

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY
DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI
ILMIY KENGASH**

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

JO‘RABOYEV SAIDAXBOR SOLIJONOVICH

**KVATERNION VEKTOR FAZOLARDA BERILGAN YO‘LLARNING
 $Sp(n)$ GRUPPA TA‘SIRIGA NISBATAN EKVIVALENTLIGI**

01.01.01-Matematik analiz

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (phd) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent-2023

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on
physical-mathematical sciences**

Jo'raboyev Saidaxbor Solijonovich

Кватернион fazolarida berilgan yo'llarning $Sp(n)$ gruppaga ta'siriga nisbatan ekvivalentligi.....3

Журабоев Саидахбор Солижонович

Эквивалентность заданных путей в кватернионных векторных пространствах относительно действия группы $Sp(n)$21

Juraboyev Saidakhbor Solyjonovich

Equivalence of given paths in quaternion vector spaces with respect to the action of a group $Sp(n)$41

E'lon qilingan ishlar ro'yxati.....45

Список опубликованных работ

List of published works

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY
DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI
ILMIY KENGASH**

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

JO‘RABOYEV SAIDAXBOR SOLIJONOVICH

**KVATERNION VEKTOR FAZOLARDA BERILGAN YO‘LLARNING
 $Sp(n)$ GRUPPA TA‘SIRIGA NISBATAN EKVIVALENTLIGI**

01.01.01-Matematik analiz

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (phd) dissertatsiya
AVTOREFERATI**

Toshkent-2023

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda algebra va geometriya masalalariga keltiriladi. Xususan, geometrik obyektlarni ma’lum gruppaga ta’siriga nisbatan tasniflash masalasi shular jumlasidandir. Egri chiziq, sirt, ko‘pxillik kabi geometrik obyektlarni tasniflash muammosi invariant parametr tushunchasini kiritish orqali ularga mos vektor funksiyalarning (yo‘llarning) ekvivalentlik masalasiga keltiriladi. Ushbu yondashuv buyuk olim Sofus Li g‘oyalari asoslangan bo‘lib, unga ko‘ra ekvivalentlik masalasini hal etishda Li gruppasi ta’siriga nisbatan invariant funksiyalarning tavsiflash muammosini ko‘rib chiqish zarur. Bu turdagi masalalar proyektiv geometriya, noevklid geometriyasi va kompyuter grafikasi kabi fan tarmoqlarida alohida o‘rin egallaydi. Shu sababli kvaternion fazolarda berilgan yo‘llarning ekvivalentlik shartlarini aniqlash zamonaviy matematikada muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Hozirgi kunda kommutativ invariantlar nazariyasi bilan bir qatorda nokommutativ invariantlar nazariyasini o‘rganish, ularni algebraik, geometrik, analiz masalalariga tatbiq qilish fanning dolzarb mavzulariga aylanmoqda. Xususan, nokommutativ fazolarda berilgan geometrik obyektlarni tasniflash masalasini invariantlar nazariyasi usullaridan foydalanib o‘rganishda nokommutativ invariant tushunchalar va ularning algebraik-geometrik xususiyatlaridan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Nokommutativ invariant tushunchalar va ularning algebraik-geometrik xususiyatlari hali to‘la ma’noda tavsif etilmaganligi, bunday masalalarni biror xususiy hollarda o‘rganish zaruratini tug‘diradi. Shu nuqtayi nazardan kvaternion fazolarda berilgan yo‘llarning simplektik gruppaga ta’siriga nisbatan ekvivalentligi masalasi maqsadli tadqiqotlardan biridir.

Mamlakatimizda ilmiy-amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan va ishlab chiqarishda tatbiq etiladigan fundamental fanlarga juda katta e’tibor qaratilmoqda. Bugungi kunda respublikamizda turli geometrik obyektlarni ma’lum gruppaga ta’siriga nisbatan tasniflash masalalarini o‘rganish, ularni noevklid geometriyasi, kompyuter grafikasi va fanning boshqa sohalariga tatbiq qilish bo‘yicha muhim natijalarga erishildi. Matematika fanlarining ustuvor yo‘nalishlari hisoblangan “algebra va funksional analiz, differensial tenglamalar va matematik fizika, dinamik tizimlar, geometriya va topologiya, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, amaliy matematika va matematik modellashtirish” ixtisosliklari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi¹. Bunda kommutativ va nokommutativ invariantlar nazariyasi bo‘yicha ilmiy natijalarni ilm-fanning boshqa turdosh sohalarida qo‘llash muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

¹ O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqotlar muassasalari faoliyatini tashkil etish to‘g‘risida”gi 292-sonli qaror.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2017-yil 17-fevraldagi № PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Chiziqlarning Li gruppalari ta’siriga nisbatan ekvivalentlik masalalarini o‘rganish XX asr boshlarida E.Kartan tomonidan boshlangan bo‘lib, keyinchalik fanga “Kartan muammosi” nomi bilan kirib keldi. Bu muammoni harakatlanuvchi reppeplar usuli yordamida atroflicha o‘rganish Kartanning o‘zi tomonidan amalga oshirildi. Shuningdek, I.M.Yaglom tomonidan bir juft egri chiziqlarning ekvivalentlik masalasi $Sp(2n, \mathbb{R})$ gruppaga ta’siriga nisbatan hal etildi. Kartan muammosini o‘rganishdagi geometrik yondashuvlarni V.Blyashke, A.P.Shirokov, P.A.Shirokov, Yu.Aminov kabi olimlarning ishlarida ham ko‘rish mumkin. Bu olimlarning ishlarida masala Frene formulalari yordamida tadqiq qilingan bo‘lib, masala yechimi egrilik, buralish va boshqa geometrik tushunchalar orqali berilgan.

Ko‘p sonli egri chiziqlarning sistemalari uchun qo‘yilgan G -ekvivalentlik masalalarini o‘rganishda invariantlar nazariyasi usullari geometrik usullardan ko‘ra samaraliroq natijalarga olib keladi. Invariantlar nazariyasi usullaridan foydalanilganda Gilbertning 14-muammosini differensial analogini ko‘rib chiqish zarurati tug‘iladi. Bu turdagi masalalar bilan Dj.Xadjiyev va uning shogirdlari shug‘ullanishgan. Jumladan, chiziqli, maxsus chiziqli, ortogonal, maxsus ortogonal kabi gruppalar ta’siriga nisbatan invariant d -ratsional funksiyalar maydonining d -ratsional bazisini tiklash masalalari Dj.Xadjiyev, R.Aripov, A.Suktayeva, B.Tursunovlarning ishlarida o‘z aksini topgan. Q.Q.Mo‘minov, I.V.Chilin, U.Bekbayev, I.Oren, O.Peksen va R.G‘afforovlarning ishlarida psevdootogonal, simplektik, Galiley gruppalariga nisbatan chiziqlar va sirtlarning ekvivalentlik masalalari hal qilingan.

Yuqoridagi masalalarni kvaternion vektor fazolarda o‘rganish va masala yechimini Frene formulalari yordamida aniqlashga bo‘lgan dastlabki urinishlarni S.M.Salamon, K.Bharatxi, M.Nakaraj, A.Ergin, T.Bayrakdar, S.Giardinho kabi olimlarning ishlarida ko‘rish mumkin. Gilbertning 14-muammosini nokommutativ

analogiga doir asosiy natijalar G.Almkvits, M.Domokos, F.Dumas, V.Drenskiy, E.Formanek, V.K.Xarchenko, A.N.Koryukin kabi olimlar tomonidan keltirib o'tilgan. Ammo kvaternion fazoning ixtiyoriy chiziqli almashtirishlari gruppasi ta'siriga nisbatan invariant ko'phadlar algebrasi va uni ekvivalentlik masalalariga tatbiq qilish muammosi hali yetarlicha tadqiq qilinmagan. Bu esa dissertatsiya mavzusining dolzarbligini belgilaydi.

Tadqiqotning dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya Farg'ona davlat universiteti ilmiy tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq "Matematika" kafedrasining "Xususiy hosilali differensial tenglamalar, algebra, geometriya va analiz masalalari" mavzusidagi ilmiy-tadqiqot loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi kvaternion fazoning simplektik almashtirishlari gruppasi ta'siriga nisbatan invariant, differensial ratsional funksiyalar jismini hosil qiluvchilari sistemasini tavsiflash va olingan natijalarni yo'llarning ekvivalentlik masalasiga tatbiq qilishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

simplektik almashtirishlar gruppasi va uning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan invariant ko'phadlar algebrasining hosil qiluvchilari sistemasini tavsiflash;

simplektik almashtirishlar gruppasi va uning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan invariant differensial ratsional funksiyalar maydonining (jismining) hosil qiluvchilari sistemasini aniqlash;

haqiqiy fazolarda berilgan yo'llarning simplektik almashtirishlar gruppasining haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalent bo'lish shartlarini topish;

yo'llarning simplektik gruppaning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalent bo'lishi shartlari asosida aniqlangan maxsus matritsaviy tenglamalar sistemasi yechimining yagonaligini isbotlash;

kvaternion fazolarda berilgan yo'llarning simplektik almashtirishlar gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalentlik masalasini hal qilishdan iborat.

Tadqiqotning obykti kvaternion fazo, simplektik almashtirishlar gruppasi invariant differensial ko'phadlar, kvaternion fazolarda berilgan yo'llar hisoblanadi.

Tadqiqotning predmeti invariant matritsaviy funksiyalar, differensial invariant ko'phadlar, kvaternion matritsalar va ularning determinantlari, nokommutativ algebraga oid nazariy tushunchalardan iborat.

Tadqiqot usullari. Tadqiqot ishida matematik analiz, differensial geometriya, gruppalar nazariyasi, invariantlar nazariyasi, chiziqli algebra, kvaternionlar algebrasi, differensial tenglamalar nazariyasi kabi fan tarmoqlariga tegishli tushunchalar va usullardan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

simplektik almashtirishlar gruppasi va uning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan invariant ko'phadlar algebrasining hosil qiluvchilari sistemasi aniqlangan hamda ular orasidagi munosabatlar topilgan;

simplektik almashtirishlar gruppasi va uning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan invariant differensial ratsional funksiyalar maydonining (jismining) hosil qiluvchilari sistemasini tiklash haqidagi teoremlar isbotlangan;

haqiqiy fazoda berilgan yo'llarning simplektik almashtirishlar gruppasining haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalent bo'lishini zaruriy va yetarli shartlari topilgan;

simplektik gruppaning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan yo'llarning ekvivalent bo'lish shartlari asosida aniqlangan matritsaviy differensial tenglamalar sistemasining yechimlari mavjud va yagonaligi invariant matritsaviy funksiyalar yordamida isbotlangan;

kvaternion fazolarda berilgan yo'llarning simplektik almashtirishlar gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalent bo'lish shartlari matritsaviy funksiyalar va bichizikli formalalar yordamida topilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

olingan natijalar ba'zi Evklid bo'lmagan geometriyalarda obyektlarni kongruentlik shartlarini aniqlash va ularning mexanik ma'nolarini ishlab chiqishda qo'llanilgan;

nokommutativ algebra va nokommutativ geometriyaning turli masalalariga tatbiq etilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiya natijalarini ishonchliligi matematik analiz, differensial invariantlar nazariyasi, gruppalar nazariyasi, chiziqli algebra, kvaternionlar algebrasining ma'lum fundamental tushunchalaridan foydalanilganligi hamda matematik mulohazalarning va isbotlarning qat'iyiligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati simplektik gruppasi va uning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan invariant differensial formalarni qurish uslubi ishlab chiqilgan bo'lib, ular kvaternion fazolarda berilgan yo'llarni ekvivalentligi masalasini yechishda qo'llanilganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati differensial geometriya, noevklid geometriyasi, differensial tenglamalarni masalalariga tatbiq qilish bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiya tadqiqoti jarayonida olingan ilmiy natijalar quyidagi yo'nalishda amaliyotga joriy qilingan:

simplektik almashtirishlar ta'siriga nisbatan yo'llarning ekvivalentligi masalalariga doir natijalar MD-758.2022.1.1 raqamli "Tebrani jarayonlari va to'yingan jarayonlarni o'rganish uchun kasr dinamikasining matematik modellarini ishlab chiqish" mavzusidagi xorijiy fundamental loyihadagi nokommutativ jarayonlarni geometrik obrazlarini tiklash masalalarini o'rganishda foydalanilgan (Vitus Bering nomidagi Kamchatka davlat universitetining 2023-yil 4-sentabrdagi № 40-12 ma'lumotnomasi). Natijalar nokommutativ geometriyalarda berilgan chiziqlarning ekvivalent bo'lishi shartlarini aniqlash imkonini bergan;

kvaternion fazolarda berilgan yo'llarning $Sp(n)$ gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalentligi tadqiqotida olingan ilmiy natijalardan O'zbekiston Milliy universitetida 2017-2020 yillarda bajarilgan OT-F-4-(37-29) raqamli "A-analitik

funksiyalarning funksional xossalari va ularning qo‘llanishi. Matritsaviy sohalarda kompleks analizning ba’zi masalalari” fundamental loyihada foydalanildi. Xususan, kvaternion fazolarda berilgan yo‘llarning simplektik gruppasi va uning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta’siriga nisbatan ekvivalentlik kriteriyasini o‘rnatishdagi matritsaviy funksiyalardan, invariant differensial ratsional funksiyalar va ular orasidagi munosabatlardan loyihadagi ba’zi matritsaviy sohalarda avtomorfizmlar gruppasini tasniflash masalalarini o‘rganishda qo‘llanildi, (Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetining 2023-yil 8-sentabrdagi № 04/11-5324-son ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi, matritsaviy sohalar uchun avtomorfizmlar gruppasini tasniflash va ular yordamida integral formulalarni aniqlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 4 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida, shuningdek akademik A.Sadullayev rahbarligidagi shahar ilmiy seminarida, funksional analiz va uning tadbirlariga bag‘ishlangan shahar ilmiy seminarida (seminar rahbari f-m.f.d., prof. A.Raximov) muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 16 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 8 ta maqola, ulardan 5 tasi respublika va 3 tasi xorijiy jurnallarda nashr etilgan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, uch asosiy bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat bo‘lib, 121 sahifani tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining uztuvor yo‘nalishiga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekt va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalar bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning “**Boshlang‘ich ma’lumotlar**” deb nomlanuvchi bobi dissertatsiyaning asosini tashkil qiluvchi tushunchalarning ta’riflari va ulardan kelib chiquvchi ba’zi natijalarning tavsifiga bag‘ishlangan bo‘lib, 4 ta paragrafdan iborat. Dastlabki, 1.1 va 1.2 paragraflarda kvaternion sonlar jismi, kvaternion fazo, uning simplektik almashtirishlari gruppasi va bu gruppaning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta’riflari keltirilgan.

$\mathbb{H}^n - \mathbb{H}$ kvaternion sonlar jismi ustida aniqlangan (chap) vektor fazo bo‘lsin.

\mathbb{H}^n fazoda skalyar ko‘paytmani

$$\langle x, y \rangle = q_1 \bar{r}_1 + q_2 \bar{r}_2 + \dots + q_n \bar{r}_n \quad (1.6)$$

bichiziqli forma ko‘rinishida olamiz, bu yerda $x = \{q_i\}_{i=1}^n$, $y = \{r_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{H}^n$.

Ta’rif 1.1 \mathbb{H}^n fazoning $\langle x, y \rangle$ metrik funksiyani o‘zida invariant saqlovchi chiziqli almashtirishlari gruppasi *simplektik grupp*a deyiladi va $Sp(n)$ ko‘rinishida belgilanadi, ya’ni

$$Sp(n) = \left\{ \sigma \in GL(\mathbb{H}^n) : \langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle = \langle x, y \rangle, x, y \in \mathbb{H}^n \right\}, \quad (1.7)$$

Shuningdek simplektik grupp kvaternion matritsalar orqali quyidagicha ham ta’riflanadi,

$$Sp(n) = \left\{ g \in GL(n, \mathbb{H}) : g\bar{g}^T = \bar{g}^T g = E \right\},$$

bu yerda

$$GL(n, \mathbb{H}) = \left\{ g \in M(n, \mathbb{H}) : \text{ddet}g \neq 0 \right\}, \quad \text{ddet}g = \text{cdet}_i(g\bar{g}^T) = \text{rdet}_j(g\bar{g}^T),$$

E – n -tartibli, birlik kvaternion matritsa.

Aytaylik, $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{H}^n$ ixtiyoriy vektorlar sistemasi bo‘lsin. U holda, quyidagi ko‘rinishdagi

$$\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_m)(m) = \left(\langle x_i, x_j \rangle \right)_{i,j=1}^m$$

matritsa *Gram matritsasi* deyiladi. $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_m)(m)$ matritsa determinanti quyidagi formula bo‘yicha topiladi:

$$\begin{aligned} \det \Gamma(x_1, \dots, x_n)(n) &:= \det_l \Gamma(x_1, \dots, x_n)(n) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-\kappa} \langle x_l, x_{l_{m_1}} \rangle \langle x_{l_{m_1}}, x_{l_{m_1+1}} \rangle \dots \langle x_{l_{m_1+\delta_1}}, x_l \rangle \dots \langle x_{l_{m_\kappa}}, x_{l_{m_\kappa+1}} \rangle \dots \langle x_{l_{m_\kappa+\delta_\kappa}}, x_n \rangle \end{aligned}$$

bu yerda $S_n - \{1, 2, \dots, n\}$ to‘plam elementlaridan tuzilgan o‘rinlashtirishlar gruppasi, l –satr nomeri, $\sigma = (l, l_{m_1}, l_{m_1+1}, \dots, l_{m_1+\delta_1}) \dots (l_{m_\kappa}, l_{m_\kappa+1}, \dots, l_{m_\kappa+\delta_\kappa}) \in S_n$, κ –sikllar soni.

Natija 1.4 Agar $x_1, x_2, \dots, x_s \in \mathbb{H}^n$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo‘lsa, $\det \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_s)(s) > 0$ munosabat, aks holda ya’ni $x_1, x_2, \dots, x_s \in \mathbb{H}^n$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, $\det \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_s)(s) = 0$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Aytaylik, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor \mathbb{H}^n fazoning ixtiyoriy elementi bo‘lsin. Quyidagi moslik \mathbb{H}^n fazoni haqiqiylashtirish operatsiyasi deyiladi va “ \approx_R ” ko‘rinishida belgilanadi:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \approx_R (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, x_{n4}) = \vec{x} \quad (1.8)$$

bu yerda, $x_l = x_{l1} + x_{l2}i + x_{l3}j + x_{l4}k$, $l = \overline{1, n}$, $x_l \in \mathbb{H}$, $x_{lm} \in \mathbb{R}$, $m = \overline{1, 4}$.

\mathbb{H}^n fazoni haqiqiylashtirishdan hosil qilingan fazoni V orqali belgilaymiz. Tabiiyki, bu holda $\dim V = 4n$ tenglik kelib chiqadi.

Ta’rif 1.6. \mathbb{H}^n fazoda berilgan chiziqli erkli vektorlar sistemasini haqiqiylashtirishdan hosil qilingan sistema *kuchli chiziqli erkli vektorlar sistemasi* deyiladi.

Haqiqiylashtirish operatsiyasini $\langle x, y \rangle$ funksiyaga tatbiq qilib,

$$\langle x, y \rangle = \Omega_1(\bar{x}, \bar{y}) - \Omega_i(\bar{x}, \bar{y})i - \Omega_j(\bar{x}, \bar{y})j - \Omega_k(\bar{x}, \bar{y})k, \quad (1.9)$$

ifodaga ega bo‘lamiz, bu yerda $x, y \in \mathbb{H}^n$, $\bar{x}, \bar{y} \in V$,

$$\Omega_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{l=1}^n (x_{l1}y_{l1} + x_{l2}y_{l2} + x_{l3}y_{l3} + x_{l4}y_{l4}), \quad \Omega_i(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{l=1}^n (x_{l1}y_{l2} - x_{l2}y_{l1} + x_{l3}y_{l4} - x_{l4}y_{l3});$$

$$\Omega_j(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{l=1}^n (x_{l1}y_{l3} - x_{l3}y_{l1} + x_{l4}y_{l2} - x_{l2}y_{l4}); \quad \Omega_k(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{l=1}^n (x_{l1}y_{l4} - x_{l4}y_{l1} + x_{l2}y_{l3} - x_{l3}y_{l2}).$$

Yuqorida ta’riflangan haqiqiylashtirish operatsiyasi \mathbb{H}^n va V fazolar orasidagi o‘zaro bir qiymatli moslikni ifodalaydi. Bundan kelib chiqadiki, har bir $\sigma \in GL(\mathbb{H}^n)$ almashtirishga $\sigma' \in GL(V)$ almashtirish bir qiymatli mos keladi.

Ta’rif 1.7. $Sp(n)$ gruppning *haqiqiy tasvirlari gruppasi* deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\sigma' \in GL(V)$ chiziqli almashtirishlar gruppasiga aytiladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma' \in GL(V) : \Omega_1(\sigma'\bar{x}, \sigma'\bar{y}) = \Omega_1(\bar{x}, \bar{y}), \Omega_i(\sigma'\bar{x}, \sigma'\bar{y}) = \Omega_i(\bar{x}, \bar{y}), \\ \Omega_j(\sigma'\bar{x}, \sigma'\bar{y}) = \Omega_j(\bar{x}, \bar{y}), \Omega_k(\sigma'\bar{x}, \sigma'\bar{y}) = \Omega_k(\bar{x}, \bar{y}) \end{array} \right\}$$

$Sp(n)$ gruppning haqiqiy tasvirlari gruppasini $\mathfrak{Sp}(4n)$ bilan belgilaymiz (shartli ravishda).

Natija 1.5. $\mathfrak{Sp}(4n) \cong O(4n, \mathbb{R}) \cap Sp(4n, \mathbb{R})$.

Ushbu bobning 1.3 paragrafida kommutativ va nokommutativ o‘zgaruvchili G -invariant ko‘phadlar algebrasi va ushbu algebraning asosiy masalalari bayon qilinadi.

\mathbb{F}^n biror \mathbb{F} maydon ustida aniqlangan n o‘lchovli vektor fazo bo‘lsin. $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]$ orqali koeffitsientlari \mathbb{F} maydonga tegishli $\bar{x}_i \in \mathbb{F}^n$ vektor o‘zgaruvchili ko‘phadlar halqasini belgilaymiz. Har bir $g \in G \subset GL(n, \mathbb{F})$ matritsani $f \in \mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]$ ko‘phadga ta’sirini $(g \circ f) = f(\bar{x}_1g, \bar{x}_2g, \dots, \bar{x}_mg)$ ko‘rinishida olamiz.

Ta’rif 1.10. Agar barcha $g \in G$ uchun $(g \circ f) = f$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $f \in \mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]$ ko‘phad G *gruppa ta’siriga nisbatan invariant* (qisqacha G -invariant) deyiladi.

Barcha G -invariant ko‘phadlar to‘plami $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^G$ orqali belgilanadi va $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^G \subset \mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. $\Sigma = \{\varepsilon_i\}_{i \in \Delta}$ to‘plam $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^G$ halqa elementlaridan tuzilgan bo‘lsin, bu yerda Δ -tartiblangan natural sonlar to‘plami.

Ta’rif 1.11. Agar $\mathbb{F}[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m]^G$ halqaning ixtiyoriy elementi Σ to‘plam elementlariga halqa amallarini chekli marta qo‘llash orqali hosil bo‘lsa, Σ to‘plam *hosil qiluvchilar sistemasi* deyiladi.

German Veylning ishlarida $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydoni, $\mathbb{R}^n - n$ -o‘lchovli haqiqiy fazo, $G = GL(n, \mathbb{R})$, $G = SL(n, \mathbb{R})$, $G = O(n, \mathbb{R})$, $G = SO(n, \mathbb{R})$, $G = Sp(2m, \mathbb{R})$ bo‘lgan hollar uchun $\mathbb{F}[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m]^G$ halqaning butun ratsional bazisi va ular orasidagi munosabatlar keltirib o‘tilgan.

Koeffitsientlari \mathbb{F} maydonga tegishli nokommutativ o‘zgaruvchili ko‘phadlarning ozod algebrasini G -invariant qism algebralari yuqoridagi ta’riflarga analog tarzda aniqlanadi va $\mathbb{F}\langle X \rangle^G$ ko‘rinishida belgilanadi, ya’ni

$$\mathbb{F}\langle X \rangle^G = \{f \in \mathbb{F}\langle X \rangle : (g \circ f) = f, g \in G \subset GL(n, \mathbb{F})\},$$

bu yerda X elementlari nokommutativ $x_i = \left(\xi_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ kortejlar to‘plami.

$\mathbb{F}\langle X \rangle^G = \mathbb{F}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle^G$ orqali $\mathbb{F}\langle X \rangle^G$ ozod algebraning nisbatlar jismi belgilanadi. $\mathbb{F}\langle X \rangle^G$ jism elementlari G -invariant nokommutativ ratsional funksiya deyiladi.

1.4 paragrafda G -invariant differensial halqa, differensial maydon va ularning differensial ratsional bazislarini ta’riflari keltirilgan.

Ma’lumki, differensiallash amali kiritilgan halqa (mos holda, maydon) *differensial halqa yoki d-halqa* (mos holda, *d-maydon*) deyiladi.

Xususan, J. Xojiyev ishlarida differensiallash amali $d(ax_i) = ax_{i+1}$, $a \in A$, tenglik yordamida aniqlangan bo‘lib, $G = O(n, \mathbb{R})$, $G = SO(n, \mathbb{R})$ bo‘lgan hol uchun $\mathbb{R}\langle \vec{x} \rangle^G$ d -maydonning d -ratsional bazisi to‘la tavsif qilingan. Shuningdek, Q.Q.Mo‘minov, U.Bekbayev ishlarida $G = Sp(2m, \mathbb{R})$, $O(p, q, \mathbb{R})$ bo‘lgan hollar uchun $\mathbb{R}\langle \vec{x} \rangle^G$ d -maydonning d -ratsional bazisi tavsiflangan.

Dissertatsiyaning **“Simplektik grupp uchun $\mathbb{R}\langle x, \bar{x} \rangle^G$ differensial jismning hosil qiluvchilari sistemasi”** bobi \mathbb{H}^n fazoning simplektik almashtirishlari gruppasining (ya’ni, $Sp(n)$) ta’siriga nisbatan invariant, kvaternion o‘zgaruvchili d -ko‘phadlar algebrasi va uning hosil qiluvchilari sistemasini tavsiflash masalasiga bag‘ishlanadi. Tabiiyki bu holda, qaralayotgan algebra nokommutativ differensial o‘zgaruvchilarning ozod assotsiativ algebrasini ifodalaydi.

Masalani o‘rganishda haqiqiy holdagi analoglarini tekshirish maqsadga muvofiqdir. Shu sababdan bobning dastlabki 2.1 va 2.2 paragraflari $Sp(n)$ gruppining haqiqiy tasvirlari gruppasi ta’siriga nisbatan invariant d -ko‘phadlar halqasining hosil qiluvchilarini tavsiflash masalalariga bag‘ishlanadi.

Aytaylik, $\mathbb{H}^n \approx_R V$ va $\mathfrak{Sp}(4n)$ gruppasi berilgan bo'lsin. Shuningdek, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{4n}\} \subset V$ sistema V fazoning bazis vektorlaridan iborat bo'lsin. $\mathbb{R}[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{4n}]^{\mathfrak{Sp}(4n)}$ orqali \mathbb{R} maydon ustida aniqlangan, $x_{l,m} \in \mathbb{R}$ noma'lumlarning $\mathfrak{Sp}(4n)$ -invariant ko'phadlari halqasini belgilaymiz.

Teorema 2.1. $G = \mathfrak{Sp}(4n)$ bo'lsin. U holda, har qanday G -invariant $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_r)$ ko'phad quyidagi

$$\Omega_\alpha(\vec{x}_l, \vec{\xi}_m), \alpha \in \{1, i, j, k\} \quad (2.1)$$

G -invariant bichiziqli formalar orqali butun ratsional ifodalanadi, bu yerda $\vec{x}_l \in V$, $\vec{\xi}_m \in V^*$, $V^* - V$ fazoga qo'shma fazoni ifodalaydi.

Ma'lumki, invariantlar nazariyasi kursining ikkinchi asosiy masalasi, *tipik bazis invariantlari orasidagi munosabatlarni aniqlashdan* iborat. Shunga asosan, quyida (8) sistema elementlari orasidagi munosabatlarni aniqlaymiz:

$B_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ to'plam va bu to'plam elementlaridan tuzilgan o'rinlashtirishlarni S_n gruppasi berilgan bo'lsin. S_n gruppasi elementlarining

$$(1, l_{m_1}, \dots, l_{m_1+\Delta_1})(l_{m_2}, l_{m_2+1}, \dots, l_{m_2+\Delta_2}) \dots (l_{m_r}, l_{m_r+1}, \dots, n)$$

ko'rinishdagi yoyilmasidan foydalanib quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\nu = \left\{ (1, l_{m_1}), \dots, (l_{m_1+\Delta_1}, 1), (l_{m_2}, l_{m_2+1}), \dots, (l_{m_2+\Delta_2}, l_{m_2}), \dots, (l_{m_\kappa}, l_{m_\kappa+1}), \dots, (n, l_{m_\kappa}) \right\};$$

$$F_{\rho_\tau}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \Omega_{\alpha_1}(\vec{x}_{l_{m_{s_1}}}, \vec{x}'_{l'_{m_{s_1}}}) \Omega_{\alpha_2}(\vec{x}_{l_{m_{s_2}}}, \vec{x}'_{l'_{m_{s_2}}}) \dots \Omega_{\alpha_n}(\vec{x}_{l_{m_{s_n}}}, \vec{x}'_{l'_{m_{s_n}}});$$

$$A_\rho = \left\{ \rho_\tau \mid \rho_\tau : B_1 \rightarrow \nu \right\},$$

bu yerda $l_{m_s+\Delta_s} = \overline{1, n}$, $\Delta_s \in \mathbb{Z}_0^+$, $s = \overline{1, \kappa}$, $l_{m_2} < l_{m_3} < \dots < l_{m_r}$, κ - sikllar soni, ρ_τ - biyektiv akslantirish, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{1, i, j, k\}$, $\{l_{m_s}, l'_{m_s}\} = \rho_\tau^{-1}(m_s)$, $l_{m_s} < l'_{m_s}$, $m_s \in B_1$, $\tau = \overline{1, n}!$.

Lemma 2.1. V fazoda n tasi o'zaro kuchli chiziqli erkli $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$, ($m \geq n$) vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin. U holda, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ vektorlar sistemasi uchun,

$$\begin{cases} F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) = \sum_{\rho_\tau \in A_\rho} (-1)^{n-\kappa} c_{\rho_\tau}^\alpha F_{\rho_\tau}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \neq 0, \text{ agar } m = n \text{ va } \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m = \pm 1 \text{ bo'lsa;} \\ F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) = \sum_{\rho_\tau \in A_\rho} (-1)^{n-\kappa} c_{\rho_\tau}^\alpha F_{\rho_\tau}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} = 0, \text{ agar } m > n \text{ va } \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m = \pm 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bu yerda

$$c_{\rho_\tau}^\alpha = (-1)^t \text{sign}\{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_m\} \times \text{sign}\left\{ \Omega_{\alpha_1}(\vec{x}_{l_{m_{s_1}}}, \vec{x}'_{l'_{m_{s_1}}}) \Omega_{\alpha_2}(\vec{x}_{l_{m_{s_2}}}, \vec{x}'_{l'_{m_{s_2}}}) \dots \Omega_{\alpha_{n+1}}(\vec{x}_{l_{m_{s_{n+1}}}}, \vec{x}'_{l'_{m_{s_{n+1}}}}) \right\},$$

$t = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_m$ ko'paytmadagi mavhum birliklar soni.

$B_2 = \{1, 2, \dots, n+1, n+2\}$ to'plam va bu to'plam elementlaridan tuzilgan o'rinlashtirishlarni S_{n+2} gruppasi berilgan bo'lsin. S_{n+2} gruppasi elementlari

$$(n+2, 1, l_{m_1}, \dots, l_{m_1+\Delta_1})(l_{m_2}, l_{m_2+1}, \dots, l_{m_2+\Delta_2}) \dots (l_{m_k}, l_{m_k+1}, \dots, l_{m_k+\Delta_k}) \quad (*)$$

bog'liqmas sikllar yoyilmasi shaklida ifodalanadi, bu yerda $l_{m_s+\Delta_s} = \overline{1, n+2}$.

(*) yoyilmaga mos holda

$$\nu_1 = \{(n+2, 1)(1, l_{m_1}), \dots, (l_{m_1+\delta_1}, n+2), \dots, (l_{m_k}, l_{m_k+1}), \dots, (l_{m_k+\delta_k}, l_{m_k})\}$$

$$\nu'_1 = \{(1, l_{m_1}), \dots, (l_{m_1+\delta_1}, n+2), \dots, (l_{m_k}, l_{m_k+1}), \dots, (l_{m_k+\delta_k}, l_{m_k})\}$$

belgilashlarni kiritamiz. Shuningdek, ρ' orqali $\rho': B_1 \rightarrow \{1, 2, \dots, n+1\}$ biyektiv akslantirishni, bu ko'rinishdagi barcha ρ' akslantirishlar to'plamini esa $A_{\rho'}$ orqali belgilaymiz.

Lemma 2.3. *V fazoda dastlabki n tasi kuchli chiziqli erkli $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1}, \vec{x}_{n+2}\}$ vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1}$ ko'paytma $\pm 1; \pm i; \pm j; \pm k$ qiymatlarni ixtiyoriy bittasiga teng bo'lsa, u holda*

$$F'(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1}, \vec{x}_{n+2}) = \sum_{\rho'_\tau \in A_{\rho'}} (-1)^{n+1-s} c_{\rho'_\tau}^\omega F_{\rho'_\tau}^{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+2}} = 0 \quad (2.15)$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bu yerda

$$c_{\rho'}^\omega = (-1)^t \text{sign}\{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \dots \cdot \omega_{n+1}\} \times \\ \times \text{sign}\left\{\Omega_{\omega_1}(\vec{x}_{l_{m_{s_1}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_1}}}) \Omega_{\omega_2}(\vec{x}_{l_{m_{s_2}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_2}}}) \dots \Omega_{\omega_{n+1}}(\vec{x}_{l_{m_{s_{n+1}}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_{n+1}}}})\right\},$$

r – ko'paytmadagi mavhum birliklar soni, $\omega_l \in \{1, i, j, k\}$, $\{l_{m_s}, l'_{m_s}\} = (\rho'_\tau)^{-1}(m_s)$, $\tau = \overline{1, n+1}$, $m_s = \overline{1, n+1}$.

Sanoqli sondagi

$$x_1, x_2, \dots, x_{4n}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{4n}^{(1)}, \dots, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{4n}^{(n)}, \dots$$

o'zgaruvchilarning haqiqiy koeffitsientli, $\mathfrak{Sp}(4n)$ -invariant d -ko'phadlari halqasi va uning d -nisbatlari maydoni mos holda, $\mathbb{R}\{\vec{x}\}^{\mathfrak{Sp}(4n)}$ va $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^{\mathfrak{Sp}(4n)}$ ko'rinishida belgilanadi. Quyidagi teoremda $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^{\mathfrak{Sp}(4n)}$ d -maydonning chekli hosil qiluvchilari sistemasi ko'rsatib o'tilgan.

Teorema 2.2. *$G = \mathfrak{Sp}(4n)$ bo'lsin. U holda, quyidagi*

$$\Omega_1(\vec{x}^{(r-1)}, \vec{x}^{(r-1)}), \Omega_\alpha(\vec{x}^{(r-1)}, \vec{x}^{(r)}), (r = \overline{1, n}, \alpha \in \{i, j, k\}) \quad (2.16)$$

$\mathfrak{Sp}(4n)$ -invariant ko'phadlar sistemasi $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^{\mathfrak{Sp}(4n)}$ d -maydonning chekli hosil qiluvchilari sistemasini ifodalaydi.

Bobning 2.3-paragrafi \mathbb{R} maydon ustida aniqlangan katernion noma'lumli nokommutativ $Sp(n)$ -invariant ko'phadlar halqasi va $Sp(n)$ -invariant

nokommutativ ratsional funksiyalar jismini hosil qiluvchilari sistemasini tavsiflashga bag‘ishlangan. Ularni mos holda $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{Sp(n)}$ va $\mathbb{R} x_1, \dots, x_n^{Sp(n)}$ ko‘rinishida olamiz. Shuningdek, halqa operatsiyalari bilan birgalikda

1) $(f^*)^* = f$, 2) $(a \cdot f)^* = a \cdot f^*$, 3) $(f + g)^* = f^* + g^*$, 4) $(f \cdot g)^* = g^* \cdot f^*$ shartlarni qanoatlantiruvchi $*$: $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ amal ham qaraladi, bu yerda $f, g \in \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $a \in \mathbb{R}$.

Xususan, kvaternion noma’lumli ko‘phadlar halqasida $*$ -amalni ermit qo‘shma amali sifatida olamiz va f^* belgilashni \bar{f} bilan almashtiramiz. Shuningdek, $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ yozuvni $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle$ bilan almashtiramiz.

Teorema 2.3. $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle^{Sp(n)}$ halqaning har qanday elementi $\langle x_l, x_m \rangle$ bichiziqli formalarga halqa amallarini qo‘llash orqali hosil qilinadi.

Teorema 2.4. $\mathbb{R} x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n^{Sp(n)}$ jismning har qanday elementi $Sp(n)$ -invariant nokommutativ ko‘phadlar orqali ratsional ifodalanadi.

2.3 va 2.4 teoremlardan quyidagiga ega bo‘lamiz:

Natija 2.7. $\langle x_l, x_m \rangle$ bichiziqli formalar $\mathbb{R} x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n^{Sp(n)}$ jismning tashkil etuvchilari sistemasini ifodayladi.

2.4 paragrafda olingan natijalar 2.3-paragrafda olingan natijalarni differensial analogini ifodalaydi.

$\mathbb{R} x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ jismda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$\delta: \mathbb{R} x_1, \dots, x_n \rightarrow \mathbb{R} x_1, \dots, x_n$ amal aniqlangan bo‘lsin:

- 1) $\forall x_l \in H^n$ uchun $\delta(x_l) = x_{l+1}$;
- 2) $\forall a \in \mathbb{R}$ va $\forall x_l \in H^n$ uchun $\delta(ax_l) = d(a)x_l + ax_{l+1}$.

Tabiiyki, agar $x_l \in \mathbb{H}^n$ vektorning komponentlarini haqiqiy o‘zgaruvchili kvaternion funksiyalardan iborat vektor funksiya sifatida qarasaq, u holda δ -amalni $\mathbb{R} x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ jism differensial sifatida olishimiz mumkin. Bu holda, $\mathbb{R} x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ jism δ -amal bilan birgalikda differensial jismni (d -jismni) tashkil qiladi. Quyida, δ -amalni ta’rifiga asosan $x_l = x^{(l)}$, $\delta(x^{(l)}) = x^{(l+1)}$ belgilashni kiritamiz. Natijada, $\mathbb{R} x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ d -jismni $\mathbb{R} x, \bar{x}$ ko‘rinishida yozishimiz mumkin.

Teorema 2.5. $G = Sp(n)$ bo‘lsin. U holda, $\mathbb{R} x, \bar{x}^G$ d -jismning har qanday elementi

$$\langle x^{(l)}, x^{(m)} \rangle, l, m \in \mathbb{Z}_0^+ \quad (2.32)$$

G -invariant nokommutativ d -ko‘phadlarga jism munosabatlari va differensiallash amalini qo‘llash orqali hosil qilinadi.

Ushbu teorema 2.3-natijani differensial analogini ifodalaydi.

Teorema 2.6. $G = Sp(n)$ bo'lsin. U holda, quyidagi

$$\langle x^{(r-1)}, x^{(r-1)} \rangle, \langle x^{(r-1)}, x^{(r)} \rangle, r = \overline{1, n} \quad (2.33)$$

G -invariant nokommutativ d -ko'phadlar sistemasi $\mathbb{R} x, \bar{x}^G$ d -jismning tashkil etuvchilari sistemasini ifodalaydi.

Uchinchi bob "Kvaternion fazolarda berilgan yo'llarning $Sp(n)$ gruppata'siriga nisbatan ekvivalentligi" deb nomlanib, 3 ta paragrafdan iborat.

Bobning 3.1-paragrafida haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan vektor fazolarda berilgan yo'l tushunchasi, ularning turlari, G -ekvivalent bo'lish ta'rifi va $\mathfrak{Sp}(4n)$ gruppata'siriga nisbatan ekvivalent bo'lishini zaruriy va yetarli shartlari berilgan.

Aytaylik, \mathbb{F} haqiqiy yoki kompleks sonlar maydoni bo'lsin. X orqali \mathbb{F} maydon ustida aniqlangan n o'lchovli vektor fazoni, \mathfrak{S} orqali haqiqiy sonlar to'plamidagi ixtiyoriy (a, b) oraliqni belgilaymiz, (bu holda, $a = -\infty$ yoki $b = \infty$ bo'lishi mumkin).

Ta'rif 3.1. \mathfrak{S} oraliqni X fazoga uzluksiz akslantiruvchi $\bar{x}(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^n$ vektor funksiyaning har bir $x_i(t)$ koordinatasi \mathfrak{S} oraliqda cheksiz marta differensiallanuvchi funksiyani ifodalasa, $\bar{x}(t)$ vektor funksiya \mathfrak{S} -yo'l deyiladi.

$\bar{x}(t)$ \mathfrak{S} -yo'lning r -tartibli hosilasi deb, $(x_1^{(r)}(t), \dots, x_n^{(r)}(t))$ koordinatali vektor funksiyaga aytiladi va $\bar{x}^{(r)}(t)$ ko'rinishida belgilanadi.

Agar barcha $t \in \mathfrak{S}$ uchun $\bar{x}^{(1)}(t) = (\bar{x}(t))' \neq 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, $\bar{x}(t)$ \mathfrak{S} -yo'l *regulyar* deyiladi.

Quyida har qanday $\bar{x}(t)$ \mathfrak{S} -yo'l uchun $M(\bar{x})(t)$ orqali $(\bar{x}(t), \bar{x}^{(1)}(t), \dots, \bar{x}^{(n-1)}(t))^T$ ko'rinishidagi $n \times n$ tartibli matritsani belgilaymiz, bu yerda i -satr $x_i^{(r-1)}$ koordinatalardan iborat, $i = \overline{1, n}$, $r = \overline{1, n}$.

Agar $\det M(\bar{x})(t) \neq 0$ munosabat barcha $t \in \mathfrak{S}$ qiymatlarda o'rinli bo'lsa, u holda $\bar{x}(t)$ \mathfrak{S} -yo'l *kuchli regulyar* deyiladi. Quyida faqat kuchli regulyar yo'llar qaraladi.

Aytaylik, G gruppasi $GL(n, \mathbb{F})$ gruppaning ixtiyoriy qism gruppasi bo'lsin. G gruppaning ixtiyoriy elementini X fazoga ta'sirini $(g, \bar{x}) \rightarrow \bar{x}g$ ko'rinishida aniqlaymiz, bu yerda $\bar{x} \in X$.

Ta'rif 3.2. Agar ikki $\bar{x}(t)$ va $\bar{y}(t)$ \mathfrak{S} -yo'llar uchun shunday $g \in G$ element mavjud bo'lib, $\bar{y}(t) = \bar{x}(t)g$ tenglik barcha $t \in \mathfrak{S}$ uchun o'rinli bo'lsa, $\bar{x}(t)$ va $\bar{y}(t)$ \mathfrak{S} -yo'llar G -ekvivalent deyiladi va $\bar{x}(t) \sim^G \bar{y}(t)$ ko'rinishida belgilanadi.

Quyidagi teoremda $X = V$ va $G = \mathfrak{Sp}(4n)$ bo'lgan hol uchun ikki kuchli regulyar $\vec{x}(t)$ va $\vec{y}(t)$ \mathfrak{S} -yo'llar uchun G -ekvivalentlik masalasini yechimi ko'rsatilgan.

Teorema 3.1. V fazoda berilgan ikki kuchli regulyar $\vec{x}(t) = \{x_l(t)\}_{l=1}^{4n}$ va $\vec{y}(t) = \{y_l(t)\}_{l=1}^{4n}$ \mathfrak{S} -yo'llarning $\mathfrak{Sp}(4n)$ -ekvivalent bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarli:

1. $M'(\vec{x})(t)(M(\vec{x})(t))^{-1} = M'(\vec{y})(t)(M(\vec{y})(t))^{-1}$;
2. $M(\vec{x})(t)(M(\vec{x})(t))^T = M(\vec{y})(t)(M(\vec{y})(t))^T$;
3. $M(\vec{x})(t)I(M(\vec{x})(t))^T = M(\vec{y})(t)I(M(\vec{y})(t))^T$;
4. $M(\vec{x})(t)J(M(\vec{x})(t))^T = M(\vec{y})(t)J(M(\vec{y})(t))^T$;
5. $M(\vec{x})(t)K(M(\vec{x})(t))^T = M(\vec{y})(t)K(M(\vec{y})(t))^T$;
6. $\det M(\vec{x})(t) = \det M(\vec{y})(t)$

bu yerda, $M(\vec{x})(t) = (x_l^{(s-1)}(t))_{l,s=1}^{4n}$, $(M(\vec{x})(t))^T$ matritsa $M(\vec{x})(t)$ matritsaning mos holda transponirlanganini ifodalaydi.

3.1 teoremda keltirilgan 1-6 shartlarning chap qismidagi matritsaviy va sonli funksiyalarni mos holda, $A(t) = \{a_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $B(t) = \{b_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $C(t) = \{c_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $D(t) = \{d_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $E(t) = \{e_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $f(t)$ ko'rinishida belgilaymiz. Bu matritsalarining elementlari $\mathfrak{Sp}(4n)$ -invariant d -ratsional funksiyalarni ifodalaydi. Bu esa kuchli regulyar \mathfrak{S} -yo'llarning $\mathfrak{Sp}(4n)$ -ekvivalentlik masalasini $\mathfrak{Sp}(4n)$ -invariant d -ratsional funksiyalar orqali yechish imkonini beradi.

Teorema 3.2. Ikki $\vec{x}(t)$ va $\vec{y}(t)$ kuchli regulyar \mathfrak{S} -yo'llar $\mathfrak{Sp}(4n)$ -ekvivalent bo'lishi uchun quyidagi shartlarni bajarilishi zarur va yetarli:

- $$i_1) \Omega_1(\vec{x}^{(r-1)}, \vec{x}^{(r)}) = \Omega_1(\vec{y}^{(r-1)}, \vec{y}^{(r)}); \quad i_2) \Omega_i(\vec{x}^{(r-1)}, \vec{x}^{(r)}) = \Omega_i(\vec{y}^{(r-1)}, \vec{y}^{(r)});$$
- $$i_3) \Omega_j(\vec{x}^{(r-1)}, \vec{x}^{(r)}) = \Omega_j(\vec{y}^{(r-1)}, \vec{y}^{(r)}); \quad i_4) \Omega_k(\vec{x}^{(r-1)}, \vec{x}^{(r)}) = \Omega_k(\vec{y}^{(r-1)}, \vec{y}^{(r)})$$

bu yerda, $r = \overline{1, n}$.

Yuqorida aniqlangan $A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)$ matritsaviy funksiyalar va $f(t)$ sonli funksiya uchun quyidagi hossalari o'rinli:

- 1'. $A(t) = (a_{lm}(t))_{l,m=1}^{4n}$, matritsa elementlari uchun (**) shart o'rinli;
- 2'. $B(t)$ matritsaviy funksiya xosmas, simmetrik va har qanday $\vec{a} \in \mathbb{R}^{4n}$ vektorga nisbatan musbat aniqlangan, ya'ni

$$\det B(t) \neq 0, [B(t)]^T = B(t), \bar{a}B(t)\bar{a}^T > 0;$$

3'. $C(t), D(t), E(t)$ matritsaviy funksiyalar xosmas, kososimmetrik matritsalarini ifodalaydi, ya'ni

$$\det C(t) \neq 0, \det D(t) \neq 0, \det E(t) \neq 0,$$

$$[C(t)]^T = -C(t), [D(t)]^T = -D(t), [E(t)]^T = -E(t);$$

4'. $B'(t) = A(t)B(t) + B(t)A^T(t)$, bu yerda $B'(t) - B(t)$ matritsadan t o'zgaruvchi bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila;

5'. Shuningdek $C(t), D(t), E(t)$ matritsaviy funksiyalar uchun quyidagi tengliklar bajariladi:

$$\left. \begin{aligned} C'(t) &= A(t)C(t) + C(t)A^T(t), C(t)[B(t)]^{-1}C(t) = -B(t), D'(t) = A(t)D(t) + D(t)A^T(t) \\ D(t)[B(t)]^{-1}D(t) &= -B(t), D(t)[C(t)]^{-1}D(t) = -C(t), E'(t) = A(t)E(t) + E(t) \\ E(t)[B(t)]^{-1}E(t) &= -B(t), E(t)[C(t)]^{-1}E(t) = -C(t), E(t)[D(t)]^{-1}E(t) = -D(t) \end{aligned} \right\}$$

$$6'. a) f'(t) = a_{\bar{m}\bar{m}}(t)f(t), b) \det B(t) = f^2(t), \text{ bu yerda } \bar{n} = 4n.$$

$X(t) = \{x_{l,m}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $n \in \mathbb{N}$ xosmas, elementlari \mathfrak{S} oraliqda cheksiz marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalardan iborat matritsaviy funksiya bo'lsin.

Teorema 3.3. Agar $A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)$ matritsaviy funksiyalar va $f(t)$ sonli funksiya uchun 1'-6' shartlar o'rinli bo'lsa, u holda quyidagi

$$\left\{ \begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t), & (i) \\ X(t)X^T(t) &= B(t), & (ii) \\ X(t)IX^T(t) &= C(t), & (iii) \\ X(t)JX^T(t) &= D(t), & (iv) \\ X(t)KX^T(t) &= E(t), & (v) \\ \det X(t) &= f(t), & (vi) \end{aligned} \right. \quad (3.10)$$

matritsaviy tenglamalar sistemasining yechimi mavjud va $\mathfrak{Sp}(4n)$ -ekvivalentlikkacha aniqlikda yagona, bu yerda $X^T(t) - X(t)$ matritsaviy funksiyaning transponirlangani, $t \in \mathfrak{S}$.

Teorema 3.4. $A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)$ matritsaviy va $f(t)$ sonli funksiyalar uchun 1'-6' shartlar o'rinli bo'lsin, u holda

i) (3.10) sistemaning har qanday xosmas $X(t) = \{x_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$ yechimi uchun

$\bar{x}(t) = \{x_{1m}(t)\}_{m=1}^{\bar{n}}$ vektor funksiya kuchli regulyar \mathfrak{S} -yo'lni ifodalaydi va barcha $t \in \mathfrak{S}$ qiymatlarda $X(t) = M(\bar{x})(t)$ tenglik o'rinli bo'ladi;

ii) (3.10) sistemaning yechimini ifodalovchi har qanday $M(\bar{x})(t)$ matritsa

uchun G -ekvivalentlikgacha aniqlikda yagona, kuchli regulyar $\bar{x}(t)$ \mathfrak{S} -yo'l mavjud.

Bobning 3.3-paragrafida \mathbb{H}^n fazoda berilgan yo'llarning $Sp(n)$ gruppaga ta'siriga nisbatan ekvivalent bo'lishini zaruriy va yetarli shartlarini topish masalasi tadqiq qilingan.

Ma'lumki, kvaternion fazolarda berilgan \mathfrak{S} -yo'l \mathfrak{S} oraliqni \mathbb{H}^n fazoga akslantiruvchi, cheksiz marta uzluksiz differensiallanuvchi vektor funksiya ko'rinishida ta'riflanadi. Tabiiyki, $x(t)$ \mathfrak{S} -yo'lni har bir komponentasi $t \in \mathfrak{S}$ o'zgaruvchini har bir qiymatida cheksiz marta uzluksiz differensiallanuvchi haqiqiy kvaternion-funksiyalarni ifodalaydi. Shuningdek, t o'zgaruvchining ixtiyoriy $t_0 \in \mathfrak{S}$ qiymatida $x'(t_0) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi $x(t)$ \mathfrak{S} -yo'l regulyar deyiladi. Bu xolda ham $M(x)(t)$ orqali $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ matritsani belgilaymiz.

Ta'rif 3.6. Agar \mathbb{H}^n fazoda berilgan ixtiyoriy $x(t)$ \mathfrak{S} -yo'l va barcha $t \in \mathfrak{S}$ qiymatlar uchun

$$\text{ddet}M(x)(t) \neq 0$$

shart o'rinli bo'lsa, $x(t)$ \mathfrak{S} -yo'l kuchli regulyar deyiladi, bu yerda

$$\text{ddet}[M(x)(t)] := \det\left(M(x)(t)[\bar{M}(x)(t)]^T\right).$$

Kvaternion fazolarda berilgan kuchli \mathfrak{S} -yo'llar uchun ham G -ekvivalentlik tushunchasi 3.2 -ta'rifdagi kabi aniqlanadi.

Quyidagi teoremada $M(x)(t)$ va $M(y)(t)$ matritsalaridan foydalangan holda ikkita \mathfrak{S} -yo'llar $x(t)$ va $y(t)$ ning $G = Sp(n)$ -ekvivalentligi mezoni berilgan.

Teorema 3.5. Kuchli regulyar $x(t)$ va $y(t)$ \mathfrak{S} -yo'llarning G -ekvivalent bo'lishi uchun barcha $t \in \mathfrak{S}$ qiymatlarda

$$i) \quad M'(x)(t)[M(x)(t)]^{-1} = M'(y)(t)[M(y)(t)]^{-1};$$

$$ii) \quad M(x)(t)[\bar{M}(x)(t)]^T = M(y)(t)[\bar{M}(y)(t)]^T.$$

shartlarni bajarilishi zarur va yetarli.

3.5-teoremada berilgan i) va ii) shartlarning chap qismidagi matritsaviy funksiyalarni mos holda $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ va $B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ orqali belgilaymiz. Kvaternion matritsaviy funksiyalarni differensiallash, teskarilash, Ermit qo'shmasi va ko'paytirish amallaridan $A(t)$ va $B(t)$ matritsaviy funksiyalarning elementlari $Sp(n)$ -invariant d -ratsional funksiyalarni ifodalaydi. Bu esa kuchli regulyar $x(t)$ va $y(t)$ \mathfrak{S} -yo'llarning $Sp(n)$ -ekvivalentligi masalasini $Sp(n)$ -invariant d -ratsional funksiyalar orqali yechish imkonini beradi. Endi Teorema

3.5 dan foydalanib, ikkita kuchli muntazam \mathfrak{S} -yo'llarning $Sp(n)$ -ekvivalentligi uchun quyidagi mezonni olamiz.

Teorema 3.6. *Ikki kuchli regulyar $x(t)$ va $y(t)$ \mathfrak{S} -yo'llar har bir $t \in \mathfrak{S}$ qiymatda $Sp(n)$ -ekvivalent bo'lishi uchun*

$$\langle x^{(r-1)}(t), x^{(r-1)}(t) \rangle = \langle y^{(r-1)}(t), y^{(r-1)}(t) \rangle;$$

$$\langle x^{(r-1)}(t), x^{(r)}(t) \rangle = \langle y^{(r-1)}(t), y^{(r)}(t) \rangle,$$

shartlarni bajarilishi zarur va yetarli, bu yerda $r = \overline{1, n}$.

Xulosa.

Dissertatsiyada n -o'lchovli kvaternion vektor fazo va uni haqiqiylashtirishdan hosil bo'lgan $4n$ -o'lchovli vektor fazoda berilgan kuchli regulyar yo'llarni simplektik gruppasi va uning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalent bo'lish shartlarini aniqlash masalalari tadqiq qilingan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat.

1. $4n$ -o'lchovli haqiqiy fazoning chizqli almashtirishlarini $\mathfrak{Sp}(4n)$ gruppasi ta'siriga nisbatan invariant ko'phadlar halqasining hosil qiluvchilari sistemasi aniqlangan va ular orasidagi munosabatlar topilgan;

2. $4n$ -o'lchovli haqiqiy fazoning chizqli almashtirishlarini $\mathfrak{Sp}(4n)$ gruppasi ta'siriga nisbatan invariant d -ratsional funksiyalar maydonining hosil qiluvchilari sistemasi tavsiflangan;

3. n -o'lchovli kvaternion fazoning chizqli almashtirishlarining $Sp(n)$ gruppasi ta'siriga nisbatan invariant kvaternion o'zgaruvchili, haqiqiy koefitsientli ko'phadlar halqasining hosil qiluvchilari sistemasi aniqlangan va ular orasidagi munosabatlar topilgan;

4. n -o'lchovli kvaternion fazoning chizqli almashtirishlarining $Sp(n)$ gruppasi ta'siriga nisbatan invariant kvaternion o'zgaruvchili, haqiqiy koefitsientli d -ratsional funksiyalar jismining hosil qiluvchilari sistemalari tavsiflangan;

5. $4n$ -o'lchovli haqiqiy fazoda berilgan ikki kuchli regulyar yo'llarning $\mathfrak{Sp}(4n)$ gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalent bo'lishini zaruriy va yetarli shartlari topilgan

6. Maxsus shartlar asosida aniqlangan matritsaviy differensial tenglamalar sistemasining yechimlari $\mathfrak{Sp}(4n)$ -ekvivalentsizlikka aniqlikda yagona bo'lishi isbotlangan;

7. n -o'lchovli kvaternion fazolarda berilgan ikki kuchli regulyar yo'llarni $Sp(n)$ gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalent bo'lishini zaruriy va yetarli shartlari topilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
УЗБЕКИСТАНА**

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРАБОВ САИДАХБОР СОЛИЖОНОВИЧ

**ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЗАДАНЫХ ПУТЕЙ В КВАТЕРНИОННЫХ
ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ
ГРУППЫ $Sp(n)$**

01.01.01-Математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент-2023

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за В2023.1.PHD/FM832.

Диссертация выполнена в Ферганском государственном университете.
Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета ([http:// ik-fizmat.nuu.uz](http://ik-fizmat.nuu.uz)) и на Информационно-образовательном портале «Ziyouet» (www.ziyouet.uz).

Научный руководитель: Муминов Кобилжон Кодирович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Розиков Уткир Абдуллаевич
доктор физико-математических наук, профессор
Тишабаев Джурабай Каримович
кандидат физико-математических наук, профессор

Ведущая организация: Наманганский государственный университет

Защита диссертация состоится «28» декабря 2023 года в 14⁰⁰ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел: (+99871)227-12-24, факс: (+99871)246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №184). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел: (+99871)227-12-24, факс: (+99871)246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz)

Автореферат диссертации разослан «14» декабря 2023 года.
(протокол рассылки № 2 от «14» декабря 2023 года)



А.Садуллаев
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д. ф. -м.н., академик

Р.М. Жураев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д. ф. ф. -м.н.(PhD)

Р.Н. Гашиходжаев
заместитель председателя научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д. ф. -м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация на диссертацию доктора философии(PhD))

Актуальность и необходимость темы диссертации

Многие научные и практические исследования, проводимые во всем мире, часто приводят к алгебраическим и геометрическим задачам. В частности, к ним относятся вопросы *классификации геометрических объектов относительно действия определенной группы*. Задачи классификации геометрических объектов – таких, как *кривые, поверхности, многообразия*, сводятся к проблемам эквивалентности соответствующих вектор-функций путем введения понятия инвариантного параметра. Этот подход основан на идеях великого учёного Софуса Ли, согласно которому, при решении задач эквивалентности необходимо рассматривать задачу описания инвариантных функций относительно действия группы Ли. Задачи такого типа играют важную роль в таких разделах науки, как проективная геометрия, неевклидова геометрия и компьютерная графика. В связи с этим определение условий эквивалентности заданных путей в пространствах кватернионов занимает важное место в современной математике.

В настоящее время наряду с теорией коммутативных инвариантов актуальными предметами науки становятся изучение теории некоммутирующих инвариантов и их применение к алгебраическим, геометрическим и аналитическим задачам. В частности, возникает необходимость использования некоммутирующих инвариантных понятий и их алгебро-геометрических свойств при изучении проблемы классификации заданных геометрических объектов в некоммутирующих пространствах методами теории инвариантов. Тот факт, что некоммутирующие инвариантные понятия и их алгебро-геометрические свойства еще не описаны полностью, выдвигает на первый план изучение этих вопросов в частных случаях. С этой точки зрения, вопрос об эквивалентности заданных путей в пространствах кватернионов по отношению к симплектическим групповым действиям является одним из целевых исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим научное и практическое значение и применяемым в производстве. На сегодняшний день в нашей республике достигнуты важные результаты в изучении вопросов классификации различных геометрических объектов по отношению к действию определенной группы, применению их к неевклидовой геометрии, компьютерной графике и другим областям науки. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по важным направлениям специальности «Алгебра, теория динамических систем, гео-

метрия и топология и т.д.» рассматривается как важная задача фундаментальных исследований¹. Важно развивать теорию коммутативных и некоммутативных инвариантов в обеспечении исполнения принятых решений.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решением задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП–4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», №УП–2789 «О мерах дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года, в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Изучение проблемы эквивалентности кривых относительно действия группы Ли было проведено Эли Картаном в начале XX в. и в настоящее время она известна как проблема Картана. Глубокое исследование этой проблемы методом подвижного репера проведено самим Э.Картаном. Также вопрос об эквивалентности пары кривых относительно действия группы $G = Sp(2n, \mathbb{R})$ решил И.М.Яглом. Геометрические подходы к исследованию задачи Картана можно увидеть в работах таких учёных, как В.Бляшке, А.П.Широков, П.А.Широков. В работах этих ученых проблема исследовалась с помощью формул Френа, а решение проблемы давалось с помощью кривизны, кручения и других геометрических понятий.

При изучении задач эквивалентности, поставленных для систем большого числа кривых, методы теории инвариантов приводят к более эффективным результатам, чем геометрические методы. При использовании методов теории инвариантов необходимо рассматривать дифференциальный аналог 14-й проблемы Гильберта. Данными вопросами занимались Дж. Хаджиев и его ученики. В частности, вопросы описания d -рационального базиса поля инвариантных d -рациональных функций относительно действия таких групп, как линейные, специальные линейные, ортогональные,

¹ Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан № 292 “О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан” от 18 мая 2017 года.

специальные ортогональные, отражены в трудах Дж.Хаджиева, Р.Арипова, А.Суктаевой, Б.Турсунова. К.К.Муминова, И.В.Чилина, У.Бекбаева, Идрис Орен, Омер Пексен и Р.Гаффарова решили проблемы эквивалентности кривой и поверхностей относительно псевдоортогональных, симплектических и Галилеевых групп.

Во всех перечисленных работах задача рассматривалась в вещественных и комплексных векторных пространствах. Первые попытки изучить вышеуказанные проблемы в векторных пространствах кватернионов и найти решение с помощью формул Френа можно увидеть в работах таких ученых, как С.М.Саламон, К.Бхаратхи, М.Накарадж, А.Эргин, Т.Байракдар, С.Джиардино. Основные результаты относительно некоммутативного аналога 14-й проблемы Гильберта можно увидеть в работах таких ученых, как Корюкин, Г.Альмквитс, М.Домокос, В.Дренский, Э.Форманек, В.Харченко. Однако алгебра инвариантных многочленов и ее применение к решению задач эквивалентности относительно действия группы произвольных линейных подстановок пространства кватернионов еще недостаточно изучены. Это и определяет актуальность темы диссертации.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научной работы Ферганского государственного университета в рамках научно-исследовательского проекта кафедры «Математика» по теме «Дифференциальные уравнения в частных производных и задач алгебры, геометрии и анализа».

Цель исследования: решение проблемы эквивалентности заданных путей в кватернионном пространстве относительно действия симплектических преобразований и группы их вещественных представлений методами теории инвариантов.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

описать систему образующих алгебры инвариантных многочленов относительно действий группы симплектических преобразований и группы ее вещественных представлений;

определить систему образующих d -поля (d -тела) инвариантных d -рациональных функций относительно действия группы симплектических преобразований и группы ее вещественных представлений;

нахождение условий эквивалентности заданных путей в вещественных пространствах относительно действия группы вещественных представлений симплектических преобразований;

доказать единственности решения системы специальных матричных уравнений, определяемого на основе условий эквивалентности путей относительно действия группы вещественных представлений симплектической группы;

решение проблемы эквивалентности заданных путей в кватернионном пространстве относительно действия группы симплектических преобразований.

Объект исследования – пространство кватернионов, группа симплектических преобразований, инвариантные дифференциальные многочлены, заданные пути в пространствах кватернионов.

Предметом исследования состоит из теоретических представлений об инвариантных матричных функциях, инвариантных дифференциальных многочленах, кватернионных матриц и их определителях, некоммутативной алгебре.

Методы исследования. В диссертации использованы понятия и методы, относящиеся к таким разделам науки, как дифференциальная геометрия, теория групп, теория инвариантов, линейная алгебра, алгебра кватернионов, теория дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования. Все полученные результаты в диссертации являются новыми. Они состоят в следующем:

определена система образующих алгебры инвариантных многочленов относительно действия группы симплектических преобразований и группы ее вещественных представлений, также найдены связи между ними;

доказываются теоремы об описании системы образующих поля (тела) инвариантных дифференциальных рациональных функций относительно действия группы симплектической преобразований и группы ее вещественных представлений;

найжены необходимые и достаточные условия эквивалентности заданных путей в вещественном пространстве, действие группы вещественных представлений симплектической группы;

решения системы матричных дифференциальных уравнений, определенные на основе условий эквивалентности путей относительно действия группы вещественных представлений симплектической группы, существование и их единственность доказываются с помощью инвариантных матричных функций;

с помощью инвариантных матричных функций и билинейных форм, найдены условия эквивалентности заданных путей в пространствах кватернионов относительно действия группы симплектических преобразований.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

полученные результаты были использованы для определения условий сравнения объектов в некоторых неевклидовых геометриях и раскрытия их механического смысла;

полученные результаты также применяются к решению различных задач некоммутативной алгебры и некоммутативной геометрии.

Достоверность результатов исследования диссертации подтверждается определенными понятиями дифференциальной теории

инвариантов, теории групп, линейной алгебры, алгебры кватернионов, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что разработан метод построения инвариантных дифференциальных форм относительно к действию группы симплектических и группы их вещественных представлений. Они используются при решении задачи эквивалентности кривых, заданных в кватернионных пространствах.

Практическая значимость результатов исследования объясняется применением полученных результатов к задачам дифференциальной геометрии, неевклидовой геометрии и дифференциальным уравнениям.

Внедрение результатов исследования.

Результаты об эквивалентности заданных путей в векторных пространствах кватернионов относительно действия группы $Sp(n)$, использованы исследования вопросов по восстановлению геометрических образов некоммутативных процессов в зарубежном фундаментальном проекте МД-758.2022.1.1 «Разработка математических моделей дробной динамики для исследования колебательных процессов и насыщенных процессов» (Витус Беринг Камчатский, справка № 40-12 от 4-сентября 2023 г). Результаты позволили определить условия эквивалентности данных кривых в некоммутативных геометриях.

Научные результаты, полученные при исследовании эквивалентности заданных путей в кватернионных пространствах относительно действия группы $Sp(n)$ использованы в гранте за номером ОТ-Ф- 4-(37-29) «Функциональные свойства А-аналитических функций и их применения» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017-2020). В частности, матричные функции, которые используются для установления критерия эквивалентности воздействия заданных путей в пространствах кватернионов на симплектическую группу и группы ее вещественных представлений, а также инвариантные дифференциальные рациональные функции и отношения между ними применяются при изучении проблемы классификации группы автоморфизмов в некоторых матричных областях в проекте (справка Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека № 04/11-5324 от 8-сентября 2023 года). Применение научных результатов позволило классифицировать группу автоморфизмов для матричных областей и с их помощью определить интегральные формулы.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 4 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях, на городском научном семинаре академика А. Садуллаева, на городском научном семинаре функционального анализа и его приложения (руководитель д.ф.-мат наук. проф. А.Рахимов).

Публикация результатов исследования. Всего по теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 8 статей опубликовано в научных изданиях, рекомендованных ВАК РУз к публикации основных научных результатов докторских диссертаций, из них 5 в отечественных и 3 в зарубежных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на одиннадцать параграфов, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 121 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИСЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Глава диссертации, представленная как «Предварительные сведения», посвящена определениям понятий, составляющих основу диссертации, и описанию некоторых вытекающих из них результатов, и состоит из четырех параграфов. В разделах 1.1 и 1.2 даны определения тела кватернионов, пространства кватернионов, группы его симплектических преобразований и группы вещественных представлений этой группы.

Пусть \mathbb{H}^n – n -мерное (левое) линейное пространство над телом кватернионных чисел \mathbb{H} . Рассмотрим в \mathbb{H}^n билинейную форму

$$\langle x, y \rangle = q_1 \bar{r}_1 + q_2 \bar{r}_2 + \dots + q_n \bar{r}_n \quad (1.6)$$

как скалярное произведение, где $x = \{q_i\}_{i=1}^n$, $y = \{y_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{H}^n$.

Определение 1.1. Группа линейных преобразований пространства \mathbb{H}^n , сохраняющая инвариантность скалярного произведения $\langle x, y \rangle$, называется *симплектической группой* и обозначается в виде $Sp(n)$, т.е.

$$Sp(n) = \left\{ \sigma \in GL(\mathbb{H}^n) : \langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle = \langle x, y \rangle, x, y \in \mathbb{H}^n \right\}. \quad (1.7)$$

Кроме того, симплектическая группа определяется матрицами кватернионов следующим образом

$$Sp(n) = \left\{ g \in GL(n, \mathbb{H}) : g \bar{g}^T = \bar{g}^T g = E \right\},$$

где

$$GL(n, \mathbb{H}) = \left\{ g \in M(n, \mathbb{H}) : \text{ddet}g \neq 0 \right\}, \quad \text{ddet}g = c \det_j (g \bar{g}^T) = \text{rdet}_i (g \bar{g}^T).$$

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{H}^n$ – система произвольных векторов. В этом случае матрица $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_m)(m) = \left(\langle x_i, x_j \rangle \right)_{i,j=1}^m$ называется *матрицей Грама*. Определитель матрицы $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_m)(m)$ определяется по следующей формуле:

$$\det \Gamma(x_1, \dots, x_n)(n) := \det_l \Gamma(x_1, \dots, x_n)(n) = \sum_{\nu \in S_n} (-1)^{n-\kappa} \langle x_l, x_{l_{m_1}} \rangle \langle x_{l_{m_1}}, x_{l_{m_1+1}} \rangle \dots \langle x_{l_{m_1+\Delta_1}}, x_l \rangle \dots \langle x_{l_{m_\kappa}}, x_{l_{m_\kappa+1}} \rangle \dots \langle x_{l_{m_\kappa+\Delta_\kappa}}, x_n \rangle,$$

где S_n – симметрическая группа на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, l – номера строк, $\nu = (l, l_{m_1}, l_{m_1+1}, \dots, l_{m_1+\Delta_1}) \dots (l_{m_\kappa}, l_{m_\kappa+1}, \dots, l_{m_\kappa+\Delta_\kappa}) \in S_n$, $\Delta \in \mathbb{Z}_0^+$, κ – количество циклов.

Следствие 1.4. Для любой системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_s \in \mathbb{H}^n$ число $\det \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_s)(s)$ – действительное неотрицательное и $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_s)(s) = 0$ тогда и только тогда, когда система $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ линейно зависима.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольный элемент векторного пространства \mathbb{H}^n . Следующее соответствие называется *операцией овеществления* пространства \mathbb{H}^n и обозначается символом « \approx_R »:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \approx_R (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, x_{n4}) = \vec{x}, \quad (1.8)$$

где $x_l = x_{l1} + x_{l2}i + x_{l3}j + x_{l4}k$, $l = \overline{1, n}$, $x_l \in \mathbb{H}$, $x_{lm} \in \mathbb{R}$, $m = \overline{1, 4}$.

Через V , будем обозначать линейное пространство, образованное овеществлением \mathbb{H}^n . Очевидно, что в этом случае справедливо равенство $\dim V = 4n$.

Определение 1.6. Система векторов, образованная овеществлением системы линейных независимых векторов, заданных в пространстве \mathbb{H}^n , называется *системой сильных линейных независимых векторов*.

Овеществление функции $\langle x, y \rangle$ определяется следующим образом:

$$\langle x, y \rangle = \Omega_1(\vec{x}, \vec{y}) - \Omega_i(\vec{x}, \vec{y})i - \Omega_j(\vec{x}, \vec{y})j - \Omega_k(\vec{x}, \vec{y})k, \quad (1.9)$$

где $x, y \in \mathbb{H}^n$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$\Omega_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{l=1}^n (x_{l1}y_{l1} + x_{l2}y_{l2} + x_{l3}y_{l3} + x_{l4}y_{l4}), \quad \Omega_i(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{l=1}^n (x_{l1}y_{l2} - x_{l2}y_{l1} + x_{l3}y_{l4} - x_{l4}y_{l3});$$

$$\Omega_j(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{l=1}^n (x_{l1}y_{l3} - x_{l3}y_{l1} + x_{l4}y_{l2} - x_{l2}y_{l4}); \quad \Omega_k(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{l=1}^n (x_{l1}y_{l4} - x_{l4}y_{l1} + x_{l2}y_{l3} - x_{l3}y_{l2}).$$

Описанная выше операция овеществления представляет однозначное соответствие между пространствами \mathbb{H}^n и V . Это означает, что всякое преобразование $\sigma \in GL(\mathbb{H}^n)$ – однозначное соответствие некоторому преобразованию $\sigma' \in GL(V)$. Очевидно, симплектическое преобразование есть преобразование, оставляющее инвариантной билинейную форму $\langle x, y \rangle$.

Тогда соответствующие вещественные преобразования оставляют инвариантными билинейные формы $\Omega_1, \Omega_i, \Omega_j, \Omega_k$. Из этого свойства мы получаем

Определение 1.7. *Группа вещественных представлений группы $Sp(n)$ – это группа линейных преобразований, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma' \in GL(V): \Omega_1(\sigma\bar{x}, \sigma\bar{y}) = \Omega_1(\bar{x}, \bar{y}), \Omega_i(\sigma\bar{x}, \sigma\bar{y}) = \Omega_i(\bar{x}, \bar{y}), \\ \Omega_j(\sigma\bar{x}, \sigma\bar{y}) = \Omega_j(\bar{x}, \bar{y}), \Omega_k(\sigma\bar{x}, \sigma\bar{y}) = \Omega_k(\bar{x}, \bar{y}) \end{array} \right\}.$$

В дальнейшем будем обозначать группу вещественного представления $Sp(n)$ с $\mathfrak{Sp}(4n)$ (условно).

Следствие 1.5. $\mathfrak{Sp}(4n) \cong O(4n, R) \cap Sp(4n, R)$.

Параграф 1.3 этой главы описывает алгебру G -инвариантных многочленов с коммутативными и некоммутирующими переменными и основные проблемы этой алгебры.

Пусть \mathbb{F} есть поле действительных чисел \mathbb{R} , либо поле комплексных чисел \mathbb{C} и \mathbb{F}^n – n -мерное линейное пространство над \mathbb{F} , $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]$ кольцо многочленов с векторной переменной $\bar{x}_i \in \mathbb{F}^n$, с коэффициентом из \mathbb{F} . Для каждого $g \in G \subset GL(n, \mathbb{F})$ определим действие многочлена $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = f(x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn})$ из $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]$ по правилу

$$(g \circ f)(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m) = f(\bar{x}_1 g, \bar{x}_2 g, \dots, \bar{x}_m g).$$

Ясно, что $(g \circ f) \in \mathbb{F}[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m]$ для всех $f \in \mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]$.

Определение 1.10. Многочлен f из кольца $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m]$ называется G -инвариантным, если $g \circ f = f$ для всех $g \in G$

Множество всех G -инвариантных многочленов обозначим через $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^G$. Нетрудно видеть, что множество $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^G$ образует подкольцо в кольце $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]$. Пусть множество $\Sigma = \{\varepsilon_l\}_{l \in N}$ состоит из некоторых элементов из кольца $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^G$, где N – некоторое множество индексов.

Определение 1.11. Система многочленов $\Sigma = \{\varepsilon_l\}_{l \in N} \in \mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^G$ называется *целым рациональным базисом* в $\mathbb{F}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^G$, если для любого элемента $f \in \mathbb{F}[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m]^G$ существует конечный набор $\{\varepsilon_{l_r}\}_{r=1}^m \subset \Sigma$ и многочлен $\phi(y_1, \dots, y_m)$ над \mathbb{F} такие, что верно равенство $f = \phi(\varepsilon_{l_1}, \dots, \varepsilon_{l_m})$.

Это означает, что множество Σ есть система образующих для кольца $\mathbb{F}[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m]^G$, т.е. наименьшее подкольцо в $\mathbb{F}[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m]^G$, содержащее Σ и совпадающее с самим кольцом $\mathbb{F}[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m]^G$.

В работах Германа Вейля приведен целый рациональный базис в кольце $\mathbb{F}[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m]^G$ для случаев $G = GL(n, \mathbb{F})$, $G = SL(n, \mathbb{F})$, $G = O(n, \mathbb{F})$ $G = SO(n, \mathbb{F})$ и определены отношения между ними.

Пусть X – множество, состоящее из элементов ξ_i , принадлежащих некоторому телу. Обозначим через $\mathbb{F}\langle X \rangle$ свободную алгебру некоммутативных многочленов с переменной ξ_i , коэффициенты которой принадлежат \mathbb{F} . Действие матрицы $g \in GL(n, \mathbb{F})$ на многочлен $f \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ определяется в виде $(g \circ f) = f(\xi_1 g, \xi_2 g, \dots, \xi_m g)$, как и в предыдущем параграфе. В алгебре $\mathbb{F}\langle X \rangle$ понятие G -инвариантности определяется аналогично коммутативному случаю. G -инвариантная подалгебра алгебры $\mathbb{F}\langle X \rangle$ обозначается в виде $\mathbb{F}\langle X \rangle^G$, т.е.

$$\mathbb{F}\langle X \rangle^G = \{f \in \mathbb{F}\langle X \rangle : (g \circ f) = f, g \in G \subset GL(n, \mathbb{F})\}.$$

Далее через $\mathbb{F} X^G = \mathbb{F} x_1, x_2, \dots, x_n^G$ будем обозначать тело отношений свободной алгебры $\mathbb{F}\langle X \rangle^G$. Элементы тела $\mathbb{F} X^G$ называются G -инвариантными некоммутативными рациональными функциями.

В параграфе 1.4 приведены определения G -инвариантного дифференциального кольца, дифференциального поля и их дифференциальных рациональных базисов. Известно, что кольцо (соответственно поле), на котором определяется операция дифференцирования, называется *дифференциальным кольцом*, или *d -кольцом* (соответственно *d -поле*).

В частности, в работе Дж Хаджиева операция дифференцирования определялась с помощью равенства $d(ax_i) = ax_{i+1}$, $a \in \mathbb{R}$, и была полностью описана d -рациональным базисом d -поля $\mathbb{R}\langle \vec{x} \rangle^G$ для случаев $G = O(n, \mathbb{R})$ и $G = SO(n, \mathbb{R})$. Также в работах К. К. Муминова, У. Бекбаева описан d -рациональный базис d -поля $\mathbb{R}\langle \vec{x} \rangle^G$ для случаев, когда $G = Sp(2m, \mathbb{R})$ и $G = O(p, q, \mathbb{R})$.

Во второй главе диссертации, названной «Система образующих дифференциального тела $\mathbb{R} x, \bar{x}^G$ для симплектических группы», исследуется задача описания систем образующих для дифференциального тела всех $Sp(n)$ -инвариантных дифференциальных рациональных функций от кватернионных переменных. Естественно, в этом случае рассматриваемая алгебра представляет собой свободную ассоциативную алгебру

кватернионных d -переменных. При изучении задачи целесообразно проверять аналоги реальных случаев. Поэтому параграфы 2.1 и 2.2 главы посвящены задаче описания образующих кольца инвариантных многочленов относительно действия группы вещественного представления группы $Sp(n)$.

Пусть V – о-вещствление \mathbb{H}^n . Также пусть $\mathfrak{Sp}(4n)$ – группа вещественных представлений группы $Sp(n)$. Обозначим через $\mathbb{R}[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{4n}]^{\mathfrak{Sp}(4n)}$ кольцо $\mathfrak{Sp}(4n)$ –инвариантных многочленов с коэффициентом из \mathbb{R} , где $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ – базисные векторы пространства V . Полная таблица типовых базисных колец $\mathbb{R}[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{4n}]^{\mathfrak{Sp}(4n)}$ показана в следующей теореме.

Теорема 2.1. Пусть $G = \mathfrak{Sp}(4n)$. Тогда всякий G -инвариантный многочлен $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_r)$ выражаются целый рациональным образом через G -инвариантные многочлены вида

$$\Omega_\alpha(\vec{x}_i, \vec{\xi}_m), \alpha \in \{1, i, j, k\}, \quad (2.1)$$

где $\vec{x}_i \in V$, $\vec{\xi}_m \in V^*$, V^* – сопряженное пространство V

Известно, что второй важной проблемой в курсе теории инвариантности является определение соотношения между типичными базисными инвариантами. Соответственно, внизу определяем соотношение между элементами системы (2.1).

Пусть S_n – симметрическая группа на множестве $B_1 = \{1, 2, \dots, n\}$. Используя разложение элементов группы S_n в виде

$$(1, l_{m_1}, \dots, l_{m_1 + \Delta_1})(l_{m_2}, l_{m_2 + 1}, \dots, l_{m_2 + \Delta_2}) \dots (l_{m_r}, l_{m_r + 1}, \dots, n),$$

введем следующие обозначения:

$$\nu = \left\{ (1, l_{m_1}), \dots, (l_{m_1 + \Delta_1}, 1), (l_{m_2}, l_{m_2 + 1}), \dots, (l_{m_2 + \Delta_2}, l_{m_2}), \dots, (l_{m_\kappa}, l_{m_\kappa + 1}), \dots, (n, l_{m_\kappa}) \right\};$$

$$F_{\rho_\tau}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \Omega_{\alpha_1}(\vec{x}_{l_{m_{s_1}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_1}}}) \Omega_{\alpha_2}(\vec{x}_{l_{m_{s_2}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_2}}}) \dots \Omega_{\alpha_n}(\vec{x}_{l_{m_{s_n}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_n}}});$$

$$A_\rho = \left\{ \rho_\tau \mid \rho_\tau : B_1 \rightarrow \nu \right\},$$

где $l_{m_s + \Delta_s} = \overline{1, n}$, $\Delta_s \in \mathbb{Z}_0^+$, $s = \overline{1, \kappa}$, $l_{m_2} < l_{m_3} < \dots < l_{m_r}$, κ – количество циклов, ρ_τ – биективное отображение $\rho_\tau : B_1 \rightarrow \nu$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{1, i, j, k\}$,

$$\{l_{m_s}, l'_{m_s}\} = \rho_\tau^{-1}(m_s), l_{m_s} < l'_{m_s}, m_s \in B_1, \tau = \overline{1, n!}.$$

Лемма 2.1. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ – система взаимно сильных линейно независимых векторов в пространстве V . Тогда для системы векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ справедливо следующее соотношение:

$$\begin{cases} F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) = \sum_{\rho_\tau \in A_\rho} (-1)^{n-\kappa} c_{\rho_\tau}^\alpha F_{\rho_\tau}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \neq 0, \text{ если } m = n \text{ и } \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m = \pm 1; \\ F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) = \sum_{\rho_\tau \in A_\rho} (-1)^{n-\kappa} c_{\rho_\tau}^\alpha F_{\rho_\tau}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} = 0, \text{ если } m > n \text{ и } \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m = \pm 1, \end{cases}$$

где $c_{\rho_\tau}^\alpha = (-1)^t \text{sign}\{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_m\} \times$

$$\times \text{sign}\left\{ \Omega_{\alpha_1}(\vec{x}_{l_{m_{s_1}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_1}}}) \Omega_{\alpha_2}(\vec{x}_{l_{m_{s_2}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_2}}}) \dots \Omega_{\alpha_{n+1}}(\vec{x}_{l_{m_{s_{n+1}}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_{n+1}}}}) \right\},$$

t – количество мнимых единиц в произведении $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_m$.

Пусть S_{n+2} – симметрическая группа на множестве $B_2 = \{1, 2, \dots, n+1, n+2\}$. Получаем элементы группы S_{n+2} в виде разложения независимых циклов, т.е.

$$(n+2, 1, l_{m_1}, \dots, l_{m_1+\delta_1})(l_{m_2}, l_{m_2+1}, \dots, l_{m_2+\delta_2}) \dots (l_{m_k}, l_{m_k+1}, \dots, l_{m_k+\delta_k}), \quad (*)$$

где $l_{m_s+\Delta_s} = \overline{1, n+2}$.

Введём обозначения

$$\nu_1 = \{(n+2, 1)(1, l_{m_1}), \dots, (l_{m_1+\Delta_1}, n+2), \dots, (l_{m_k}, l_{m_k+1}), \dots, (l_{m_k+\Delta_k}, l_{m_k})\}$$

$$\nu'_1 = \{(1, l_{m_1}), \dots, (l_{m_1+\Delta_1}, n+2), \dots, (l_{m_k}, l_{m_k+1}), \dots, (l_{m_k+\Delta_k}, l_{m_k})\},$$

соответственно, разложения (*). Обозначим также через ρ' биективное отражение $\rho': B_1 \rightarrow \nu'_1$, а множество всех отражений этого вида – через $A_{\rho'}$.

Лемма 2.3. Пусть система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1}, \vec{x}_{n+2}\}$ в пространстве V – такая система векторов, что первоначально будет n штук векторов сильно линейно независимых. Тогда, если произведение $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1}$ равно любому из значений $\pm 1; \pm i; \pm j; \pm k$, то справедливо соотношение

$$F'(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1}, \vec{x}_{n+2}) = \sum_{\rho'_\tau \in A_{\rho'}} (-1)^{n+1-s} c_{\rho'_\tau}^\omega F_{\rho'_\tau}^{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+2}} = 0, \quad (2.15)$$

где

$$c_{\rho'}^\omega = (-1)^t \text{sign}\{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \dots \cdot \omega_{n+1}\} \times$$

$$\times \text{sign}\left\{ \Omega_{\omega_1}(\vec{x}_{l_{m_{s_1}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_1}}}) \Omega_{\omega_2}(\vec{x}_{l_{m_{s_2}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_2}}}) \dots \Omega_{\omega_{n+1}}(\vec{x}_{l_{m_{s_{n+1}}}}, \vec{x}_{l'_{m_{s_{n+1}}}}) \right\},$$

$$\omega_l \in \{1, i, j, k\}, \{l_{m_s}, l'_{m_s}\} = (\rho'_\tau)^{-1}(m_s), \tau = \overline{1, n+1!}, m_s = \overline{1, n+1}.$$

Рассмотрим кольцо $\mathbb{R}\{\vec{x}\}^G = \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_{4n}, \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_{4n}^{(r)}\}^G$ всех G -инвариантных многочленов от счетного числа переменных

$$x_1, \dots, x_{4n}, x_1^{(1)}, \dots, x_{4n}^{(1)}, \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_{4n}^{(r)}, \dots$$

над полем действительных чисел \mathbb{R} . Положим $d(x_l^{(r)}) = x_l^{(r+1)}$, $l = \overline{1, 4n}$. Обозначим поле отношений кольца $\mathbb{R}\{\bar{x}\}^G$ через $\mathbb{R}\langle\bar{x}\rangle^G$. Следующая теорема показывает систему конечных образующих d -поля $\mathbb{R}\langle\bar{x}\rangle^G$ для случая, когда $G = \mathfrak{Sp}(4n)$.

Теорема 2.2. Пусть $G = \mathfrak{Sp}(4n)$. Тогда система

$$\Omega_1(\bar{x}^{(r-1)}, \bar{x}^{(r-1)}), \Omega_\alpha(\bar{x}^{(r-1)}, \bar{x}^{(r)}), \quad (r = \overline{1, n}, \alpha \in \{i, j, k\}) \quad (2.16)$$

является конечной системой d -образующих d -поля $\mathbb{R}\langle\bar{x}\rangle^{\mathfrak{Sp}(4n)}$.

Параграф 2.3 данной главы посвящен изучению кольца G -инвариантных полиномов с кватернионными неизвестными, определенными над полем \mathbb{R} , и описанию их системы образующих тело отношений. Обозначим их как $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{Sp(n)}$ и $\mathbb{R} x_1, \dots, x_n^{Sp(n)}$, соответственно. При описании системы образующие, наряду с кольцевыми операциями, учитываются так же, как операция $*$: $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) (f^*)^* = f, 2) (a \cdot f)^* = a \cdot f^*, 3) (f + g)^* = f^* + g^*, 4) (f \cdot g)^* = g^* \cdot f^*,$$

где $f, g \in \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $a \in \mathbb{R}$.

В частности, в кольце кватернионных неизвестных многочленов $*$ -операция принимается как Эрмитова сопряжённая операция и заменяется $*$ -обозначение f^* на \bar{f} . Мы также заменим $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ на $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle$.

Теорема 2.3. Все элементы кольца $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle^{Sp(n)}$ порождаются применением операций кольцевого и эрмитова сопряжения к билинейным формам $\langle x_i, x_m \rangle$.

Теорема 2.4. Любой элемент тела

$$\mathbb{R} x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n^{Sp(n)}$$

рационально выражается через $Sp(n)$ -инвариантные некоммутативные многочлены.

Из Теорем 2.3. и 2.4. имеем следующее:

Следствие 2.7. Всякие $Sp(n)$ -инвариантные некоммутативные рациональные функции рационально выражаются билинейными формами $\langle x_i, x_m \rangle$.

Результаты, полученные в параграфе 2.4, выражают собой дифференциальный аналог результатов, полученных в параграфе 2.3.

В теле $\mathbb{R} x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ рассмотрим операцию $\delta: \mathbb{R} x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rightarrow \mathbb{R} x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\delta(x_l) = x_{l+1}$ для $\forall x_l \in \mathbb{H}^n$;
- 2) $\delta(ax_l) = d(a)x_l + ax_{l+1}$, для $\forall a \in \mathbb{R}$ и $\delta(ax_l) = d(a)x_l + ax_{l+1}$.

Ясно, что если вектор-функция $x_l \in \mathbb{H}^n$ является вектор-функцией, все компоненты которой являются функциями вещественной переменной, то операцию δ можно рассматривать как операцию дифференцирования. В этом случае тело $\mathbb{R} x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ называется дифференциальным телом (d -телом), если рассматривать операцию δ вместе. Теперь введем обозначения $x = x^{(0)}$, $x_l = x^{(l)}$, $\delta(x_l) = x^{(l+1)}$. Используя обозначения, мы можем записать тело $\mathbb{R} x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ в виде $\mathbb{R} x, \bar{x}$. В d -теле $\mathbb{R} x, \bar{x}$ понятия G -инвариантности и системы G -инвариантных порождающих определяются аналогично понятиям в предыдущих пунктах. Далее рассматривается задача описания системы d -образующих d -тела $\mathbb{R} x, \bar{x}^G$.

Теорема 2.5. Пусть $G = Sp(n)$. Тогда любой элемент тела может выражаться через инвариантные некоммутативные многочлены вида

$$\langle x^{(l)}, x^{(m)} \rangle, l, m \in \mathbb{Z}_0^+ \quad (2.32)$$

с помощью применения операций тела и дифференцирования.

Эта теорема представляет собой дифференциальный аналог Следствие 2.3.

Теорема 2.6. Пусть $G = Sp(n)$. Тогда система G -инвариантных некоммутативных многочленов вида

$$\langle x^{(r-1)}, x^{(r-1)} \rangle, \langle x^{(r-1)}, x^{(r)} \rangle, r = \overline{1, n} \quad (2.33)$$

является конечной системой образующих в d -теле $\mathbb{R} x, \bar{x}^G$.

Третья глава называется «Эквивалентность заданных путей в кватернионных векторных пространствах относительно действия группы $Sp(n)$ » и состоит из трех параграфов. В параграфе. 3.1 даются понятия заданного пути в $4n$ -мерных линейных вещественных пространствах, их типа, определение G -эквивалентности. Также приведены необходимые и достаточные условия эквивалентности путей относительно действия группы $Sp(4n)$.

Пусть \mathbb{K} есть поле действительных чисел \mathbb{R} , либо поле комплексных чисел \mathbb{C} и X — n -мерное линейное пространство над \mathbb{K} , $n \in \mathbb{N}$. Также $\mathfrak{I} = (a, b)$ — произвольный интервал из множества \mathbb{R} действительных чисел (возможны случаи, когда $a = -\infty$, либо $b = -\infty$).

Определение 3.1. \mathfrak{S} -путем в X называется вектор-функция $\vec{x}(t) = \{x_l(t)\}_{l=1}^n$ из \mathfrak{S} в X , у которой все координатные отображения $x_l: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{K}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, $t \in \mathfrak{S}$.

Производной r -го порядка от \mathfrak{S} -пути $\vec{x}(t)$ назовем вектор $\vec{x}^{(r)}(t) = (x_1^{(r)}(t), \dots, x_n^{(r)}(t))$, где $x_l^{(r)}(t)$ – r -ая производная координатной функции $x_l(t)$, $l = \overline{1, n}$. Ясно, что $\vec{x}^{(r)}(t)$ также является \mathfrak{S} -путем для всех $r = 1, 2, \dots$.

\mathfrak{S} -путь $\vec{x}(t)$ называется *регулярным*, если $\vec{x}^{(1)}(t) := (\vec{x}(t))' \neq 0$ для всех $t \in \mathfrak{S}$.

Для каждого \mathfrak{S} -пути $\vec{x}(t) = \{x_l(t)\}_{l=1}^n$ через $M(\vec{x})(t)$ обозначим $n \times n$ -матрицу $(\vec{x}(t), \vec{x}'(t), \dots, \vec{x}^{(n-1)}(t))$, где l -строка $\vec{x}^{(r-1)}(t)$ имеет координаты $x_l^{(r-1)}(t)$, $l, r = \overline{1, n}$.

\mathfrak{S} -путь называется *сильно регулярным*, если определитель $\det M(\vec{x})(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathfrak{S}$. Далее мы рассмотрим только регулярный путь.

Пусть G – произвольная подгруппа группы $GL(n, \mathbb{K})$. Действие группы G на n -мерный вектор $\vec{x} \in X$ определим как умножение справа матрицы $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ на вектор-строчку \vec{x} , т.е. $(g, \vec{x}) \rightarrow \vec{x}g$.

Определение 3.2. Два \mathfrak{S} -пути $\vec{x}(t)$ и $\vec{y}(t)$ называются G -эквивалентными, если существует такой элемент $g \in G$, что $\vec{y}(t) = \vec{x}(t)g$ для всех $t \in \mathfrak{S}$, и обозначаются в виде $\vec{x}(t) \overset{G}{\sim} \vec{y}(t)$.

Следующая теорема показывает решение проблемы G -эквивалентности двух сильно регулярных \mathfrak{S} -путей $\vec{x}(t)$ и $\vec{y}(t)$ для $X = V$ и $G = \mathfrak{Sp}(4n)$.

Теорема 3.1. Два сильно регулярных \mathfrak{S} -пути $\vec{x}(t)$ и $\vec{y}(t)$ являются $\mathfrak{Sp}(4n)$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства

1. $M'(\vec{x})(t)[M(\vec{x})(t)]^{-1} = M'(\vec{y})(t)[M(\vec{y})(t)]^{-1}$;
2. $M(\vec{x})(t)[M(\vec{x})(t)]^T = M(\vec{y})(t)[M(\vec{y})(t)]^T$;
3. $M(\vec{x})(t)I[M(\vec{x})(t)]^T = M(\vec{y})(t)I[M(\vec{y})(t)]^T$;
4. $M(\vec{x})(t)J[M(\vec{x})(t)]^T = M(\vec{y})(t)J[M(\vec{y})(t)]^T$;
5. $M(\vec{x})(t)K[M(\vec{x})(t)]^T = M(\vec{y})(t)K[M(\vec{y})(t)]^T$;
6. $\det M(\vec{x})(t) = \det M(\vec{y})(t)$

для всех $t \in \mathfrak{T}$, где $[M(\vec{x})(t)]^T$ и $[M(\vec{y})(t)]^T$ – транспонирование $M(\vec{x})(t)$ и $M(\vec{y})(t)$, соответственно.

Обозначим матричные функции и числовые функции в левой части условий 1-6, данных в Теореме 3.1, соответственно, в виде $A(t) = \{a_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $B(t) = \{b_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $C(t) = \{c_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $D(t) = \{d_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $E(t) = \{e_{lm}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$ и $f(t)$. Нетрудно проверить, что элементы этих матричных и числовых функций являются $\mathfrak{Sp}(4n)$ -инвариантными рациональными функциями. Это позволяет решить проблему $\mathfrak{Sp}(4n)$ -эквивалентности сильно регулярных \mathfrak{T} -путей с помощью $\mathfrak{Sp}(4n)$ -инвариантных d -рациональных функций.

Теорема 3.2. *Два сильно регулярных \mathfrak{T} -пути $\vec{x}(t)$ и $\vec{y}(t)$ являются $\mathfrak{Sp}(4n)$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} i_1) \Omega_1(\vec{x}^{(r)}, \vec{x}^{(r)}) &= \Omega_1(\vec{y}^{(r)}, \vec{y}^{(r)}); & i_2) \Omega_i(\vec{x}^{(r)}, \vec{x}^{(r+1)}) &= \Omega_i(\vec{y}^{(r)}, \vec{y}^{(r+1)}); \\ i_3) \Omega_j(\vec{x}^{(r)}, \vec{x}^{(r+1)}) &= \Omega_j(\vec{y}^{(r)}, \vec{y}^{(r+1)}); & i_4) \Omega_k(\vec{x}^{(r)}, \vec{x}^{(r+1)}) &= \Omega_k(\vec{y}^{(r)}, \vec{y}^{(r+1)}) \end{aligned}$$

для всех $t \in \mathfrak{T}$ и $r = \overline{0, n-1}$.

Для матричных функций $A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)$ и $f(t)$ числовой функции s , определенных выше, справедливы следующие свойства:

1'. Для элементов матрицы $A(t)$ выполняется условие (**).

2'. Матрица $B(t)$ является невырожденной, симметричной, и неотрицательно определена для некоторых векторов $\vec{a} \in R^{4n}$, т.е.

$$\det B(t) \neq 0, [B(t)]^T = B(t), \vec{a}B(t)\vec{a}^T > 0.$$

3'. Матрицы $D(t), E(t), F(t)$ являются невырожденными и кососимметричными, т.е.

$$\det C(t) \neq 0, \det D(t) \neq 0, \det E(t) \neq 0,$$

$$[C(t)]^T = -C(t), [D(t)]^T = -D(t), [E(t)]^T = -E(t).$$

4'. Для матричных функций $A(t)$ и $B(t)$ справедливо равенство

$$B'(t) = A(t)B(t) + B(t)A^T(t) \text{ при каждом } t \in \mathfrak{T}.$$

5'. Для матричных функций $C(t), D(t), E(t)$ выполняются следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} C'(t) &= A(t)C(t) + C(t)A^T(t), C(t)[B(t)]^{-1}C(t) = -B(t), D'(t) = A(t)D(t) + D(t)A^T(t) \\ D(t)[B(t)]^{-1}D(t) &= -B(t), D(t)[C(t)]^{-1}D(t) = -C(t), E'(t) = A(t)E(t) + E(t) \\ E(t)[B(t)]^{-1}E(t) &= -B(t), E(t)[C(t)]^{-1}E(t) = -C(t), E(t)[D(t)]^{-1}E(t) = -D(t) \end{aligned} \right\}$$

6'. а) $f'(t) = a_{\vec{n}\vec{n}}(t)f(t)$, б) $\det B(t) = f^2(t)$.

Пусть $X(t) = \{x_{l,m}(t)\}_{l,m=1}^{4n}$, $n \in \mathbb{N}$ – матричная функция, элементы которой состоят из бесконечного числа непрерывно дифференцируемых функций на интервале \mathfrak{I} .

Теорема 3.3. Если для матричных функций $A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)$ и числовой функции $f(t)$ выполняются условия 1'-6', то система матричных уравнений

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t), & (i) \\ X(t)X^T(t) = B(t), & (ii) \\ X(t)IX^T(t) = C(t), & (iii) \\ X(t)JX^T(t) = D(t), & (iv) \\ X(t)KX^T(t) = E(t), & (v) \\ \det X(t) = f(t), & (vi) \end{cases} \quad (3.10)$$

имеет единственное с точностью до $\mathfrak{Sp}(4n)$ -эквивалентности невырожденное решение.

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия теоремы 8. Тогда

(i) для каждого невырожденного решения $X(t) = (x_{lm}(t))_{l,m=1}^{4n}$ системы (3.10) уравнений вектор-функция $\vec{x}(t) = \{x_l(t)\}_{l=1}^{4n}$, $t \in \mathfrak{I}$, является сильно регулярным \mathfrak{I} -путем, для которого $M(\vec{x})(t) = X(t)$ при всех $t \in \mathfrak{I}$;

(ii) существует единственный с точностью до $\mathfrak{Sp}(4n)$ -эквивалентности сильно регулярный \mathfrak{I} -путь $\vec{x}(t)$, для которого матрица $M(\vec{x})(t)$ есть решение системы (3.10).

В разделе 3.3 главы изучается проблема нахождения необходимых и достаточных условий эквивалентности заданных путей в пространстве \mathbb{H}^n относительно действия группы $Sp(n)$.

Известно, что заданный \mathfrak{I} -путь в кватернионных пространствах определяется в виде непрерывно дифференцируемой вектор-функции, отображающей интервал \mathfrak{I} в \mathbb{H}^n . Естественно, что каждая координата \mathfrak{I} -пути является кватернионной функцией вещественного аргумента t . Также \mathfrak{I} -путь, удовлетворяющий условию $x(t_0) \neq 0$ при произвольном значении $t_0 \in \mathfrak{I}$ переменной t , называется регулярным. В этом случае мы обозначаем матрицу $M(x)(t)$ через $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

Определение 3.6. \mathfrak{I} -путь $x(t)$ называется сильно регулярным, если определитель $\text{ddet} M(x)(t)$ не равен нулю при всех $t \in \mathfrak{I}$, т.е.

$$\text{ddet}[M(x)(t)] = \det M(x)(t) \det [\bar{M}(x)(t)]^T.$$

Для сильных \mathfrak{S} -путей, заданных в пространствах кватернионов, понятие G -эквивалентности определяется как в Определении 3.2. В следующей теореме дается критерий $G = Sp(n)$ -эквивалентности двух \mathfrak{S} -путей $x(t)$ и $y(t)$ с использованием матриц $M(x)(t)$ и $M(y)(t)$.

Теорема 3.5. *Два сильно регулярных \mathfrak{S} -пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $Sp(n)$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда верны равенства*

$$i). M'(x)(t)[M(x)(t)]^{-1} = M'(y)(t)[M(y)(t)]^{-1};$$

$$ii). M(x)(t)[\bar{M}(x)(t)]^T = M(y)(t)[\bar{M}(y)(t)]^T$$

для всех $t \in \mathfrak{S}$.

Обозначим левые матрицы-функции условий *i)* и *ii)*, приведенные в Теореме 3.5., через $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ и $B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, соответственно. Элементы матричных функций $A(t)$ и $B(t)$ являются $Sp(n)$ -инвариантными d -рациональными функциями от переменных

$$x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), \dots, x_n^{(m)}(t), \dots, x_n^{(m)}(t), \dots, m \in \mathbb{N}.$$

Это позволяет решить проблему $Sp(n)$ -эквивалентности сильно регулярных \mathfrak{S} -путей $x(t)$ и $y(t)$ с использованием $Sp(n)$ -инвариантных d -рациональных функций. Используя теперь Теорему 3.5, получим следующий критерий для $Sp(n)$ -эквивалентности двух сильно регулярных \mathfrak{S} -путей.

Теорема 3.6. *Два сильно регулярных \mathfrak{S} -пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $Sp(n)$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда*

$$\langle x^{(r-1)}(t), x^{(r-1)}(t) \rangle = \langle y^{(r-1)}(t), y^{(r-1)}(t) \rangle;$$

$$\langle x^{(r-1)}(t), x^{(r)}(t) \rangle = \langle y^{(r-1)}(t), y^{(r)}(t) \rangle$$

для всех $t \in \mathfrak{S}$ и $r = \overline{1, n}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Диссертация посвящена решению задачи об эквивалентности путей, заданных в кватернионном пространстве относительно действия симплектической группы. Основные результаты исследования заключаются в следующем:

1. Определена система образующих кольца инвариантных полиномов относительно действия группы $\mathfrak{Sp}(4n)$ линейных преобразований $4n$ -мерного вещественного пространства и установлены соотношения между ними.

2. Определена система образующих поля d -рациональных функций, инвариантных относительно действия группы $\mathfrak{Sp}(4n)$ линейных преобразований $4n$ -мерного вещественного пространства.

3. Определены система образующих тела рациональных функций, инвариантных относительно действия группы линейных преобразований $Sp(n)$ n -мерного пространства кватернионов, и найдены соотношения между ними.

4. Описана система образующих тела d -рациональных функций, инвариантных относительно действия группы линейных преобразований $Sp(n)$ n -мерного пространства кватернионов.

5. Найдены необходимые и достаточные условия эквивалентности сильных регулярных путей, заданных в $4n$ -мерном вещественном пространстве, для действия группы $\mathfrak{Sp}(4n)$.

6. Доказано, что решения системы матричных дифференциальных уравнений, определяемые на основе специальных условий, единственны и точны с точностью до $\mathfrak{Sp}(4n)$ -эквивалентности.

7. Найдены необходимые и достаточные условия эквивалентности путей, заданные в n -мерных кватернионных пространствах по отношению к действию группы $\mathfrak{Sp}(4n)$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc. 03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

FERGANA STATE UNIVERSITY

JURABOYEV SAYIDAKHBOR SOLYJONOVICH

**EQUIVALENCE OF GIVEN PATHS IN QUATERNION VECTOR SPACES
WITH RESPECT TO THE ACTION OF A GROUP $Sp(n)$**

01.01.01 – Mathematical analysis

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF
PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2023

The theme of the dissertation of doctor of philosophy (Ph. D.) on Physical and Mathematical Sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.4.PhD/FM428

The dissertation has been prepared at Fergana State University

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (<http://www.ziynet.uz/>).

Scientific supervisor:

Muminov Kobyljon Kodyrovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents:

Rozykov Utkir Abdulloevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Tishaboev Juraboy Karimovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Leading organization:

Namangan State University

Defense will take place on "28" december 2023 at 14⁰⁰ at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No. 184). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on "14" december 2023.
(Mailing report No. 2 on "14" december 2023).



A. Sadullaev

Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.Ph.-M.S., Academician

R.M. Juraev

Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

R.N. Ganixodjaev

Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.Ph-M.S, Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the study is to solve the problem of equivalence of given paths in a quaternion space with respect to the action of symplectic transformations and the group of their real representations using the methods of invariant theory.

The object of study is a quaternion space, group of symplectic transformations, invariant differential polynomials, given paths in quaternion spaces..

The scientific novelty of the research work. All the results obtained in the dissertation are new. They are as follows:

a system of generators of the algebra of invariant polynomials with respect to the action of the group of symplectic transformations and the group of its real representations was determined, and the relationships between them were found;

theorems are proved on the description of the system of generators of the field (skew-field) of invariant differential rational functions with respect to the action of the group of symplectic transformations and the group of its real representations;;

necessary and sufficient conditions for the equivalence of given paths in real space, the action of the group of real representations of the symplectic group are found;

solutions of a system of matrix differential equations, determined on the basis of the conditions of equivalence of paths with respect to the action of the group of real representations of the symplectic group, the significance and their uniqueness are proved using invariant matrix functions;

Using invariant matrix functions and bilinear forms, conditions for the equivalence of given paths in quaternion spaces with respect to the action of the group of symplectic transformations are found.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis were used in the following research projects:

1. Results on the equivalence of given paths in vector spaces of quaternions with respect to the action of the group , used research on the restoration of geometric images of non-commutative processes in the foreign fundamental project MD-758.2022.1.1 “Development of mathematical models of fractional dynamics for the study of oscillatory processes and saturated processes” (Vitus Bering Kamchatsky, certificate No. 40-12 dated September 4, 2023). The results made it possible to determine conditions for the equivalence of these curves in non-commutative geometries.

2. Scientific results obtained by studying the equivalence of given paths in quaternion spaces with respect to the action of group A were used in the grant number OT-F-4-(37-29) “Functional properties of A-analytic functions and ix applications” on the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (2017-2020). In particular, from matrix functions, which are used to establish a criterion for the equivalence of the influence of given paths in quaternion spaces on the symplectic group and the group of its real representations, also from invariant differential rational functions and from the relationship between them, are used in

studying the problem of classifying groups of automorphisms in some matrix areas in the project (certificate of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek No. 04/11-5324 dated September 8, 2023). The application of scientific results made it possible to classify the group of automorphisms for matrix domains and determine integral formulas with their help.

Structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters divided into eleven paragraphs, a conclusion, and a list of references. The total volume of the dissertation is 121 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

Статьи

1. Muminov K.K and Juraboyev S.S, The system of d-generators of d-skew field of $Sp(n)$ -invariant d-rational functions // International Journal of Applied Mathematics 35(6), (2022), pp.903-921. (3. Scopus, Q3. Cite score IF=0.3)
2. Muminov K.K and Jurabayev S.S, Equivalence of Paths under the Action of the Real Representation of $Sp(n)$ // Journal of Applied Mathematics and Physics 10, (2022), pp.1837-1858. (24. Scientific Research Publishing inc, IF=0.3)
3. Muminov K.K and Jurabayev S.S, Equivalence of paths with respect to the action of the group $Sp(n)$ // AIP Conference Proceedings 2781, 020040 (2023). (3. Scopus, Q4 Cite score IF=0.16)
4. К. К. Муминов и С.С. Журабоев, Эквивалентность путей относительно действия специальной унитарной группы // Вестник НУУз 2/1, (2017), с.146-150.(01.01.00 № 8)
5. К. К. Муминов и С.С. Журабоев, Эквивалентность путей относительно действия групп движения гиперболической плоскости // Научный вестник НамГУ 9, (2020), с.14-21. (01.01.00 №14)
6. К. К. Муминов и С.С. Журабоев, Эквивалентность путей относительно действия группы вещественных представлений кватернионных чисел // Научный вестник НамГУ 9, (2021), с.14-21. (01.01.00 №14)
7. К. К. Муминов и С.С. Журабоев, Проблема эквивалентности заданного пути в двумерном кватернионном векторном пространстве относительно действия симплектической группы // Научный вестник СамГУ 1, (2022), с.37-50. (01.01.00 №2)
8. Juraboyev S.S, The problem of describing the generators of a differential field of invariant differential rational functions with respect to the action of the group of real representations of symplectic transformations in a quaternion space // Bull. Inst. Math 5(3), (2022), pp.151-165. (01.01.00 №8)

Тезисы в материалах конференций

9. Muminov K. K, Juraboev S.S. Equivalence of paths with respect to the action of the group $Sp(n)$ // Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021: abstracts of the international scientific conference– Fergana, 15-17 November, 2021. p 91.
10. Juraboyev S.S, Finite system of differential generators in skew-field $A_{x_1, x_2; \bar{x}_1, \bar{x}_2}^{Sp(n)}$ // Computational models and technologies: Abstracts of

- the Uzbekistan-Malaysia international conference, –Tashkent, September 16-17, 2022, p. 143.
11. Журабоев С.С. Эквивалентность путей относительно действия групп вещественных представлений $Sp(n)$ // Сборник содержит материалы участников Международной конференции «Классическая и современная геометрия», –Москва 1–4 ноября 2021 г, с.70.
 12. К. К. Муминов и С.С. Журабоев, Образующие дифференциального тела движение кватернионов пространств // VI международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики » –Нальчик, 5-9 декабря 2021 год, с.146.
 13. К. К. Муминов и С.С. Журабоев, Эквивалентность путей относительно действия группы кватернионов // Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики» –Фергана, 12-13 марта, 2020 года, с.60-63.
 14. Jo'raboyev S.S, Simplektik gruppning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan differensial invariantlari // Тезисы докладов республиканской научной конференции «Сарымсаковские чтения» –Ташкент, 16-18 сентября, 2021 года, с. 297-299.
 15. К. К. Муминов и С.С. Журабоев, Эквивалентные решения системы матричных дифференциальных уравнений относительно действия группы кватернионов // Материалы Республиканской научной онлайн конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и прикладной математики» –Ташкент, 21-мая, 2020 г, с. 65-68.
 16. К. К. Муминов и С.С. Журабоев, Алгебраический инвариант относительно действия группы вещественным представлением групп $Sp(n)$, // Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа» –Бухара, 04-05 ноябрь, 2021 г, с.144-146.

Avtoreferat Farg‘ona davlat universiteti qoshidagi “Lingvistik tahrir va tarjimashunoslik” ilmiy tadqiqoti markazida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tilidagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

FDU Nusxa ko‘paytirish bo‘limi

2023 yil. Adadi 100 nusxa.

Bichimi 84x108 1/16. Nashriot bosma tabog‘i – 3.

Shartli bosma tabog‘i – 1,5.

Times New Roman garniturasini.

Manzil: Farg‘ona shahar, Murabbiylar ko‘chasi 19-uy.

