

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

NAMANGAN MUHANDISLIK-QURILISH INSTITUTI

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

OLIY MATEMATIKA FANIDAN

DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALAR

HAQIDAGI

ASOSIY TEOREMLAR

mavzusidagi

ATT ta’lim yo’nalishi

talabalari uchun

USLUBIY QO’LLANMA

Namangan 2023

Namangan muhandislik-qurilish instituti ilmiy
“Oliy matematika” kafedrasi uslubiy seminarida ko`rib
chiqilib, institutning ilmiy uslubiy kengashiga ko`rib
chiqish uchun tavsiya etilgan.

Majlis bayoni №16 16.12.2023 y.

Namangan muhandislik-qurilish instituti
ilmiy- uslubiy kengashi tomonidan tasdiqlangan va
chop etishga tavsiya etilgan. Majlis bayoni №60
18.12.2023 y.

Ro'yxat raqami № 216

Muallif:

PhD. A.M.To'xtabayev

Taqrizchi:

dots. B.Y. Irgashev

O`quv moduli birliklari:

1. Ferma teoremasi
2. Roll teoremasi
3. Lagranj teoremasi
4. Koshi teoremasi
5. 1-4 teoremalarga doir misollar

Aniqlashtirilgan o`quv maqsadlari:

Talabalar ushbu mavzuni to`la o`zlashtirgandan so`ng:

1. Ferma , Roll, Lagranj va Koshi teoremlarini masalalar yechishga qo'llay oladi.
2. Tengsizliklarni isbotlashda Lagranj teoremasini qo'llay oladi.
3. Ferma , Roll, Lagranj va Koshi teoremlarining geometrik mohiyatini tushunib yetadi.

1. Ferma teoremasi.

Teorema (Ferma) $y=f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Agar $f(x)$ funksiya

1) $c \in (a, b)$ nuqtada o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsa

2) $c \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsa

u holda $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Isbot.

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalning $x=c$ nuqtasida o'zining eng katta qiymatiga erishsin. $f(c) = M$ deylik.

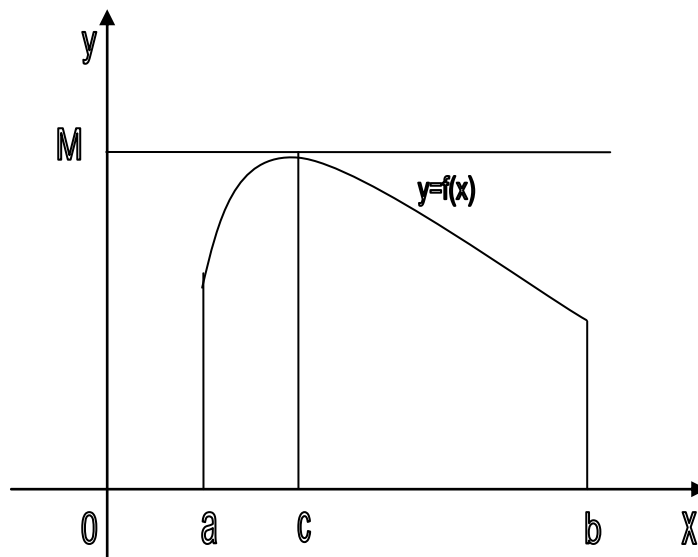
$f'(c) = 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Ta'rif

bo'yicha $f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ edi.

$y=f(x)$ funksiya $x=c$ nuqtada eng katta qiymatiga erishgani uchun

$f(c) \geq f(c+\Delta x)$ yoki $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$

bo'ladi.



1) $\Delta x > 0$ bo'lsin. U holda $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ bo'ladi. $f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$

$f'(c) \leq 0$

2) $\Delta x < 0$ bo'lsin. U holda $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$ bo'ladi. $f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$

$f'(c) \geq 0$

1) va 2) holdan $f'(c) = 0$ ekani kelib chiqadi.

$y=f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalning $x=c$ nuqtasida o'zining eng kichik qiymatiga erishsa ham huddi shu kabi isbotlanadi. Teorema isbotlandi.

2. Roll teoremasi.

Teorema (Roll) $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin.

Agar $f(x)$ funksiya

- 1) $[a, b]$ kesmada uzluksiz ya'ni $f(x) \in C[a, b]$
- 2) $\forall x \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega
- 3) $f(a) = f(b)$ bo'lsa, u holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topilib $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun Veyershtass teoremasiga ko'ra bu kesmada o'zining eng katta M va eng kichik m qiymatlariga erishadi.

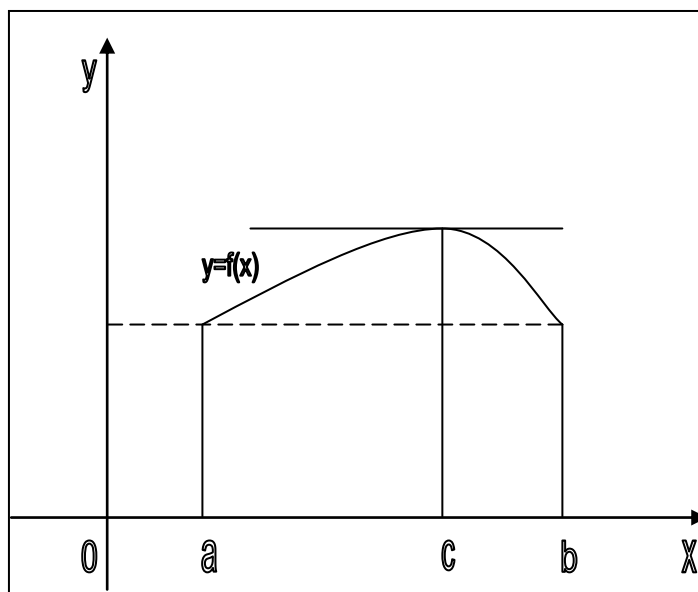
1) $M=m$ bo'lsin. $m \leq f(x) \leq M$

bo'lgani uchun $f(x) = \text{Const}$

bo'ladi. Bundan $f'(x) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. c nuqta sifatida (a, b) oraliqdagi ixtiyoriy nuqtani olish mumkin.

2) $M > m$ bo'lsin. $f(x)$ funksiya qandaydir nuqtalarda M va m qiymatlarga erishadi. $f(a) = f(b)$ bo'lgani uchun M yoki m qiymatga (a, b) ning ichki c nuqtasida erishadi.

$f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lgani uchun $c \in (a, b)$ nuqtada ham differensiallanuvchi bo'ladi. Ferma teoremasidan $f'(c) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.



3. Lagranj teoremasi.

Teorema (Lagranj) $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin.

Agar $f(x)$ funksiya

- 1) $[a; b]$ kesmada uzluksiz ya'ni $f(x) \in C[a, b]$
- 2) $\forall x \in (a; b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topilib, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

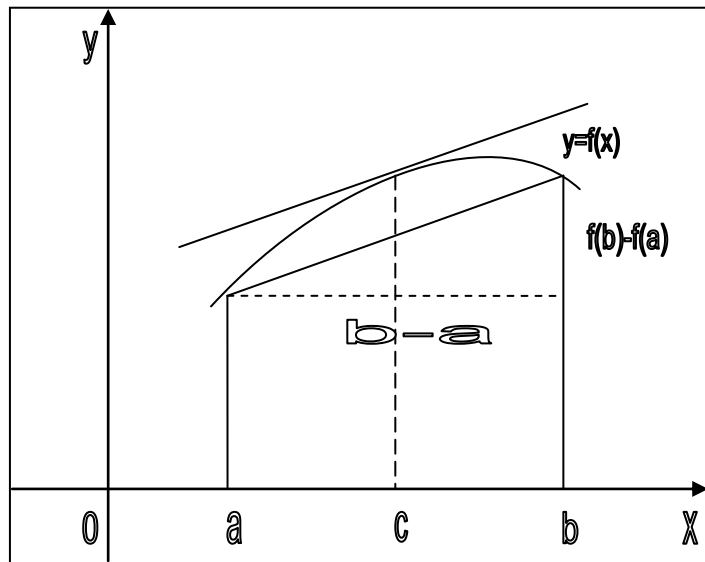
Isbot.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

bo'lsin. Bu funksiya Roll teoremasi shartlarini qanoatlantiradi.

$F(x)$ $[a, b]$ kesmada aniqlangan

- 1) $f(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz va uzluksiz funksiylar ustida arifmetik amallardan yana uzluksiz funksiya hosil bo'lgani uchun $F(x)$ funksiya ham $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'ladi.



- 2) $f(x)$ funksiya $\forall x \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lgani uchun

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

hosilaga ega.

- 3) $F(a) = F(b) = 0$ bo'ladi. Roll teoremasidan shunday $c \in (a, b)$ nuqta topilib, $F'(c) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Ya'ni $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ yoki $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ bo'ladi.

4. Koshi teoremasi.

Teorema (Koshi) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada berilgan bo'lsin.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar

- 1) $f(x) \in \tilde{N}[a, b]$ va $g(x) \in \tilde{N}[a, b]$ ya'ni $[a, b]$ kesmada uzluksiz
- 2) $\forall x \in (a, b)$ da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega.
- 3) $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topilib

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ bo'ladi.}$$

Isbot. $g(a) = g(b)$ bo'lsa, u holda $g(x)$ funksiya uchun Roll teoremasi o'rinli. Demak, (a, b) oraliqda $g'(x) = 0$ bo'ladigan biror nuqta mavjud. Bu esa 3) shartga zid. Bundan $g(a) \neq g(b)$ ekani kelib chiqadi.

$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$ yordamchi funksiyani qaraylik. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi.

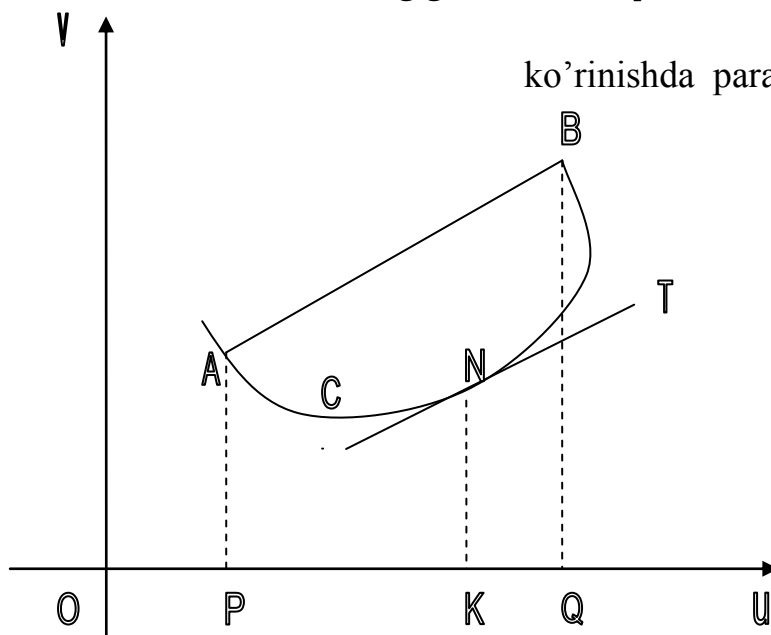
- 1) Haqiqatan, uzluksiz funksiyalar ustida bajarilgan arifmetik amallar yordami yana uzluksiz funksiya hosil bo'lgani uchun $F(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'ladi. Demak, $F'(c) = 0$
- 2) $\forall x \in (a, b)$ da $f(x)$ va $g(x)$ chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lgani uchun $\forall x \in (a, b)$ da chekli $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$ hosilaga ega.
- 3) $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(a) - g(a)] = 0$

Bundan shunday $c \in (a, b)$ nuqta topilib $F'(c) = 0$ bo'ladi. Ya'ni

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0 \text{ bo'ladi. Bundan } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ kelib chiqadi.}$$

Teorema isbotlandi.

Koshi teoremasining geometrik talqini.



ACB yoy $u = g(x)$ va $v = f(x)$

ko'rinishda parametrik usulda berilgan.

$$OP = g(a) \quad OQ = g(b)$$

$$AP = f(a) \quad BQ = f(b)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \text{ nisbat AB vatarining}$$

burchak koeffitsiyenti.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{dv}{du} \text{ NT urinmaning burchak koeffitsiyenti.}$$

Darsda yechish uchun mashqlar

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ funksiya uchun $x=0$ nuqta va $(-1;1)$ oraliqda Ferma teoremasining shartlarini tekshiring.
2. $f(x) = x^2 - 4x + 5$ funksiya uchun $x=2$ nuqta va $(1;3)$ oraliqda Ferma teoremasining shartlarini tekshiring.
3. $f(x) = \sin x$ funksiya uchun $[0; 2\pi]$ kesmada Roll teoremasini qo'llash mumkinmi?
4. $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ ko'phad hosilasining ildizlari haqiqiy va $(0;1), (1;2), (2;3)$ oraliqda yotishini isbotlang.
5. $f(x) = x^3$ egri chiziqda shunday nuqta topingki, bu nuqtadan unga o'tkazilgan urinma $A(-1;-1)$ va $B(2;8)$ nuqtalarni tutashtiruvchi vatarga parallel bo'lsin.
6. Lagranj teoremasidan foydalanib tengsizliklarni isbotlang.
 - a) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$
 - b) $|\arctg b - \arctg a| \leq |b - a|$
 - c) $\frac{b-a}{b} \leq \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}$ ($0 < a < b$)
 - d) $e^x > 1+x$ ($x > 0$)
7. $f(x) = x^2$ va $g(x) = x^3$ funksiyalar uchun a) $[-1;1]$ b) $[1;2]$ kesmalarda Koshi teoremasi o'rinli bo'ladimi?

Mustaqil uy vazifasi uchun topshiriqlar

1. $f(x) = -x^2 + 8x - 17$ funksiya uchun $x=-4$ nuqta va $(-6;-3)$ oraliqda Ferma teoremasining shartlarini tekshiring.
2. $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ funksiya uchun $x=0$ nuqta va $(-1;1)$ oraliqda Ferma teoremasining shartlarini tekshiring.
3. $f(x) = \cos x$ funksiya uchun $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ kesmada Roll teoremasini qo'llash mumkinmi?
4. $f(x) = x(x^2 - 1)$ funksiya uchun $[-1;0]$ va $[0;1]$ kesmada Roll teoremasi shartlari bajariladimi? Bajarilsa c nuqtani toping.
5. Lagranj teoremasidan foydalanib tengsizliklarni isbotlang
 - a) $pb^{p-1}(b-a) \leq b^p - a^p \leq pa^{p-1}(b-a)$ ($0 < a < b < 1$), ($p > 1$).
 - b) $e^x > ex$ ($x > 1$)
 - c) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ ($x > 0$)
6. $f(x) = x^3$ va $g(x) = x^4$ funksiyalar uchun a) $[-1;1]$ b) $[1;2]$ kesmalarda Koshi teoremasi o'rinli bo'ladimi?

Masalalar yechish

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ funksiya $(-1;1)$ oraliqda aniqlangan.

1) $x=0$ nuqtada $f(x)$ funksiya eng kichik qiymatiga erishadi. Chunki,

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1 \geq -1 = f(0) \text{ ya'ni } f(x) \geq f(0).$$

$$2) y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2} - 1 - (-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = \infty$$

$x=0$ nuqtada chekli hosila mavjud emas. Demak, Ferma teoremasi bajarilmaydi.

2. $f(x) = x^2 - 4x + 5$ funksiya $(1,3)$ oraliqda aniqlangan.

1) $x=2$ nuqtada $f(x)$ funksiya eng kichik qiymatiga erishadi.

Chunki, $f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1 = f(2)$ ya'ni $f(x) \geq f(2)$.

2) $\forall x \in (1,3)$ nuqtada chekli $f'(x) = 2x - 4$ hosilaga ega. Xususan, $x=2$ nuqtada ham chekli hosilaga ega. Bu funksiya uchun Ferma teoremasi shartlari bajarilyapti. Bundan $f'(2) = 0$ ekani kelib chiqadi. Haqiqatan, $f'(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$ bo'ladi.

3. $f(x) = \sin x$ funksiya $[0; 2\pi]$ kesmada aniqlangan

1) $f(x) = \sin x$ funksiya $[0; 2\pi]$ kesmada uzluksiz.

2) $\forall x \in (0; 2\pi)$ nuqtada chekli $f'(x) = \cos x$ hosilaga ega.

3) $f(0) = \sin 0 = 0 = \sin 2\pi = f(2\pi)$ ya'ni $f(0) = f(2\pi)$ bo'ladi. Roll teoremasidan shunday $c \in (0; 2\pi)$ nuqta topilib, $f'(c) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Ya'ni $\cos c = 0$ bo'ladi. Bundan $c_1 = \frac{\pi}{2}$ va $c_2 = \frac{3\pi}{2}$ ekani kelib chiqadi.

4. Avval $[0;1]$ kesmani qaraylik. $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ ko'phad $[0;1]$ kesmada aniqlangan.

1) $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ ko'phad $[0;1]$ kesmada uzluksiz.

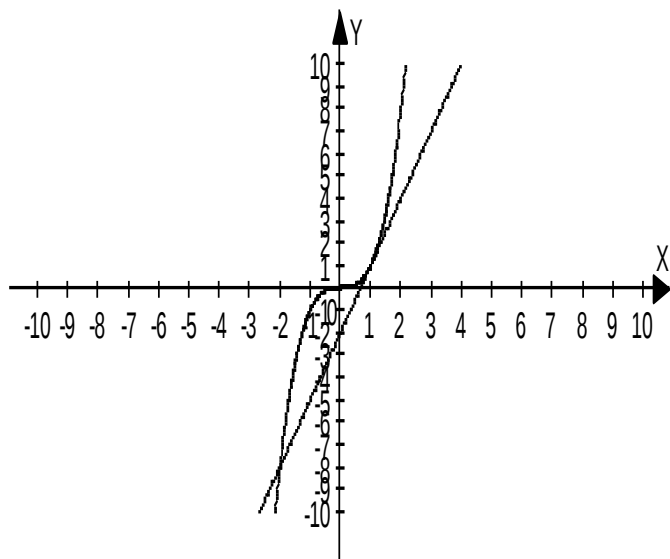
2) $\forall x \in (0;1)$ nuqtada chekli $f'(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-3) + x(x-1)(x-2)$ hosilaga

3) $f(0) = 0 = f(1)$. Roll teoremasi shartlari $[0;1]$ kesmada o'rinli ekan. Demak, shunday $c_1 \in (0;1)$ nuqta topilib, $f'(c_1) = 0$ bo'ladi. Ya'ni c_1 haqiqiy son $f'(x)$ ko'phadning ildizi ekan.

Huddi shu kabi $[1;2]$, $[2,3]$ kesmalarni qarasak, $c_2 \in (1,2)$ va $c_3 \in (2,3)$ haqiqiy sonlar topilib, $f'(x)$ ko'phadning ildizlari bo'ladi.

5. $f(x) = x^3$ funksiya $[-1,2]$ kesmada Lagranj teoremasini shartlarini qanoatlantiradi.

Ya'ni, $f(x) \in C[-1;2]$ va $f'(x) = 3x^2$ hosila $(-1;2)$ oraliqda chekli.



U holda shunday $c \in (-1; 2)$ nuqta topilib ,
 $f(2) - f(-1) = 3c^2(2 - (-1))$ bo'ladi. Bundan
 $8 + 1 = 9c^2 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$ ekani kelib
chiqadi. $-1 \notin (-1; 2)$ ekanligidan $c = 1$ kelib
chiqadi. $f(1) = 1$. Javob: $(1; 1)$

Created with a trial version of Advanced Grapher - <http://www.alentum.com/agr>

6. a) $f(x) = \sin x$ funksiyani $[a; b]$ kesmada qaraylik ($a < b$). $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, va $(a; b)$ oraliqda chekli $f'(x) = \cos x$ hosilaga ega. Lagranj teoremasiga ko'ra shunday $c \in (a; b)$ nuqta topilib, $\sin b - \sin a = \cos c(b - a)$ tenglik o'rinli. Bu tenglikdan $|\sin b - \sin a| = |\cos c| |b - a|$ kelib chiqadi. $|\cos c| \leq 1$ ekanligidan, $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ tengsizlik kelib chiqadi.

d) $f(x) = e^x$ funksiyani ixtiyoriy $[0; x]$ kesmada qaraylik ($0 < x$). $f(x)$ funksiya $[0; x]$ kesmada uzluksiz, va $(0; x)$ oraliqda chekli $f'(x) = e^x$ hosilaga ega. Lagranj teoremasiga ko'ra shunday $c \in (0; x)$ nuqta topilib, $e^x - e^0 = e^c(x - 0)$ tenglik o'rinli. $f(x) = e^x$ funksiya o'suvchi funksiya bo'lgani uchun $c \in (0; x)$ oraliqda $e^c > e^0 = 1$ tengsizlik o'rinli. Ushbu tengsizlik va yuqoridagi tenglikdan $e^x - 1 > 1 \cdot x$ tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $e^x > 1 + x$ ($x > 0$) tengsizlik o'rinli ekan.

7. a) $f(x)$ va $g(x)$ $[-1; 1]$ kesmada aniqlangan.

1) $f(x), g(x)$ $[-1; 1]$ kesmada uzluksiz.

2) $\forall x \in (a; b)$ nuqta uchun chekli $f'(x) = 2x$ va $g'(x) = 3x^2$ hosila mavjud.

3) Lekin $\forall x \in (a; b)$ $g'(x) \neq 0$ shart bajarilmaydi. Chunki, $g'(0) = 0$ bo'ladi.

b) $[1; 2]$ kesmada Koshi teoremasining barcha shartlari bajariladi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Azlarov T., Mansurov X., Matematik analiz, 1, 2-qism, Toshkent, «O`qituvchi», 1986, 1989.
2. В.П.Минорский, Сборник задач по высшей математике, Москва, «Наука» 1971.
3. А.Садуллаев, Г.Худойбергенов, А.Ворисов, Ҳ.Мансуров, Б.Шоимқулов, Т.Туйчиев, Н.Султонов, Математик анализдан масалалар тўплами, Тошкент 2008.
4. Soatov YO., Oliy matematika asoslari, 1, 2, 3 tom, Toshkent, «O`qituvchi», 1992, 1994, 1996.
5. Abdalimov B. A., Oliy matematika, Toshkent, «O`qituvchi», 1994.