkin:

$$E(p) = \frac{dp}{p} \frac{Q}{dp}, \text{ tenglikka ko'ra } Q'' = \alpha Q' p \left(1 + \frac{dp}{p} \frac{Q}{dp} \right), \text{ yoki } \frac{dQ}{dp} < 0 \text{ bo'lgani uchun } E < 0, \text{ nihoyat}$$

$$Q'' = \alpha Q' p (1 - 1/|E|) \quad (6)$$

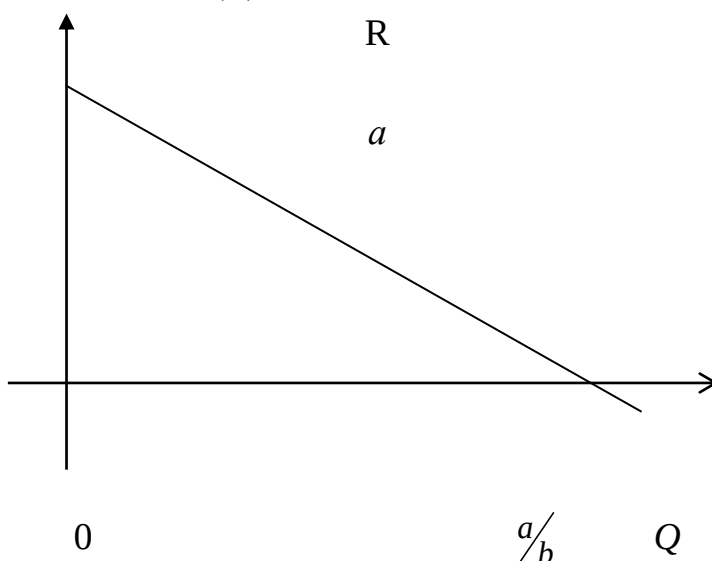
tenglik hosil bo'ladi.

(6) tenglamadan elastik talabda $Q'' > 0$, ya'ni $|E| > 1$, ekanligi kelib chiqadi va $Q(t)$ funksiyaning grafigi pastga qavariq ekanligi ma'lum bo'ladi. Bu esa mahsulot hajmining progressiv o'sishini bildiradi.

Noelastik talabda $|E| < 1$ va bu holda $Q'' < 0$ bo'lgani uchun $Q(t)$ funksiya yuqoriga qavariq, bu esa mahsulot hajmining sekin o'sishini (ya'ni yetarlicha ta'minlanganlikni) bildiradi.

Soddalik uchun $p(Q)$ bog'lanishni chiziqli funksiya ko'rinishida deb qabul qilamiz.

$$P(Q) = a - bQ, \quad a > 0, b > 0$$



U holda (5) tenglama ushbu

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \quad (7)$$

ko'rinishda bo'ladi. Demak,

$$Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ). \quad (8)$$

(7) va (8) munosabatlardan: $Q' = 0$ va $Q = 0$ da $Q' = 0$; $Q > a/2b$ da $Q'' < 0$. $Q = Q(t)$ funksiya

grafigining egilish nuqtasi $t = Q = a/2b$. Chizmada keltirilgan bu funksiyaning grafigi

(differensial tenglamaning integral egri chiziqlaridan biri (7)) logistik egri chiziq deyiladi.

Bunday egri chiziqlar boshqa dinamik jarayonlarni ham xarakterlaydi. Masalan, organik muhitda bakteriyalarning ko'payishi, biologik organizmlarning chegaralangan muhitda epidemiyalar tarqalish dinamikasi va boshqalar.

Keynsning dinamik modeli

Dinamikaning asosiy komponentlari bo'lgan iqtisodiyotning daromad va harakatlarni bog'lovchi sodda balans modelini qaraymiz. Faraz qilaylik, $Y(t), E(t), S(t), I(t)$ -mos ravishda milliy daromad, davlat xarajatlar, iste'mol va investitsiya funksiyasi bo'lsin. U holda quyidagi munosabatlar o'rinalidir:

$$\begin{aligned} Y(t) &= S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) &= a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) &= k(t)Y'(t) \end{aligned} \quad (9)$$

bu yerda $a(t)$ -iste'molga moyillik koeffitsienti ($0 < a(t) < 1$), $b(t)$ -chekli iste'mol, $k(t)$ -akseleratsiya normasi. (9) tenglamalarda ishtirok etuvchi barcha funksiyalar musbat.

(9) tenglamalarning ma'nosini oydinlashtiramiz. Barcha xarajatlarning yig'indisi milliy daromadga teng bo'lishi zarur - bu tenglik birinchi tenglamada ifodalangan. Xalq xo'jaligidagi umumiy iste'mol, milliy daromadning bir qismi bo'lgan ichki iste'mol va chegaraviy iste'moldan iborat bo'ladi. Mana shu jarayon ikkinchi tenglamada aks ettirilgan. Nihoyat investitsiya hajmi ixtiyoriy bo'lishi mumkin emas: u davlat texnologiyasi va infratuzilmasi xarakterlaydigan iqtisodiy ko'rsatkich bo'lib, akselator normasining oxirgi milliy daromadga ko'paytmasi bilan aniqlanadi, bu jarayon uchinchi tenglik bilan ifodalangan.

Faraz qilaylik, $a(t), b(t), k(t)$ va $E(t)$ funksiyalar berilgan. Bu funksiyalar davlat evolyutsiyasi va faoliyatini xarakterlaydi. Milliy daromad dinamikasini aniqlash, ya'ni t vaqtning funksiyasi bo'lgan Y ni topish masalasi asosiy iqtisodiy masalalardan biridir.

Ikkinchi tenglamadan $S(t)$ ni va uchinchi tenglamadan $I(t)$ ni birinchi tenglamaga qo'yamiz. $Y(t)$ funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo'lmagan birinchi tartibli differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$Y' = \frac{1-a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)} \quad (10)$$

Biz asosiy parametrlar a, b, k ni o'zgarmas sonlar deb faraz qilib, ancha sodda holni tekshiramiz. U holda (10) tenglama o'zgarmas koeffitsientli birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga aylanadi:

$$Y'_t = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k}. \quad (11)$$

Ma'lumki, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi uning qandaydir xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat. (11) tenglamaning xususiy yechimi $\tilde{Y}$ sifatida $Y' = 0$ dagi, ya'ni muvozanat yechimini olamiz, ya'ni

$$\tilde{y} = \frac{b+E}{1-a}. \quad (12)$$

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $Y_0^{(t)} C \exp\left(\frac{1-a}{k}t\right)$ formula bilan beriladi. Demak, (11) tenglamaning umumiy yechimi

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t} \quad (13)$$

(11) tenglamaning integral egri chiziqlari chizmada ko'rsatilgan.

Agar vaqtning boshlang'ich momentida $Y_0 < Y_p$ bo'lsa, u holda $C = Y_0 - Y_p < 0$ va egri chiziqlar (12) muvozanat yechimidan pastga keladi, yani milliy daromad vaqt o'tishi bilan masalaning berilgan parametrlari a, b, k va E da kamayadi, chunki (13) da eksponenta darajasi musbat. Agar $Y_0 > Y_p$ bo'lsa, u holda $C > 0$ va vaqt o'tishi bilan milliy daromad o'sadi – integral egri chiziqlar $Y = Y_0$ muvozanat to'g'ri chizig'idan yuqoriga ketadi.

O'sishning noklassik modeli

Faraz qilaylik, $Y = F(K, L)$ milliy daromad, bu yerda F -bir jinsli birinchi tartibli ishlab chiqarish funksiyasi: $(F(tK, tL) = F(K, L))$, K – sarflangan kapital hajmi, L -mehnat sarfi hajmi. Fond qurollanish kattaligi $k = K/L$ bo'lsin. U holda ishlab chiqarish unumdorligi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F(K, 1) \quad (14)$$

Bu bo'limda qarayotgan masalaning maqsadi fond qurollanish dinamikasini yoki uni vaqtning funksiyasi sifatida ifodalashdir.

Har qanday model ma'lum farazlarga asoslanganligi uchun biz ham ba'zi bir parametrlarni kiritishimiz zarur.

Quyidagilar bajariladi, deb faraz qilamiz:

1. Mehnat resurslari vaqtida tabiiy o'sish o'rinli

$$L' = \alpha L. \quad (15)$$

2. Mablag' ishlab chiqarish fondiga va amortizatsiyaga sarflanadi, ya'ni

$$I = K' + \beta K$$

bu yerda β – amortizatsiya normasi.

Agar l -investitsiya (sarflangan mablag') normasi bo'lsa, u holda

$$I = lY = K' + \beta K \text{ yoki } K' = lF(K, L) - \beta K \quad (16)$$

k - qurollanish fond ta'rifidan kelib chiqadiki, $\ell n k = \ell n K - \ell n L$.

Bu tenglikni t -bo'yicha differensiallab,

$$k' = lf(x) - (\alpha + \beta)k \quad (17)$$

tenglamani olamiz, bu yerda $f(x)$ funksiya (14) formula bo'yicha aniqlangan.

Olingan (17) munosabat o'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli chiziqli bo'lmagan differensial tenglamani ifodalaydi. Bu tenglamaning statsionar yechimini aniqlaymiz: $k' = 0$ shartdan,

$$lf(k) - (\alpha + \beta)k = 0 \quad (18)$$

ya'ni $k = \text{const}$ – o'zgarmas kattalik, chiziqli bo'lmagan (18) algebraik tenglamaning yechimidir.

Masala. Ishlab chiqarish funksiyasi $F(K, L) = \sqrt{KL}$ uchun (17) tenglamaning integral egri chiziqlari va statsionar yechimini toping.

14)dan $f(k) = \sqrt{k}$, u holda (17) tenglama ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{df}{dt} = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k.$$

Bu tenglamaning statsionar yechimi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi: $l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0$, bundan

(17) tenglamaning nol bo'lmagan xususiy yechimi $k_{st} = l^2 / (\alpha + \beta)^2$ dan iborat bo'ladi.

(17) differensial tenglamani “o'zgaruvchilarni ajratish” usuli bilan yechamiz:

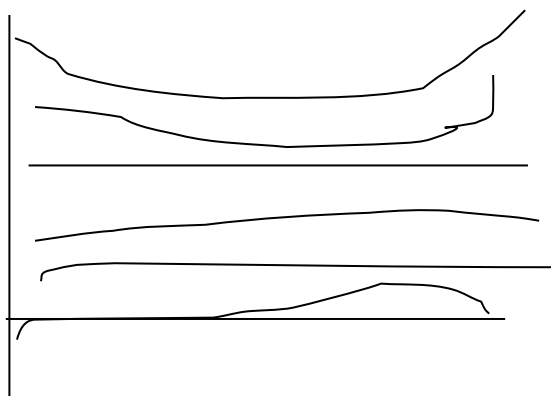
$$\frac{dk}{\sqrt{k}[l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}]} = dt$$

Bu tenglamada $\sqrt{k} = z$ almashtirishdan so'ng integrallab, umumiy yechimning ko'rinishini hosil qilamiz.

$$k(t) = \left[\frac{1}{\alpha + \beta} + C \exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2} t\right) \right]^2 \quad (19)$$

Integral egri chiziqlar oilasi yuqoridan va pastdan statsionar yechimga yaqinlashadi, ya'ni $t \rightarrow \infty$

va $k \rightarrow k_{st}$.



Demak, o'zgarmaydigan parametrlar l, α va β da qurollanish fondi funksiyasi o'z statsionar qiymatiga boshlang'ich shartlarga bog'liqsiz ravishda turg'un barqaror intiladi. Bu statsionar nuqta $k = k_{st}$, barqaror muvozanat nuqtasi deb yuritiladi.

Oldindan aytib beriladigan narxlar asosida bozor modelini tuzish

Oldindan bashorat qilinadigan narxlar asosida bozor modelini tuzishni qaraylik. Oddiy bozor modellarida talab va taklif, odatda tovarning shu kundagi narxi bilan bog'liq bo'ladi. Lekin talab va taklif real hollarda, narxning tashkil qilinishi va narxning o'zgarishi bilan bog'liq bo'ladi. t vaqt bo'yicha uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalar modelida bu ko'rsatkichlar mos ravishda $p(t)$ - narx funksiyasining birinchi va ikkinchi hosilalari bilan ifodalanadi.

Faraz qilaylik, D - talab funksiyasi va S - taklif funksiyasi P - narx funksiyasi va uning hosilalari bilan quyidagi bog'lanishga ega bo'lsin:

$$\begin{aligned} D(t) &= 3p'' - p' - 2p + 18, \\ S(t) &= 4p'' + p' + 3p + 3. \end{aligned} \quad (20)$$

(20) da qabul qilingan bog'lanishlar to'la realistik (amaliy): buni narx funksiyasining hosilalari qo'shiluvchilarda oydinlashtiramiz.

1. Talab narxning o'zgarishi bilan "qizdiriladi". Agar temp (narx o'sishi) davom etsa, o'ssa ($p'' > 0$), u holda bozorning talabga qiziqishi ortadi va aksincha. Narxning tez o'sishi xaridorni qo'rqitadi, shuning uchun narx funksiyasining birinchi hosilasi minus ishora bilan kiradi.

2. Taklif yana ko'proq doirada narxning o'zgarishi bilan kuchaytiriladi, shuning uchun $S(t)$ funksiyadagi p'' ning koeffitsienti $D(t)$ dagiga nisbatan katta. Shuningdek narxning o'sishi taklifni oshiradi, shuning uchun p' ni o'z ichiga oluvchi qo'shiluvchi $S(t)$ ning ifodasiga musbat ishora bilan kiradi.

Narxning vaqt bilan bog'lanishini aniqlash talab etiladi. Bozorning muvozanat holati $D = S$ tenglik bilan xarakterlanganligi uchun (20) dagi tenglamalarning o'ng tomonlarini tenglashtiramiz va soddalashtirib, quyidagini olamiz:

$$p'' + 2p' + 5p = 15 \quad (21)$$

(21) munosabat $p(t)$ funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglama. Bunday tenglamaning umumiy yechimi biror xususiy yechimi va unga mos bir jinsli

$$p'' + 2p' + 5p = 0 \quad (22)$$

tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat.

(22) uchun xarakteristik tenglama: $k^2 + 2k + 5 = 0$. Uning ildizlari qo'shma kompleks sonlar: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$ va natijada (22) tenglamaning $\tilde{p}(t)$ umumiy yechimi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\tilde{p}(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),$$

bu yerda C_1 va C_2 -ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Bir jinsli bo'lmagan (21) tenglamaning xususiy yechimi sifatida $p = p_{st}$ -narxni belgilaydigan o'zgarmas kattalikni olamiz. Buni (21) ga qo'ysak, p_{st} ning qiymatini topamiz: $p_{st} = 3$
Shunday qilib, (21) tenglama umumiy yechimi

$$P(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) \quad (23)$$

tenglik bilan ifodalanadi. Demak, $t \rightarrow \infty$ da $p(t) \rightarrow p_{st} = 3$, ya'ni barcha integral egri chiziqlar $p = 3$ gorizontaal asimptotaga ega va uning atrofida tebranadi. Bu barcha belgilangan narxlar p_{st} narxga

intilishini va uning atrofida tebranishini bildiradi, bu tebranishlarning amplitudasi vaqt o'tishi bilan o'sa boshlaydi.

Bu masalaning xususiy yechimlarini ikki xil misolda keltiramiz:

1.Koshi masalasi. Faraz qilaylik, boshlang'ich holatdagi narx va uning o'zgarish jarayoni ma'lum: $t = 0$; $p = 4$, $p' = 1$. Bu berilganlarni (23) formulaga qo'ysak $p(0) = C_1 + 3 = 4$, bundan $C_1 = 1$ ya'ni

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t) \quad (24)$$

Buni differensiallaymiz: $p'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t]$.

Endi Koshi masalasining ikkinchi shartini qo'llaymiz:

$$p'(0) = 2C_2 - 1 = 1, \text{ bundan } C_2 = 1.$$

Nihoyat Koshi masalasi yechimining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t),$$

yoki

$$p(t) = 3 + \sqrt{2}e^{-t} \cos(2t - \pi/4).$$

2.Aralash masala. Faraz qilaylik, vaqtning boshlang'ich momentida talab va taklif ma'lum:

$$t = 0, p = 4, D = 16.$$

Birinchi boshlang'ich shart oldingidek bo'lgani uchun bu yerda ham yechim (24) tenglik bilan ifodalanadi. U holda,

$$p'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t],$$

$$p''(t) = -e^{-t}[(4C_2 + 3)\cos 2t - (3C_2 - 5)\sin 2t]$$

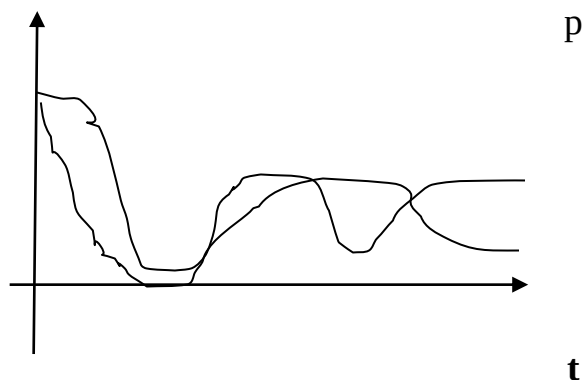
$$\text{Bu yerdan } p'(0) = 2C_2 - 1 \text{ va } p''(0) = -4C_2 - 3.$$

Bu tengliklarni $D(t)$ ning (20) ko'rinishini hisobga olgan holda, masalaning ikkinchi $D(0) = 16$ shartidan foydalanib, $C_2 = -1$ ni topamiz. Shunday qilib, berilgan masala yechimining ko'rinishi

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t) \text{ yoki}$$

$$p(t) = 3 - \sqrt{2}e^{-t} \sin(2t - \pi/4) \quad (25)$$

1 va 2 masalalarga mos keluvchi integral egri chiziqlar chizmada tasvirlangan.



Amaliy mashg'ulot materiallari

1-Amaliy mashg'ulot Matritsalar va ular ustida amallar. Determinantlar nazariyasi.

Matritsa arustida quyidagi chiziqli amallarni bajarish mumkin.

1. Matritsani songa ko'paytirish uchun uning barcha elementlari shu songa ko'paytiriladi. $k \neq 0$ son hamda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ matritsa berilgan bo'lsa, } Ak = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix} \text{ tenglik o'rinli bo'ladi.}$$

1. O'lchamlari bir hil bo'lgan A va B matritsalarini qo'shish uchun mos elementlari qo'shiladi:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix} \text{ matritsa hosil bo'ladi.}$$

2. Matritsalarini ko'paytirish.

Agar A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlar soniga teng bo'lsa A ni B ga ko'paytirish mumkin, $n \times m$ o'lchovli $A = (a_{ik})$ matritsani $m \times p$ o'lchovli $B = (b_{jk})$ matritsaga quyidagi formula bo'yicha ko'paytiriladi.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Amallarni bajaring:

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A+B \text{ matritsani toping.}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 4+2 & 1+1 \\ -1+1 & 0+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B$ matritsani toping.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 26 + (-12) \cdot 15 & 7 \cdot 45 + (-12) \cdot 26 \\ -4 \cdot 26 + 7 \cdot 15 & -4 \cdot 45 + 7 \cdot 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3-misol. Ushbu matritsalar ni bir-biriga ko'paytiring.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Bu matritsalar ko'paytmasi $[2 \times 3]$ – tartibli ushbu

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

matritsa bo'lib, bunda

$$c_{11} = 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 9,$$

$$c_{12} = 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) = -5,$$

$$c_{13} = 0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 17,$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 1,$$

$$c_{22} = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-5) = -12,$$

$$c_{23} = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 10$$

bo'ladi. Demak,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 17 \\ 1 & -12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Misollar

1. a) Agar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bo'lsa, $A+3B$, AB ni toping.

b) Agar bo'lsa, $3A+2B$ ni toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

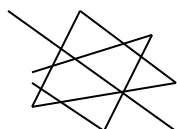
2. A va B matritsalar berilgan. a) $A \cdot B$; b) $B \cdot A$ ko'paytmalar topilsin.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -7 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1.

Determinantlarni hisoblashga misollar.

1. Uchburchaklar usuli:



$$(+)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (-)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

2. Sarrus usuli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

3. Birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib, hisoblash:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$2.1. \text{ a) } \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-4) \cdot 2 = 15 + 8 = 23$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} - (-1) \cdot a = a + a = 2a$$

2.2. Uchinchi tartibli determinantlarni uchburchaklar usuli, Sarrus usuli hamda biror ixtiyoriy satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot (-5) + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot (-5) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 =$$

$$= 15 + 4 - 2 + 12 + 10 + 1 = 40$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 2 + 4 + 12 + 1 + 10 = 40$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 16 + 14 + 10 = 40$$

Quyidagi uchinchi tartibli determinantlarni qulay usulda hisoblang:

$$2.3. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2.4. \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$$

$$2.5. \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$2.6. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2.7. \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

2-Amaliy mashg'ulot. Matritsa rangi . Teskari matritsa.

$$1. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

A matritsaning rangi deb noldan farqli minorlarning eng yuqori tartibiga aytiladi va $\text{rang}(A)$ kabi ifodalanadi.

Matritsa rangi ikki usulda topiladi:

1. Matritsa rangi ta'rifga asoslangan "minorlar ajratish" usuli.
2. Elementar almashtirishlar bajarib diagonal matritsaga keltirishga asoslangan "Gauss algoritmi".

Misol 1. Matritsa rangini hisoblang:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad A \text{ matritsa } 3 \times 5 \text{ tartibli, demak uning rangi } 3 \text{ dan yuqori bo'lmaydi.}$$

Uchinchi tartibli minorlarni hisoblaymiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 10 - 12 + 12 + 4 + 10 = 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -32 - 2 + 8 - 8 + 32 + 2 = 0$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 14 - 16 + 16 + 8 - 14 = 0$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -40 - 3 + 4 - 10 + 48 + 1 = 0$$

$$M_5 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 21 - 8 + 20 + 12 + 7 = 0 \quad M_6 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 14 + 160 - 4 + 20 - 168 = 0$$

$$M_7 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 7 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 14 - 64 + 4 + 56 - 8 = 0 \quad M_8 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 42 + 16 - 40 - 14 - 24 = 0$$

$$M_9 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 80 + 6 - 8 + 20 - 2 - 96 = 0 \quad M_{10} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 128 - 28 - 8 + 16 - 112 = 0$$

Barcha uchinchi tartibli minorlar nolga teng. Ikkinchi tartibli minorlarni hisoblaymiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \quad M_1 \neq 0 \quad r(A) = 2$$

Bu usulda noldan farqli minor topilgunga qadar hisoblashlar davom etadi. Shuning uchun tartibi kattaroq matritsa rangini hisoblash birmuncha qiyinchiliklarga olib keladi.

Misol

1. Elementar almashtirishlar metodida quyidagi matritsaning rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Elementar almashtirishlar yordamida matritsani pog'onasimon ko'rinishga keltiramiz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot II - I} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot III - I} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + 3 \cdot II} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan pog'onasimon matritsa ikkita noldan farqli satrga ega, demak uning rangi ikkiga teng. Shuning uchun berilgan matritsaning rangi ikkiga teng.

$$(1 \quad 2 \quad 2)$$

2. Teskari matritsa

Misol. Berilgan A matritsaga teskari bo'lgan A^{-1} matritsani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Yechish. Buning uchun quyidagi matritsani tuzamiz:

Birinchi ustunni 1 ga, so`ngra -2 ga ko`paytirib, mos ravishda ikkinchi va uchinchi ustunga qo`shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ikkinchi ustunni 2 ga va 1 ga ko`paytirib, mos ravishda birinchi va uchinchi ustunga qo`shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Uchinchi ustunni -3 ga ko`paytirib, birinchi ustunga qo`shamiz va ikkinchi ustunni -1 ga ko`paytiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ikkinchi va uchinchi ustunlarni almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Natijada A ga teskari A^{-1} matritsaga ega bo`lamiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3-Amaliy mashg'ulot.

$|A|=16 \neq 0$ teskari matritsa mavjud. Teskari matritsani Jordan usulida topamiz. Berilgan matritsani birlik matritsa hisobida kengaytirib, faqat satrlar ustida elementar almashtirishlar bajaramiz, bu usulni to chap tomonda A matritsa o'rnida birlik matritsa hosil bo'lguncha davom ettiramiz, o'ng tomonda hosil bo'lgan matritsa berilgan matritsaga nisbatan teskari matritsa bo'ladi.

$(A|E) \sim (E|A^{-1})$ - Jordan usul algoritmi.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/16 & -5/16 & -1/16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14/16 & 6/16 & -2/16 \\ 0 & 0 & 1 & -1/16 & -5/16 & -1/16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11/16 & -7/16 & 5/16 \\ 0 & 1 & 0 & 14/16 & 6/16 & -2/16 \\ 0 & 0 & 1 & -1/16 & -5/16 & -1/16 \end{pmatrix} A^{-1} = 1/16 \begin{pmatrix} -11 & -7 & 5 \\ 14 & 6 & -2 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \right|$$

Teskari matritsa to'g'ri topilganini (3) formulaga qo'yib, tekshiramiz:

$$AA^{-1} = 1/16 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -11 & -7 & -5 \\ 14 & 6 & -2 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/16 \begin{pmatrix} -11+28-1 & -7+12-5 & 5-4-1 \\ 11-14+3 & 7-6+15 & -5+2+3 \\ -44+42+2 & -28+18+10 & 20-6+2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/16 \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ demak, teskari matritsa to'g'ri topilgan.}$$

4-Amaliy mashg'ulot. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari

1-Misol. Quyidagi sistemani Gauss usulida yeching.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

Yechilishi. Kengaytirilgan matritsani tuzib olamiz va unda bosh diagonaldan pastdagi elementlarni nolga aylantiramiz.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan matritsaga mos sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3, \\ 5y - 7z = -7, \\ -5z = -5. \end{cases}$$

$$-5z = -5, \quad z = 1$$

$$5y = -7 + 7z = -7 + 7 \cdot 1 = -7 + 7 = 0, \quad y = 0$$

$$x = 3 + 2y - 4z = 3 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 3 - 4 = -1.$$

$$\text{Javob:} \quad x = -1, \quad y = 0, \quad z = 1.$$

Misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Jordan – Gauss metodi yordamida yeching:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -6, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsientlaridan kengaytirilgan matritsa tuzamiz. Tenglamalar ustida bajariladigan almashtirishlar yordamida asosiy matritsani quyidagicha birlik matritsaga keltirib javobni topamiz:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 27 & 27 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 16 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 16 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

I. Elgamov

Misol. Tenglamalar sistemasini Gauss – Jordan usulida yeching

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Yechimi. Berilgan sistemada kengaytirilgan matritsani ajratib olamiz

$$A|B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 & \vdots & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A|B &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \vdots & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{14}{5} & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & \vdots & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \vdots & -\frac{13}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & \vdots & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{14} & -\frac{2}{7} & \vdots & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & \vdots & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{56} & \vdots & -\frac{53}{56} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \vdots & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sistema zinapoya ko‘rinishiga keldi:

$$\begin{cases} x_1 & + \frac{3}{7}x_4 = \frac{3}{7}, \\ x_2 & + \frac{3}{56}x_4 = -\frac{53}{56}, \\ x_3 & + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Bu yerda x_1, x_2 va x_3 o'zgaruvchilarni bazis sifatida qabul qilamiz, chunki sistema asosiy matritsasining rangi 3 ga teng va x_1, x_2 va x_3 o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Bu birlik determinant sistema asosiy matritsasining bazis minorlaridan bo'ladi. Erkli o'zgaruvchi bo'lib esa x_4 xizmat qiladi.

Oxirgi sistemadan

Oxirgi sistemadan

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4, \\ x_2 = -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4, \\ x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4. \end{cases}$$

ega bo'lamiz. Shunday qilib, berilgan sistemaning umumiy yechimini

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4 \\ -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4 \end{pmatrix}.$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin.

5-Amaliy mashg'ulot. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli. Kramer qoidasi.

Bizga ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

(1)

Sistemadan x_1 o'zgaruvchini topish uchun sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga ikkinchi tenglamasini esa $-a_{12}$ ga ko'paytirib, ularni qo'shsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

Xuddi shu amalni x_2 o'zgaruvchini topish uchun ham qo'llaymiz va natijada

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1$$

ni hosil qilamiz. So'ngra

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

deb faraz qilib,

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (4)$$

ni topamiz. Bundan ko'rinib turibdiki, agar ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlaridan tuzilgan determinant noldan farqli bo'lsa, u holda (2) sistemaning yechimini quyidagi tartibda topamiz:

1) barcha noma'lumlarni kasr ko'rinishida ifodalash mumkin. Bu holda kasrlarning maxrajlari bir xil bo'lib, u (3) determinantga teng;

2) $x_i = (i=1,2)$ noma'lumning surati esa (3) determinantda i - ustunni, ya'ni qidirilayotgan noma'lumning koeffitsiyentlari ustuni (2) sistemaning ozod hadlaridan iborat ustun bilan almashtirishdan hosil bo'ladigan determinantdan iborat bo'ladi.

Bu keltirgan qoida ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning **Kramer qoidasi** deb ataladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{bo'lsa, u holda}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \quad \text{bo'ladi.}$$

1-Misol. Ushbu sistemani Kramer koidasiga asoslanib yeching: $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40. \end{cases}$

Yechilishi.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23 \neq 0, & x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-115}{-23} = 5; \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 40 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 80 = -115; & y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{92}{-23} = -4; \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 40 \end{vmatrix} = 120 - 28 = 92. & \text{Javob: } & x = 5; \quad y = -4. \end{aligned}$$

Matrisalar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga o'tamiz.
tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

belgilashlarni kiritamiz. Endi yuqoridagi sistemani matrisalarni ko'paytirish qoidasidan foydalanib,

$$AX = B$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\det A \neq 0$ bo'lsa, teskari matrisa A^{-1} mavjud va $A^{-1}AX = A^{-1}B$ hosil bo'ladi. Shunday qilib, noma'lum X matrisa $A^{-1}B$ matrisaga teng bo'ladi, yaxni

$$X = A^{-1}B.$$

Bu (1) tenglamalar sistemasini yechishning matrisaviy yozuvini bildiradi.

2-misol. Matrisalar yordamida ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

Yechish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisalar yordamida berilgan tenglamalar sistemasini

$$AX = B \quad (**)$$

ko'rinishda yozamiz. Endi A matrisaning determinantini hisoblaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 2.$$

A matrisaning determinanti 0 dan farqli bo'lganligi uchun, unga teskari yagona A^{-1} matrisa mavjud va tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi. Endi A^{-1} teskari matrisani topish uchun Δ determinant elementlarining hamma algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Teskari A^{-1} matrisani topish formulasiga asosan,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

(**) tenglikning ikki tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytirsak, $A^{-1}AX = A^{-1}B$ yoki $X = A^{-1}B$ bo'lib, yaxni

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ -2,5 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + (-1,5) \cdot 2 \\ 0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 4 + 0,5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tenglik hosil bo'ladi.

Shunday qilib, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ yoki $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$.

6-Amaliy. Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo va operatorlar.

3.3. Chiziqli fazo

1-ta'rif. Agar elementlari ixtiyoriy tabiatli bo'lgan L to'plam berilgan va bu to'plam elementlari orasida qo'shish va songa ko'paytirish amallari kiritilgan, ya'ni

1) ixtiyoriy $x \in L$ va $y \in L$ elementlar juftiga x va y elementlarning yig'indisi, deb ataluvchi yagona $z = x + y \in L$ element mos qo'yilgan;

2) $x \in L$ element va $\lambda \in K$ (K -haqiqiy yoki kompleks sonlar to'plami) songa x vektorning λ songa ko'paytmasi deb ataluvchi yagona $z = \lambda x \in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, aniqlangan bu qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi 8 ta aksiomani bajarsa, u holda L to'plam chiziqli (yoki vektor) fazo deyiladi:

1. Qo'shish kommutativ, $x + y = y + x$;
2. Qo'shish assotsiativ, $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. L to'plamda barcha x elementlar uchun $x + \theta = x$ shartni qanoatlantiradigan nol element θ mavjud;
4. L to'plamda har qanday x element uchun $x + (-x) = \theta$ shartni qanoatlantiradigan $-x$ qarama-qarshi element mavjud;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
8. $1 \cdot x = x$.

Bundan keyin biz chiziqli fazo elementlarini vektorlar deb aytamiz.

Chiziqli fazoni aniqlovchi aksiomalardan, quyidagi xossalarni ajratish mumkin:

- 1) Har qanday chiziqli fazo uchun yagona θ -nol vektor mavjud.
- 2) Har qanday chiziqli fazoda har bir x vektor uchun unga qarama-qarshi bo'lgan yagona $(-x)$ vektor mavjud.
- 3) Har qanday chiziqli fazoda har bir vektor uchun $0 \cdot x = 0$ tenglik o'rinli.

Izoh. $y - x$ vektorlar ayirmasi deb, y va $-x$ vektorlar yig'indisi tushuniladi.

2-ta'rif. L chiziqli fazodan olingan $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar va $\lambda_i \in R, (i = 1 \dots n)$ sonlar yordamida qurilgan $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \dots + \lambda_n x_n$ ifodaga $x_1, x_2, \dots, x_n$ - elementlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

3-ta'rif. Agar $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda y element $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ koeffitsiyentlardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lganda

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \theta$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar chiziqli bog'liq deyiladi.

Agar

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \theta$$

tenglik $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ koeffitsiyentlardan barchasi nolga teng bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, u holda $x_1, x_2, \dots, x_n$ - elementlar chiziqli erkli deyiladi. Bu yerda, θ -chiziqli fazoning nol elementi.

5-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda n ta chiziqli erkli elementlar mavjud bo'lib, har qanday $n + 1$ ta element chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda L chiziqli fazoning o'lchovi n ga teng deyiladi.

6-ta'rif. n o'lchovli L chiziqli fazoda har qanday n ta chiziqli erkli vektorlar sistemasi bu fazoning bazisi deyiladi.

Odatda bazis vektorlar sistemasi $e_1, e_2, \dots, e_n$ kabi belgilanadi.

Teorema. n o'lchovli L chiziqli fazoning har bir elementi bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida bir qiymatli yoziladi.

$x = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n$ tenglik $x \in L$ elementning $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazis vektorlari bo'yicha yoyilmasi deyiladi, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlarga esa x elementning bu bazis vektorlar bo'yicha koordinatalari deyiladi.

7-ta'rif. Agar chiziqli fazo cheksiz sondagi chiziqli erkli vektorlar sistemasiga ega bo'lsa, u holda bunday chiziqli fazoga cheksiz o'lchovli chiziqli fazo deyiladi.

8-ta'rif. L chiziqli fazoning V qism to'plamining o'zi ham L da aniqlangan elementlarni qo'shish va elementlarni songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo bo'lsa, u holda V fazo L fazoning chiziqli qism fazosi deyiladi.

Teorema. L fazoning bo'sh bo'lmagan V qism to'plami uning chiziqli qism fazosi bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi yetarli:

1. Agar x va y vektorlar V ga tegishli bo'lsa, u holda $x+y$ vektor ham V ga tegishli bo'lishi;
2. Agar x vektor V ga tegishli bo'lsa, u holda αx vektor ham α sonning istalgan qiymatida V ga tegishli bo'lishi.

9-ta'rif. n o'lchovli haqiqiy L chiziqli fazoning har bir x va y vektorlar juftligi uchun mos ravishda skalyar ko'paytma, deb ataluvchi (x, y) haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa, L chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan, deyiladi:

- 1) $(x, x) \geq 0$, ixtiyoriy $x \in L$ uchun $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $(x, y) = (y, x)$;
- 3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$;
- 4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

10-ta'rif. Agar n o'lchovli haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, bu fazo n o'lchovli Yevklid fazosi deyiladi va E^n ko'rinishda belgilanadi.

Misol. Korxona jadvalda ko'rsatilgan miqdorda 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi.

Mahsulot turlari	B_1	B_2	B_3	B_4
Mahsulot miqdori (birlik)	50	80	20	120
Bir birlik mahsulot uchun xomashyo sarfi	7	3,5	10	4
Mahsulot hajmining o'zgarishi	+5	-4	-2	+10

Mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan umumiy xomashyo miqdori va mahsulot hajmining o'zgarishidagi uning o'zgarishini toping.

Yechish. Umumiy xomashyo miqdori S $x = (50; 80; 20; 120)$ va $y = (7; 3,5; 10; 4)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi bo'ladi:

$$S = (x, y) = 50 \cdot 7 + 80 \cdot 3,5 + 20 \cdot 10 + 120 \cdot 4 = 1310 (kg)$$

Skalyar ko'paytmaning xossasidan, umumiy xomashyo miqdorining o'zgarishini topamiz.

$$\Delta S = (x + \Delta x, y) - (x, y) = (\Delta x, y) = +5 \cdot 7 - 4 \cdot 3,5 - 2 \cdot 10 + 10 \cdot 4 = 41 (kg).$$

Har qanday n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazoda skalyar ko'paytmani aniqlash orqali uni Yevklid fazosiga aylantirish mumkin.

Yevklid fazosida x vektorning uzunligi (normasi) deb uning skalyar kvadratidan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Vektorning uzunligi uchun quyidagi xossalar o'rinalidir:

1. $|x| = 0$ bo'ladi faqat va faqat $x = 0$ bo'lsagina;
2. $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$, bunda $\lambda \in R$;
3. $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ (Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi);
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (uchburchak tengsizligi).

Noldan farqli vektorlardan tashkil topgan vektorlar sistemasidagi vektorlarning har qanday ikki jufti o'zaro ortogonal bo'lsa, u holda sistema ortogonal vektorlar sistemi deb ataladi.

Teng o'lchovli $a_1, a_2, \dots, a_k$ chiziqli erkli vektorlar sistemasini ustida ortogonal vektorlar sistemasini qurish, ya'ni uni $b_1, b_2, \dots, b_k$ ortogonal vektorlar sistemi bilan almashtirish mumkin. Buning uchun Shmidt formulalaridan foydalanamiz:

1) $b_1 = a_1$, deb olib keyingi qadamda

$$2) b_t = a_t - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{(b_i, a_t)}{(b_i, b_i)} b_i, \quad t = 2, 3, \dots, k$$

Masalan, $\vec{a}_1(1, 1, 1)$, $\vec{a}_2(0, 1, 1)$, $\vec{a}_3(0, 0, 1)$ vektorlar sistemasini ustida ortogonal vektorlar sistemasini quramiz.

Birinchi navbatda $\vec{a}_1(1, 1, 1)$, $\vec{a}_2(0, 1, 1)$, $\vec{a}_3(0, 0, 1)$ vektorlar sistemasining rangini aniqlab olamiz

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\text{rang}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 3$ bo'lganligi sababli bu sistemadagi vektorlar chiziqli erkli. Sistemani ortogonal sistemaga aylantirish uchun Shmidt formulasidan foydalanamiz:

$$1) \vec{b}_1 = \vec{a}_1(1, 1, 1);$$

$$2) \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{(\vec{b}_1, \vec{a}_2)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \vec{b}_1 = (0, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right);$$

$$3) \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{(\vec{b}_1, \vec{a}_3)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \vec{b}_1 - \frac{(\vec{b}_2, \vec{a}_3)}{(\vec{b}_2, \vec{b}_2)} \vec{b}_2 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Berilgan vektorlar sistemasi ustida qurilgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirish uchun $\vec{c}_1 = \vec{b}_1(1, 1, 1);$

$\vec{b}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ni unga kollinear bo'lgan $\vec{c}_2(-2, 1, 1) = \frac{1}{3}\vec{b}_2$ bilan;

$\vec{b}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ni esa unga kollinear bo'lgan $\vec{c}_3(0, -1, 1) = \frac{1}{2}\vec{b}_3$ bilan

almashtirib va $\vec{c}_1 = \vec{b}_1(1, 1, 1)$ belgilash kiritib: $\vec{c}_1(1, 1, 1), \vec{c}_2(-2, 1, 1), \vec{c}_3(0, -1, 1)$ ortogonal vektorlar sistemasini hosil qilamiz.

Nol bo'lmagan b vektorning birlik vektori, deb $\frac{b}{|b|}$ vektorga aytiladi.

Har bir vektori birlik vektorga keltirilgan ortogonal sistemaga ortonormal vektorlar sistemasi deyiladi.

Yuqoridagi misolda topilgan ortogonal $\vec{c}_1(1, 1, 1), \vec{c}_2(-2, 1, 1), \vec{c}_3(0, -1, 1)$ vektorlar sistemasini ortonormal vektorlar sistemasiga keltiramiz.

$$\frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}}(-2, 1, 1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}}(0, -1, 1) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

n o'lchovli Yevklid fazosida $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar $i \neq j$ da $(e_i, e_j) = 0$ bo'lsa ortogonal bazis, $i = 1, 2, \dots, n$ da $|e_i| = 1$ bo'lsa ortonormallangan bazis tashkil qiladi.

$\vec{b}_3 = \left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ni esa unga kollinear bo'lgan $\vec{c}_3(0, -1, 1) = \frac{1}{2}\vec{b}_3$ bilan almashtirib va $\vec{c}_1 = \vec{b}_1(1, 1, 1)$ belgilash kiritib: $\vec{c}_1(1, 1, 1)$, $\vec{c}_2(-2, 1, 1)$, $\vec{c}_3(0, -1, 1)$ ortogonal vektorlar sistemasini hosil qilamiz.

Nol bo'lmagan b vektorning birlik vektori, deb $\frac{b}{|b|}$ vektorga aytiladi.

Har bir vektori birlik vektorga keltirilgan ortogonal sistemaga ortonormal vektorlar sistemasi deyiladi.

Yuqoridagi misolda topilgan ortogonal $\vec{c}_1(1, 1, 1)$, $\vec{c}_2(-2, 1, 1)$, $\vec{c}_3(0, -1, 1)$ vektorlar sistemasini ortonormal vektorlar sistemasiga keltiramiz.

$$\begin{aligned}\frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} &= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}}(-2, 1, 1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|} &= \frac{1}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}}(0, -1, 1) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

n o'lchovli Yevklid fazosida $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar $i \neq j$ da $(e_i, e_j) = 0$ bo'lsa ortogonal bazis, $i = 1, 2, \dots, n$ da $|e_i| = 1$ bo'lsa ortonormallangan bazis tashkil qiladi.

3.4. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari

Matritsalar algebrasining asosiy tushunchalaridan biri – chiziqli operatorlar tushunchasidir. Faraz qilaylik bizga L , L_1 chiziqli fazolar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar biror $\mathcal{A}$ qoida yoki qonun bo'yicha har bir $x \in L$ elementga $y \in L_1$ element mos qo'yilgan bo'lsa, u holda L fazoni L_1 fazoga o'tkazuvchi $\mathcal{A}$ operator (almashtirish, akslantirish) aniqlangan deyiladi va $y = \mathcal{A}(x)$ ko'rinishda belgilanadi.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in L$, $\lambda \in R$ uchun:

- 1) $\tilde{A}(x + y) = \tilde{A}(x) + \tilde{A}(y)$ (operatorning additivligi);
- 2) $\tilde{A}(\lambda x) = \lambda \tilde{A}(x)$ (operatorning bir jinsliligi) munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda bu operator chiziqli operator deyiladi.

$$\tilde{A}(ka_i) = \tilde{A}(kx_i, ky_i) = (kx_i, ky_i, kx_i + ky_i) = k(x_i, y_i, x_i + y_i) = k\tilde{A}(a_i).$$

$y = \overset{\circ}{A}(x) \in L_1$ element $x \in L$ elementning aksi, $x \in L$ elementning o'zi

Teorema. Har bir $\bar{A}: L^n \rightarrow L^n$ chiziqli operatorga berilgan bazisda

n -tartibli matritsa mos keladi va aksincha har bir n -tartibli matritsaga n o'lchovli chiziqli fazoni, n o'lchovli chiziqli fazoga akslantiruvchi $\tilde{A}$ chiziqli operator mos keladi.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & L & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ M \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ M \\ y_n \end{pmatrix}$$

L fazoning barcha vektorlarini θ nol vektorga akslantiruvchi $\theta(x) = \theta$

Chiziqli operatorlar ustida bajariladigan amallar bilan tanishib

4-ta'rif. $(\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B})(x) = \overset{\circ}{A}(x) + \overset{\circ}{B}(x)$ tenglik bilan aniqlanadigan operatorni

$\hat{A}$, $\hat{B}$ operatorlarning yig'indisi deb ataladi.

$\hat{A} + \hat{B}$ operator chiziqlidir.

5-ta'rif. $(\tilde{A}\tilde{B})(x) = \tilde{B}(\tilde{A}(x))$ tenglik bilan aniqlanadigan, ya'ni $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ operatorlarni ketma-ket bajarishdan hosil bo'lgan $\tilde{A}\tilde{B}$ operator $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ operatorlarning ko'paytmasi deyiladi.

$\tilde{A}\tilde{B}$ operator chiziqlidir.

6-ta'rif. $(\alpha\tilde{A})(x) = \alpha(\tilde{A}(x))$ tenglik bilan aniqlanadigan $\alpha\tilde{A}$ operator $\tilde{A}$ operatorlarning α songa ko'paytmasi deyiladi.

$\alpha\tilde{A}$ operator chiziqlidir.

Agar $\tilde{A}$ chiziqli operator va λ son uchun

$$\tilde{A}(x) = \lambda x$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda λ son $\tilde{A}(x)$ operatorning xos soni, unga mos x vektorga esa operatorning xos vektori deb ataladi.

Yuqoridagi tenglikni operatorning matritsasidan foydalanib yozsak, u holda quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= \lambda \cdot x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= \lambda \cdot x_2 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= \lambda \cdot x_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Bundan

$$[A - \lambda E] \cdot X = 0.$$

Ma'lumki bir jinsli sistema har doim nol yechimga ega. Sistema nolmas yechimga ega bo'lishi uchun esa uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan determinantning qiymati nolga teng bo'lishi zarur va etarli, ya'ni

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

$|A - \lambda E|$ determinant λ ga nisbatan n darajali ko'phaddir. Bu ko'phad $\tilde{A}(x)$ operatorning xarakteristik ko'phadi deb ataladi. (6) tenglama $\tilde{A}(x)$ operatorning xarakteristik tenglamasi deyiladi. Chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi bazisni tanlashga bog'liq emas.

Xalqaro savdo modeli. Ko'pgina iqtisodiy masalalarning matematik modeli chiziqli modellarga keltirilishi sababli, chiziqli fazo elementlari iqtisodiyotda o'zining muhim o'rnini egallagan.

Matritsaning xos vektori va xos qiymatini topishga olib keladigan iqtisodiy jarayonning matematik modeli sifatida xalqaro savdo modelini keltirish mumkin.

$S_1, S_2, \dots, S_n$ n -ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1, x_2, \dots, x_n$ larga teng bo'lsin. a_{ij} - S_j -mamlakatning S_i -mamlakatdan sotib olgan tovarlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan tovar xarid uchun sarf bo'ladi deb hisoblaymiz, ya'ni

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Quyidagi matritsani qaraylik

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi deb nomlanadi. Istalgan S_i ($i = \overline{1, n}$) mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo'lgan tushimi $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo'lishi uchun, har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo'lishi kerak, ya'ni har bir mamlakat savdosidan hosil bo'lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo'lmasligi kerak. Ya'ni

$$P_i \geq x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Agar $P_i > x_i$ deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosil qilamiz,

$$P_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k > x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

bu yerdan

$$\sum_{i=1}^n P_i > \sum_{i=1}^n x_i,$$

ya'ni,

$$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right) x_k = \sum_{k=1}^n x_k > \sum_{k=1}^n x_k$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak $P_i \geq x_i$ tengsizlik o'rniga $P_i = x_i$ tenglik o'rinli bo'lishligi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda

foyda ko'rolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi uchun $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorni

kiritsak u holda $P_i = x_i$, ya'ni $\sum_{i=1}^n a_{ii} x_i = x_i$, $i = \overline{1, n}$ tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $AX = X$, ya'ni, qaralayotgan masala A -matritsaning $\lambda = 1$ xos qiymatiga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

Misollar

1-misol. R^3 fazoda $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazisda chiziqli operator matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsin. $x = 4e_1 - 3e_2 + e_3$ vektorning $y = \tilde{A}(x)$ aksini toping.

Yechish. Yuqorida qayd qilingan formulaga ko'ra

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Demak, $y = 10e_1 - 13e_2 - 18e_3$.

2-misol. $\{e_1, e_2\}$ bazisda chiziqli operator matritsasi $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

berilgan bo'lsin. Yangi $\begin{cases} e_1^* = e_1 - 2e_2 \\ e_2^* = 2e_1 + e_2 \end{cases}$ bazisdagi chiziqli operator matritsasini toping.

Yechish. O'tish matritsasi $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, unga teskari matritsa

$C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Demak, yangi bazisda operatorning matritsasi quyidagi

ko'rinishda bo'ladi:

$$A^* = C^{-1}AC = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

3-misol. $\tilde{A}(x) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, -x_1 - 2x_3)$ operatorning xos soni va xos vektorlarini toping.

Yechish. Avval $\tilde{A}$ operatorning matritsasini tuzib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berilgan operatorga mos keluvchi bir jinsli tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - (3+\lambda)x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - (2+\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Bundan xarakteristik ko'phadni topamiz:

$$p(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3.$$

Demak, xos son $\lambda = -1$ ekan. Bu sonni sistemaga qo'ysak,

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Bundan $x_1 = x_2$, $x_1 = -x_3$. Demak, $X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4-misol. Uch mamlakatdagi savdoning strukturali matrisasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Balanslangan savdo uchun bu mamlakatlarning milliy daromadlari nisbatini aniqlang.

Yechish. $(A - E)x = 0$ tenglamani yechib yoki

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & -0,6 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & -0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemani Gauss metodida yechib, $\lambda = 1$ xos qiymatga mos x xos vektorni topamiz. Demak $x = (c; 2c; c)$. Olingan natijadan balanslangan savdo uchun bu uch mamlakatlarning milliy daromadlari nisbati 1:2:1 bo'ladi.

7-Amaliy mashg'ulot

Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo va ularning xossalari. Kvadratik formalar.

1-ta'rif. n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo deb, mumkin bo'lgan barcha n ta haqiqiy sonlarning tartiblangan tizimlari to'plamiga aytiladi. R^n yozuv bilan belgilanadi.

Misol. Korxona jadvalda ko'rsatilgan miqdorda 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi.

Mahsulot turlari	B_1	B_2	B_3	B_4
Mahsulot miqdori (birlik)	50	80	20	120
Bir birlik mahsulot uchun xomashyo sarfi	7	3,5	10	4
Mahsulot hajmining o'zgarishi	+5	-4	-2	+10

Mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan umumiy xomashyo miqdori va mahsulot hajmining o'zgarishidagi uning o'zgarishini toping.

Yechish. Umumiy xomashyo miqdori S $x = (50; 80; 20; 120)$ va $y = (7; 3,5; 10; 4)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi bo'ladi:

$$S = (x, y) = 50 \cdot 7 + 80 \cdot 3,5 + 20 \cdot 10 + 120 \cdot 4 = 1310 (kg)$$

Skalyar ko'paytmaning xossasidan, umumiy xomashyo miqdorining o'zgarishini topamiz.

$$\Delta S = (x + \Delta x, y) - (x, y) = (\Delta x, y) = +5 \cdot 7 - 4 \cdot 3,5 - 2 \cdot 10 + 10 \cdot 4 = 41 (kg).$$

Xalqaro savdo modeli. Ko'pgina iqtisodiy masalalarning matematik modeli chiziqli modellarga keltirilishi sababli, chiziqli fazo elementlari iqtisodiyotda o'zining muhim o'rnini egallagan.

Matritsaning xos vektori va xos qiymatini topishga olib keladigan iqtisodiy jarayonning matematik modeli sifatida xalqaro savdo modelini keltirish mumkin.

4-misol. Uch mamlakatdagi savdoning strukturali matrisasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Balanslangan savdo uchun bu mamlakatlarning milliy daromadlari nisbatini aniqlang.

Yechish. $(A - E)x = 0$ tenglamani yechib yoki

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & -0,6 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & -0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemani Gauss metodida yechib, $\lambda = 1$ xos qiymatga mos x xos vektorni topamiz. Demak $x = (c; 2c; c)$. Olingan natijadan balanslangan savdo uchun bu uch mamlakatlarning milliy daromadlari nisbati 1:2:1 bo'ladi.

Kvadratik formalar.

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \quad (1)$$

$$A = \|a_{ik}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ik} = a_{ki} \quad (2)$$

$$\Phi = XAX' \quad (3)$$

1-Misol. Kvadratik formani matritsa ko'rinishda yozing.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

Javob:

$$\Phi = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2-misol. $\Phi(x_1, x_2, x_3) = -6x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$

Chiziqli tenglamalar sistemasini iqtisodiy masalalarga tadbir'i.

1-misol. Ikkita fermer birgalikda jami 630 sentner hosil yig'ishdi. Birinchi fermerning yeri 45 gektar, ikkinchisidiki esa 36 gektar bo'lib, birinchi fermer har bir gektardan ikkinchi fermerga nisbatan 5sentner ko'p hosil olgan bo'lsa, ularning har biri o'z yerlaridan gektariga qanchadan hosil olishgan?

Yechish. Birinchi fermerning bir gektardan olgan hosilini x sentner, ikkinchi fermerning bir gektardan olgan hosilini y sentner deb belgilaymiz. U holda

$$\begin{cases} 45x + 36y = 630, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemani Kramer formulalaridan foydalanib yechamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 45 & 36 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -45 - 36 = -81,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 630 & 36 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -630 - 36 \cdot 5 = -630 - 180 = -810$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 45 & 630 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 45 \cdot 5 - 630 = 225 - 630 = -405$$

(4.6) formulalarga asosan:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-810}{-81} = 10, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-405}{-81} = 5.$$

Demak birinchi fermerning bir gektardan olgan hosili 10 sentner, ikkinchi fermerning bir gektardan olgan hosili esa 5 sentner ekan.

5-misol. Javohir oltita daftar, ikkita ruchka va bitta chizg'ich uchun 7800 so'm sarfladi. Jasur xuddi shunaqa to'rtta daftar, bitta ruchka va ikkita chizg'ich uchun 6100 so'm, Behruz esa 8 ta daftar, ikkita ruchka va uchta chizg'ich uchun 11400 so'm sarfladi. Daftar, ruchka hamda chizg'ichning narxlari aniqlansin.

Yechish. Daftar, ruchka hamda chizg'ichlarning narxlarini mos ravishda x, y, z lar orqali belgilaymiz. U holda masalani yechish

$$\begin{cases} 6x + 2y + z = 7800, \\ 4x + y + 2z = 6100, \\ 8x + 2y + 3z = 11400. \end{cases}$$

sistemani yechishga keladi. Bu sistemaning yechimini Kramer formulalaridan foydalanib topamiz

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 6(-1) - 2(-4) + 1 \cdot 0 = 2 \neq 0$$

Sistemaning asosiy determinantidagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirsak

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7800 & 2 & 1 \\ 6100 & 1 & 2 \\ 11400 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 78 & 2 & 1 \\ 61 & 1 & 2 \\ 114 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda birinchi ustundan umumiy ko'paytuvchi 100 determinant belgisidan chiqarildi. So'nggi determinantni birinchi ustun elementlari boyicha yoyib Δ_x ni hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \Delta_x &= 100 \cdot \left(78 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 61 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 114 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 100 \cdot (-78 - 61 \cdot 4 + 114 \cdot 3) = 100 \cdot (-78 - 244 + 342) = 100 \cdot 20 = 2000 \end{aligned}$$

Sistemaning asosiy determinanti Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirsak

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 7800 & 1 \\ 4 & 6100 & 2 \\ 8 & 11400 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 100 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 78 & 1 \\ 2 & 61 & 2 \\ 4 & 114 & 3 \end{vmatrix}$$

determinant hosil bo'ladi. Bu yerda determinantning birinchi ustunidan umumiy ko'paytuvchi 2, ikkinchisidan 100 determinant belgisidan chiqarildi. Oxirgi determinantni ikkinchi ustun elementlari boyicha yoyib Δ_y ni hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \Delta_y &= 200 \cdot \left(-78 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 61 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 114 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 200 \cdot (-78 \cdot (-2) + 61 \cdot 5 - 114 \cdot 4) = 200 \cdot (156 + 305 - 456) = 200 \cdot 5 = 1000 \end{aligned}$$

Shuningdek

$$\begin{aligned} \Delta_z &= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 7800 \\ 4 & 1 & 6100 \\ 8 & 2 & 11400 \end{vmatrix} = 2 \cdot 100 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 78 \\ 2 & 1 & 61 \\ 4 & 2 & 114 \end{vmatrix} = 2 \cdot 100 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 78 \\ 2 & 1 & 61 \\ 2 & 1 & 57 \end{vmatrix} = \\ &= 400 \cdot \left(78 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 61 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 57 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 400 \cdot (-78 \cdot 0 - 61 \cdot (-1) + 57 \cdot (-1)) = 400 \cdot (0 + 61 - 57) = 400 \cdot 4 = 1600 \end{aligned}$$

ga ega bo'lamiz.

Kramer formulalari (4.15) dan foydalanib

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2000}{2} = 1000 \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1000}{2} = 500 \\ z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1600}{2} = 800 \end{aligned}$$

yechimni hosil qilamiz.

Shunday qilib daftar 1000 so'm, ruchka 500 so'm va chizg'ich 800 so'm turar ekan.

Masala. A va B mahsulotlar plastik, po'lat va shishadan tayyorlanadi. Har bir mahsulotga qancha xomashyo sarflanishi 1.1-jadvalda ko'rsatilgan.

1.1-jadval

	plastik	po'lat	shisha
A mahsulot	3	1	0.5
B mahsulot	4	0.5	2

9

Firmaga xomashyo ikkita X, Y zavoddan keltirilgani uchun transport xarajatlari har bir xomashyo uchun turlicha bo'lib, u 1.2-jadvalda keltirilgan.

1.2-jadval

	X zavod	Y zavod
Plastik	10	9
Po'lat	22	26
Shisha	14	14

Berilgan ma'lumotlardan foydalanib, har bir mahsulotni har bir zavodda ishlab chiqarish uchun sarflangan xarajatni toping.

Yechish. Har bir mahsulotga zarur bo'lgan xomashyo miqdorini ifodalovchi

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0.5 \\ 4 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

ishlab chiqarish matritsasini va birlik xarajatlarni ifodalovchi

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 22 & 26 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$$

birlik xarajatlar matritsasini qaraymiz. A mahsulotning X zavoddagi umumiy xarajatlarini topish uchun A mahsulot uchun zarur bo'lgan xomashyo birliklarini xomashyolarning X zavoddagi mos xarajat birliklariga ko'paytirib, o'zaro qo'shish kerak. Matritsalar ko'paytmasi PC ning a_{11} elementi bu xarajatni beradi.

$$PC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0.5 \\ 4 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 22 & 26 \\ 14 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 60 \\ 79 & 77 \end{pmatrix}$$

Ko'paytmaning a_{12} elementi A mahsulotning Y zavoddagi xarajatlarini beradi. Ikkinchi satrning elementlari B mahsulotning X va Y zavodlardagi xarajatlarini beradi.

Chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladigan ba'zi sodda masalalarni ko'rib chiqamiz.

Masala. Bir xil o'lchovli yassi materiallardan A, B va C turdagi qirqimlar tayyorlash kerak. A turdagi qirqimdan 360, B turdan 300 va C turdan 675 dona tayyorlash kerak. Materialni qirqishning uch usuli mavjud. Har bir materialdan tayyorlanadigan qirqimlar soni jadvalda keltirilgan.

1.3-jadval

Qirqim turlari	Qirqish usullari		
	1	2	3
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Masala shartini qondirishning matematik ifodasini aniqlang.

Yechish. x , y , z orqali materiallar sonini mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi qirqish usullarida bajarishni belgilaymiz. U holda x sondagi materialdan A turdagi qirqimni birinchi tur qirqish usulida $3x$ dona, y dona materialdan ikkinchi qirqish usulida $2y$ dona va uchinchi qirqish usulida esa z dona qirqim hosil bo'ladi.

Rejalashtirilgan A turdagi qirqimni tayyorlaganda $3x + 2y + z$ yig'indi 360 ga teng bo'lishi kerak, ya'ni:

$$3x + 2y + z = 360.$$

Shuningdek, quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$x + 6y + 2z = 300$$

$$4x + y + 5z = 675.$$

Bu sistemaning yechimini A, B va C turdagi qirqimlarni hosil qilish uchun nechta materialni birinchi, nechtasini ikkinchi va nechtasini uchinchi usulda qirqish lozimligini aniqlaydi. Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 3 & 2 & 1 & 360 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -16 & -5 & -540 \\ 0 & -7 & 2 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & -14 & 4 & 30 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 0 & -67 & -4020 \end{pmatrix}.$$

Demak, sistema quyidagiga teng kuchli:

$$x + 6y + 2z = 300,$$

$$2y + 9z = 570,$$

$$-67z = -4020.$$

Bu sistemani yechib $z = 60$; $y = 15$; $x = 90$ qiymatlarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, 90 ta materialni birinchi usulda, 15 ta materialni ikkinchi usulda va 60 materialni uchunchi usulda qirish kerak ekan.

Leontyev modeli (Balans modeli)

Masala. Biz iqtisodiyotning qishloq xo'jalik mahsulotlari, sanoat mollari va yoqilg'i asoslangan sodda modelini ko'rib chiqamiz (1.4-jadval).

1.4-jadval

	Qishloq xo'jalik mahsulotlari	Sanoat mollari	Yoqilg'i
Qishloq xo'jalik mahsulotlari	0,5	0,1	0,1
Sanoat mollari	0,2	0,5	0,3
Yoqilg'i	0,1	0,3	0,4

Birinchi ustun bir birlik qishloq xo'jalik mahsulotini ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan qishloq xo'jalik mahsulotlari, sanoat mollari va yoqilg'i birliklarini ifodalaydi. Masalan, bir birlik qishloq xo'jalik mahsuloti uchun 0,1 birlik yoqilg'i sarflanadi.

Ikkinchi ustun bir birlik sanoat mollari ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan birliklarni, uchunchi ustun bir birlik yoqilg'i uchun zarur bo'lgan birliklarni ifodalaydi.

Bir birlik yoqilg'i uchun sarflanadigan qishloq xo'jalik mahsulotlari, sanoat mollari va yoqilg'i birliklari (3-ustun) yig'indisi 1 ga teng emas. Buning sababi modelda barcha sohalar ishtirok etmayapti.

Bu yerda Leontyev (yoki texnologiya, iste'mol) matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$$

1) Berilgan jadval bo'yicha quyidagilarni aniqlaymiz.

a) 100 birlik sanoat mollarini ishlab chiqarish uchun necha birlik yoqilg'i sarflanadi?

b) Ishlab chiqarilayotgan qaysi mahsulot qolgan ikki mahsulotga eng kam bog'langan?

c) Agar yoqilg'ining narxi oshsa, qolgan ikki mahsulotning qaysi biriga ko'proq ta'sir etadi?

Yechish.

a) Ikkinchi ustundan ko'rinib turibdiki, 100 birlik sanoat mollarini ishlab chiqarish uchun 30 birlik yoqilg'i sarflanar ekan.

b) Ustunlarni ko'zdan kechirib, bir birlik qishloq xo'jalik mahsuloti uchun qolgan ikki mahsulotning $0,2 + 0,1 = 0,3$ birligi; bir birlik sanoat mollari uchun qolgan ikki mahsulotning 0,4 birligi; bir birlik yoqilg'i uchun qolgan ikki mahsulotning 0,4 birligi sarflanishini ko'rishimiz mumkin. Shuning uchun qishloq xo'jalik mahsulotlari qolgan ikkitasiga eng kam bog'liq bo'ladi.

c) yoqilg'i narxining oshishi yoqilg'ini kattaroq miqdorda ishlatuvchi sohalarga eng ko'p ta'sir etadi. Bir birlik qishloq xo'jalik mahsulotlari 0,1 birlik yoqilg'i, bir birlik sanoat mollari 0,3 birlik yoqilg'i, va bir birlik yoqilg'i 0,4 birlik yoqilg'i sarflaydi. Demak, yoqilg'i narxining oshishi qishloq xo'jalik mahsulotlari va yoqilg'iga eng ko'p ta'sir etar ekan.

2) Biz 85 birlik yakuniy qishloq xo'jalik mahsuloti, 65 birlik yakuniy sanoat mollari va yakuniy 0 birlik yoqilg'i olishimiz uchun yalpi ishlab chiqarilgan mahsulot qancha bo'lishi kerak?

Yechish. Iqtisodiyot uchun yalpi ishlab chiqarish ushbu

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

yalpi ishlab chiqarish vektori orqali ifodalanadi. Bu yerda x_1 — yalpi qishloq xo'jalik mahsulotlari, x_2 — yalpi sanoat mollari, x_3 — yalpi yoqilg'i.

Yakuniy mahsulot vektori

$$Y = \begin{pmatrix} 85 \\ 65 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ga teng.

$$E - A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.5 & -0.3 \\ -0.1 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Shuning uchun biz quyidagi sistemani yechishimiz kerak.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.5 & -0.3 \\ -0.1 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 65 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu yerdan:

qishloq xo'jalik mahsulotlari — $x_1 = 300$,

sanoat mahsulotlari — $x_2 = 400$,

yoqilg'i — $x_3 = 250$

ekanini topamiz.

Turli tarmoqlarning mahsulotlarini umumiy birlikda ifodalash uchun ishlab chiqarish va talabni dollarda ifodalaymiz.

Misol. Aytaylik, biz ish kuchi, transport va oziq-ovqat sanoati tarmoqlaridan tuzilgan iqtisodiyotni qarayapmiz. \$1 li ish kuchiga 40 sentli transport va 20 sentli oziq-ovqat; \$1 li transportga 50 sentli ish kuchi va 30 sentli transport; \$1 li oziq-ovqatga 50 sentli ish kuchi, 5 sentli transport, 35 sentli oziq-ovqat sarflansin. Qaralayotgan ishlab chiqarish davri uchun ish kuchiga talab \$10 000, transportga talab \$20 000 va oziq-ovqatga talab \$10 000. Iqtisodiyot uchun ishlab chiqarish vektorini toping.

Iste'mol matritsasi ushbu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.05 \\ 0.2 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

matritsa orqali ifodalanadi. Undan

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.4 & 0.7 & -0.5 \\ -0.2 & 0 & 0.65 \end{bmatrix}$$

ekanini topamiz. Endi $E - A$ matritsaga teskari matritsani topamiz.

$$(E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.82 & 1.3 & 1.5 \\ 1.08 & 2.2 & 1 \\ 0.56 & 0.4 & 2 \end{bmatrix}$$

Bu matritsaning barcha elementlari musbat bo'lgani uchun iqtisodiyot mahsuldor bo'ladi. Berilgan talab vektori uchun ishlab chiqarish vektori

$$X = (E - A)^{-1} F = \begin{bmatrix} 59,200 \\ 64,800 \\ 33,600 \end{bmatrix}$$

ga teng. Demak, \$59,200 ga teng ish kuchi, \$64,800 ga teng transport, \$33,600 ga teng oziq-ovqat ishlab chiqarilishi kerak ekan.

8-Amaliy mashg'ulot. Analitik geometriya elementlari.

To'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

to'g'ri chiziqlarning parallel sharti, $k_2 = k_1$ yoki $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti $k_2 \cdot k_1 = -1$ yoki $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$.

Misollar.

1. $(2;6)$ nuqtadan o'tuvchi va Ox o'q bilan $\arctg 5$ burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini tuzish uchun k va b ni hisoblash kerak. $k = \tg(\arctg 5) = 5$, b ni hisoblash uchun $y = kx + b$ tenglamaga k ning topilgan qiymatini hamda x va y o'zgaruvchilarning o'rniga berilgan nuqtaning koordinatalarini qo'yamiz. $6 = 5 \cdot 2 + b$ bu yerdan $b = -4$. Izlanayotgan tenglama $y = 5x - 4$.

2. $3x + 2y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqlarning Ox o'qqa og'ish burchagini hisoblang.

Yechish. $3x + 2y + 6 = 0$ tenglamani y ga nisbatan yechib, $y = -\frac{3}{2}x - 3$ ni hosil qilamiz, bu yerdan $k = -\frac{3}{2}$, biroq $k = \operatorname{tg}\alpha$; demak, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$. Jadvaldan $\alpha = 180^\circ - 56^\circ 19' = 123^\circ 41'$ ni topamiz.

3. To'g'ri chiziq Ox o'qdan 3 ga, Oy o'qdan 5 ga teng kesma ajratadi. Bu to'g'ri chiziqlarning tenglamasini tuzing

Yechish. Masala shartida $a = 3$ va $b = 5$. Bu qiymatlarni $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ to'g'ri chiziqlarning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasiga qo'yamiz: $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ ga ega bo'lamiz.

4. $M(-2; 4)$ nuqtadan $2x - 3y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lib o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamasini tuzing.

Yechish. $2x - 3y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentini topish uchun uning tenglamasini y ga nisbatan yechamiz: $y = \frac{2}{3}x + 2$, bu yerdan burchak koeffitsiyenti $k_1 = \frac{2}{3}$. Izlanayotgan to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyenti berilgan to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentiga teng bo'ladi, chunki to'g'ri chiziqlar parallel, ya'ni $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$. Izlanayotgan to'g'ri chiziq $M(-2; 4)$ nuqtadan o'tadi va $k_2 = \frac{2}{3}$ burchak koeffitsiyentga ega bo'ladi. Bu qiymatlarni berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamasiga qo'yib, $y - 4 = \frac{2}{3}(x + 2)$ yoki $2x - 3y + 16 = 0$ ni hosil qilamiz.

5. $M(2; 3)$ nuqtadan $5x - 4y - 20 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lib o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamasini tuzing.

Yechish. $5x - 4y - 20 = 0$ to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyenti $k_1 = \frac{5}{4}$. Izlanayotgan to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentini $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ formula bo'yicha topamiz: $k_2 = -\frac{1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$. $k_2 = -\frac{4}{5}$ ni va $M(2; 3)$ nuqtaning koordinatalarini to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasiga qo'yib, $y - y_0 = k(x - x_0)$ $y - 3 = -\frac{4}{5}(x - 2)$ yoki $4x + 5y - 23 = 0$ ni hosil qilamiz.

6. $3x-2y+7=0$, $6x-4y-9=0$, $6x+4y-5=0$, $2x+3y-6=0$ to'g'ri chiziqlar orasidan parallel va perpendikulyar to'g'ri chiziqlarni aniqlang.
7. $4x+3y-36=0$ to'g'ri chiziq, koordinata o'qlari bilan hosil qilgan uchburchakning yuzini toping.

9-Amaliy mashg'ulot.

Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti.

Agar har bir $n \in \mathbb{N}$ natural songa biror qonun-qoida asosida ma'lum bir $a_n \in \mathbb{R}$ haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, unda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sonli ketma-ketlik deb ataladi. Bunda a_i ($i \in \mathbb{N}$) sonli ketma-ketlikning hadlari, a_n esa umumiy hadi deyiladi.

Masalan,

$$1) \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, \quad \text{umumiy hadi} \quad a_n = \frac{1}{n};$$

$$2) \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots, \quad \text{umumiy hadi} \quad a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n};$$

$$3) \quad -1, 1, -1, -1, \dots, (-1)^n, \dots, \text{umumiy hadi} \quad a_n = (-1)^n;$$

1-Misol: $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ ketma-ketlikning limiti nol ekanligini ko'rsating.

$\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ soni topilishini ko'rsatish kerakki, berilgan ketma-ketlikni $n > n_0 \in \mathbb{N}$ hadidan keyingi barcha hadlari $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantirsin. $|\frac{1}{n} - 0| \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Agar natural n_0 soni $\frac{1}{\varepsilon}$ dan katta qilib olinsa unda barcha $n > n_0$ uchun $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bo'lib $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ tengsizligi bajariladi. Shunday qilib $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra $n_0 \in \mathbb{N}$ topiladiki, barcha $n > n_0$ uchun $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ tengsizligi bajariladi. Bu esa ta'rifga ko'ra 0 soni $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning limiti ekanligini bildiradi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Agar $\varepsilon = 0,1$ bo'lsa $n > 10$ bo'ladi.

2-Misol: $\{\frac{n}{n+1}\}$ ketma-ketlik limiti 1 ga tengligini ko'rsating.

Yechish: $x_n = \frac{n}{n+1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{n}{n+1}$ bu ketma-ketlik limiti 1 ga teng ekanligini ko'rsatish uchun $\forall \varepsilon > 0$ da ham $\exists N(\varepsilon)$ son mavjudki $n > N$ bo'lganda $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$ bo'lishini ko'rsatish kerak.

$$|\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{n-n-1}{n+1}| = |\frac{-1}{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow 1 < \varepsilon(n+1) \Rightarrow 1 - \varepsilon < \varepsilon \cdot n \Rightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \quad N = E(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon})$$

Demak, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham $\exists N = E(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon})$ soni topilar ekanki, $n > N = E(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon})$ bo'lganda ketma-ketlikning barcha elementlari uchun $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$ bo'lar ekan. Ta'rifga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\frac{n}{n+1}\} = 1$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\varepsilon = 0,1$ bo'lsin, u holda $N = E(\frac{1-0,1}{0,1}) = 9$. Demak, $n > 9$ bo'lganda $|\frac{n}{n+1} - 1| < 0,1$

bo'lar ekan. 9 sonidan kichik qiymatlar bu tengsizlik bajarilmaydi, ammo 10 dan boshlab bu tengsizlik bajariladi.

1) $n=10$ bo'lsin

$$|\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{10}{10+1} - 1| = |\frac{10}{11} - 1| = \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$$

$$2) n=8 \quad \text{bo'lsin, u holda } |\frac{8}{9} - 1| = \frac{1}{9} > \frac{1}{10}$$

3-Misol: Ushbu $x_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ ketma-ketlikni qaraylik. Har qanday a ning ixtiyoriy atrofi, jumladan $(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3})$ atrofi olinsa, ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lmaydi. Binobarin, a berilgan ketma-ketlikning limiti emas. Berilgan ketma-ketlik limitga ega emas.

4-Misol: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$ ekanligini isbot qiling va $N(\varepsilon)$ ni aniqlang.

Yechish: $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\exists N(\varepsilon)$ soni mavjud bo'lishi kerakki, barcha $n \geq N(\varepsilon)$ lar uchun $|x_n - a| = |\frac{2n+3}{2n+1} - 1| < \varepsilon$ tengsizligi bajarilsa, limit ta'rifiga ko'ra qo'yilgan masala hal bo'ladi. Yuqoridagi

tengsizlikni echsak, $\frac{2}{2n+1} < \varepsilon$ bundan $2n+1 > \frac{2}{\varepsilon}$ yoki $n > \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}$ bo'ladi, demak $N = N(\varepsilon) = \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}$.

Shuning uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$ bo'ladi

9-Test

№	Test topshirig'i	A	B	C	D
---	------------------	---	---	---	---

1	Agar shunday o'zgarma M soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x_n (n=1, 2, 3, \dots)$ uchun $x_n \leq M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ... deyiladi	yuqoridan chegaralangan	quyidan chegaralangan	chegaralangan	chegaralanmagan
2	Chegaralangan ketma-ketlikni ko'rsating.	$x_n = \frac{n^3+1}{n^3+2017}$	$x_n = \frac{n^4-1}{n^3-10^{2017}}$	$x_n = \frac{3^n+11}{n^3+2017}$	$x_n = (-1)^n n$
3	Chegaralanmagan ketma-ketlikni ko'rsating.	$x_n = (-1)^n n$	$x_n = \frac{2^n}{n!}$	$x_n = \frac{\log_2 n}{n}$	$x_n = n \cdot \ln \frac{n+1}{n}$
4	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$	0	1	-1	$\frac{\pi}{2}$
5	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \frac{1-3n^2}{n^2+2}$	-3	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
6	Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_{n_0} > M$ bo'lsa, ketma-ketlik ... deyiladi	yuqoridan chegaralanmagan	yuqoridan chegaralangan	quyidan chegaralangan	chegaralangan
7	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$	0	1	-1	∞

4-misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1}$

2-misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(3 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} - 4\right)$ ni hisoblang.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-7}{3n+2}$ ni hisoblang.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-2n+7}{3n^4+n^2-5n+9}$ ni hisoblang.

1. Quyidagi ketma-ketlikning oltinchi hadini toping:

$$a_n = \frac{3n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

A) $\frac{107}{37}$; B) $\frac{109}{37}$; C) $\frac{110}{37}$; D) $\frac{106}{37}$; E) $\frac{105}{37}$.

2. Quyidagi sonlardan qaysi biri $a_n = n^2 - 17n$ ketma-ketlikning hadi bo'la oladi?

A) -30; B) -72; C) -100; D) -15; E) -14.

3. Quyidagi ketma-ketlikning n -hadi formulasini toping.

$3 \cdot 2$; $5 \cdot 2^2$; $7 \cdot 2^3$; $9 \cdot 2^4$; $11 \cdot 2^5$; ...

A) $(2n - 1) \cdot 2^n$; B) $(2n + 1) \cdot 2^n$; C) $(2n + 1) \cdot 2^{n+1}$;

D) $(2n + 1) \cdot 2^{n-1}$; E) $(2n - 1) \cdot 2^{n+1}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{n+1}$ ni hisoblang.

A) 6; B) 4; C) $\frac{5}{2}$; D) 5; E) $\frac{3}{2}$.

Arifmetik progressiya

Agar $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ berilgan bo'lsa har qanday n uchun

$$a_{n+1} = a_n + d$$

tenglik bajariladi, bunda d — berilgan ketma-ketlik uchun o'zgar-mas biror son. Bu d son progressiyaning *ayirmasi* deyiladi. a_1 — birinchi hadi, a_n esa n hadi va u quyidagicha topiladi:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \quad (1)$$

Arifmetik progressiyaning dastlabki n ta hadining yig'indisi quyidagicha topiladi:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ yoki } S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \quad (2)$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \quad (3)$$

$$a_m + a_n = a_k + a_l \quad (4)$$

Geometrik progressiya

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \text{ yoki } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

$$b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}$$

$$b_m \cdot b_n = b_k \cdot b_l$$

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

1. Quyidagi ketma-ketlikning oltinchi hadini toping:

$$a_n = \frac{3n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

A) $\frac{107}{37}$; B) $\frac{109}{37}$; C) $\frac{110}{37}$; D) $\frac{106}{37}$; E) $\frac{105}{37}$.

2. Quyidagi sonlardan qaysi biri $a_n = n^2 - 17n$ ketma-ketlikning hadi bo'la oladi?

A) -30; B) -72; C) -100; D) -15; E) -14.

3. Quyidagi ketma-ketlikning n -hadi formulasini toping.

$3 \cdot 2$; $5 \cdot 2^2$; $7 \cdot 2^3$; $9 \cdot 2^4$; $11 \cdot 2^5$; ...

A) $(2n - 1) \cdot 2^n$; B) $(2n + 1) \cdot 2^n$; C) $(2n + 1) \cdot 2^{n+1}$;

D) $(2n + 1) \cdot 2^{n-1}$; E) $(2n - 1) \cdot 2^{n+1}$.

8. Agar ketma-ketlikda $a_1 = 9$, $a_{n+1} = 3a_n$ bo'lsa, uning oltinchi hadini toping.

A) 18; B) 81; C) 27; D) 927; E) 2187.

9. Sonli ketma-ketlik $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ rekurrent formula bilan berilgan. Agar $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ bo'lsa, ketma-ketlikning beshinchi hadini toping.

A) 5; B) -7; C) -5; D) 9; E) -9.

10. Agar 5; 9; 13; 17; ... arifmetik progressiyaning hadlarining yig'indisi 10877 ga teng bo'lsa, progressiyaning hadlari sonini toping.

A) 53; B) 61; C) 63; D) 73; E) 83.

10-Amaliy mashg'lulot. Bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o'rni.

1. Funksiyani aniqlanish sohasini toping

a) $f(x) = \frac{(3x+1)}{(x^2-1)}$

Yechish. $\frac{3x+1}{x^2-1}$ kasrning maxraji nolga teng bo'lmasa, kasr aniqlangan.

Shuning uchun funksiyaning aniqlanish sohasi $x^2 - 1 \neq 0, x \neq \pm 1$ shartni qanoatlantirishi kerak. Shunday qilib,

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

b) $f(x) = \sqrt{5-3x}$

Yechish. $f(x) = \sqrt{5-3x}$ ildiz osti musbat bo'lganda, funksiya aniqlangan.

$$5-3x \geq 0 \text{ bu yerdan } x \leq \frac{5}{3}, \text{ demak, } D(f) = (-\infty; \frac{5}{3}].$$

v) $f(x) = \ln(x+2)$

Yechish. $\ln(x+2)$ funksiya $x+2 > 0, x > -2$ shartda aniqlanadi. Demak,

$$D(f) = (-2; +\infty).$$

Funksiyani qiymatlar sohasini aniqlash:

2. $y = 1 + 2^{x+1}$ funksiyani qiyamatlar to'plamini toping.

Yechish. $y = 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ ko'rsatkichli funksiya, uning qiyamatlar to'plami $y \in (0; +\infty)$, demak berilgan funksiyani qiyamatlar to'plami $(1; +\infty)$ bo'ladi yoki berilgan funksiyani qiyamatlar to'plami uning teskari funksiyasi $x = \log_2(y-1) - 1$ ning aniqlanish sohasi $y > 1$ bilan ustma-ust tushadi, shuning uchun $E(y) = (1; +\infty)$.

3. Funksiyalarni juft toqligi:

3. $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ funksiyani juft yoki toqligini tekshiring.

$$\begin{aligned} \text{Yechish. } f(-x) &= \lg(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \lg \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1})}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \\ &= \lg \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-1} = -\lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x). \end{aligned}$$

4. $y = 2x + 1$ funksiya $(-\infty; +\infty)$ da monotonligini ko'rsating.

Yechish. $y = 2x + 1$ funksiya $(-\infty; +\infty)$ da o'suvchi, chunki $x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda $f(x_2) - f(x_1) = 2x_2 + 1 - (2x_1 + 1) = 2(x_2 - x_1) > 0$ bo'ladi va $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqadi.

5. Ushbu $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ funksiyani $X = [1, +\infty)$ to'plamda kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

Yechish. $[1, +\infty)$ da ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ bo'lsin deylik. Unda

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1 + x_1x_2^2 - x_2 - x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \\ &= \frac{x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2(x_2 - x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1 \cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} \end{aligned}$$

bo'lad. Keyingi tenglikda

$$x_1 - x_2 < 0, \quad 1 - x_1 \cdot x_2 < 0$$

bo'lishini e'tiborga olib,

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

ya'ni, $f(x_1) > f(x_2)$ ekanini topamiz. Demak,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Iqtisodiy masala.

F- doimiy harajatlari (ishlab chiqarilgan mahsulotning x birligi soniga bog'liq bo'lmagan).

Bir oyda qilinadigan harajat: $F=155$ ming so'm.

O'zgaruchan harajatlari funksiyasi:

$V(x) = 0.7x$ (ming so'm pul birligida) bir birlik mahsulot uchun.

Bir birlik mahsulot narxi: **1200 so'm.**

c) Daromad=25 ming so'm bo'lsa mahsulot hajmi x - aniqlansin;

d) Daromad=105 ming so'm bo'lsa, 1-oydagi mahsulot hajmi x -aniqlansin

Yechish:

a) x birlik mahsulotni ishlab chiqarish harajatlari

$$C(x) = F + V(x) = 125 + 0,7x \text{ (ming pul birligi).}$$

$$C(x) = F + V(x) = 155 + 0.7x;$$

Mahsulotni sotishdan keladigan daromad: $R(x) = 1.2x$;

Foyda: $P(x) = R(x) - C(x) = 1.2x - (155 + 0.7x) = 0.5x - 155$;

Daromad=1000; : $P(x) = 0$; $0.5x - 125 = 25$; $x = 300$ birlik;

Daromad=10500 so'm; $P(x) = 105$; $0.5x - 125 = 105$; $x = 460$ birlik;

11-Amaliy mashg'ulot. Funksiya limiti va uzluksizligi.

I. L. Gamov

1 – m i s o l . Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1.$$

bo'lishi isbotlansin.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ sonni olib, unga ko'ra δ ni $\delta = \varepsilon$ deylik.

Unda $\left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda

$$|\sin x - 1| = \left| \sin x - \sin \frac{\pi}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \right| \leq$$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \right| \leq \left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta = \varepsilon$$

d)

bo'ladi. Demak, $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1. \blacktriangleright$$

Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib
quyidagi tengliklar isbotlansin.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

Bir tomonlama uzluksizlik. Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Birinchi tur uzilish nuqtasi. Agar $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ limitlar mavjud va chekli bo'lib, $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$ tengliklarning birortasi o'rinli bo'lmasa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Funksiya orttirmasi. $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ayirma funksiya orttirmasi deyiladi.

Funksiyaning nuqtadagi sakrashi. $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ ayirma funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Ikkinchi tur uzilish nuqtasi. Agar hech bo'lmaganda $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ limitlarning birortasi mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Uzilish nuqtasi. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, unda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Geyne bo'yicha). Agar

$$n \rightarrow \infty \text{ da } x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \in X, \quad n = 1, 2, \dots)$$

bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$n \rightarrow \infty \text{ da } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Koshi bo'yicha). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$$

uchun

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada). Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (to'plamda). Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda uzluksiz deyiladi.

e) 1 – m i s o l . Ushbu

$$f) \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x - \text{ ratsional son bo'lsa} \\ -x, & \text{agar } x - \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

g) funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtada uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

h) ◀ Ravshanki, bu funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi orttirmasi

$$i) \quad \Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \begin{cases} \Delta x, & \text{agar } \Delta x - \text{ ratsional son bo'lsa} \\ -\Delta x, & \text{agar } \Delta x - \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

j) bo'ladi. Unda

$$k) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$$

l) bo'lad. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada uzluksiz. ►

m) Berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz ekanligi ta'rif yordamida isbotlansin.

$$1. f(x) = 2x^2 - 4, \quad x_0 = 3$$

$$2. f(x) = -3x^2 + 8, \quad x_0 = 5$$

$$3. f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 2$$

$$4. f(x) = x^4, \quad x_0 = 3$$

$$5. f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$$

12-Amaliy mashg'ulot. Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi va differensial.

1. Funksiya hosilasining ta'ri.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a, b) \subset R$ da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin.

Ma'lumki ushbu

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. ([2], p. 167, item 6.1)

1-ta'rif. ([2], p. 168, Def. 6.1) Agar ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $\frac{df(x_0)}{dx}$,

yoki $f'(x_0)$, yoki $(f(x))'_{x_0}$ kabi belgilanadi. Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Agar $x_0 + \Delta x = x$ deyilsa, unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \rightarrow 0$ da $x \rightarrow x_0$ bo'lib, (1) munosabat quyidagi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

ko'rinishga keladi.

1-misol. ([2], p. 170, i)) $f(x) = x$, $x_0 \in R$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

bo'ladi. Demak, $f'(x) = (x)' = 1$.

2-misol. ([1], p. 253, Example 10.1.6) $f(x) = |x|$, $x \in R$ bo'lsin.

Agar $x > 0$ bo'lsa, u holda $f(x) = x$ bo'lib, $f'(x) = 1$ bo'ladi.

Agar $x < 0$ bo'lsa, u holda $f(x) = -x$ bo'lib, $f'(x) = -1$ bo'ladi.

Agar $x_0 = 0$ bo'lsa, u holda $\frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$ bo'lib, $x \rightarrow 0$ da bu nisbatlarning limiti mavjud

bo'lmaydi. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi.

3-misol. $f(x) = x|x|$, $x \in R$, $x_0 \in R$ bo'lsin.

a) $x_0 > 0$, $x > 0$, $x \neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0 = 2|x_0|$$

bo'ladi.

b) $x_0 < 0$, $x < 0$, $x \neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = -x - x_0$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -2x_0 = 2|x_0|$$

bo'ladi.

v) $x_0 = 0$, $x \neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

bo'ladi. Demak, $\forall x \in R$ da $f'(x) = (x|x|)' = 2|x|$.

4-misol. Aytaylik,

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bo'lib, $x_0 = 0$ bo'lsin. Unda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

bo'lib, uning $x \rightarrow 0$ dagi limiti mavjud emas. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.

2. Funksiyaning o'ng va chap hosilalari.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0 - \delta, x_0) \subset X$ ($\delta > 0$) bo'lsin.

2-ta'rif. ([2], p. 176, Def. 6.13) Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi chap hosilasi** deyiladi va $f'(x_0 - 0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, x_0 + \delta) \subset X$ ($\delta > 0$) bo'lsin.

3-ta'rif. ([2], p. 176, Def. 6.13) Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi o'ng hosilasi** deyiladi va $f'(x_0 + 0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Masalan, $f(x) = |x|$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi o'ng hosilasi $f'(+0) = 1$, chap hosilasi $f'(-0) = -1$ bo'ladi.

3. Hosilaning iqtisodiyotga tadbig'i.

Misol. t vaqtdagi ishlab chiqarish hajmi $Q = 100t - \frac{1}{30}t^3$ formula yordamida bog'langan bo'lsin. Mehnat unumdorligini: 1) 5 vaqt birligiga mos; 2) 10 vaqt birligiga mos aniqlang.

Yechish. Bu masalaning yechimini topish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz: $u' = 100 - \frac{1}{10}t^2$, $u'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97,5$;
 $u'(10) = 100 - \frac{1}{10}10^2 = 90$.

Shunday qilib, mahsulotning limit qiymati, limit foyda, ishlab chiqarish limiti, samaradorlik limiti, talab limiti kabi kattaliklar hosila tushunchasi bilan uzviy bog'liq.

Iqtisodiy nazariyada $y'(x)$ marjinal (limit) kattaliklarni $My(x)$ ko'rinishda belgilash qabul qilingan. Bu yerda M marjinal so'zining birinchi harfini bildiradi va limit ma'nosini beradi. Yuqorida aniqlangan limit kattaliklar iqtisodiy qonuniyatlarni isbotlashda matematik apparatlardan foydalanish imkoniyatini beradi. Buni biz differensial hisobning iqtisodiy nazariyaga ba'zi tatbiqlari sifatida ko'rib chiqamiz.

Agar firma Q miqdorda mahsulot ishlab chiqarib uni P so'mdan sotsa, u

$$R = PQ$$

miqdordagi daromadga ega bo'ladi. Firmadagi ishlab chiqarish hajmi ΔQ miqdorga o'zgarganda uning daromadi

$$MR = \frac{dR(Q)}{dQ}$$

tezlik bilan o'zgaradi. Bu holda MR kattalik marjinal (limit) daromad deb ataladi.

Misol. Firmaning daromadi

$$R = 100Q - 2Q^2$$

funksiya ko‘rinishida ifodalangan. Firmaning marjinal daromadini $Q=15$ uchun aniqlang.

Yechish. Yuqoridagi birinchi tenglikka asosan topamiz.

$$MR = \frac{dR(Q)}{dQ} = 100 - 4Q \quad MR = 100 - 4 \cdot 15 = 40.$$

Ishlab chiqarish hajmining o‘zgarishiga bog‘liq ravishda xarajat funksiyasining o‘zgarish tezligi marjinal (limit) xarajat deb ataladi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$MC = \frac{dC(Q)}{dQ}$$

O‘rtacha xarajat funksiyasi $AC = \frac{C(Q)}{Q}$.

Misol. O‘rtacha xarajat funksiyasi $AC = \frac{24}{Q} + 15 + 3Q$, ko‘rinishda berilgan. Marjinal xarajat funksiyasini toping.

Yechish.

$$C(Q) = AC \cdot Q = \left(\frac{24}{Q} + 15 + 3Q \right) Q = 24 + 15Q + 3Q^2.$$

$$MC = \frac{dC(Q)}{dQ} = 15 + 6Q.$$

13-Amaliy mashg‘ulot. Differentsiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremlar. Hosilaning ba’zi tatbiqlari.

Funksiyalarni to'liq tekshirish va grafiklarini chizish

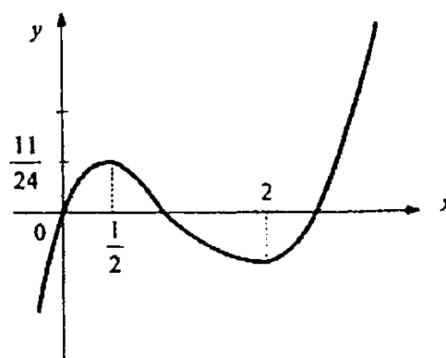
Funksiyaning sxematik grafigini chizishning umumiy sxemasi quyidagidan iborat:

- 1) funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi, so'ngra uning uzilish nuqtalari;
- 2) funksiyaning juft – toqligi, davriyligi. Funksiyaning asimptotalari topiladi;
- 3) funksiya nollari topiladi;
- 4) funksiyaning monotonlik intervallari va ekstremumlari topiladi;
- 5) funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishlari va burilish nuqtalari aniqlanadi;
- 6) funksiya grafigining eskizi chiziladi.

Misollar

1. Ushbu $f(x) = 2x^2 - \ln x$ funksiyaning o'sish va kamayish intervallarini toping.

Yechish. Funksiya $(0; +\infty)$ intervalda aniqlangan. Uning hosilasi $f'(x) = 4x - \frac{1}{x}$ ga teng. Agar $4x - \frac{1}{x} > 0$ bo'lsa ya'ni $x > \frac{1}{2}$ da o'suvchi, agar $4x - \frac{1}{x} < 0$ bo'lsa ya'ni $x < \frac{1}{2}$ da funksiya

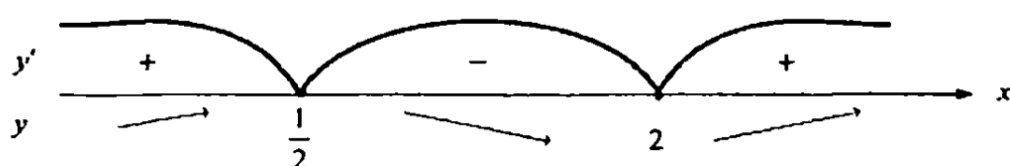


kamayuvchi bo'ladi. Demak funksiya $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ intervalda kamayuvchi, $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ intervalda o'suvchi bo'ladi.

2. Funksiyaning ekstremumlari va monotonlik intervallarini toping.

$$y' = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$$

Yechish. Tekshirish sxemasiga muvofiq y' ni topamiz:
 $y' = 2x^2 - 5x + 2$. Ko'rinib turibdiki, x ning barcha qiymatlarida hosila mavjud. Hosilani nolga tenglab, $2x^2 - 5x + 2 = 0$ tenglamani olamiz, bu yerdan $x_1 = \frac{1}{2}$ va $x_2 = 2$ kabi kritik nuqtalarni topamiz. Hosila ishoralari quyidagi chizmada ko'rsatilgan:



$(-\infty; \frac{1}{2})$ va $(2; +\infty)$ orliqlarda hosila $f'(x) > 0$ va funksiya o'suvchi, $(\frac{1}{2}; 2)$ oraliqda hosila $f'(x) < 0$ ya'ni funksiya kamayuvchi. $x = \frac{1}{2}$ — maksimum nuqta va $f_{\max}(\frac{1}{2}) = \frac{11}{24}$, $x = 2$ — minimum nuqta va $f_{\min}(2) = -\frac{2}{3}$.

Chunki hosila bu nuqtalardan o'tishda o'z ishorasini ($x = \frac{1}{2}$ da) «+» dan «-» ga va ($x = 2$ da) «-» dan «+» ga o'zgartiradi.

3. $y = 3x - x^3$ funksiyaning $[-2; 4]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. $y' = 3 - 3x^2$ funksiya hosilasi $x = \pm 1$ nuqtalarda nolga teng. Bu nuqtalarda va kesma oxirlarida funksiya qiymatlarini topamiz:
 $f(-2) = 2$, $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$, $f(4) = -52$.

Shunday qilib, $f_{\text{eng katta}} = f(-2) = f(1) = 2$, $f_{\text{eng kichik}} = f(4) = -52$.

4. Q mahsulot miqdoriga bog'liq bo'lgan daromad funksiyasi $R(Q)=100Q-Q^2$ formula bilan, mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan harajatlarni funksiyasi esa $C(Q)=Q^3-37Q^2+169Q+4000$ formulalar bilan aniqlansin. Maksimal foydani toping.

Yechish. Foyda $F(Q)=R(Q)-C(Q)$ formula bilan aniqlanadi. Bu erdan $F(Q)=-Q^3+36Q^2-69Q-4000$. Foyda funksiyasining hosilasini nolga tenglashtirib $Q^2-24Q+23=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning ildizlari $Q=1$, $Q=23$. Tekshirish shuni ko'rsatadiki, maksimal foydaga $Q=23$ da erishiladi. $F_{\max}=1290$.

13-Test

№	Savol	A	B	C	D
1.	$f(x)=x^2$ bo'lsa, u holda $f'(1)$ ni toping.	2	3	4	5
2.	$f(x)=\sin x$ bo'lsa, u holda $f'(\pi)$ ni toping.	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
3.	$f(x)=x$ bo'lsa, u holda $f'(1000)$ ni toping.	1	2	3	4
4.	$f(x)=x^3-500$ bo'lsa, u holda $f'(2)$ ni toping.	12	13	14	15
5.	$f(x)=2$ bo'lsa, u holda $f'(5000)$ ni toping.	0	1	2	-1
6.	$f(x)= x $ funksiyaning $x=0$ nuqtada o'ng hosilasini toping.	1	-1	2	-2
7.	$f(x)= x^2-5x+6 $ funksiyaning $x=2$ nuqtada o'ng hosilasini toping.	1	-10	200	-2

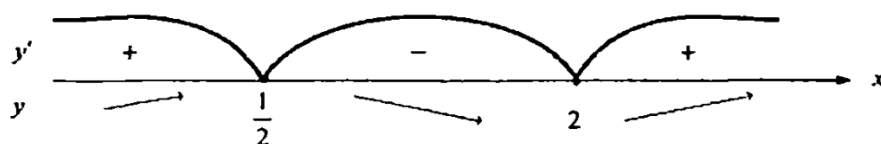
8.	$f(x) = \sqrt{\sin x^2}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada chap hosilasini toping.	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
9.	$f(x) = 2^x - 2 $ funksiyaning $x = 1$ nuqtada chap hosilasini toping.	$-\ln 4$	$\ln 4$	1	-1
10.	$f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x^4} \ln x, & \text{agar } x > 0 \end{cases}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada chap hosilasini toping.	1	2	-2	-3

14-Amaliy mashg'ulot. Bir o'zgaruvchili funktsiyani tekshirish.

2. Funktsiyaning ekstremumlari va monotonlik intervallarini toping.

$$y' = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$$

Yechish. Tekshirish sxemasiga muvofiq y' ni topamiz:
 $y' = 2x^2 - 5x + 2$. Ko'rinib turibdiki, x ning barcha qiymatlarida hosila mavjud. Hosilani nolga tenglab, $2x^2 - 5x + 2 = 0$ tenglamani olamiz, bu yerdan $x_1 = \frac{1}{2}$ va $x_2 = 2$ kabi kritik nuqtalarni topamiz. Hosila ishoralari quyidagi chizmada ko'rsatilgan:



$(-\infty; \frac{1}{2})$ va $(2; +\infty)$ orliqlarda hosila $f'(x) > 0$ va funksiya o'suvchi, $(\frac{1}{2}; 2)$ oraliqda hosila $f'(x) < 0$ ya'ni funksiya kamayuvchi. $x = \frac{1}{2}$ — maksimum nuqta va $f_{\max}(\frac{1}{2}) = \frac{11}{24}$, $x = 2$ — minimum nuqta va $f_{\min}(2) = -\frac{2}{3}$.

Chunki hosila bu nuqtalardan o'tishda o'z ishorasini ($x = \frac{1}{2}$ da) «+» dan «-» ga va ($x = 2$ da) «-» dan «+» ga o'zgartiradi.

Izoh: $x = \frac{1}{2}$ va $x = 2$ kritik nuqtalarda ekstremum mavjudligini ikkinchi tartibli hosila yordamida aniqlasa bo'ladi: $f''(x) = 4x + 5$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$ va $f''(2) = 3 > 0$ bo'lganligi uchun $x = \frac{1}{2}$ — maksimum nuqta va $x = 2$ — minimum nuqta.

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

$$1. f(x) = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin \frac{3x-1}{2}$$

Birinchi qo'shiluvchi $1-2x \geq 0$ da, ikkinchi qo'shiluvchi esa $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$ bo'lganda haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi. Shunday qilib, funksiyaning aniqlanish sohasini topish uchun

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ \frac{3x-1}{2} \leq 1 \\ \frac{3x-1}{2} \geq -1 \end{cases} \text{ tengsizliklar sistemasini yechib, topamiz}$$

$$x \leq \frac{1}{2}, \quad x \leq 1, \quad x \geq -\frac{1}{3}$$

$$\text{Demak, } D(f) = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right].$$

$$2. y = \lg(x^2 - 4x + 3)$$

$$3. y = \arcsin(3x - 4)$$

$$4. y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$$

$$5. y = \sqrt{\sin(x)} - \sqrt{9-x^2}$$

$$6. y = \arcsin \frac{1+x^2}{2x}$$

$$7. y = x^{\frac{1}{\lg x}}$$

$$8. y = \operatorname{tg} \sqrt{16-x^2}$$

$$9. y = \frac{1}{\sqrt{|x|-2|x-1|}}$$

$$10. f(x) = \ln \cos(x).$$

Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

$$11. y = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$12. y = \log_2(-x)$$

$$13. y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$$

$$14. y = \sqrt{3^x - 5^x}$$

$$15. y = \frac{1}{xe^x}$$

$$16. y = \sin \sqrt{x-3}$$

15-Amaliy mashg'ulot. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensial. Xususiy hosila va yuqori tartibli differensiallar. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi.

1-misol. Ushbu

$$z = x^2 x^2 y + y^3$$

funksiyaning xususiy hosilalari topilsin.

Berilgan funksiya y ni o'zgarmas deb qarab, x o'zgaruvchi bo'yicha hosilasini topamiz. Bunda ma'lum bo'lgan qoida va formulalardan foydalanamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 + x^2 y + y^3) = 3x^2 + 2xy + 0 = 3x^2 + 2xy$$

Huddi shunga o'xshash x ni o'zgarmas hisoblab topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^3 + x^2 y + y^3) = 0 + x^2 + 3y^2 = x^2 + 3y^2$$

2-misol. Ushbu

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$$

funksiyaning $(5; -3)$ nuqtadagi xususiy hosilalari topilsin.

Avvalo berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 - y^2}) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{x^2 - y^2}) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

Endi bu xususiy hosilalarning ko'rsatilgan $(5; -3)$ nuqtadagi qiymatlarini topamiz:

$$f'_x(5, -3) = \frac{5}{\sqrt{5^2 - (-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{25-9}} = \frac{5}{4},$$

$$f'_y(5, -3) = \frac{-(-3)}{\sqrt{5^2 - (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{25-9}} = \frac{3}{4}$$

Demak, $f'_x(5; -3) = \frac{5}{4}, \quad f'_y(5, -3) = \frac{3}{4} \blacktriangleright$

3-misol. Ushbu

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

funksiyaning $\forall (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ Berilgan funksiyaning $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ nuqtadagi to'liq orttirmasini topamiz:

$$\Delta f(x^0) = (x_1^0 + \Delta x_1)^2 + (x_2^0 + \Delta x_2)^2 + \dots + (x_m^0 + \Delta x_m)^2 - \\ - (x_1^{0^2} + x_2^{0^2} + \dots + x_m^{0^2}) = 2x_1^0 \Delta x_1 + 2x_2^0 \Delta x_2 + \dots + \\ + 2x_m^0 \Delta x_m + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2.$$

Agar

$$A_1 = 2x_1^0, A_2 = 2x_2^0, \dots, A_m = 2x_m^0,$$

$$\alpha_1 = \Delta x_1, \alpha_2 = \Delta x_2, \dots, \alpha_m = \Delta x_m$$

deyilsa, unda

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $\forall x^0 \in R^m$ nuqtada differensiallanuvchi. ►

4-misol. Ushbu

$$f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$$

funksiyaning xususiy hosilalar topilsin.

◀ Berilgan funksiyaning xususiy hosilalari quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = \frac{-2}{y^2 \sin \frac{2x}{y}} \quad \blacktriangleright$$

Misollar

Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalari topilsin.

$$1. a) z = x^3 + y^2 - 2xy, \quad b) z = 5x^2 + 8xy^2 + y^3$$

$$2. a) z = x^3 + y^2 - 3axy, \quad b) z = x^2 - 2xy + y^2$$

$$3. a) z = \frac{xy}{x+y}, \quad b) z = \frac{x-y}{x+y}$$

$$4. a) z = \frac{y}{x}, \quad b) z = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$5. a) z = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad b) z = \sqrt{x+3y}$$

$$6. a) z = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}, \quad b) z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

7. Agar $f(x, y) = \frac{1-xy}{1+xy}$ bo'lsa, $f'_x(0,1)$, $f'_y(0,1)$ topilsin.

8. Agar $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ bo'lsa, $f'_x(2,1)$, $f'_y(2,1)$ topilsin.

15-Test

1. $u = x^2 + y + 1$ funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

A) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ B) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 1$

C) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ D) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

2. $u = xy + \frac{1}{x}$ funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

A) $\frac{\partial u}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$ B) $\frac{\partial u}{\partial x} = x + \frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$

C) $\frac{\partial u}{\partial x} = x - \frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = y + 1$ D) $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 1$

3. $u = x^2 + y + 1$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$

C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3$ D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

4. $u = x^y$ funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

A) $\frac{\partial u}{\partial x} = y x^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$ B) $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y$

C) $\frac{\partial u}{\partial x} = x^y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \ln x$ D) $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$

5. $u = xy + \frac{1}{x}$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$ B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$

C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3$ D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

6. $u(x, y) = x + y$ $u_x(x, y) = ?$

A) 1 B) x C) y D) 0

7. $u(x, y) = 2x + y$ $u_y(x, y) = ?$

A) 1 B) x C) y D) 0

8. $u(x, y) = x^2 - y^2$, $u_x(x, y) = ?$

A) $2x$ B) $4y$ C) $5x+y$ D) $x+2y$

9. $u(x, y) = xy + x^2$, $u_x(x, y) = ?$

A) $2x+y$ B) x^5+y+3 C) $y+5x+9$ D) $2x+2y+5$

10. $u(x, y) = xy + x^2$, $u_y(x, y) = ?$

A) x B) x^5+y+3 C) $y+5x+9$ D) $2x+2y+5$

16-Amaliy mashg'ulot. Aniqmas integral. Aniq integral.

Nyuton – Leybnits formulasi.

Agar $[a, b]$ oraliqda $f(x)$ ning biror boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ bo'lsa, quyidagi Nyuton-

Leybnits formulasi o'rinalidir: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$

1-misol. 1) $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2};$

2) $\int_2^3 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_2^3 = \frac{1}{2} (3^2 - 2^2) = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2 \frac{1}{2}.$

2-misol.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx &= \left(\frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \left[\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{1}{3} (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) \right] = 9 \end{aligned}$$

3-misol. $\int_0^4 \sqrt{x} dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} (4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}) = 5 \frac{1}{3}$

4-misol. $\int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$

5-misol. $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

6-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln(x+2) \Big|_0^1 = \ln(1+2) - \ln(0+2) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} = 0,4055$

8-misol. $\int_1^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (e^{2 \cdot 3} - e^{2 \cdot 1}) = \frac{e^2}{2} (e - 1)$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

9-misol.

1-topshiriq. Aniq integrallarni hisoblang.

1. $\int_1^3 x^3 dx$
2. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$
3. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$
4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
5. $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2}$
6. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$
7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$
9. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$
10. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$
11. $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx$
12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$
13. $\int_0^1 \ln(x+1) dx$

$$14. \int_1^3 x^3 dx$$

$$15. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$$

$$16. \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$17. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

17-Amaliy mashg'ulot. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Funksiyalar va hosilalarini o'zaro bog'lovchi munosabatlarga differensial tenglamalar deyiladi. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama quydagicha yoziladi:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

Birinchi tartibli hosilaga nisbatan echilmagan oddiy differensial tenglama quydagicha yoziladi:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

1-Misol. $\frac{dy}{dx} = 2x + 1;$

Yechim: $\frac{dy}{dx} = 2x + 1; dy = (2x + 1)dx;$

$$\int dy = \int (2x + 1)dx; y = x^2 + x + c; (c = \text{const})$$

2-Misol. $\frac{dy}{dx} = -3x + 1;$

Yechim: $\frac{dy}{dx} = -3x + 1; dy = (-3x + 1)dx;$

$$\int dy = \int (-3x + 1)dx; y = -\frac{3}{2}x^2 + x + c; (c = \text{const});$$

3-Misol. $\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 5;$

Yechim: $\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 5; dy = (-3x^2 + 5)dx;$

$$\int dy = \int (-3x^2 + 5)dx; y = -x^3 + 5x + c; (c = \text{const});$$

4-Misol. $\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 5x - 1;$

Yechim: $\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 5x - 1; dy = (-3x^2 + 5x - 1)dx;$

$$\int dy = \int (-3x^2 + 5x - 1)dx; y = -x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + c; (c = \text{const});$$

5-Misol. $\frac{dy}{dx} = -3x^3 + 5x^2 - 2x + 4;$

Yechim: $\frac{dy}{dx} = -3x^3 + 5x^2 - 2x + 4;$

I. L. Gamov

$$dy = (-3x^3 + 5x^2 - 2x + 4)dx;$$

$$\int dy = \int (-3x^3 + 5x^2 - 2x + 4)dx; \quad y = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 4x + c; \quad (c = \text{const});$$

6-Misol. $\frac{dy}{dx} = 3yx^3; \quad \frac{dy}{y} = 3x^3 dx; \quad \frac{dy}{y} = 3x^3 dx;$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3x^3 dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3x^3 dx; \quad \ln y = 3\frac{x^4}{4} + c; \quad y = e^{3\frac{x^4}{4} + c} = c_1 e^{3\frac{x^4}{4}}$$

Mustaqqil yechish uchun misollar.

7-Misol. $\frac{dy}{dx} = 12x + 31;$

8-Misol. $\frac{dy}{dx} = -33x + 12;$

3-Misol. $\frac{dy}{dx} = -23x^2 + 5;$

4-Misol. $\frac{dy}{dx} = -2x^2 + 3x - 8;$

5-Misol. $\frac{dy}{dx} = -7x^3 + 3x^2 - 4x + 7;$

18-Amaliy mashg'ulot. Ikkinchi tartibli o'zgarmas ko'ffisientli differensial tenglamalar.

Ikkinchi tartibli o'zgarmas ko'ffisientli differensial tenglamalar quydagicha yoziladi:

$$a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = 0; \quad (1)$$

Yechim quydagicha izlanadi: $y = e^{kx}; \quad (2)$

(2) ni (1) ga qo'yamiz: a) $\dot{y} = ke^{kx}; \quad \ddot{y} = k^2 e^{kx}$

b) $a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0$ xarakteristik tenlamani yechib, ildizlar k_1, k_2 aniqlanib, (2)ga qo'yiladi va quydagi yechim aniqlanadi: .

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \quad (3)$$

I. Igamov

1-Misol. $\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 0$; $a_1 = 1$; $a_2 = -2$; $a_3 = -3$;
xarakteristik tenglamani tuzamiz: $k^2 - 2k - 3 = 0$; Viet formulasidan:

$$k_1 = -1; k_2 = 3;$$

$$\text{Yechim: (3)-dan: } y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} ; \quad (4)$$

Bu yerda: c_1, c_2 -lar boshlang'ich shartlardan aniqlanadi.

$$\text{Masalan; } x = 0: y(0) = -1; x = 0; \dot{y}(0) = 3; (5)$$

$$(4) \text{ dan } \dot{y}(x) = -c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{3x} \quad (6)$$

(5) ni (3) va (6) ga qo'yib c_1, c_2 aniqlaymiz:

$$y(0) = c_1 + c_2 = -1; \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ -c_1 + 3c_2 = 3 \end{cases} \quad (7)$$

$$\dot{y}(0) = -c_1 + 3c_2 = 3;$$

$$(7) \text{ dan } c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{3}{2} \quad (8)$$

Demak ikkinchi tartibli o'zgaras ko'effisientli differensial tenglamani yechimi

$$\text{quydagicha yoziladi: } y = \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{3}{2} e^{3x} \quad (9)$$

2-Misol. $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 0$; $a_1 = 1$; $a_2 = -1$; $a_3 = -6$;
xarakteristik tenglamani tuzamiz: $k^2 - k - 6 = 0$; Viet formulasidan:

$$k_1 = -2; k_2 = 3;$$

$$\text{Yechim: (3)-dan: } y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} ; \quad (4)$$

Bu yerda: c_1, c_2 -lar boshlang'ich shartlardan aniqlanadi.

$$\text{Masalan; } x = 0: y(0) = -2; x = 0; \dot{y}(0) = 3; (5)$$

$$(4) \text{ dan } \dot{y}(x) = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x} \quad (6)$$

(5) ni (3) va (6) ga qo'yib c_1, c_2 aniqlaymiz:

$$y(0) = c_1 + c_2 = -2; \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = -2 \\ -2c_1 + 3c_2 = 3 \end{cases} \quad (7)$$

$$\dot{y}(0) = -2c_1 + 3c_2 = 3;$$

$$(7) \text{ dan } c_1 = -\frac{9}{5}, c_2 = -\frac{1}{5} \quad (8)$$

Demak ikkinchi tartibli o'zgaras ko'effisientli differensial tenglamani yechimi

$$\text{quydagicha yoziladi: } y = -\frac{9}{5} e^{-2x} - \frac{1}{5} e^{3x} \quad (9)$$

" Amaliy matematika" fani bo'yicha mustaqil ta'limning kalendar tematik rejasi

1-semestr

№	Mustaqil ta'lim mavzulari Talaba jurnalidagi tartib nomeri bo'yicha mavzu oladi.	
1	Chiziqli operatorlar va ularning xossalari.	
2	Kvadratik formalar.	
3	Iqtisodiy masalalarni yechishning ba'zi metodlari. Leontev modeli.	
4	Leontevning mahsuldor modeli. Xalqaro savdo modeli.	
5	Bozor iqtisodiyoti jarayonlarini modellashtirish. Iqtisodiy masalalarni grafik usulda yechish va tahlil qilish.	
6	Iqtisodiy masalalarni simpleks usulda yechish. Modifitsirlangan simpleks usul. Xos chiziqli programmashtirish masalasi. Sikllanish. ε -usul.	
7	Sun'iy bazis usuli.	
8	ChPM da ikkilanish nazariyasi. Qo'shma masalalarni qurish va yechish.	
9	Ikkilanish nazariyasi asosida iqtisodiy masalalarni yechimini tahlil qilish.	
10	Ikkilangan simpleks usul.	
11	Iqtisodiy masalalarning butun sonli yechimini topish.	
12	Transport masalalariga keltiriladigan taqsimot masalalari. Uskunalarni optimal taqsimlash masalalari. Mutaxassislarni ish o'rinlariga optimal taqsimlash masalalari.	
13	Bozorning o'rgimchaksimon modeli.	
14	Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremlar. hosilaning ba'zi tatbiqlari. Teylor formulasi. Lopital qoidasi.	
15	Bir o'zgaruvchili funksiyani tekshirish. Foydani maksimallashtirish modeli.	
16	Kvadratik programmashtirish va uni yechish usullari. Gradiyent usul.	
17	Aniq va aniqmas integrallar.	
18	Aniq integralning geometrik tatbiqlari.	
19	Iste'molchi va ta'minotchining ortiqcha foydasi.	
20	Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi modeli. Pul oqimini diskontlash modeli.	
21	Xosmas integral. Aniq integralni taqribiy hisoblash.	
22	Birinchi tartibli differensial tenglamalar.	
23	Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.	

24	Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.	
25	Birinchi va ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglamalar.	

**«AMALIY MATEMATIKA» fanining 2023/2024 kuzgi(I-seemestr) o'quv yili uchun mo'ljallangan
SILLABUSI**

Fanning qisqacha tavsifi					
OTMning nomi va joylashgan manzili:	UNIVERSITY OF BUSINESS AND SCIENCE			Beshkapa ko'chasi, 7	
Kafedra:	MENEJMENT VA RAQAMLASHTIRISH			“Iqtisodiy fanlar” fakulteti tarkibida	
Ta’lim soxasi va yo’nalishi:	60310100 - Iqtisodiyot (tar. va sohalar bo'yicha)	Iqtisodiyot (tar. va sohalar bo'yicha) Kunduzgi ta’lim			
Fanni (kursni) olib boradigan o’qituvchi to’grisida ma’lumot:	Dostent Karimov Abdusamat	e-mail:		Kariumovabdosamat@umailuz	
Dars vaqti va joyi:	1-zal	Kursning davomiyligi:		26.09.2023-28.12.2023	
Individual grafik asosida ishlash vaqti:	Seshanba, payshanba va juma kunlari 9.00 dan 12.00 gacha				
Fanga ajratilgan soatlar	Auditoriya soatlari			Mustaqil ta’lim:	108
	Ma’ruza:	36	Amaliyot		
Fanning boshqa fanlar bilan bogliqligi (prerekvizitlari):	Oliy matematika,iqtisodiy matematika,menejment, iqtisod,				
Fanning mazmuni					
Fanning dolzarbligi va qisqacha mazmuni:	<u>Fanni o’qitishdan maqsad</u> – “Amaliy matematika” fanini o’qitishning maqsadi – iqtisodiy tushunchalarning matematik mohiyatini tushuntirish hamda talabalarda iqtisodiy jarayonlarga matematik metodlarni tatbiq etish ko’nikmalarini shakllantirishdan ibora <u>Fanning vazifasi</u> nazariy bilimlarni o’rganish, matematik ta’limni zamonaviy iqtisodchi fundamental tayyorgarligining muhim tarkibiy qismi sifatida qarash orqali ixtisoslik fanlarini o’rganish uchun tayyorlash. Talabalarning matematik kompetentligini shakllantirish.				
Talabalar uchun talablar	- o’qituvchiga va guruhdoshlarga nisbatan xurmat bilan munosabatda bo’lish; - ichki tartib - intizom koidalariga rioya qilish; - uyali telefonni dars davomida o’chirish; - berilgan uy vazifasi va mustaqil ish topshiriqlarini o’z vaqtida va sifatli bajarish; - ko’chirmachilik (plagiat) qat’iyan man etiladi; - darslarga qatnashish majburiy xisoblanadi, dars qoldirilgan xolatda				

J. Ergamov

	qoldirilgan darslar qayta o'zlashtirilishi shart; - darslarga oldindan tayyorlanib kelish va faol ishtirok etish; - talaba o'qituvchidan so'ng, dars xonasiga - mashrulotga kiritilmaydi; - talaba reyting ballidan norozi bo'lsa e'lon qilingan vaqtdan boshlab 1 kun mobaynida apellyastiya komissiyasiga murojat qilishi mumkin
Elektron pochta orqali munosabatlar tartibi	Professor-o'qituvchi va talaba o'rtasidagi aloqa elektron pochta orkali xam amalga oshirilishi mumkin, telefon orkali baxo masalasi muxokama kilinmaydi, baxolash faqatgina institut xududida, ajratilgan xonalarda va dars davomida amalga oshiriladi. Elektron pochta ochish vaqti soat 18.00 dan 20.00 gacha

Fan mavzulari va unga ajratilgan saotlar taqsimoti:

No	Mavzular	Ma'ruza	Amaliy (seminar)	Mustaqil ish
1	Matritsalar va ular ustida amallar. Determinantlar nazariyasi	2	2	6
2	Matritsa va vektorlar sistemasining rangi .	2	2	6
3	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari.	2	2	6
4	Matritsalar usuli. Kramer qoidasi.	2	2	6
5	Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Fundamental yechimlar sistemasi.	2	2	6
6	Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo va operatorlar.	2	2	6
7	Kvadratik formalar.	2	2	6
8	Analitik geometriya elementlari.	2	2	6
9	Yn fazoda nuqtalarning o'zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti.	2	2	6
10	Bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o'rni. Kobb-Duglas funksiyasi.	2	2	6
11	Funksiya limiti va uzluksizligi.	2	2	6
12	Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi va differensial.	2	2	6
13	Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremlar. Hosilaning ba'zi tatbiqlari.	2	2	6
14	.Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensial. Xususiy hosila va yuqori tartibli differensiallar. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi..	2	2	6
15	Aniqmas integral. Aniq integral.	2	2	6

I. E. Gamov

16	Birinchi tartibli differensial tenglamalar.	2	2	6
17	Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.	2	2	6
18	Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi	2	2	6
Jami		36	36	108

Talabalar bilimni baxolash tizimi:

t/r	Nazorat turidagi topshiriqlarning nomlanishi	Maksimal yirish mumkin bo'lgan ball	JN va ON ballar taqsimoti	
I. Joriy nazoratdagi ballar taqsimoti		30 ball	18	18
Ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarda		Maksimal ball	1-JN	2-JN
1.	Talabaning ma'ruza va amaliy mashg'ulotlardagi faolligi va o'zlashtirish darajasi, daftarlarning yuritilishi va xolati	15	0-8	0-7
2.	Mustaqil ta'lim, iriqlarining o'z vaktida va sifatli bajarilishi (keys-stadilar, esse, referat, taqdimot va boshqa turdagi mustaqil ta'lim topshiriqlari) Uy vazifalarini bajarish.	15	0-8	0-7
II. Oraliq nazorat		20 ball		
1.	Birinchi oraliq nazorat (ma'ruzachi va amaliy mashg'ulot o'qituvchisi tomonidan qabul qilinadi)	10	Semestrnin 7-xaftasi	
2.	Ikkinchi oraliq nazorat (ma'ruzachi va amaliy mashg'ulot o'qituvchisi tomonidan qabul qilinadi).	10	Semestrnin 8-14-xaftalar oralifida	
III. Yakuniy nazorat		Max=50 ball="5"	Semestrnin oxirgi ikki haftasida	
Jami:		100 ball=		

Glossariy +Amaliy matematika.

Matritsa- satrlar soni n . ustunlar soni ham m ga teng bo'lgan, ya'ni $n \times m$ o'lchamli jadvalga kvadrat matritsa deb ataladi.

Determinant- kvadrat matritsani skalyar miqdorini aniqlovchi kattalikka determinant deb ataladi.

Matritsa rangi- A-matritsaning rangi deb noldan farqli minorlarning eng yuqori tartibiga aytiladi va $\text{rang}(A)$ kabi ifodalanadi.

Birlik matritsa-diogonal elementlari 1-dan, qolganlari noldan iborat matritsaga aytiladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi- n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasiga aytiladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish- nomalumlarni determinantlar yordamida aniqlashga aytiladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Matritsa usulida yechish- nomalumlarni matritsalar yordamida aniqlashga aytiladi.

Kroneker-Kapelli teoremasi-agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng bo'lsa, ya'ni $r(A) = r(\bar{A})$ bo'lsa, u holda sistema birgalikda bo'ladi, ya'ni yechimga ega bo'ladi.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasini- ozod hadlari nolga teng n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasiga aytiladi.

chiziqli fazoning bazisi n o'lchovli chiziqli fazodagi istalgan n ta chiziqli erkli vektorlar sistemasini chiziqli fazoning bazisi deyiladi.

n ta o'zgaruvchining kvadratik formasi deb- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ tenglik orqali aniqlangan f funksiyaga aytiladi.

Analitik geometriyada - sodda geometrik obrazlar (nuqtalar, to'g'ri chiziqlar, tekisliklar, ikkinchi tartibli egri chiziqlar va sirtlar) koordinatalar usuli asosida algebraik vositalar bilan o'rganiladi.

Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamasi.- $Ax + By + C = 0, (A^2 + B^2 \neq 0)$

Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlarning tenglamalari- $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0; (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

Fazoda tekislik tenglamasi-

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Bir o'zgaruvchili funksiya- $y = f(x);$

ko'p o'zgaruvchili funksiya- $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

Funksiyaning juftligi- agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(-x) = f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ -juft funksiya deyiladi.

Funksiyaning toqligi- agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ toq funksiya deyiladi.

Funksiyaning davriyligi- Agar shunday o'zgarmas T ($T \neq 0$) son mavjud bo'lsaki $\forall x \in X$ uchun 1) $x - T \in X$, $x + T \in X$ 2) $f(x + T) = f(x)$ bo'lsa, $f(x)$ davriy funksiya deyiladi.

Murakkab funksiya- $u = g(x)$ funksiya X sohada aniqlangan va qiymatlar to'plami E bo'lsin. Shuningdek, $y = f(u)$ funksiya E to'plamda aniqlangan bo'lsa, u holda $y = f(g(x))$ funksiya X to'plamda aniqlangan murakkab funksiya deyiladi.

Ason $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti deyiladi va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ kabi belgilanadi -

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x la $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi- agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun biror $\delta(\varepsilon) > 0$ son topilib, $|x - x_0| < \delta$ o'rinli bo'lganda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqta-da differensiallanuvchi deyiladi- Agar $\Delta f(x_0)$ ni ushbu $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa.

Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblashni qoidasi-

$$d(g(f(x))) = [g(f(x))]' dx = g'(f(x)) \cdot f'(x) dx = g'(f(x)) \cdot df(x)$$

Funksiya differensial va taqribiy formulasi- $\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$.

Yuqori tartibli hosila formulalari- $f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

Leybnits formulasi- $(u(x) + v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) + v^{(n)}(x)$

Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb- $y' + p(x)y = q(x)$ ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Bernulli tenglamasini-- $y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n = \text{const}$

To'liq differensialli tenglama - $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y)$

Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama deb- $F(x, y, y', y'') = 0$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb- $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.



-yil

**“AMALIY MATEMATIKA”
fanining**

ISHCHI O'QUV DASTURI
kunduzgi ta'lim shakli uchun

Bilim sohasi: 400 000 -Biznes,boshqaruv va huquq
Ta'lim sohasi: 310 000 – Biznes va boshqaruv
Ta'lim yo'nalishi: 60310100 - Iqtisodiyot (tar. va sohalar bo'yicha)

Namangan-2023

J. Egamov

Mazkur ishchi o'quv dasturi tayanch Oliy ta'lim muassasasi Toshkent moliya instituti tomonidan ishlab chiqilgan (2023 yil 4 aprelda № BD-60410500) o'quv dasturi asosida tayyorlangan.

Tuzuvchi: A.Karimov t.f.n., dotsent

Taqrizchilar: A. Mashrabbaev - NamDU f-m f-n, dotsent
M.Xolmurodov – NamDU f-m f-n, dotsent

Ushbu ishchi o'quv dasturi;

- “Menejment va raqamlashtirish” kafedrasining 2023-yil 28-avgustdagi 1-sonli majlisida muhokama qilingan va tasdiqqa tavsiya etilgan.
- “Iqtisodiyot” fakul'teti kengashining 2023-yil 29-avgustdagi 1-sonli majlisida ma'qullangan va tasdiqqa tavsiya etilgan.
- UBS O'quv-uslubiy Kengashining 2023-yil 30-avgustdagi 1-sonli majlisida muhokama qilingan va tasdiqlangan.

Kafedra mudiri: f.-m.f.n.T T.Mirzayev

Fakultet Kengashi raisi: A. Ilyosov

Kelishildi: UBS o'quv-uslubiy

bo'lim boshlig'i: (PhD) E. Abdurazzoqov

an/modul kodi Mat110	O'quv yili 2023-2024		ECTS - Kreditlar 12	
Fan/modul turi Majburiy	Ta'lim tili O'zbek/rus	Haftadagi dars soatlari 6		
1.	Fan/modullar nomi (semestlar)	Auditoriya mashg'ulotlari (soat)	Mustaqil ta'lim (soat)	Jami yuklama (soat)

J. Ergamov

Amaliy matematika	6-6	144	216	360
-------------------	-----	-----	-----	-----

Semestrlar bo'yicha mashg'ulot turlariga ajratilgan soatlarning taqsimoti:

Semestr	Umumiy yuklama	Auditoriya yuklamasi	Ma'ruza soatlari	Amaliy soatlari	Mustaqil ta'lim soati
I	180	72	36	36	108
II	180	72	36	36	108
Jami	360	144	72	72	216

I.Fanning mazmuni

“Amaliy matematika” fanini o'qitishning maqsadi – iqtisodiy tushunchalarning matematik mohiyatini tushuntirish hamda talabalarda iqtisodiy jarayonlarga matematik metodlarni tatbiq etish ko'nikmalarini shakllantirishdan iborat.

Fanning vazifasi – nazariy bilimlarni o'rganish, matematik ta'limni zamonaviy iqtisodchi fundamental tayyorgarligining muhim tarkibiy qismi sifatida qarash orqali ixtisoslik fanlarini o'rganish uchun tayyorlash. Talabalarning matematik kompetentligini shakllantirish.

II. Asosiy nazariy qism (ma'ruza mashg'ulotlari)

I modul. Chiziqli algebra asoslari va uning tadbirlari

1-mavzu. Matritsalar va ular ustida amallar

Fanning predmet va vazifalari. Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish va modellar haqida tushuncha. Matritsalar haqida asosiy tushunchalar va ular ustida chiziqli amallar. Matritsa turlari: ustun matritsa, satr matritsa, uchburchak matritsa va h.k. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi. Texnologik matritsa. Ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalasi va boshqa iqtisodiy masalalarni modellashtirishda matritsalarining o'rni.

2-mavzu. Determinantlar nazariyasi

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar. Inversiya. n -tartibli determinant. Determinantning asosiy xossalari. Determinantni satr va ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblash. Minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalari. Laplas teoremasi. Determinantni hisoblashda Excel dasturidan foydalanish.

3-mavzu. Matritsa va vektorlar sistemasining rangi

Matritsalar ustida elementar almashtirishlar. Teskari matritsa. Teskari matritsani qurish usullari. Matritsa rangi va uni hisoblash usullari. Bazis minor haqida teorema. Determinant nolga tengligining zaruriy sharti. Matritsalar nazariyasining iqtisodiyotdagi ba'zi tatbiqlari. Vektorlar sistemasi. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi haqidagi teorema.

4-mavzu. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari

I. L. Gamov

Ikki va ko'p noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi. Tenglamalar sistemasida asosiy va kengaytirilgan matritsa tushunchasi. Sistemani matritsa ko'rinishida ifodalash. Sistemaning yechimi. Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lish va birgalikda bo'lmaslik sharti. Chiziqli tenglamalar sistemasida elementar almashtirishlar. IS-LM chiziqli modeli va uning amaliy ahamiyati. Ekvivalent chiziqli tenglamalar sistemasi. Ikki va ko'p noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish. Ikki va ko'p noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss Jordan usulida yechish.

5 -mavzu. Matritsalar usuli. Kramer qoidasi

Ikki va ko'p o'zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda Kramer qoidasidan foydalanish. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasining bazis yechimlari. Nomanfiy bazis yechimlarni topish. Matritsali tenglamalar. IS-LM chiziqli modelining tahlili.

6-mavzu. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Fundamental yechimlar sistemasi

Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi. Bir jinsli tenglamalar sistemasi va bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlari orasidagi bog'lanish. Fundamental yechimlar sistemasi. Leonte'ev modeli

7-mavzu. Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo

Arifmetik vektorlar. n -o'lchovli arifmetik vektor fazo. Arifmetik vektorlar uzunligi va ular orasidagi burchak. Fazoda vektor koordinatasi va bazisi. Ixtiyoriy bazisda berilgan vektorlar ustida amallar. Fazo osti, chiziqli qobiqlar, gipertekisliklar. Vektor ko'paytma. Chiziqli fazo va unga doir misollar. Chiziqli bog'liqlik. Bazis va koordinatalar. Chekli o'lchovli chiziqli fazo izomorfizmi. Yevklid fazosi. Asosiy metrik tushunchalar. Yevklid fazo izomorfizmi.

8-mavzu. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari

Chekli o'lchovli fazoda chiziqli operatorning umumiy ko'rinishi. Chiziqli operatorlar ustida amallar. Chiziqli operatorlarning chiziqli fazosi. Chiziqli operator matritsasini yangi bazisga o'tishda almashtirish. Yevklid fazosida chiziqli operatorlar. Oddiy strukturali operator. Simmetrik operatorlar hamda uning xos qiymatlari va xos vektorlari. Savdoning chiziqli modeli.

9-mavzu. Kvadratik formalar

Kvadratik formaning kanonik va normal ko'rinishlari. Kvadratik formani kanonik shaklga keltirish usullari. Inersiya qonuni. Ishorasi aniqlangan kvadratik formalar. Silvestr me'zoni. Ikkinchi tartibli tenglamani kanonik shaklga keltirish va ikkinchi tartibli chiziqlarni klassifikatsiyalash. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni aniqlovchi ba'zi xarakteristikalar.

10-mavzu. Analitik geometriya elementlari

Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. To'g'ri chiziq tenglamasini turli ko'rinishda berilishi. Tekislikda ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlarning parallelizm va perpendikulyarlik shartlari. Aylana va ellips. Giperbola va parabola. Talab va taklif chiziqlari.

II modul. Matematik analiz asoslari va uning tatbiqlari

I. L. Gamov

11-mavzu. n fazoda nuqtalarning o‘zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti.

Haqiqiy sonlar to‘plami. Ichki nuqtalar. Ochiq va yopiq to‘plamlar. Qavariq to‘plamlar. To‘plam chegarasi. Sonli ketma-ketliklar va ularning limiti. Sonli ketma-ketliklar limitining yagonaligi. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning chegaralanganligi. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar. Koshi kriteriyasi. Bozorning o‘rgimchaksimon modeli.

12-mavzu. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o‘rni. Kobb-Duglas funksiyasi

Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plami. Murakkab funksiyalar. Oshkormas funksiyalar. Funksiyaning parametrik berilishi. Qavariq va botiq funksiyalar. Teskari funksiya. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya. Ishlab chiqarish funksiyasi. Daromad funksiyasi. Xarajat funksiyasi. Foydalilik funksiyasi. Kobb-Duglas funksiyasi.

13-mavzu. Funksiya limiti va uzluksizligi

Funksiya limitining Koshi ta’rifi. Funksiya limitining Geyne ta’rifi. Bu a’riflarning ekvivalentligi. Limitlar xossalari va ularni hisoblash usullari. Funksiya limiti mavjudligining Koshi alomati. Ajoyib limitlar. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning nuqtadagi limiti. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi. Uzilish nuqtalari va ularning klassifikatsiyasi. Kesmada va to‘plamda uzluksiz funksiyalar. Nuqtada va kesmada uzluksiz funksiyalar xossalari. Funksiyaning tekis uzluksizligi. Kantor teoremasi. Uzluksiz funksiyalarning oraliq qiymatlari. Marjinal ko‘rsatkichlar.

14-mavzu. Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasi va differensial

Hosila. Hosilaning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma’nolari. Funksiyaning differensial. Yig‘indi, ko‘paytma va bo‘linmaning hosilasi va differensial. Murakkab funksiyaning hosilasi. Birinchi tartibli differensialning invariantligi. Teskari funksiyaning differensiallash. Yuqori tartibli hosila va differensiallar.

15-mavzu. Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremlar. Hosilaning ba’zi tatbiqlari

Differensiallanuvchi funksiya tushunchasi. Differensiallanuvchi funksiyalarning asosiy xossalari. Ferma teoremasi. Roll teoremasi. Lagranj (o‘rta qiymat) teoremasi. Koshi teoremasi. Bu teoremlarning amaliy va nazariy ahamiyati. Teylor formulasi. Elementar funksiyalarni Teylor formulasi bo‘yicha yoyish. Lopital qoidasi. Mehnat unumdorligi. Marjinal mahsulot. Talab va taklif egiluvchanligi. Marjinal miqdorlar. Logarifmik hosilaning qo‘llanilishiga doir misollar.

16-mavzu. Bir o‘zgaruvchili funksiyaning tekshirish

Funksiyaning ekstremum nuqtalari. Ekstremum mavjudligining zaruriy va yetarlilik shartlari. Funksiyaning qavariqlik sharti. Bukulish nuqtalari. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari. Funksiyaning vertikal, gorizontal va og‘ma asimptotalari va ularni aniqlash usullari. Funksiya qavariqligi va uni qavariqlikka tekshirish qoidalari. Funksiyaning tekshirish va grafigini yasashning umumiy sxemasi. Funksiya grafigini

I. L. Gamov

yasash. Differensiallanuvchi funksiyalar uchun monotonlik va qavariqlik sharti.

17-mavzu. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differensial.

Xususiy hosila va yuqori tartibli differensiallar

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari. Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligi. Differensialning geometrik ma‘nosi. Murakkab funksiyalarning differensiallanuvchanligi va birinchi tartibli differensial shaklining invariantligi. Aralash xususiy hosilalarning tengligi haqidagi teorema. Oshkormas funksiyalar. Oshkormas funksiya mavjudligi va differensiallanuvchanligi haqidagi teoremlar.

18-mavzu. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi

Yo‘nalish bo‘yicha hosila. Gradiyent. Yuqori tartibli hosila va differensiallar. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi. Ikki va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning Teylor qatoriga yoyish. Gesse matritsasi. Simmetrik matritsa ishorasini aniqlash. Shartsiz ekstremum masalasi va uning iqtisodiy jarayonlar uchun ahamiyati.

19-mavzu. Aniqmas integral

Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral. Aniqmas integralning xossalari. Elementar funksiyalarni integrallash. Bo‘laklab integrallash. Marjinal daromad, xarajat va foyda funksiyasiga ko‘ra yalpi daromad, umumiy xarajat va yalpi foyda funksiyalarini topish. Talab va taklif egiluvchanlik funksiyalariga ko‘ra talab va taklif funksiyalarini topish.

20-mavzu. Aniq integral

Egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash masalasi. Aniq integralning ta‘rifi. Aniq integralning xossalari. Integrallanuvchi funksiyalar sinfi. Aniq integral uchun o‘rta qiymat teoremasi. Nyuton-Leybnits formulasi. O‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash usullari. Iste‘molchining va ta‘minotchining ortiqcha foydasi. Cheksiz oraliqda chegaralangan funksiya integral. Chekli oraliqda chegaralanmagan funksiya integral. Aniq integralni taqribiy hisoblash: to‘g‘ri to‘rtburchaklar, trapetsiya va Simpson formulalari. Aniq integralning geometrik va iqtisodiy ma‘nosi. Yoy uzunligini hisoblash. Yassi sirt yuzini hisoblash. Aylanma jism hajmi va sirtini hisoblash. Vaqtning ma‘lum oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi. Pul oqimini diskontlash masalasi.

21-mavzu. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Differensial tenglamalar haqida asosiy tushunchalar. Differensial tenglamalar yechimi. Birinchi tartibli differensial tenglamalarga doir umumiy masalalar. Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi. O‘zgaruvchilarga ajraladigan tenglamalar. Chiziqli differensial tenglama. Bernulli tenglamasi. Ishlab chiqarishning tabiiy o‘sish modeli. Konkurensiya sharoitida ishlab chiqarishning o‘sishi. Keynsning dinamik modeli.

22-mavzu. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi va yechimlarning fundamental sistemasi. O‘zgaruvchi koeffitsiyentli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Ikkinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan differensial

I. L. Gamov

tenglamalar.

23-mavzu. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi

Differensial tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushunchalar. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini yuqori tartibli bitta tenglamaga keltirish va ularning ekvivalentligi. Differensial tenglamalar sistemasini yechish usullari:

- a) ikkinchi tartibli differensial tenglamaga keltirish yordamida; b) Vronskiy determinantidan foydalangan holda.

III modul. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari

24-mavzu. Elementar hodisalar fazosi. Ehtimolning ta'riflari

Fanning predmeti. Fandagi dastlabki ta'rif va tushunchalar. Hodisalar ustida amallar. Kombinatorika elementlari. Ehtimolning klassik, statistik va geometric ta'riflari. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining mazmuni, predmeti va iqtisodiy jarayonlarni o'rganishdagi ahamiyati.

25-mavzu. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari

Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari hamda ularning natijalarini tahlil qilish. Shartli ehtimollik. To'la grupp hosil qiluvchi hodisalar. Qarama-qarshi hodisalar. Kamida bitta hodisaning ro'y berish ehtimolini hisoblash. Uni hodisalarning ehtimollarini hisoblashdagi qulaylik tugdiruvchi tomonlarini misollar yordamida tushuntirib berish.

26-mavzu. To'la ehtimollik va Bayes formulalari

To'la ehtimollik va Bayes formulalarini keltirib chiqarish va olingan natijalarni amaliy misollar yordamida tahlil qilish. Kichik ehtimolli hodisalarning amalda mumkinmaslik prinsipini amaliy misollar yordamida tahlil qilish. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani iqtisodchiga iqtisodiy jarayon haqida mumkin qadar aniq tasavvur berishini va jarayonni boshqarish uchun kerakli yo'nalishlar berishini tushuntirish.

27-mavzu. Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi.

Erkli sinovlar ketma-ketligining ta'rifi. Bernulli formulasi. Eng ehtimolli sonni topish formulasi. Bernulli sxemasini polinomial sxemaga umumlashtirish.

28-mavzu. Limit teoremlari

Laplasning lokal va integral teoremlari. Har bir sinashda juda kichik ehtimollik bilan ro'y beradigan hodisalar uchun Puasson formulasi. Nisbiy chastotaning o'zgarish ehtimoldan chetlanishini baholash.

29-mavzu. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari

Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari. Diskret tasodifiy miqdor ehtimollarning taqsimot qonuni. Taqsimot (integral) funksiya va uning xossalari. Ehtimollar taqsimotining zichlik (differentsial) funksiyasi va uning xossalari.

30-mavzu. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristiklari

Tasodifiy miqdorning muhim sonli xarakteristiklari: matematik kutilma, dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish va ularning amaliy ahamiyati.

31-mavzu. Amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari

Amalda ko'p uchraydigan diskret taqsimot qonunlari: Binomial, Puasson,

I. Igamov

geometrik, gipergeometrik. Amalda ko'p uchraydigan uzluksiz taqsimot qonunlari: normal, ko'rsatkichli, tekis taqsimot qonuni. Normal taqsimot parametrlarining normal egri chiziqli formasiga ta'siri. Nazariy taqsimotning normal taqsimotdan chetlanishini baholash. Asimmetriya va eksess. Normal taqsimotga bog'liq taqsimotlar:

χ^2 -taqsimot, St'yudent taqsimoti, Fisher-Snedokorning F -taqsimoti. Ishonchlilik funksiyasi. Bir nechta tasodifiy

miqdorlar sistemasi haqida tushuncha. Bog'liqlik darajasining o'lchovi sifatida korrelyatsiya koeffitsiyentining kiritilishi. Shartli matematik kutilish. Tekislikda normal taqsimot qonuni.

32-mavzu. Katta sonlar qonuni. Markaziy limit teoremasi

Katta sonlar qonunining mohiyati va amaliy ahamiyati. Chebishev tengsizligi va teoremasi. Bernulli teoremasi. Markaziy limit teoremani bir xil va turli taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun keltirish. Markaziy limit teoremasining amaliy va nazariy ahamiyatini tushuntirish.

33-mavzu. Nuqtaviy va intervalli baholar

Statistik taqsimot. Emperik taqsimot funksiyasi. Poligon va gistogramma. Matematik statistikaning ikki asosiy masalasi. Tanlanmani ajratib olish usullari. Bosh o'rtacha qiymat. Bosh dispersiya. Tanlanma dispersiya. Variatsion qatorning boshqa xarakteristikalar. Shartli variantalar. Empirik taqsimotning normal taqsimotdan chetlanishini baholash. Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Baholarga qo'yiladigan talablar. Effektiv baho. Asosli baho. iljimagan baho. Nuqtaviy va intervalli baholar. Ishonch intervallari. Normal taqsimot noma'lum parametrlari uchun intervalli baholar. Matematik kutilma uchun ishonch oralig'i, o'rtacha kvadratik chetlanish uchun ishonch oralig'i.

34-mavzu. Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanish. Chiziqli regressiya tenglamasi

Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar va ularga doir amaliy misollar. Shartli o'rtacha qiymatlar. Regressiya tenglamasi. Korrelyatsiya nazariyasining ikki asosiy masalasi. Tanlanma to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasi. Eng kichik kvadratlar usuli. Tanlanma to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasi parametrlarini eng kichik

kvadratlar usuli bilan topish. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsiyenti va uning xossalari.

35-mavzu. Chiziqli regressiya tenglamasi. To'plamiy regressiya tenglamasi

Tanlanma korrelyatsion nisbat va uning xossalari. Chiziqli bo'lmagan korrelyatsion bog'lanish. Egri chiziqli regressiya tenglamalari. To'plamiy regressiya tenglamalari. Tanlanmaning xususiy korrelyatsiya koeffitsiyenti. Regression analiz. Regression analizni amaliy masalalardagi ahamiyati.

36-mavzu. Statistik gipotezalar

Statistik gipotezalar va ularning klassifikatsiyasi. I va II tur xatoliklar. Statistik kriteriy. Statistik gipotezalarni tekshirish uchun kriteriylarni kiritish. Kriteriylarning mumkin bo'lgan qiymatlari, kritik nuqta va kritik soha. O'ng, chap va ikki tomonli kritik sohalar. Kriteriya quvvati va mumkin bo'lgan eng quvvatli kriteriyni tanlash.

I. L. Gamov

Kritik sohani tanlash haqida qo‘shimcha ma’lumotlar. Kritik nuqta. Muvofiqlik kriteriyalari. Taqsimot funksiyasi noma’lum bo‘lgan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi haqidagi gipotezani tekshirish. Pirson kriteriysi va uning amalda qo‘llanishi.

IV modul. Matematik programmalashtirish masalalari

37-mavzu. Chiziqli programmalashtirish masalasi yechimlari va ularning xossalari. Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqini

Iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish. Eng sodda iqtisodiy masalalarning matematik modellari: ishlab chiqarishni tashkil etish va rivojlantirish modeli; optimal bichish modeli; iste’mol savati modeli. Chiziqli programmalashtirish masalasining standart shakli. Bazis yechim. Aynigan yechim. Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqini va xossalari. Grafik usul. Qavariq ko‘pburchaklar. Kompakt to‘plam tushunchasi. Optimal yechimning geometrik tahlili.

38-mavzu. Chiziqli programmalashtirish masalasini simpleks usulida yechish

Simpleks jadval. Chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini simpleks usuli yordamida topish. Yechimning optimallik sharti. Sun’iy bazis usuli. Aynigan chiziqli programmalashtirish masalalari va ularni yechish usullari. Iqtisodiy masalalarni simpleks usul bilan yechish.

39-mavzu. Chiziqli programmalashtirishda ikkilanish nazariyasi

Ikkilangan masala. Ikkilangan masalani tuzish usullari. Chiziqli programmalashtirishda ikkilanish nazariyasi. O‘zaro qo‘shma masalalar. Ikkilangan masalaning optimal yechimini topish. Ikkilanish nazariyasining asosiy teoremlari. Qo‘shma masalalarning iqtisodiy talqini. Berilgan va ikkilangan masalalarning optimal yechimlari orasidagi bog‘lanish.

40-mavzu. Chiziqli programmalashtirish masalasi yechimini ikkilanish nazariyasi yordamida tahlil qilish

Iqtisodiy masalalar yechimining tahlili. Chiziqli programmalashtirish masalasi maqsad funksiyasining differentsiallanuvchanligi va uning iqtisodiy ma’nosi. Ikkilanish nazariyasining asosiy teoremlari va ularning iqtisodiy talqini.

41-mavzu. Transport masalasi

Transport masalasining matematik modeli. Transport masalasi yechimlarining xossalari doir teoremlar. Ochiq va yopiq modeli transport masalalari. Transport masalasining boshlang‘ich tayanch yechimini topish uchun “shimoliy-g‘arbiy burchak”, “minimal xarajat” usullari. Transport masalasi yechimlarining xossalari doir teoremlar. Transport masalasi optimal yechimini topish uchun potensial tenglamani qurish. Transport masalasi optimal yechimini topish uchun potensiallar usuli. Aynigan transport masalasi.

42-mavzu. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi

Chiziqsiz programmalashtirish masalasi va uning geometrik talqini. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining turlari. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining xossalari. Grafik usuli.

43-mavzu. Lagranj ko‘paytuvchilari usuli

Lagranj ko‘paytuvchilari usuli. Lagranj funksiyasi. Tengsizlik sharti bilan berilgan

I. Igamov

shartli ekstremum haqida tushuncha va uni yechish usuli. Normal Lagranj funksiyasi. Tovarning har xil turlarini ishlab chiqarishdan daromad olish. Resurslarni optimal taqsimlash. Chiziqsiz programmalashtirish masalalarining iqtisodiy jarayonlarni talqin qilishdagi ahamiyati va roli.

44-mavzu. O‘yinlar nazariyasi elementlari. Matritsali o‘yin. Matritsali o‘yin va uni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish

O‘yinlar nazariyasi haqida asosiy tushunchalar. Matritsali o‘yinlar.

Sof strategiyalardagi o‘yinni yechish uchun minimaks-maksimin usuli. Aralash strategiyalardagi o‘yinning yechimi. Egar nuqta. Minimaks metodi.

45-mavzu. Matritsali o‘yin va uni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish

Minimaks metodini qo‘llash mumkin bo‘lmagan yuqori tartibli matritsali o‘yinlar. Egar nuqtani topish metodlari. Matritsali o‘yin bilan chiziqli programmalashtirish orasidagi bog‘lanish. Simpleks usuli yordamida matritsali o‘yinni yechish.

"maliy matematika" fani bo'yicha ma'ruza mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi.

№	Mavzular	soati
1	Matritsalar va ular ustida amallar. Determinantlar nazariyasi	2
2	Matritsa va vektorlar sistemasining rangi .	2
3	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari.	2
4	Matritsalar usuli. Kramer qoidasi.	2
5	Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Fundamental yechimlar sistemasi.	2
6	Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo va operatorlar.	2
7	Kvadratik formalar.	2
8	Analitik geometriya elementlari.	2
9	Yn fazoda nuqtalarning o‘zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti.	2

10	Bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o'rni. Kobb-Duglas funksiyasi.	2
11	Funksiya limiti va uzluksizligi.	2
12	Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi va differensial.	2
13	Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremlar. Hosilaning ba'zi tatbiqlari.	2
14	Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensial. Xususi hosila va yuqori tartibli differensiallar. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi..	2
15	Aniqmas integral. Aniq integral.	2
16	Birinchi tartibli differensial tenglamalar.	
17	Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.	2
18	Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi	2
	Jami	36
	2-semestr	
17	Elementar hodisalar fazosi. Ehtimolning ta'riflari	
18	Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari	2
19	To'la ehtimollik va Bayes formulalari.	2
3	Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi. . Limit teoremlari.	2
4	Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari.	2
5	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristiklari.	2
6	Amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari.	2
7	Katta sonlar qonuni. Markaziy limit teoremasi.	2
8	Nuqtaviy va intervalli baholar.	2

9	Funksional, statistik va korrelyatsion bogʻlanish. Chiziqli regressiya tenglamasi.	2
10	Chiziqsiz regressiya tenglamasi. Toʻplamli regressiya tenglamasi. Statistik gipotezalar.	2
11	Chiziqli programmashtirish masalasi yechimlari va ularning xossalari. Chiziqli programmashtirish masalasining geometrik talqini.	2
12	Chiziqli programmashtirish masalasini simpleks usulida yechish.	2
13	Chiziqli programmashtirishda ikkilanish nazariyasi.	2
14	Chiziqli programmashtirish masalasi yechimini ikkilanish nazariyasi yordamida tahlil qilish.	2
15	Transport masalasi.	2
16	Chiziqsiz programmashtirish masalasi.	2
17	Lagranj koʻpaytuvchilari usuli.	2
18	Oʻyinlar nazariyasi elementlari. Matritsali oʻyin. Matritsali oʻyin va uni chiziqli programmashtirish masalasiga keltirish.	2
	Jami	36
	Jami	72

IV. Amaliy mashgʻulotlar buyicha koʻrsatma va tavsiyalar (fan boʻyicha laboratoriya ishlari va kurs ishlari moʻljallanmagan)

Amaliy mashgʻulotlar uchun quyidagi mavzular tavsiya etiladi:

I modul. Chiziqli algebra asoslari va uning tatbiqlari

1-mavzu. Chiziqli algebraning asoslari va uning tadbiqlari Matritsalar va ular ustida amallar

2-mavzu. Determinantlar nazariyasi

3-mavzu. Matritsa va vektorlar sistemasining rangi

4-mavzu. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari

I. L. Gamov

5-mavzu. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli. Kramer qoidasi

6-mavzu. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini. Fundamental yechimlar sistemasini

7-mavzu. Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo

8-mavzu. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari

9-mavzu. Kvadratik formalar

10-mavzu. Analitik geometriya elementlari

II modul. Matematik analiz asoslari va uning tatbiqlari

11-mavzu. $\mathbb{R}^n$ fazoda nuqtalarning o'zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti

12-mavzu. Bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o'rni.

13-mavzu. Funksiya limiti va uzluksizligi

14-mavzu. Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi va differensial

15-mavzu. Differentsiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremlar. Hosilaning ba'zi tatbiqlari.

16-mavzu. Bir o'zgaruvchili funktsiyani tekshirish

17-mavzu. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differentsiali. Xususiy hosila va yuqori tartibli differentsiallar

18-mavzu. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi

19-mavzu. Aniqmas integral

20-mavzu. Aniq integral

21-mavzu. Birinchi tartibli differentsial tenglamalar

22-mavzu. Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalar

23-mavzu. Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasini

III modul. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari

24-mavzu. Elementar hodisalar fazosi. Ehtimolning ta'riflari

25-mavzu. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari

26-mavzu. To'la ehtimollik va Bayes formulalari

27-mavzu. Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi

28-mavzu. Limit teoremlari

29-mavzu. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari

30-mavzu. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristiklari

31-mavzu. Amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari

32-mavzu. Katta sonlar qonuni. Markaziy limit teoremasini

33-mavzu. Nuqtaviy va intervalli baholar

34-mavzu. Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanish. Chiziqli regressiya tenglamasi

35-mavzu. Chiziqsiz regressiya tenglamasi. To'plamiy regressiya tenglamasi

36-mavzu. Statistik gipotezalar

IV modul. Matematik programmashtirish masalalari

37-mavzu. Chiziqli programmashtirish masalasi: yechimlari va ularning xossalari.

I. L. Gamov

Chiziqli programmashtirish masalasining geometrik talqini

38-mavzu. Chiziqli programmashtirish masalasini simpleks usulida yechish

39-mavzu. Chiziqli programmashtirishda ikkilanish nazariyasi

40-mavzu. Chiziqli programmashtirish masalasi yechimini ikkilanish nazariyasi yordamida tahlil qilish

41-mavzu. Transport masalasi

42-mavzu. Chiziqsiz programmashtirish masalasi

43-mavzu. Lagranj ko'paytuvchilari usuli

44-mavzu. O'yinlar nazariyasi elementlari. Matritsali o'yin

45-mavzu. Matritsali o'yin va uni chiziqli programmashtirish masalasiga keltirish

"Amaliy matematika" fani bo'yicha amaliy mashg'ulotlarining kalendar tematik rejas.

№	Mavzular	Amal iyot soati
1	Chiziqli algebraning asoslari v uning tadbiqlari Matritsalar va ular ustida amallar.	2
2	Determinantlar nazariyasi.	2
3	Matritsa va vektorlar sistemasining rangi.	2
4	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari.	2
5	Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli. Kramer qoidasi	2
6	Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Fundamental yechimlar sistemasi.	2
7	Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari. Kvadratik formalar.	2
8	Analitik geometriya elementlari.	2
9	$\mathbb{R}^n$ fazoda nuqtalarning o'zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti.	2
10	Bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o'rni.	2

11	Funksiya limiti va uzluksizligi.	2
12	Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi va differensial.	2
13	Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremlar. Hosilaning ba'zi tatbiqlari.	2
14	Bir o'zgaruvchili funktsiyani tekshirish.	2
15	Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensial. Xususiy hosila va yuqori tartibli differensiallar. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi.	2
16	Aniqmas integral. Aniq integral	
17	Birinchi tartibli differensial tenglamalar.	2
18	Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.	2
	Jami	36
	2-semestr	
17	Elementar hodisalar fazosi. Ehtimolning ta'riflari. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari.	
18	To'la ehtimollik va Bayes formulalari.	2
19	Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi.	2
3	Limit teoremlari.	2
4	Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari.	2
5	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar.	2
6	Amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari.	2
7	Katta sonlar qonuni.Markaziy limit teoremasi Nuqtaviy va intervalli baholar.	2
8	Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanish. Chiziqli regressiya tenglamasi.	2
9	Chiziqsiz regressiya tenglamasi. To'plamiy regressiya tenglamasi.	2

10	Statistik gipotezalar.	2
11	Chiziqli programmashtirish masalasi: yechimlari va ularning xossalari. Chiziqli programmashtirish masalasining geometrik talqini.	2
12	Chiziqli programmashtirish masalasini simpleks usulida yechish.	2
13	Chiziqli programmashtirishda ikkilanish nazariyasi	2
14	Chiziqli programmashtirish masalasi yechimini ikkilanish nazariyasi yordamida tahlil qilish.	2
15	Transport masalasi.	2
16	Chiziqsiz programmashtirish masalasi.	2
17	Lagranj ko'paytuvchilari usuli. O'yinlar nazariyasi elementlari. Matritsali o'yin.	2
18	Matritsali o'yin va uni chiziqli programmashtirish masalasiga keltirish.	2
	Jami	36
	Jami	72

V. Mustaqil ta'lim va mustaqil ishlar

Mustaqil ta'lim uchun tavsiya etiladigan mavzular:

1. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari.
2. Kvadratik formalar.
3. Iqtisodiy masalalarni yechishning ba'zi metodlari. Leontev modeli.
4. Leontevning mahsuldor modeli. Xalqaro savdo modeli.
5. Bozor iqtisodiyoti jarayonlarini modellashtirish. Iqtisodiy masalalarni grafik usulda yechish va tahlil qilish.
6. Iqtisodiy masalalarni simpleks usulda yechish. Modifikatsiyalangan simpleks usul. Xos chiziqli programmashtirish masalasi. Sikllanish. ϵ -usul.
7. Sun'iy bazis usuli.
8. ChPM da ikkilanish nazariyasi. Qo'shma masalalarni qurish va yechish.
9. Ikkilanish nazariyasi asosida iqtisodiy masalalarni yechimini tahlil qilish.
10. Ikkilangan simpleks usul.
11. Iqtisodiy masalalarning butun sonli yechimini topish.

I. E. Gamov

12. Transport masalalariga keltiriladigan taqsimot masalalari. Uskunalarini optimal taqsimlash masalalari. Mutaxassislarini ish o'rinlariga optimal taqsimlash masalalari.
13. Bozorning o'rgimchaksimon modeli.
14. Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremlar. hosilaning ba'zi tatbiqlari. Teylor formulasi. Lopital qoidasi.
15. Bir o'zgaruvchili funktsiyani tekshirish. Foydani maksimallashtirish modeli.
16. Kvadratik programmashtirish va uni yechish usullari. Gradiyent usul.
17. Aniq va aniqmas integrallar.
18. Aniq integralning geometrik tatbiqlari.
19. Iste'molchi va ta'minotchining ortiqcha foydasi.
20. Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi modeli. Pul oqimini diskontlash modeli.
21. Xosmas integral. Aniq integralni taqribiy hisoblash.
22. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.
23. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.
24. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.
25. Birinchi va ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglamalar.
26. Dinamik modellar. Xarrod-Domar modeli. Solou modeli. Samuelson-Xiks modeli.
27. Dinamik programmashtirish. Uskunalarini ta'mirlash va yangilash masalasini yechish. Kapital mablag'larni optimal taqsimlash masalasi.
28. Elementar hodisalar fazosi. Hodisalar ustida amallar. Ehtimolning ta'rifi.
29. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari. To'la ehtimollik va Bayes formulalari.
30. Erkli sinovlar ketma-ketligi. Limit teoremlar.
31. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari.
32. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar va ularning xossalari.
33. Amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari.
34. Katta sonlar qonuni va uning amaliy ahamiyati. Markaziy limit teoremasi.
35. Tanlanma metod. Statistik taqsimot.
36. Statistik baholar va ularga qo'yiladigan talablar.
37. Intervalli baholar.
38. Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar.
39. Tanlanma to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasi. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsiyenti.
40. Tanlanma korrelyatsion nisbat. Egri chiziqli va to'plamiy korrelyatsiya.
41. Statistik gipotezalar. Statistik kriteriy.
42. "Tuzatilgan" tanlanma dispersiyani normal taqsimlangan bosh to'plam dispersiyasi bilan taqqoslash.
43. Normal taqsimlangan bosh to'plam o'rtachalarini erkli tanlanmalar asosida taqqoslash
44. Veksellarni diskont qilish va hisoblash.
45. Qimmatbaho qog'ozlar bo'yicha foizlar va dividendlar.
46. Murakkab hisob stavkasi.

47. Ssuda foizlarining murakkab stavkalari.
48. Jamg'armaning joriy qiymatini aniqlash.
49. Jamg'armaning o'sish koeffitsiyenti va yig'ma miqdori.
50. Uzluksiz o'sish va uzluksiz diskontlash. Uzluksiz foizlar.
51. Boshlang'ich kapital va o'zgarmas daromadlar oqimi uchun investitsiya tavsiflarini aniqlash.
52. Uskunalarni ijaraga berishning foydalilik darajasini topish.
53. Inflyatsiya va soliqni nazarga oluvchi foiz stavkasi.
54. Sug'urta anunteti va uning bahosi.
55. Shaxsiy sug'urtalashda sug'urta zahiralari.
56. Tavakkalchilik va uni hisoblash.
57. O'zgaruvchan rentalarni hisoblash.
58. Arifmetik progressiya bo'yicha o'zgaruvchan rentalarni hisoblash.
59. Geometrik progressiya bo'yicha o'zgaruvchan rentalarni hisoblash.
60. Qoldirilgan rentalarni baholash.
61. Qarz uzishning o'rtacha muddati va foiz stavkasi miqdorini aniqlash.
62. Inoteka kreditiga doir masalalar.
63. Investitsiya jarayonlarini modellashtirish.
64. Hayotni sug'urtalash. Nafaqa sug'urtasini hisoblash.
65. q - muddatli rentalarni hisoblash.
66. Iqtisodiyotdagi o'yinli modellar.
67. Moliya-kredit operatsiyalarini modellashtirish.
68. Tavakkalchilik va noaniqlik sharoitida iqtisodiy yechimlarni qabul qilish usullari. Mustaqil o'zlashtiriladigan mavzular bo'yicha talabalar tomonidan individual topshiriqlar variantlarini ishlab topshirishlari tavsiya etiladi.

" Iqtisodchilar uchun matematika" fani bo'yicha mustaqil ta'limning kalendar tematik rejas

1-semestr

№	Mustaqil ta'lim mavzulari	Ajratilgan soat
1	Chiziqli operatorlar va ularning xossalari.	4
2	Kvadratik formalar.	5
3	Iqtisodiy masalalarni yechishning ba'zi metodlari. Leontev modeli.	5
4	Leontevning mahsuldor modeli. Xalqaro savdo modeli.	4
5	Bozor iqtisodiyoti jarayonlarini modellashtirish. Iqtisodiy masalalarni grafik usulda yechish va tahlil qilish.	5
6	Iqtisodiy masalalarni simpleks usulda yechish. Modifitsirlangan simpleks usul. Xos chiziqli programmashtirish masalasi. Sikllanish. ε	5

I. E. Gamov

	-usul.	
7	Sun'iy bazis usuli.	4
8	ChPM da ikkilanish nazariyasi. Qo'shma masalalarni qurish va yechish.	5
9	Ikkilanish nazariyasi asosida iqtisodiy masalalarni yechimini tahlil qilish.	5
10	Ikkilangan simpleks usul.	5
11	Iqtisodiy masalalarning butun sonli yechimini topish.	5
12	Transport masalalariga keltiriladigan taqsimot masalalari. Uskunalarini optimal taqsimlash masalalari. Mutaxassislarni ish o'rinlariga optimal taqsimlash masalalari.	5
13	Bozorning o'rgimchaksimon modeli.	5
14	Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremlar. hosilaning ba'zi tatbiqlari. Teylor formulasi. Lopital qoidasi.	5
15	Bir o'zgaruvchili funktsiyani tekshirish. Foydani maksimallashtirish modeli.	5
16	Kvadratik programmashtirish va uni yechish usullari. Gradiyent usul.	4
17	Aniq va aniqmas integrallar.	4
18	Aniq integralning geometrik tatbiqlari.	4
19	Iste'molchi va ta'minotchining ortiqcha foydasi.	5
20	Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi modeli. Pul oqimini diskontlash modeli.	5
21	Xosmas integral. Aniq integralni taqribiy hisoblash.	4
22	Birinchi tartibli differensial tenglamalar. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.	5
23	Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi. Birinchi va ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglamalar.	5
	Jami	108
	2-semestr	
24	Dinamik modellar. Xarrod-Domar modeli. Solou modeli. Samuelson-Xiks modeli.	4
25	Dinamik programmashtirish. Uskunalarini ta'mirlash va yangilash masalasini yechish. Kapital mablag'larni optimal taqsimlash masalasi.	4
26	Elementar hodisalar fazosi. Hodisalar ustida amallar. Ehtimolning ta'riflari.	4
27	Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari. To'la ehtimollik va Bayes	4

	formulalari.	
28	Erkli sinovlar ketma-ketligi. Limit teoremlar.	4
29	Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari.	4
30	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristiklari va ularning xossalari.	4
31	Amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari.	4
32	Katta sonlar qonuni va uning amaliy ahamiyati. Markaziy limit teoremasi.	4
33	Tanlanma metod. Statistika taqsimot.	4
34	Statistik baholar va ularga qo'yiladigan talablar.	4
35	Intervall baholar . Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar.	4
36	Tanlanma to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasi. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsiyenti. Tanlanma korrelyatsion nisbat. Egri chiziqli va to'plamiy korrelyatsiya.	4
37	Statistik gipotezalar. Statistik kriteriy. "Tuzatilgan" tanlanma dispersiyani normal taqsimlangan bosh to'plam dispersiyasi bilan taqqoslash.	4
38	Normal taqsimlangan bosh to'plam o'rtachalarini erkli tanlanmalar asosida taqqoslash. Veksellarni diskont qilish va hisoblash.	4
39	Qimmatbaho qog'ozlar bo'yicha foizlar va dividendlar. Murakkab hisob stavkasi.	4
40	Murakkab hisob stavkasi. Ssuda foizlarining murakkab stavkalari.	5
41	Jamg'armaning joriy qiymatini aniqlash. Jamg'armaning o'sish koeffitsiyenti va yig'ma miqdori.	5
42	Uzluksiz o'sish va uzluksiz diskontlash. Uzluksiz foizlar. Boshlang'ich kapital va o'zgaras daromadlar oqimi uchun investitsiya tavsiflarini aniqlash.	5
43	Uskunalarini ijaraga berishning foydalilik darajasini topish. Inflyatsiya va soliqni nazarga oluvchi foiz stavkasi.	5
44	Sug'urta anunteti va uning bahosi. Shaxsiy sug'urtalashda sug'urta zahiralar.	5
45	Tavakkalchilik va uni hisoblash. O'zgaruvchan rentalarni hisoblash.	5
46	O'zgaruvchan rentalarni hisoblash. Arifmetik progressiya bo'yicha o'zgaruvchan rentalarni hisoblash. Geometrik progressiya bo'yicha o'zgaruvchan rentalarni hisoblash.	5
47	Qoldirilgan rentalarni baholash. Qarz uzishning o'rtacha muddati va foiz stavkasi miqdorini aniqlash. Inoteka kreditiga doir masalalar.	5

	Investitsiya jarayonlarini modellashtirish.	
48	Hayotni sug'urtalash. Nafaqa sug'urtasini hisoblash. Hayotni sug'urtalash. Nafaqa sug'urtasini hisoblash. q - muddatli rentalarni hisoblash.	5
49	Iqtisodiyotdagi o'yinli modellar. Moliya-kredit operatsiyalarini odellashtirish. Tavakkalchilik va noaniqlik sharoitida iqtisodiy yechimlarni qabul qilish usullari.	4
	Jami	108
	Jami	216

VI. Fan o'qitilishining natijalari (shakllanadigan kompetensiyalar)

Fanni o'zlashtirish natijasida talaba:

- matematik modellashtirish, matritsa va determinantlar nazariyasini; algebraik tenglamalar sistemasini tahlil etish, uning yechimlarini topish; chiziqli fazo va operatorlar; qavariq to'plam va ularning xossalari; differensial va integral hisob hamda qatorlar tushunchalari haqida **tasavvurga ega bo'lishi**;
- chiziqli va Yevklid fazolarning mohiyatini va mazmunini, vektorlarning chiziqli bog'liqligi va chiziqli erkliligini, vektorlar sistemasining rangini, fazoning bazisi va o'lchovini; iqtisodiy muammolarning optimal yechimlarini topish va bu yechimlarni tahlil qilish; chiziqli fazoda uning bir fazo ostidan ikkinchi fazo ostini amalga oshirish; simpleks, Lagranj ko'paytuvchilari metodlarini hamda o'yinlar nazariyasini qo'llash **ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak**;
- statistik ma'lumotlarni to'plash, guruhlash va tahlil qilish, iqtisodiy jarayonlarning rivojlanishini prognoz qilish, iqtisodiy muammolarning matematik modellarini tuzish va optimallashtirish; iqtisodiy jarayonlarini dispersion va regression tahlil qilish; differensial va integral hisob formulalaridan iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilish **malakalariga ega bo'lishi kerak**.

VII. Ta'lim texnologiyalari va metodlari:

- ma'ruza, amaliy mashg'ulotlarda grafik organeyzerlardan foydalanish;
 - kichik guruhlarda ishlash;
 - o'yinli metodlar.

VIII. Kreditlarni olish uchun talablar:

Fanga oid nazariy va amaliy bilimlarni to'la o'zlashtirish, iqtisodiy mazmundagi amaliy masalalarning matematik modelini qurish, yechish, interpretatsiya qilish ko'nikmasiga ega bo'lish va joriy, oraliq nazorat shakllarida berilgan vazifa va topshiriqlarni bajarish, yakuniy nazorat bo'yicha yozma ishni topshirish.

Baholash turlari	Maksimal ball	O'tkazish vaqti
------------------	---------------	-----------------

Joriy nazorat:	30	
1. Darslarga qatnashganlik va o'zlashtirishi darajasi. 2. Amaliy mashg'ulotlardagi faolligi, amaliy mashg'ulot daftarlarining yuritilishi va holati. 3. Mustaqil ta'lim topshiriqlarining o'z vaqtida va sifatli bajarilishi, o'zlashtirishi darajasi.	30	Semestr davomida
Oraliq nazorat:	20	
Darslarga qatnashganlik darajasi. Ma'ruza darslaridagi faolligi, konspekt daftarlarining yuritilishi va to'liqligi. Talabalarining mustaqil ta'lim topshiriqlarini o'z vaqtida va sifatli bajarishi va o'zlashtirish. Og'zaki savol-javoblar va boshqa nazorat turlari natijalari bo'yicha	20	9 va 18 hafta
Yakuniy nazorat:	50	18 hafta

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrisaning rangini toping.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ matrisalar berilgan. $2A + 3B$

matrisani toping.

A) $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 \\ 15 & 5 & 18 \\ 11 & 24 & 10 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 10 & -8 & 11 \\ 15 & 5 & 18 \\ 11 & -24 & 10 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 \\ 15 & -5 & 18 \\ 11 & 24 & 10 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 \\ 15 & -10 & 18 \\ 11 & 24 & 10 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ matrisaning rangini aniqlang.

A) 2 ; B) 3 ; C) 1 ; D) 4 ; .

4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisaga teskari matrisani toping.

A) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ B) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ C) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ D) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ matrisaga teskari matrisani toping.

A) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ D) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6) O'Ichami 4×4 bo'lgan matritsaning nechta 2-tartibli va nechta 3-tartibli minorlari mavjud?

A) 16 va 9; B) 25 va 16; C) 36 va 9; D) 36 va 16.

7) Agar n ta noma'lumli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi aniqmas sistema bo'lsa. uning asosiy A va kengaytirilgan B matritsalarini ranglari qanday bog'langan bo'ladi?

A) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) < n$ B) $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(B)$

C) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = n$ D) $\text{rang}(A) < n$

8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

A) 0 B) 1 C) -1 D) -2

9) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

A) 15 B) -52 C) 0 D) 52

10) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

A) $\cos 2x$ B) 0 C) $\sin 2x$ D) 1

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$ sistema yechimi qaysi javobda ko'rsatilgan?

A) (2:1) B) (1:1) C) (-1:1) D) (1:-1)

2) $\begin{cases} 5x - 4y = -9 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$ sistema yechimi qaysi javobda ko'rsatilgan?

A) (-1:1) B) (2:1) C) (1:-1) D) (1:2)

3) $\begin{cases} 3x + 5y = 5 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$ sistema yechimini toping.

A) (5:-2) B) (2:5) C) (-2:5) D) (0:1)

4) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ sistema yechimini toping.

A) (13:3:8) B) (8:3:13) C) (3:13:-8) D) (-1:4:2)

5) $\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ sistema yechimini toping.

A) (-2:3:-5) B) (3:-2:-5) C) (2:5:3) D) (0:1:-1)

6) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ sistema yechimini toping.

A) (13:3:8) B) (2:-3:13) C) (3:13:8) D) (4:1:0)

7) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 4x_1 - x_2 - 9x_3 = -9 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$ sistema yechimini toping.

A) (2:3:5) B) (-1:2:5) C) (-5:2:3) D) (5:2:3)

8) Sistemalar birgalikda bo'ladimi?

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 9 \\ 4x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 14 \end{cases}$

A) ha B) yo`q C) mumkin emas D) B va C javoblar to'g'ri

9) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ bir jinsli tenglamalar sistemasini umumiy yechimini toping.

A) (13t:3t:8t) B) (8t:3t:13t) C) (3t:13t:-8t) D) (-1t:4t:2t)

10) $\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$ bir jinsli tenglamalar sistemasini umumiy yechimini toping.

A) (-2t:3t:-5t) B) (3t:-2t:-5t) C) (2t:5t:3t) D) (0t:1t:-1t)

1. Koordinata boshidan $A(1;\sqrt{3})$ nuqttagacha bo'lgan masofani toping

A) 3 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $\sqrt{3}-1$

2. Ikki nuqta orasidagi masofani toping $A(0;0)$, $B(3;-4)$

A)5 B)1 C)7 D) $\sqrt{7}$

3. Ikki nuqta orasidagi masofani toping $A(3;-4)$, $B(-3;4)$

A) 0 B) 14 C) 10 D) $\sqrt{10}$

4. $M(3;-2)$ nuqtadan $N(-9,y)$ nuqtagacha bo'lgan masofa 13 ga teng. Agar $\overline{MN}$ kesma abssissa o'qi bilan o'tkir burchak tashkil etsa, N nuqtaning ikkinchi koordinatasini toping
A) -7 B) 3 C) -9 D) 9
5. Uchburchakning uchlari $M(-1;3)$, $N(1;2)$, $P(0;4)$ berilgan bo'lsa, uni tomonlari uzunligini aniqlang.
A) $5;5;2$ B) $\sqrt{5};\sqrt{5};2$ C) $\sqrt{5};\sqrt{5};\sqrt{2}$ D) $5;\sqrt{5};\sqrt{2}$.
6. $A(3;5)$ va $B(-1;1)$ nuqtalari berilgan. $\overline{AB}$ kesmaning o'rta nuqta koordinatasini aniqlang
A) $(1;-3)$ B) $(1;-2)$ C) $(-1;2)$ D) $(-1;-2)$
7. $\overline{MP}$ kesmaning o'rta nuqta koordinatasi $(1;4)$ teng, P nuqtaning koordinatasi esa $(-2;2)$ teng bo'lsa, M nuqtaning koordinatasini aniqlang
A) $(4;6)$ B) $(6;4)$ C) $(-6;-4)$ D) $(-4;-6)$
8. $\vec{a}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},0\right)$ va $\vec{b}(3,2,1)$ vector berilgan. $\vec{k}=6\vec{a}+\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.
A) $\vec{k}(3,3,2)$ B) $\vec{k}(6,4,1)$ C) $\vec{k}(3,4,6)$ D) $\vec{k}(7,6,0)$
9. $\vec{a}(1,2,3)$ va $\vec{b}(2,0,1)$ vektorlar berilgan $|\vec{a}-\vec{b}|$ vektor uzunligini toping.
A) 4 B) -4 C) -5 D) 3
10. $\vec{a}(3,4,0)$ va $\vec{b}(0,3,2)$ vektorlar berilgan $|\vec{3a}-2\vec{b}|$ vektor uzunligini toping.
A) $\sqrt{133}$ B) $\sqrt{135}$ C) $\sqrt{120}$ D) $\sqrt{134}$

Asosiy adabiyotlar

1. Xashimov A., Babadjanov Sh., Xujaniyozova G. Iqtisodchilar uchun matematika. Darslik. T.: "Iqtisod-moliya", 2019. 572 b.
2. Бабаджанов Ш., Наимов А., Хашимов А. Математика для экономистов. Учебник. Т.: "Iqtisod-moliya". 2019. 1200 с.
3. Татарников О.В., Швед Е.В., Шершнеv В.Г. Высшая математика для экономистов. Учебник. М.: КНОРУС, 2021. 630 с.

Qo'shimcha adabiyotlar

4. O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasi. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabrdagi PF-5847-son Farmoni.
5. Mirziyoyev Sh.M. Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik – har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak. T.: "O'zbekiston" NMIU, 2017. 104 b.
6. Mirziyoyev Sh.M. Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. T.: "O'zbekiston" NMIU, 2017. 56 b.
7. Harek Capillski and Tomasz Zastawniak. Mathematics for Finance. An Introduction to Financial Engineering. Springer 2003. 317 p.
8. David G. Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. Springer, 2008. 551 p.
9. Hoy M., Livernois J. et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London&Cambridge, 2011. 1117 p.
10. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O'quv qo'llanma. T.: "Iqtisod-moliya". 2017. 386 b.
11. Sharaxmetov Sh., Qurbanov O.T. Iqtisodchilar uchun matematika. Darslik. T.: O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti. 2017. 384 b.
12. Бабаджанов Ш.Ш. Сборник задач по дисциплине «Математика для

Г.Эгамов

- экономистов». Методическое пособие. Т.: ТФИ. 2017. 296 с.
13. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов. Учебное пособие. Т.: “Iqtisod moliya”. 2018. 746 с.
14. Xashimov A.R., Ochilova N.K., Axmedov M.I., Sotvoldiyev A.I. Iqtisodiy matematika. O‘quv qo‘llanma. Т.: “Fan va texnologiya”. 2018. 352 b.
15. Xashimov A.R., Xujaniyozova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika (mustaqil ta’lim bo‘yicha praktikum). O‘quv qo‘llanma. Т.: “Iqtisod-moliya”. 2019. 400 b.
16. Бабаджанов Ш.Ш. Финансовая математика. Учебное пособие. Т.: Издательство Национального общества философов Узбекистана 2019. 192 с.
17. Под общей редакцией О.В.Татарникова. Высшая математика для экономистов. ПРАКТИКУМ. М.: КНОРУС, 2020. 317 с.
18. Xashimov A.R., Sotvoldiyev A.I., Xujaniyozova G.S., Xolbozorov Q.X. Iqtisodchilar uchun matematika. 1-modul (chiziqli algebra asoslari va uning iqtisodiyotga tatbiqlari). Darslik. Т.: “Nihol-print” OK. 2022. 316 b.
19. Xashimov A.R., Sotvoldiyev A.I., Xujaniyozova G.S., Xolbozorov Q.X. Iqtisodchilar uchun matematika. 2-modul (matematik tahlil asoslari va uning iqtisodiyotga tatbiqlari). Darslik. Т.: “Nihol-print” OK. 2022. 298 b.
- Axborot manbaalari**
20. www.gov.uz – (O‘zbekiston Respublikasi xukumat portali).
21. www.lex.uz – (O‘zbekiston Respublikasi Qonun xujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi).
22. [www.http://el.tfi.uz/pdf/mtpzogr.uzk.pdf](http://el.tfi.uz/pdf/mtpzogr.uzk.pdf) – (Toshkent moliya instituti electron kutubxonasi).

3.

