FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

MIRSABUROVA UMIDA MIRAXMATOVNA

ELLIPTIK-GIPERBOLIK VA SOHA ICHIDA BUZILADIGAN GIPERBOLIK TIPDAGI SINGULYAR KOEFFITSIENTLI TENGLAMALAR UCHUN SILJISHLI MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Farg‘ona – 2024

UDK: 517.956

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on Physical – Mathematical Sciences

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

MIRSABUROVA UMIDA MIRAXMATOVNA

ELLIPTIK-GIPERBOLIK VA SOHA ICHIDA BUZILADIGAN GIPERBOLIK TIPDAGI SINGULYAR KOEFFITSIENTLI TENGLAMALAR UCHUN SILJISHLI MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Farg‘ona – 2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosofy) dessertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovasiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.2.PhD/FM867 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Termiz davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (uzbek, rus, ingliz (rezyume) bayon qilingan. Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.fdu.uz) va "ZiyoNet" Axborot ta'lim portalida (http://www.ziyonet.uz/) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Urinov Axmadjon Kushakovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Apakov Yusufjon Pulatovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Ro'ziyev Mengliboy Xoltojiboyevich fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Yetakchi tashkilot:	Samarqand davlat uninersiteti

Dissertatsiya himoyasi Farg'ona davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 raqamli Ilmiy kengashning 2024-yil «18» 01 soat 10^{00}dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi 19-uy, tel. (99873) 244-44-02, faks: (0573) 244-44-93 e-mail: farduinfo@umail.uz).

Dissertatsiya bilan Farg'ona davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (326 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil:150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. tel: (0573) 244-44-94)

Dissertatsiya avtoreferati 2024-yil «05» 01 kuni tarqatildi.
(2024-yil «04» 01 dagi 6 raqamli reyestr bayonnomasi)

Sh.T.Karimov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi o'rinbosari, f.-m.f.d., dotsent

I.U.Xaydarov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.n., dotsent

E. Kar

E.T.Karimov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., dotsent

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda amaliy va nazariy xususiyatga ega boʻlgan koʻplab matematik modellarni oʻrganishda, aksariyat hollarda aralash tipdagi yoki buziluvchan giperbolik tipdagi differensial tenglamalar uchun kombinatsiyalshtirilgan lokal va nolokal shartlili masalalarni tadqiq etish, asosiy oʻrinlardan birini egallamoqda. Ayniqsa, aralash tipdagi tenglamalar hamda soha ichida buziladigan giperbolik tipdagi tenglamalar uchun qoʻyilgan klassik masalalarni **singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi tenglamalar (SKATT)** va **soha ichida buziladigan singulyar koeffitsiyentli giperbolik tipdagi tenglamalar (SIBSKGTT)** uchun umumlashtirgan holda noklassik usulda ta’riflash va ularni tadqiq etish hamda amaliyotga joriy etish dolzarb vazifalardan biri boʻlib kelmoqda. Shu jihatdan bu tipdagi tenglamalar uchun noklassik masalalarni tadqiq etishga qiziqishning ortishi, ilmiy asoslangan nazariy va amaliy natijalar olinishi, hamda ularning boshqa sohalarda, ya’ni gazlar dinamikasida, gidrodinamikada, cheksiz kichik bukiluvchi sirtlar nazariyasida, mexanikada, akustika va elektron sochilishi nazariyasida qoʻllanishi muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Jahonda SKATT va SIBSKGTT uchun chekli va chegaralanmagan sohalarda kombinatsiyalashtirilgan lokal va nolokal shartlili chegaraviy masalalarni tadqiq etishga yoʻnaltirilgan qator ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda. Bu borada, ayniqsa Trikomi sharti xarakteristikaning bir qismida berilishi; Frankl shartiga oʻxshash shartni ichki xarakteristikada berilishi, Bitsadze-Samarskiy shartini chegaraviy va unga parallel ichki xarakteristikada berilishi kabi masalalarni oʻrganishga alohida e’tibor berilmoqda. Masalalarning noklassik qoʻyilishi yangi tipdagi Trikomining nostandart singulyar integral tenglamalarni oʻrganishga olib keladi va ularni yechish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan biri hisoblanadi.

Respublikamizda matematik fizika, matematik biologiya, gaz dinamikasi kabi fundamental fanlarni rivojlantirish yuzasidan keng qamrovli chora tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. Jumladan, matematik fanlarning ustuvor yoʻnalishlari, xususan, differensial tenglamalar va matematik fizika, dinamik sistemalar va optimal boshqaruv, amaliy matematika va matematik modellashtirish, matematik analiz va funksiyalar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, algebra va geometriya boʻyicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish, matematiklarning asosiy vazifalari va faoliyati sifatida belgilangan[1]. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, jumladan, integral tenglama yadrosining «nosingulyar» qismida nokarleman tipidagi siljishga ega boʻlgan va noxarakteristik qismida nofredgolm operatori boʻlgan Trikomining nostandart singulyar integral tenglamasini yechish algoritmini ishlab chiqish yuqorida qoʻyilgan topshiriqlarni amalga oshirishda katta ahamiyatga ega.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “Oʻzbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish boʻyicha harakatlar strategiyasi toʻgʻrisida”gi Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va

[1] Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi «Matematika sohasidagi ta`lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgrisida»gi PQ-4708-son qarori

fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa me’yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Buziladigan giperbolik, elliptik va aralash tipdagi tenglamalar nazariyasining rivoji G.Darbu, F.Trikomi, E.Xolmgren va S.Gellerstedtlarning fundamental ishlaridan boshlanadi, $yu_{xx}+u_{yy}=0$ ko‘rinishdagi aralash tipdagi tenglama uchun birinchi fundamental tadqiqot esa italiyalik matematik F.Trikomi tomonidan olib borildi. O‘tgan davrda buziladigan va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy va nolokal masalalarni o‘rganish bo‘yicha horijda E.Xolmgren, S.Gellerstedt, A.V.Bitsadze, A.M.Naxushev, I.Frankl, S.G.Mixlin, Yu.V.Devingtal, K.I.Babenko, M.M.Smirnov, V.F.Volkodavov, A.I.Kojanov, S.P.Pulkin, K.B.Sabitov, T.Sh.Kalmenov, N.Yu.Kapustin, E.I.Moiseyev, S.M.Ponamarev, A.P.Soldatov, R.S.Xayrullin va boshqalar tomonidan ilmiy-tadqiqot ishlari olib borildi hamda muhim ilmiy natijalar olindi.

Mamlakatimiz olimlaridan M.S.Salaxiddinov, Sh.A.Alimov, T.D.Djurayev, S.Abdinazarov, A.K.Urinov va boshqalar aralash tipdagi tenglamalar nazariyasini takomillashtirish borasida salmoqli ilmiy natijalarga erishgan.

Buziladigan va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy va nolokal masalalar nazariyasi turli yo‘nalishlarda rivojlantirildi, xususan, Trikomi tenglamasiga nisbatan umumiyroq tenglamalar uchun chegaraviy masalalar S.Gellerstedt, K.I.Babenko, V.F.Volkodavov, A.I.Kojanov, S.P.Pulkin, A.V.Bitsadze, M.S.Salaxiddinov, T.D.Djurayev, S.Abdinazarov, K.B.Sabitov va boshqalar tomonidan tadqiq qilingan bo‘lsa, Trikomi masalasining turli modefikatsiyasi A.V.Bitsadze, A.M.Naxushev, M.M.Smirnov, S.Gellerstedt, F.N.Frankl, M.X.Ruziyev va boshqalar tomonidan o‘rganildi.

Shuningdek, Sh.A.Alimov, T.Sh.Kalmenov, N.Yu.Kapustin, E.I.Moiseyev, S.M.Ponamarev, M.S.Salaxiddinov, A.K.Urinov, M.A.Sadibekov va boshqalar tomonidan buziladigan va aralash tipdagi tenglamalar uchun spektral masalalar bayon qilingan va o‘rganilgan.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, hozirgi vaqtgacha olib borilgan tadqiqotlarda SKATT va SIBSKGTT uchun chegaraviy va ichki xarakteristikalarda lokal va nolokal shartlar kombinatsiyasidan iborat shartli masalalar kam tadqiq qilingan. Mazkur dissertatsiya xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining ushbu masalalarini tadqiq qilishga bag‘ishlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi.

Dissertatsiya tadqiqoti Termiz davlat universiteti ilmiy tadqiqot ishlari rejasidagi №F3-202009211 shifrli "Aralash tipdagi tenglamalar uchun xarakteristika va buzilish chizigida Frankl va Bitsadze-Samarskiy shartlari berilgan masalalar korrektligini noklassik singulyar integral tenglamalarga olib kelib o'rganish" fundamental tadqiqotlar loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi SKATT va SIBSKGTT uchun chegaraviy va ichki xarakteristikalarda lokal va nolokal shartlar berilgan masalalarning korrekt qo'yilganligini o'rganishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

SKATT uchun soha ichidagi xarakteristikada Frankl shartili masalaning yechimini yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremalarni isbotlash;

nostandart Trikomi integral tenglamasini Fredgolm integral tenglamasiga regulyarizatsiyalash algoritmini yaratish;

chegaralanmagan sohada SKATT uchun A.M.Naxushevning siljishli sharti ichki xarakteristikalarda berilgan masalasining bir qiymatli yechilishini isbotlash;

SIBSKGTT uchun xarakteristik to'rtburchakda chegaraviy xarakteristikaning biri ixtiyoriy ravishda ikki bo'lakka bo'linib, birinchi bo'lakda Trikomi sharti, ikkinchi bo'lakda va unga parallel ichki xarakteristikada Bitsadze-Samarskiy sharti berilgan masalaning korrektligini isbotlash.

Tadqiqotning obyekti SKATT va SIBSKGTT hisoblanadi.

Tadqiqotning predmeti. SKATT va SIBSKGTT uchun lokal va nolokal shartlar kombinatsiyasidan iborat noklassik shartlar bilan berilgan masalalar.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiyada qo'yilgan masalalar yechimini yagonaligini isbotlashda ekstremum prinsipi, energiya integralidan foydalanilgan, masalalar yechimini mavjudligini isbotlashda regulyar va singulyar integral tenglamalar nazariyasidan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

chegaralangan aralash sohada SKATT uchun Frankl shartiga o'xshash shart ichki xarakteristikada berilgan noklassik masala bayon qilingan va masala yechimining yagonaligi A.V.Bitsadzening ekstremum prinsipiga o'xshash prinsip asosida, yechimning mavjudsligi esa integral tenglamalar nazariyasidan foydalanib isbotlangan;

Trikomining nostandart singulyar integral tenglamasini Fredgolmning ikkinchi tip integral tenglamasiga regulyarizatsiyalash algoritmi ishlab chiqilgan;

SKATT uchun chegaralanmagan sohaning ichki xarakteristikalarida A.M.Naxushevning siljishli sharti berilgan masalaning korrektligi ekstremum prinsipi hamda integral tenglamalar nazariyasidan foydalanib isbotlangan;

SIBSKGTT uchun xarakteristik to'rtburchakda Bitsadze-Samarskiy sharti chegaraviy xarakteristikaning bir qismida va unga parallel ichki xarakteristikada berilgan masalaning bir qiymatli yechilishi energiya integrallari va integral tenglamalar usullaridan foydalanib asoslangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat: SKATT uchun Frankl va siljishli shartli masalalarning bir qiymatli yechimidan foydalanib. suyuqlik va gaz oqimiga oid matematik modellarni qurish va oʻrganish mumkinligi isbotlangan.

Siljishli va nofredgolm operatorli Trikomining singulyar integral tenglamasi yadrolarida sonli parametrlar ishtirok etgan hol uchun integral tenglamani regulyarizatsiyalash jarayoni uchun ishlab chiqilgan algoritmdan bu tipdagi nostandart tenglamalarni regulyarizatsiyalashda foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarning ishonchliligi. Xususiy hosilali ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, kompleks oʻzgaruvchili funksiyalar va integral tenglamalar nazariyasi usullaridan foydalanib, deduktiv xulosalar qabul qilinganligi hamda teoremalar qat’iy va toʻliq isbotlanganligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ushbu ishda olingan ilmiy natijalarda SKATT va SIBSKGTT dagi xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Dissertatsiya ishida olingan natijalarning SKATT va SIBSKGTT lar orqali ifodalanadigan fizik, texnik va biologik jarayonlarni oʻrganishda tatbiq etilishi mumkinligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot ishlarning joriy qilinishi. Elliptik-giperbolik va soha ichida buziladigan giperbolik tipdagi singulyar koeffitsiyentli tenglamalar uchun siljishli masalalarni tadqiq qilish boʻyicha olingan natijalar asosida:

nostandart singulyar integral tenglamalarni regulyarizatsiya qilish uchun ishlab chiqilgan metodlardan 2017-2020-yillarga moʻljallangan “Ikkinchi va yuqori tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun toʻgʻri va teskari masalalarning tadqiqi” mavzusidagi №OT-Ф4-88-sonli loyihada singulyar koeffitsientli aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalalarni yechishda foydalanilgan (Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, 2023-yil 4-sentabrdagi 2/344-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, singulyar koeffitsientli Gellerstedt tenglamalari uchun ba’zi nolokal chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechimini mavjudligini isbotlash imkonini bergan;

singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy tipidagi nolokal chegaraviy masalalarning korrektligini asoslash boʻyicha teoremalarning xulosalaridan 2020-2022-yillarga moʻljallangan AP008856594 “Daryo va kanallarda suv oqimlari dinamikasini tahlil qilish va nazorat qilishning intellektual tizimini ishlab chiqish” loyihasida kasr tartibli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishda foydalanilgan. (Qozogʻiston Respublikasi Fan va oliy ta’lim vazirligining Fan qoʻmitasi, 2023-yil 14-avgustdagi 01-07/248-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, aralashmaydigan suyuqliklar uchun chekli elementlarning fraktal-stoxastik filtrlash modellarini tahlil qilish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 9 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 6 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan oʻtkazildi.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi boʻyicha jami 15 ta ilmiy ish chop etilgan, ulardan 5 tasi Oʻzbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori (PhD) dissertatsiyalari ilmiy natijalarini chop etishga tavsiya qilingan nashrlarda, shulardan 2 tasi xorijiy va 3 tasi Respublika ilmiy jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan 82 nomdagi adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 118 bet.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan: tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

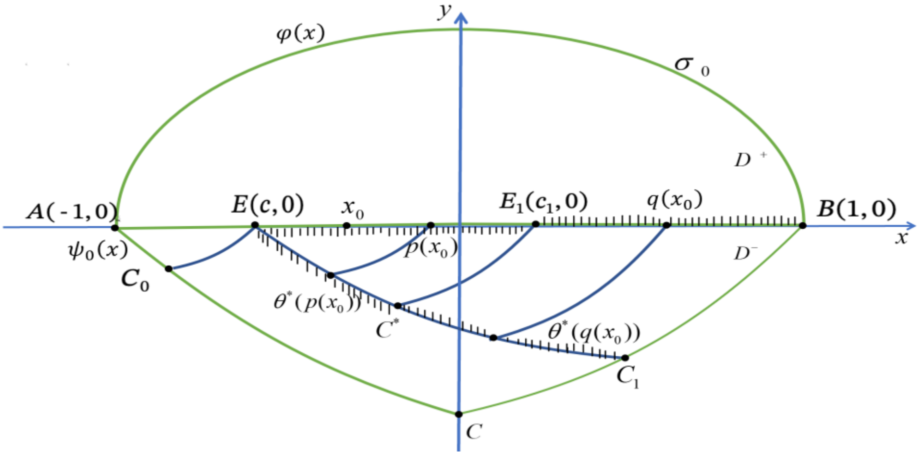
Dissertatsiyaning **“Elliptik-giperbolik tenglama uchun chegaraviy xarakteristikada Trikomi sharti to‘liq berilmagan va ichki xarakteristikada Frankl shartiga o‘xshash shart berilgan masala”** deb nomlangan birinchi bobida aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy xarakteristikada Trikomi sharti to‘liq berilmagan hamda ichki xarakteristikada va buzilish chizig‘ida Frankl sharti berilgan masala yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida TF (Trikomi-Frankl) masalasining ta’rifi (qo‘yilishi) keltirilgan.

D soha z kompleks tekisligining chekli bir bog‘lamli sohasi bo‘lib, $y>0$ yarimtekislikda uchlari $A(-1,0)$, $B(1,0)$ nuqtalarda bo‘lgan, $\sigma_0 : x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$ normal chiziq bilan, $y<0$ yarimtekislikda esa

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}-(m/2y)u_y=0,\ m=const>0 \tag{1}$$

tenglamaning AC va BC xarakteristikalari bilan chegaralangan bo‘lsin (1.1-rasm).



1.1-rasm

D^+ va D^- orqali D sohaning mos ravishda $y>0$ va $y<0$ yarimtekisliklarda yotgan qismlarini, C_0 va C_1 orqali esa AC va BC xarakteristikalarning $E(c,0)$ nuqtadan chiquvchi xarakteristikalar bilan kesishish nuqtalarini belgilaymiz, C^* orqali EC_1 xarakteristikaning $E_1(c_1,0)$ nuqtadan chiquvchi xarakteristika bilan kesishish nuqtasini belgilaymiz, bu yerda c,c_1- o‘zgarmas sonlar bo‘lib, ular $I=(-1,1)$ intervaliga tegishli va $-1<c<c_1<1$.

Ushbu $p(x)=a_1x-b_1$ va $q(x)=a_2-b_2x$ chiziqli funksiyalar mos ravishda $[c,1]$ kesmani $[c,c_1]$ va $[c_1,1]$ kesmalarga akslantiradi va $p(c)=c$, $p(1)=c_1$, $q(c)=1$, $q(1)=c_1$ shartlarni qanoatlantiradi, bu yerda $a_1=(c_1-c)/(1-c)$, $b_1=c(c_1-1)/(1-c)$, $a_2=(1-cc_1)/(1-c)$, $b_2=(1-c_1)/(1-c)$, $a_1+b_2=1$, $a_2+b_1=1$.

TF (Trikomi Frankl) masalasi. D sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)\in C\left(\bar{D}\right)$ funksiya topilsin:

$u(x,y)$ funksiya $C^2\left(D^+\right)$ sinfga tegishli va D^+ sohada (1) tenglamani qanoatlantiradi;

$u(x,y)$ funksiya D^- sohada (1) tenglamaning R_1 sinfga tegishli umumlashgan yechimi bo‘ladi;

buzilish chizig‘i AB da ushbu ulanish sharti o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}(\partial u/\partial y)=\lim_{y\to+0}y^{-m/2}(\partial u/\partial y)\,,\quad x\in I\setminus\{c\}, \tag{2}$$

shu bilan birga bu limitlar $x=\pm1$, $x=c$ bo‘lganda birdan kichik tartibdagi maxsuslikka ega bo‘lshi mumkin;

ushbu tengliklar bajariladi:

$$u(x,y)\,|_{\sigma_0}=\varphi(x),\ \ x\in\bar{I}\,; \tag{3}$$

$$u(x,y)\,|_{AC_0}=\psi_0(x),\ \ x\in[-1,(c-1)/2]; \tag{4}$$

$$u[\theta^*(p(x))]-\mu u[\theta^*(q(x))]=\psi_1(x),\ \ x\in[c,1]; \tag{5}$$

$$u(p(x),0)-u(q(x),0)=f(x),\ \ x\in[c,1], \tag{6}$$

bu yerda $\theta^*(x_0)=(x_0+c)/2-i[(m+2)(x_0-c)/4]^{2/(m+2)}$ – EC_1 xarakteristikaning $M(x_0,0)$ nuqtadan chiquvchi xarakteristika bilan kesishish nuqtasining affiksi, $x_0\in(c,1)$, μ – berilgan haqiqiy son, $\mu\in(0,1)$, $\varphi(x),\psi_0(x),\psi_1(x),f(x)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Qayd qilamizki, (5) va (6) shartlar mos ravishda ichki $EC_1=EC^*\cup C^*C_1$ xarakteristikada va buzilish chizig‘i $EB=(EE_1\cup E_1B)\subset AB$ da berilgan Frankl shartiga o‘xshash shartlardir.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida ekstremum prinsipi yordamida TF masalasi yechimining yagonaligi isbotlangan.

1-teorema. *Ushbu* $\psi_0(x)\equiv 0$, $\psi_1(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$ *shartlar bajarilganda, TF masalaning* $u(x,y)$ *yechimi* $\bar{D}^+$ *yopiq sohada o'zining eng katta musbat maksimum (EKMMAK) va eng kichik manfiy minimum (EKMMIN) qiymatlarini* σ_0 *normal chiziq nuqtalarida qabul qiladi.*

Natija. *TF masala yagona yechimga ega.*

Birinchi bobning uchinchi paragrafida TF masala yechimining mavjudligi o'rganilgan. Ushbu teorema o'rinli ekanligi isbotlangan.

2-teorema. *TF masalaning sonli parametrlari uchun*

$$\frac{4}{(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{c_1-c}{1-c_1}}\left[\mu(1+b_2^*)+\left(\frac{1-c_1}{c_1-c}\right)(1+a_1^*)\right]<1, \tag{7}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, bu yerda $a_1^*=cos(\theta\pi)-0{,}5a_1 sin(\theta\pi)$, $b_2^*=cos(\theta\pi)-0{,}5b_2 sin(\theta\pi)$, $\theta\pi=arctg[(1+\mu)/(1-\mu)]$, *u holda TF masala bir qiymatli yechimga ega.*

D^+ sohada Dirixle masalasi yechimining integral ifodasidan, D^- sohada esa shakli o'zgargan Koshi masalasi yechimini beruvchi Dalamber formulasidan foydalanib, (4)-(5) shartlarga asosan, *TF* masala bir qiymatli ravishda ushbu singulyar integral tenglamalar sistemasiga olib kelinadi:

$$\tau_0(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)\tau_0(t)dt=$$

$$=\frac{a_1 b}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)\tau_1(t)dt}{p(bt+a)-ax+b}+(1+x)T[\tau_1]+(1+x)F_2(x),\ x\in I,\ x\in I, \tag{8}$$

$$(1-\mu)\tau_1(x)-\frac{a_1 b}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{p(bx+a)-c}{p(bt+a)-c}\right)\frac{\tau_1(t)dt}{p(bt+a)-p(bx+a)}+$$

$$+\frac{\mu b b_2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-q(bx+a)}{1-q(bt+a)}\right)\left(\frac{1}{q(bt+a)-q(bx+a)}+\frac{1}{1-q(bx+a)q(bt+a)}\right)\tau_1(t)dt=$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{p(bx+a)-c}{at-b-c}\right)\frac{\tau_0(t)dt}{at-b-p(bx+a)}-$$

$$-\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{p(bx+a)-c}{q(bt+a)-c}\right)\frac{b_2}{q(bt+a)-p(bx+a)}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1-q(bx+a)}{1-p(bt+a)}\right)\frac{\mu a_1}{p(bt+a)-q(bx+a)}\right]\tau_1(t)dt+$$

$$+(1+x)R_0[\tau_0]+(1+x)R_1[\tau_1]+(1+x)E_2(x),\ x\in I, \tag{9}$$

bu yerda $\tau_0(x)=\tau(ax-b)$, $\tau_1(x)=\tau(q(bx+a)):T[\tau_1]$, $R_0[\tau_0]$, $R_1[\tau_1]$ – regulyar operatorlar, $F_2(x)$, $E_2(x)$ – ma'lum funksiyalar, $b_2+a_1=1$, $a_1+b_2=1$, $a+b=1$, $a-b=c$, $a=(1+c)/2$, $b=(1-c)/2$.

(8) tenglama Trikomining noklassik singulyar integral tenglamasidir, chunki u ikkita maxsuslikka ega, ya'ni Trikomi operatorining nosingulyar qismi $ax-b$, $at-b$ ko'rinishdagi nokarleman siljishlarga ega.

(8) tenglamaning o'ng qismidagi birinchi integral operator regulyar emas, chunki bu operatorning yadrosi $(x,t)=(1,-1)$ nuqtada birinchi tartibli yakkalangan maxsuslikka ega (shuning uchun ham alohida ajratib yozilgan).

3-teorema. *Agar $g_0(x)$ $x\in(-1,1)$ da Gyolder shartini qanoatlantirsa va $g_0(x)\in L_p(-1,1)$, $p>1$ bo'lsa, u holda (8) tenglamaning $(1+x)^{-1}\tau_0(x)$ funksiya $x=-1$ nuqtada chegaralanmagan va $x=1$ da chegaralangan bo'lishi mumkin bo'lgan $h(1)$ sinfdagi yechimi ushbu formula orqali ifodalanadi:*

$$\tau_0(x)=\frac{g_0(x)}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1/4}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1/2}\left(\frac{1-c(ax-b)}{1-c(at-b)}\right)^{1/4}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)g_0(t)dt,\ x\in I, \tag{10}$$

bu yerda

$$g_0(x)=\frac{a_1b}{\pi(1+c_1)}\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)\tau_1(t)dt}{b_0t-a_0x+1}+(1+x)T[\tau_1]+(1+x)F_2(x),\ x\in(-1,1), \tag{11}$$

$a_0=(1+c)/(1+c_1)$, $b_0=(c_1-c)/(1+c_1)$, $a_0+b_0=1$.

Endi (11) tenglikdan $g_0(x)$ uchun ifodani (10) tenglikka qo'yib, murakkab bo'lmagan hisoblashlardan so'ng ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$\tau_0(x)=\frac{a_0^{-1/4}b_0^{-1/4}a_1b}{\pi(1+c_1)}(1+x)^{1/2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+s}\right)^{1/4}\frac{\tau_1(s)ds}{b_0s-a_0x+1}+$$

$$+(1+x)^{1/2}T_2[\tau_1]+(1+x)F_2(x),\ x\in I. \tag{12}$$

(12) yechim shu bilan xarakterliki, u $\tau_0(x)$ga nisbatan yechilgan. Bu holat (9) tenglikdan $\tau_0(x)$ni yo'qotishga imkon beradi. (12) tenglikdan $\tau_0(x)$ uchun ifodani (9) tenglikka qo'yib, murakkab bo'lmagan hisoblashlardan so'ng ushbu tenglikka kelamiz:

$$\rho(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\alpha}{t-x}-\frac{\beta b_3}{1-(b_3x-a_3)(b_3t-a_3)}\right)\rho(t)dt=(\alpha-\beta)g\left(\alpha,\beta;x\right),\ x\in I, \tag{13}$$

bu yerda $\rho(x)=(1+x)^{-1}\tau_1(x)$, $\alpha=(1+\mu)/(1-\mu)$, $\beta=\mu/(1-\mu)$, $\alpha=1+2\beta$, $g\left(\alpha,\beta;x\right)$ funksiya esa $g_0\left(x\right)$ da μ sonli parametrni $\beta/(\alpha-\beta)$ ga almashtirish natijasida hosil qilinadi.

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{b_2}{b_2t+a_1x-1}+\frac{\mu a_1}{a_1t+b_2x-1}\right)\rho(t)dt+R_3[\rho]-E_3(x),\quad x\in I\,. \qquad (14)$$

Ko‘rishimiz mumkinki, (13) tenglama $\alpha\neq 1$, $\beta\neq 1$ bo‘lgani uchun ilgari o‘rganilmagan nostandart singulyar integral tenglamadir.

4-teorema. *Agar $g(\alpha,\beta;x)$ funksiya $x\in(-1,1)$ intervalda Gyolder shartini qanoatlantirsa va $g(\alpha,\beta;x)\in L_p(-1,1)$, $p>1$ bo‘lsa, u holda (13) tenglamaning $H(-1,1)$ funksiyalar sinfiga tegishli yechimi, bu yerda $\rho(x)$ yechim $x=-1$ da chegaralanmagan bo‘lishi mumkin va $x=1$ da chegaralangan, ya’ni $h(1)$ sinfga tegishli yechimi ushbu formula bilan ifodalanadi:*

$$\rho(x)=\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha^2}g(\alpha,\beta;x)+\frac{\alpha-\beta}{\pi(1+\alpha^2)}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^2\left(\frac{1-x}{1-t}\right)\frac{(1-c_1(b_3x-a_3))}{(1-c_1(b_3t-a_3))}\right)^{\theta}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha}{t-x}g(\alpha,\beta;x)+\frac{b_3\beta((1+\alpha i)/(1+\beta i))}{1-(b_3x-a_3)(b_3t-a_3)}g(\alpha,\beta;x)\right)dt,\quad x\in I\,, \qquad (15)$$

bu yerda $\theta\pi=arctg\alpha,\,0<\theta<1/2$, $\rho(x)=(1+x)^{-1}\tau_1(x)$.

(11) dagi $g_0(x)$ ni (10) ga va (14) dagi $g(x)$ ni (15) ga qo‘yib, murakkab bo‘lmagan almashtirishlardan so‘ng ushbu Viner-Xopf

$$\rho(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}K_0(y-s)\rho(s)ds+R_4[\rho] \qquad (16)$$

integral tenglamasini hosil qilamiz, bu yerda $K_0(y-s)$ – ma’lum yadro, ya’ni $K_0(x)$ yadro uzluksiz differensiallanuvchi hamda cheksizlikda ko‘rsatkichkli tartibda kamayadi, $R_4[\rho]$ – regulyar operator bo‘lib, u ham cheksizlikda ko‘rsatkichli tartibda kamayadi.

Yaxshi ma’lumki, o‘rama tipidagi integral tenglamalar uchun Fredgolm teoremalari faqat bir holdagina, yani bu tenglamalarning indeksi nolga teng bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun dastlab (16) tenglamada Furye almashtirishi bajariib, keyin esa indeksi nolga teng bo‘lishi isbotlanib, (16) tenglama Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamasiga bir qiymatli reduksiyalanishi isbotlangan. Bu tenglamaning bir qiymatli yechimini mavjudligi TF masala yechimining yagonaligidan kelib chiqadi.

Dissertasiyaning **“Singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun ichki xarakteristikalarda siljishli shartli masala”** deb nomlangan II bobida chegaralanmagan sohada singulyar koeffisiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun ichki xarakteristikalarda siljishli shart berilgan, buzilish chizig‘ida esa Frankl shartiga o‘xshash shart berilgan masala yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

2.1-paragrafda SV masalaning ta’rifi keltirilgan. $D = D^+ \cup D^- \cup AB$ soha – z kompleks tekislikning chegaralanmagan sohasi bo‘lib, bu yerda D^+ – $y > 0$ yarimtekislik, $D^- - y < 0$ yarimtekislikdagi chekli soha bo‘lib, u

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-m/2}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \qquad (17)$$

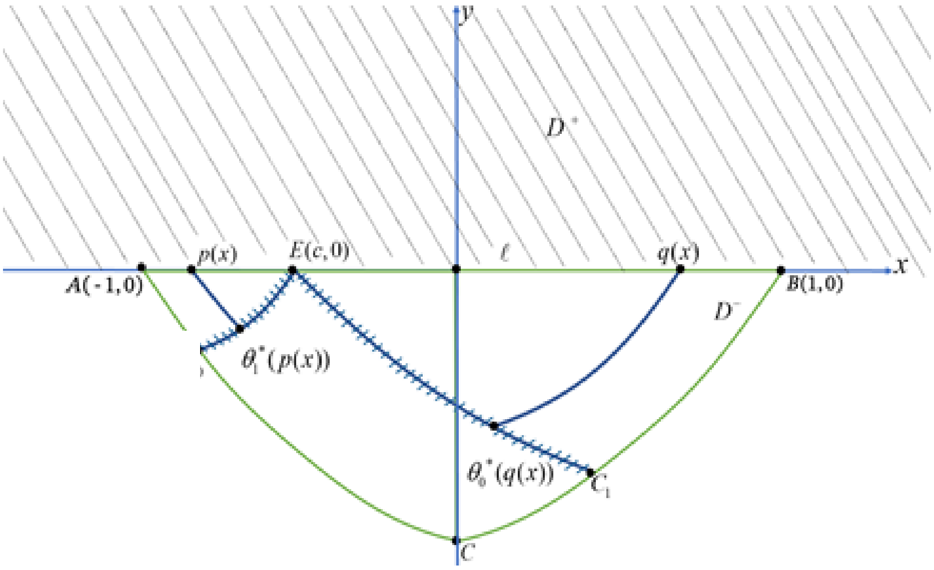
tenglamaning $A(-1,0)$ va $B(1,0)$ nuqtalaridan chiquvchi xarakteristikalari hamda $AB = \{(x,y): -1 < x < 1,\ y = 0\}$ kesma bilan chegaralangan (2.1-rasm).

(17) tenglamada $m,$ α_0 va β_0 parametrlar ushbu

$$m > 0, |\alpha_0| < (m+2)/2, -m/2 < \beta_0 < 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar deb faraz qilinadi.

Ushbu $p(x) = ax - b$ va $q(x) = a - bx$ chiziqli diffeomorfizmlar $[-1,1]$ kesma nuqtalarini mos ravishda $[-1,c]$ va $[c,1]$ kesmalarga akslantirsin, bu yerda $a = (1+c)/2,$ $b = (1-c)/2,$ shu bilan birga $p(-1) = -1,$ $p(1) = c$, $q(-1) = 1,$ $q(1) = c$.



2.1-rasm

Ma’lumki, siljishli masalalarda chegaraviy shartlar AC va BC xarakteristikalarda berilar edi. Ushbu bobda siljishli shartlar ichki EC_0 va EC_1 xarakteristikalarda berilgan masalaning korrektligi o‘rganilgan.

SV masalasi. D sohada ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiya topilsin:

$u(x,y)$ funksiya D chegaralanmagan sohaning ixtiyoriy $\bar{D}_R$ qismida uzluksiz;

$u(x,y)$ funksiya $C^2(D^+)$ sinfga tegishli va bu sohada (17) tenglamani qanoatlantiradi;

$u(x,y)$ funksiya $D^- \setminus (EC_0 \cup EC_1)$ sohada R_1 sinfga tegishli umumlashgan yechim;

AB buzilish chizig‘ida ushbu ulanish sharti bajariladi:

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}(\partial u/\partial y)=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}(\partial u/\partial y),\quad x\in(-1,c)\cup(c,1), \tag{18}$$

shu bilan birga bu limitlar $x=\pm1, x=c$ nuqtalarda $1-\alpha-\beta$ dan kichik tartibdagi maxsuslikka ega bo‘lishi mumkin, bu yerda $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2))$, $\beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2))$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<1$;

ushbu tenglik bajariladi:

$$\lim_{R\to+\infty}u(x,y)=0,\ y\geqslant 0, \tag{19}$$

bu yerda $R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

$u(x,y)$ ushbu chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi:

$$u(x,y)|_{y=0}=\tau_i(x),\ \forall\ x\in\overline{\ell_i}\ ,\ i=1,2; \tag{20}$$

$$a(x)(1-x)^{\alpha}D_{x,1}^{1-\beta}u\left[\theta_0^*(q(x))\right]+b(x)(1-x)^{\beta}D_{x,1}^{1-\alpha}u\left[\theta_1^*(p(x))\right]=\psi(x),\ x\in\ell, \tag{21}$$

$$u(p(x),0)-u(q(x),0)=f(x),\quad x\in\ell, \tag{22}$$

bu yerda $\ell=(-1,1)$, $\ell_1=(-\infty,-1)$, $\ell_2=(1,+\infty)$. $\theta_0^*(q(x))$, $\theta_1^*(p(x))$ – mos ravishda EC_1 va EC_0 ichki xarakteristikalarning $(q(x_0),0)$, $(p(x_0),0)$, $x_0\in\overline{\ell}$, nuqtalardan chiquvchi xarakteristikalar bilan kesishish nuqtalari; $\tau_1(x),\tau_2(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Shuni ta’kidlash kerakki, (21) shart ichki EC_0 va EC_1 xarakteristikalarda berilgan siljishli shart, (22) esa $y=0$ o‘qning $[-1,1]$ kesmasida berilgan lokal siljishli shartdir.

2.2-paragrafda SV masala yechimini yagonaligi isbotlangan. D^- sohada (17) tenglama uchun shakli o‘zgargan Koshi masalasining yechimini beruvchi Darbu formulasiga asosan, (24) shartdan ushbu munosabatni hosil qilamiz:

$$b^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\beta)a(x)\nu(q(x))+a^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\alpha)b(x)\nu(p(x))=$$

$$=\gamma\left\{b^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha)a(x)D_{c,q(x)}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+a^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\beta)b(x)D_{p(x),c}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)\right\}+\Psi_1(x),\ \ x\in\ell, \tag{23}$$

bu yerda $\nu(x)=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}(\partial u/\partial y)$.

(23) munosabat D^- yopiq sohadan ℓ kesmaga olib kelingan $\tau(x)$ va $\nu(x)$ noma’lum funksiyalar o‘rtasidagi funksional munosabatdir. Ushbu teorema isbotlangan:

5-teorema *(A.B.Bitsadzening ekstremum prinspiga o‘xshash prinsip). Ushbu* $\tau_1(x)\equiv0, \tau_2(x)\equiv0, \psi_1(x)\equiv0, f_1(x)\equiv0$ *tengliklar o‘rinli bo‘lganda*

$$a(x)\geqslant0,\ b(x)\geqslant0,\ \forall\ x\in\overline{\ell} \tag{24}$$

shartlar bajarilsa, SV masalasining $u(x,y)$ yechimi $\bar{D}_R^+$ sohada o'zining eng katta musbat maksimum (EKMMAK) va eng kichik manfiy minimum (EKMMIN) qiymatlarini faqat σ_R normal chiziq nuqtalarida qabul qiladi.

6-teorema. *SV masala (24) shart bajarilganda bittadan ortiq yechimga ega emas.*

2.3-paragraf SV masala yechimining mavjudligini isbotlashga bag'ishlangan.

$y>0$ yarimtekislikda Dirixle masalasining yechimini beruvchi formuladan foydalanib, ushbu munosabatni hosil qilamiz:

$$\nu(x) = -k_2(1-\beta_0)\big((m+2)/2\big)\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\tau'(t)\left[(x-t)\,|x-t|^{2a_0-2}\,exp\left(-2b_0 arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)\right]dt+\Phi(x),\ x\in(-1,1), \qquad (25)$$

bu yerda $a_0=(m+2\beta_0)/2(m+2)$, $b_0=-\alpha_0/(m+2)$, $k_2, \Phi(x)$ – ma'lum kattaliklar.

(25) munosabat $\tau(x)$ va $\nu(x)$ noma'lum funksiyalar o'rtasidagi D^+ sohada $y=0$ o'qning $\ell=(-1,1)$ intervaliga olib kelingan asosiy funksional munosabatdir.

Endi $\nu(x)$ uchun ifodani (25) dan (23) ga qo'yib, murakkab bo'lmagan almashtirishlardan so'ng, ushbu singulyar integral tenglamani hosil qilamiz:

$$A(x)\tau_1(x)+B(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2a_0}\frac{\tau_1(t)dt}{t-x}=g_0(x), \qquad (26)$$

bu yerda $A(x)$, $B(x)$ – ma'lum funksiyalar;

$$g_0(x)=a_1(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2a_0}\frac{\tau_1(t)dt}{at+bx-1}+b_1(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2a_0}\frac{\tau_1(t)dt}{bt+ax-1}+$$

$$+\int_{-1}^{1}R(x,t)\tau_1(t)dt+F(x),\ x\in\bar{\ell}, \qquad (27)$$

bu yerda a_1, b_1 – ma'lum miqdorlar, $R(x,t)$, $F(x)$ esa ma'lum funksiyalar.

7-teorema. *Agar $g_0(x)$ funksiya $x\in(-1,1)$ bo'lganda Gyolder shartini qanoatlantirsa va $L_p(-1,1)$, $p>1$ sinfga tegishli bo'lsa, u holda (26) tenglama yechimi $(1-x)^{2a_0-1}\tau_1(x)$ funksiya $(-1,1)$ intervalning chap $x=-1$ chegarasida chegaralangan va $x=1$ o'ng chegarasida chegaralanmagan bo'lishi mumkin bo'lgan funksiyalar sinfi $H(-1,1)$ da*

$$\tau_1(x)=\frac{A(x)g_0(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}-$$

$$-\frac{B(x)}{A^2(x)+\pi B^2(x)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{\delta_0}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2a_0-\delta_1}\frac{\delta(x)}{\delta(t)}\frac{A(x)+i\pi B(x)}{A(t)+i\pi B(t)}\frac{g_0(t)dt}{t-x},x\in\bar{\ell} \quad (28)$$

formula orqali ifodalanadi, bu yerda $\tau_1(x)=\tau(q(x))$.

Endi (27) dan $g_0(x)$ uchun ifodani (28) ga qo‘yib, murakkab bo‘lmagan hisoblashlardan so‘ng, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\rho(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}K_0(y-t)\rho(t)dt+H_3[\rho]+F_2(y),\ \ y\in[0,+\infty)\,, \tag{29}$$

bu yerda $\rho(y)=e^{(0.5-2a_0)y}\tau_1(1-2e^{-y})$,

$$K_0(x)=\frac{\sqrt{2\pi}\pi}{b\sin(\delta_1\pi)}\left[B_1k^{\delta_1}\frac{e^{\delta_1 x}}{ke^{x/2}+e^{-x/2}}+B_2k^{-\delta_1}\frac{e^{\delta_1 x}}{e^{x/2}+ke^{-x/2}}\right], \tag{30}$$

$\beta_0>(2-m)/4$, $0<\delta_1<1/2$, $k=a/b$, $2a_0=\alpha+\beta=\dfrac{m+2\beta_0}{m+2}\in(0,1)$; $H_3[\rho]$ – regulyar operator, $F_2(y)$ – ma’lum funksiya.

(29) tenglama Viner-Xopf integral tenglamasidan iborat. (30) tenglikda $0<\delta_1<1/2$ bo‘lganligi uchun $K_0(x)$ funksiya cheksizlikda ko‘rsatkichli tartibda kamayuvchi bo‘ladi, shu bilan birga $K_0(x)\in C^1[0,+\infty)$. U holda $K_0(x)\in L_2\cap H_\alpha=0$.

Ushbu

$$\left|\left(2\pi\,|\,A(1)+\pi B(1)\,||\,a_1(1)+b_1(1)\,|\right)/\left(\sqrt{1-c^2}A^2(1)\right)\right|<1 \tag{31}$$

shart bajarilganda (29) integral tenglamaning indeksi nolga teng. Natijada (29) tenglama Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamasiga reduksiyalanadi, bu tenglama esa SV masalasi yechimining yagonaligiga ko‘ra bir qiymatli yechimga ega. Shu tariqa quyidagi teorema isbotlandi:

8-teorema. *SV masalaning yechimi (24), (30) hamda* $0.5-2a_0<0(\beta_0>(2-m)/4)$ *shartlar bajarilganda mavjud.*

Dissertasiyaning **“Soha ichida buziluvchan singulyar koeffitsiyentli giperbolik tipdagi tenglama uchun lokal va nolokal shartli masala”** deb nomlangan uchinchi bobida soha ichidagi buziluvchan singulyar koeffitsiyentli giperbolik tipdagi tenglama uchun chegaraviy xarakteristikaning qismlarida lokal va nolokal shartlar berilgan masala yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremalar isbotiga bag‘ishlangan.

3.1-paragrafida A masalaning ta’rifi berilgan. Ω - z kompleks tekisligining xarakteristik to‘rtburchagi bo‘lib, u soha ichida buziluvchan

$$-|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\alpha_0|y|^{(m-2)/2}u_x+(\beta_0/y)u_y=0 \tag{32}$$

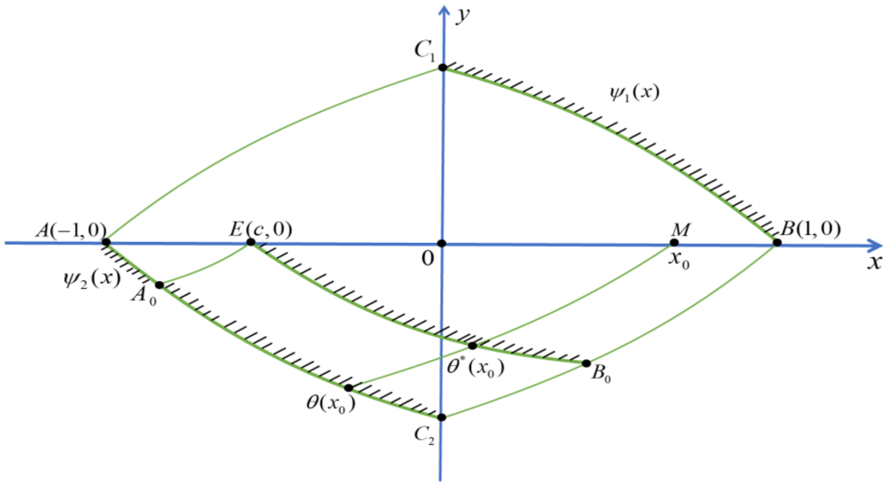
tenglamaning $A=A(-1,0)$ va $B=B(1,0)$ nuqtalardan chiquvchi

$$\left.\begin{matrix}AC_1\\BC_1\end{matrix}\right\}: x\mp\frac{2}{m+2}y^{(m+2)/2}=\mp1,\quad \text{agar}\quad y>0\quad \text{bo‘lsa,}$$

$$\left.\begin{matrix}AC_2\\BC_2\end{matrix}\right\}: x\mp\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=\mp1,\quad \text{agar}\quad y<0\quad \text{bo‘lsa,}$$

xarakteristikalari bilan chegaralangan bo‘lsin, bu yerda m, α_0, β_0 o‘zgarmas sonlar bo‘lib, ular ushbu tengsizliklarni qanoatlantiradi: $m>0$, $-m/2<\beta_0<1$, $-(m+2)/2<\alpha_0<(m+2)/2$ (3.1-rasm).

Ω_1 va Ω_2 orqali Ω sohaning mos ravishda $y>0$ va $y<0$ yarimtekisliklarda yotuvchi qismlarini belgilaymiz, A_0 va B_0 orqali esa mos ravishda AC_2 va BC_2 xarakteristikalarning $E(c,0)$ nuqtadan chiquvchi xarakteristukalar bilan kesishish nuqtalarini belgilaymiz, bu yerda $c\in I=(-1,1)$.



3.1-rasm

Ushbu bob (35) tenglama uchun Ω sohada qo‘yilgan masalaning korrektligini o‘rganishga bag‘ishlangan, bunda Ω_2 sohadagi AC_2 xarakteristika ixtiyoriy ravishda ikki qismga, ya’ni AA_0 va A_0C_2 qismlarga bo‘linadi va birinchi $AA_0\subset AC_2$ qismda lokal shart, ikkinchi $A_0C_2\subset AC_2$ qismda va unga parallel ichki EB_0 xarakteristikada Bitsadze-Samarskiyning nolokal sharti, hamda Ω_1 sohaning BC_1 xarakteristikasida izlanayotgan yechimning qiymati berilgan.

A masala. Ω sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$ funksiya topilsin;

$u(x,y)$ funksiya Ω_1 va Ω_2 sohalarida R_1 sinfdagi umumlashgan yechim;

AB kesmada ushbu ulanish sharti bajariladi:

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I\setminus\{c\}, \tag{33}$$

shu bilan birga bu limitlar $x=\pm1, x=c$ nuqtalarda $1-\alpha-\beta$ dan kichik tartibdagi maxsuslikka ega bo‘lishi mumkin, bu yerda

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=\frac{m+2(\beta_0\pm\alpha_0)}{2(m+2)},\ 0<\alpha,\ \beta<1,\ \alpha+\beta<1;$$

ushbu chegaraviy shartlar bajarilsin:

$$u(x,y)|_{BC_1} = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{34}$$

$$u(x,y)|_{AA_0} = \psi_2(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant (c-1)/2; \tag{35}$$

$$u[\theta(x_0)] = \mu u[\theta^*(x_0)] + \rho(x), \quad c \leqslant x \leqslant 1, \tag{36}$$

bu yerda μ – manfiy o‘zgarmas haqiqiy son, $\theta(x_0),(\theta^*(x_0))$ lar $A_0C_2(EB_0)$ xarakteristikaning $M(x_0,0)$ nuqtadan chiquvchi xarakteristika bilan kesishish nuqtalarining affiksi, $x_0 \in [c,1]$; $\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \rho(x)$ – berilgan funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasining yopig‘ida uzluksiz, shu bilan birga $\psi_1(1)=0,\ \psi_2(-1)=0.$

Ta’kidlaymizki, (34),(35) shartlar lokal shartlar bo‘lib, ular BC_1 va $AA_0 \subset AC_2$ xarakteristikalarda berilgan, (36) shart esa Bitsadze-Samarskiy sharti bo‘lib, u $A_0C_2 \in AC_2$ chegaraviy xarakteristikada va unga parallel ichki EB_0 xarakteristikada berilgan.

3.2-paragrafda **A masala** yechimining yagonaligi isbotlangan.

9-teorema. *A masalasi bittadan ortiq yechimga ega bo‘lishi mumkin emas.*

Ushbu teoremani isbotlashda xarakteristik uchburchaklarda shakli o‘zgargan Koshi masalasi yechimini beruvchi Darbu formulasidan foydalanib, mos ravishda (34), (35) va (36) shartlarga asosan, ushbu funksional munosabatlarni hosil qilamiz:

$$\gamma_1\Gamma(\beta)\left(\frac{1-x}{2}\right)^{1-\alpha-\beta} D_{x,1}^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}\tau(x) -$$

$$-\gamma_2\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\alpha)D_{x,1}^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}\nu(x) = \psi_1\left(\frac{1+x}{2}\right) x \in (-1,1), \tag{37}$$

$$\nu(x) = \gamma D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + \Psi_2(x),\ x \in (-1,c), \tag{38}$$

$$\nu(x) = \gamma\omega(x)\left[(x-c)^\alpha D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) - \mu(1+x)^\alpha D_{c,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)\right] + \Psi_3(x),\ x \in (c,1), \tag{39}$$

bu yerda $\omega(x) = \left[(x-c)^\alpha - \mu(1+x)^\alpha\right]^{-1}$.

8-teorema (37),(38) va (39) munosabatlardan foydalanib, energiya integrali metodi yordamida isbotlanadi.

3.3-paragrafda *A* masalasi yechimining mavjudligi isbotlangan.

10-teorema. *Agar ushbu shartlar* $\rho(x) \in C[c,1] \cap C^{3,\delta}(c,1)$, $\psi_1(x) \in C[0,1] \cap$ $\cap C^{3,\delta}(0,1)$, $\psi_2(x) \in C[-1,(c-1)/2] \cap C^{3,\delta}(-1,(c-1)/2)$, $\delta = const > 0$ *bajarilsa, u holda A masalasining yechimi mavjud.*

(37) va (38) munosabatlardan foydalanib, standart hisoblashlarni bajarib va $\nu_0(x) = \nu(ax-b)$, $\nu_1(x) = \nu(bx+a)$ belgilashlarni kiritib, $\nu_0(x)$ ga nisbatan singulyar integral tenglamani ushbu ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\nu_0(x) + \lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\theta}\frac{\nu_0(t)dt}{t-x} = g_0(x), \tag{40}$$

bu yerda $\theta=(1-\alpha-\beta)/2$,

$$g_0(x)=-\lambda b\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-bs+a}{a(1+x)}\right)^{2\theta}\frac{\nu_1(s)ds}{bs-ax+1}+\Psi_{21}(ax-b). \tag{41}$$

11-teorema. *(43) tenglamaning* $(-1,1)$ *intervalda Gyolder sinfiga tegishli bo'lgan, hamda* $(1+x)^{2\theta}\nu_0(x)$ *funksiya* $x=-1$ *nuqtada chegaralangan va* $x=1$ *nuqtada birdan kichik tartibdagi maxsuslikka ega bo'lgan, ya'ni* $h(-1)$ *sinfga tegishli yechimi ushbu ko'rinishda bo'ladi:*

$$\nu_0(x)=\frac{g_0(x)}{1+\lambda^2\pi^2}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t^2}{1-x^2}\right)^{\theta}\frac{g_0(t)dt}{t-x}. \tag{42}$$

Endi $g_0(x)$ uchun (41) dagi ifodani (42) ga qo'yib, ushbuni hosil qilamiz:

$$\nu_0(x)=-\frac{\lambda^2 b^{1+\theta}\pi}{(1+\lambda^2\pi^2)\sin(\theta\pi)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{(1+bt+a)^2}{a^2(1+x)(1+a-bt)}\right)^{\theta}\times$$

$$\times\left(\frac{1+t}{1-x}\right)^{\theta}\frac{\nu_1(t)dt}{bt-ax+1}+\Psi_{22}(x),\quad x\in(-1,1). \tag{43}$$

(43) tenglama $\nu_0(x)$ va $\nu_1(x)$ noma'lum funksiyalar uchun tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasi hisoblanadi. Shuni alohida takidlaymizki, (43) tenglama noma'lum funksiya $\nu_0(x)$ ga nisbatan yechilgan. Yuqoridagiga o'xshash, (39) munosabatlardan foydalanib, ushbu tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\nu_1(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{\nu_1(s)ds}{s-x}=H_1[\nu_1]+\Psi_{31}(x)-$$

$$-\lambda(b(1+x))^{\alpha}\omega(bx+a)\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1+s)}{1+bx+a}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{a\nu_0(s)ds}{as-bx-1},\ x\in(-1,1). \tag{44}$$

(44) tenglama $\nu_0(x)$ va $\nu_1(x)$ noma'lum funksiyalar uchun tenglamalar sistemasining ikkinchi tenglamasi hisoblanadi. (43) ga asosan, (44) dan $\nu_0(x)$ ni yo'qotib, standart hisoblashlardan so'ng ushbu singulyar integral tenglamani hosil qilamiz:

$$\nu_1(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\theta}\frac{\nu_1(t)dt}{t-x}=H_2[\nu_1]+\Psi_{32},\quad x\in(-1,1), \tag{45}$$

bu yerda $H_2[\nu_1]$ – regulyar operator.

(45) singulyar integral tenglama yechimini $(-1,1)$ intervalda Gyolder sinfiga tegishli bo'lgan va $(1+x)^{2\theta}\nu_1(x)$ funksiya $x=-1$ nuqta atrofida chegaralangan va

$x=1$ nuqta atrofida chegaralanmagan bo‘lishi mumkin bo‘lgan, ya’ni $h(-1)$ sinfida izlaymiz.

$1+\lambda^2\pi^2 \neq 0$ bo‘lgani uchun (45) tenglama normal tipdagi tenglama bo‘ladi va bayon etilgan yechimlar sinfida uning indeksi 0 ga teng.

Shunday qilib, (45) tenglama bir qiymatli ravishda Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamasiga reduksiyalanadi va uning bir qiymatli yechilishi A masala yechimining yagonaligidan kelib chiqadi.

XULOSA

Dissertasiya ishi elliptiko-giperbolik va soha ichida buziladigan giperbolik tipdagi singulyar koeffitsiyentli tenglamalar uchun chegaraviy va ichki xarakteristikalarda lokal va nolokal shartli masalalarni o‘rganishga bag‘ishlangan.

Birinchi bobda aralash tipdagi singulyar koeffisientli tenglama uchun chegaraviy xarakteristikada Trikomi sharti to‘liq berilmagan va ichki xarakteristikada Frankl shartiga o‘xshash shart berilgan masala yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremalar isbotlangan. Ikkinchi bobda aralash tipdagi ikkita kichik hadli singulyar koeffisiyentli tenglama uchun ichki xarakteristikada siljishli shart berilgan masala o‘rganilgan. Uchinchi bobda giperbolik tipdagi tenglama uchun lokal va nolokal shartli masala o‘rganilgan bo‘lib, bu yerda chegaraviy xarakteristika ixtiyoriy ravishda ikki bo‘lakka bo‘linib, birinchi bo‘lakda lokal shart (Trikomi sharti), ikkinchi bo‘lak va unga parallel ichki xarakteristikada Bitsadze-Samarskiy sharti berilgan masala tadqiq etilgan.

Aralash tipdagi tenglamalar uchun ta’riflangan masalalar yechimining yagonaligi ekstremum prinsipi yordamida isbotlangan. Soha ichida buziladigan giperbolik tipdagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy masalasi yechimining yagonaligi haqidagi teoremani isbotlashda energiya integrali metodidan foydalanilgan.

Masalalar yechimlarining mavjudligini isbotlashda, oldindan noma’lum funksiyaning ushbu $u(x,0)=\tau(x)$, $\lim\limits_{|y|\to 0}|y|^{\beta}(\partial u/\partial y)=\nu(x)$ qiymatlari ma’lum deb hisoblanadi va D^{+} elliptik sohada Dirixle masalasining integral ifodasidan, giperbolik soha D^{-} da esa shakli o‘zgargan Koshi masalasining integral ifodalaridan foydalanib, ta’riflangan masalalar chegaraviy shartlar asosida F.Trikomining nostandart singulyar integral tenglamasiga olib kelinadi. Hosil qilingan nostandart singulyar integral tenglamalar ikkita maxsuslikka ega: 1) yadrolarning «nosingulyar» qismi nokarleman tipdagi siljishga ega; 2) singulyar integral tenglamaning xarakteristik qismida nofredgolm operatorlari bor, aniqrog‘i bu operatorlar birinchi tartibli yakkalangan maxsuslikka ega; 3) singulyar integral tenglama yadrosida turli α va β ko‘paytuvchilar ishtirok etadi. Trikomi integral tenglamasida $\alpha=\beta=1$. Ishda bu tipdagi nostandart tenglamalarni yechish algoritmi yaratilgan: dastlab vaqtincha tenglamaning noxarakteristik qismini ma’lum deb hisoblab, Trikomining siljishli singulyar integral tenglamasiga keltiriladi, uni S.G.Mixlin tomonidan takomillashtirilgan Karleman usulida regulyarizatsiyalab, Viner-Xopf integral tenglamasini hosil qilamiz, bu tenglamaga esa Furye almashtirishini qo‘llab, uni kompleks o‘zgaruvchilar nazariyasining Riman masalasiga olib kelinadi, so‘ng Riman masalasining indeksi 0 ga tengligi isbotlanadi.

Bu esa o‘z navbatida Viner-Xopf integral tenglamasini bir qiymatli ravishda Fredgolmning integral tenglamasiga regulyarizatsiyalanishini ta’minlaydi. Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamasi bir qiymatli yechimga ega bo‘lishi ta’riflangan masalalar yechimining yagonaligidan kelib chiqadi.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.05.04
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МИРСАБУРОВА УМИДА МИРАХМАТОВНА

ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Фергана-2024

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико – математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за №B 2023.2.PhD/FM867.

Диссертация выполнена в Термезском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб – странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Уринов Ахмаджон Кушакович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Апаков Юсуфжон Пулатович** доктор физико-математических наук, профессор
	Рузиев Менглибой Холтожибаевич доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «18» 01 2024 года в 10:00 часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19. Тел: (+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно–ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за №326). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19). Тел.: (+99873) 244-44-94.

Автореферат диссертации разослан «05» 01 2024 года.
(протокол рассылки №6 от «04» 01 2024 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI

Ш.Т.Каримов
Заместитель председателя научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., доцент

И.У.Хайдаров
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф-м.н., доцент

Э.Т.Каримов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. При изучении многих математических моделей практического и теоретического характера в мире в большинстве случаев одно из главных мест занимает исследование задач с комбинированными локальными и нелокальными условиями для дифференциальных уравнений смешанного типа, и для вырождающихся гиперболических уравнений. Одной из актуальных задач является исследование и внедрение в практику, обобщение в неклассической форме классических задач для **уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом (УСТССК)** и **для вырождающегося внутри области гиперболических уравнений с сингулярными коэффициентами (ВВОГУССК),** которые были сформулированы и исследованы в классической постановка для уравнений смешанного типа и вырождающихся внутри области гиперболических уравнений. В связи с этим важным является повышение интереса к исследованию неклассических задач для такого класса уравнений, получение научно обоснованных теоретических и практических результатов, а также их применение в других областях, таких как газовая динамика, гидродинамика, теория бесконечно малых изгибаемых поверхностей, механика, акустика и теория электронного рассеяния.

В мире проводится ряд научных исследований, направленных на исследование комбинированных задач с локальными и нелокальными условиями в конечных и бесконечных областях для УСТССК и ВВОГУССК. В этом плане особое внимание уделяется изучению таких задач, когда условие Трикоми, задается на части характеристики; аналог условия Франкля задается во внутренней характеристике, условия Бицадзе-Самарского задается на части граничной характеристике и параллельной ей внутренней характеристике. Неклассическая постановка задач привело к изучение нестандартных сингулярных интегральных уравнений Трикоми нового типа, и исследование и решение этих уравнении является одним из целевых научных исследований.

В нашей республике реализуются комплексные меры по развитию фундаментальных наук, таких как математическая физика, математическая биология, газовая динамика и достигаются определенные результаты. В том числе, проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук, особенно по дифференциальным уравнениям и математической физике, динамических систем и оптимального управления, по прикладной математике и математическому моделированию, математическому анализу и теории функций, теории вероятностей и математической статистике, алгебре и геометрии определено как основные задачи и направления деятельности математиков[2]. При реализации поставленных выше задач, в частности, важное значение

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан от 07.05.2020 г. № пп-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики»

приобретает разработка алгоритма решения нестандартного сингулярного интегрального уравнения Трикоми, имеющего смещение некарлемановского типа в «несингулярной» части ядра интегрального уравнения и нефредгольмового оператора в нехарактеристической части уравнения.

Исследования данной диссертации в определенной степени служит для реализации задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года №УП-4947 «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в Постановлениях от 9 июля 2019 года №ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан», от 7 мая 2020 года №ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Развитие теории вырождающихся уравнений гиперболического, эллиптического и смешанного типов начинается с фундаментальных работ Г. Дарбу, Ф.Трикоми, Э.Хольмгрена и С. Геллерстедта, по сути, первое фундаментальное исследование для уравнения смешанного типа виде $yu_{xx}+u_{yy}=0$ было выполнено итальянским математиком Ф.Трикоми. За прошедшей период времени для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа зарубежные ученые: Э.Хольмгрен, С.Геллерстедт, А.В.Бицадзе, А.М.Нахушев, И.Франкл, С.Г.Михлин, Ю.В.Девингталь, К.И.Бабенко, М.М.Смирнов, В.Ф.Волкодавов, А.И.Кожанов, С.П.Пулькин, К.Б.Сабитов, Т.Ш.Кальменов, Н.Ю.Капустин, Е.И.Моисеев, С.М.Понамарев, А.П.Солдатов, Р.С.Хайруллин и другие проводили научные исследования по изучению граничных и нелокальных задач и получили существенные научные результаты.

Из отечественных ученых значительных научных результатов в совершенствовании теории уравнений смешанного типа добились М.С.Салахиддинов, Т.Д.Джураев, Ш.А.Алимов, С.Абдиназаров, А.К.Уринов и другие.

Теория граничных и нелокальных задач для вырождающих уравнений и уравнений смешанного типа развивалась в разных направлениях, в частности: краевым задачам для более общих уравнений относительно уравнения Трикоми посвящены в работы С.Геллерстедта, К.И.Бабенко, В.Ф.Волкодавова, А.И.Кожанова, С.П.Пулькина, А.В.Бицадзе, М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, С.Абдиназарова и К.Б.Сабитова; различные модификации задачи Трикоми освещены в работах А.В.Бицадзе, А.М.Нахушева, М.М.Смирнова, С.Геллерстедта, Ф.Н.Франкла, М.Х.Рузиева и других; а также спектральные задачи освещены в работах Ш.А.Алимова, Т.Ш.Кальменова, Н.Ю.Капустина, Э.И.Моисеева, С.М.Понамарева, М.С.Салахитдинова, А.К.Уринова и М.А.Садибекова.

Тем не менее, задачи с комбинированными локальными и нелокальными условиями на граничной и внутренней характеристиках для УСТССК и для ВВОГУССК изучены сравнительно мало.

Настоящая диссертация посвящена исследованию этих вопросов теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствие с планом научных иследований по фундаментальному проекту №ФЗ-202009211 «Изучение корректности задач для уравнений смешанного типа с условиями Франкля и Бицадзе-Самарского на характеристике и на линии вырождения с помощью применения теории неклассических сингулярных интегральных уравнений.» Министерства высшего образования, науки и инноваций выполняемых в Термезском государственном университете.

Целью исследования является доказательство корректности задач с локальными и нелокальными условиями на граничных и внутренних характеристиках для УСТССК и ВВОГУССК.

Задачи исследования, решаемые в данной работе следующие:

Доказательство теорем единственности и существования решения задачи с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для УСТССК;

Построение алгоритма регуляризации нестандартных сингулярных интегральных уравнений Трикоми к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода;

Доказательство однозначной разрешимости задачи с условием смещения А.М.Нахушева на внутренних характеристиках в неограниченной области для УСТССК;

Доказательство корректности задачи для уравнения ВВОГУССК, в характеристическом четырехугольнике, когда одно из граничных характеристик произвольным образом разбивается на два куска и на первом куске задается условие Трикоми, а на втором куске и параллельной ей внутренней характеристике задается условие Бицадзе-Самарского.

Объектом исследования являются УСТССК и ВВОГУССК.

Предметом исследования являются неклассические задачи с комбинированными локальными и нелокальными условиями.

Методы иследования. В диссертации при доказательстве единственности решение изучаемых задач используется метод принципа экстремума и метод интегралов инергии, а при доказательстве существования решения задач используется теория регулярных и сингулярных интегральных уравнений.

Научная новизна исследования заключается в следующих:

в ограниченной смешанной области для УСТССК изложена неклассическая задача с аналогом условием Франкля на внутренней характеристике, единственность решения задачи доказана с помощью аналога принципа экстремума А.В.Бицадзе, а существование решения задачи доказана с помощью применения теории интегральных уравнений;

разработан алгоритм регуляризации нестандартного сингулярного интегрального уравнения Трикоми к интегральному уравнению Фредгольма второго рода;

в неограниченной области для УСТССК исследована задачи с условием смещения А.М.Нахушева на внутренних характеристиках, корректность задачи доказана с помощью принципа экстремума и применения теории интегральных уравнений;

в характеристическом четырехугольнике для ВВОГУССК изучена задача когда условия Бицадзе-Самарского задаеться на части граничной характеристике и параллельной ей внутренней характеристике, однозначная разрешимость задачи обоснована с помощью интегралов энергии и методом теории интегральных уравнений.

Практические результаты исследования состоят в следуюшем:

Используя однозначное решение задачи с условием Франкля и смешения для УСТССК, можно построит и исследовать математические модели, связанные с теченнием газов и жидкостей. Разработанный алгоритм регуляризации нестандартного сингулярного интегрального уравнения Трикоми с нефредгольмовым оператором и с числовыми параметрами можно использовать при регуляризации сингулярных интегральных уравнений нестандартного типа.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в теории краевых и нелокальных задач для УСТССК и ВВОГУССК.

Практические значения результатов, полученных в диссертационной работе, определяются применением их в изучение физических, технических и биологических процессов, описываемых при помощи УСТССК и ВВОГУССК.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты исследования по задачам со смещением для эллиптико-гиперболических и вырождающихся внутри области гиперболических уравнений с сингулярными коэффициентами внедрены в следующие научно – исследовательские проекты:

разработанные методы регуляризации нестандартных сингулярных интегральных уравнений использованы при решение краевых задач для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в проекте №ОТ-Ф4-88 на тему «Иследования прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков» за 2017-2020 гг. (Институт математики имени В.И.Романовского АН Республики Узбекистан, справка о внедрении №2/344 от 04.09.2023 г.). В результате доказано однозначная разрешимость некоторых нелокальных краевых задач для уравнений Геллерстедта с сингулярным коэффициентом;

заключения теорем по обоснованию корректности новых нелокальных краевых задач типа задач Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом использованы при решении разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка в проекте AP008856594 «Разработка интелектуальной системы анализа и управления динамикой водных потоков в руслах рек и каналов» за 2020-2022 гг. (Комитета Науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, справка о внедрении №01-07/248 от 14.08.2023 г.). В результате это позволило анализировать конечно-элементного дробного-стохастических моделей фильтрации несмешивающихся жидкостей.

Апробация результатов исследования. Основные содержания диссертации доложено на 6 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 5 статьей опубликовано в журналах входящих в перечень научных изданий, предложенные Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученый степени доктора философии (PhD), в том числе, 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 3 статьи в республиканских научных журналах.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы, содержащего 82 наименований. Объем диссертации составляет 118 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации: определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Задача с недостающим условием Трикоми на граничной характеристике и аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для эллиптико-гиперболического уравнения**», для одного уравнения смешанного типа, доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с недостоюшим условием Трикоми на граничной характеристике и аналогом условия Франкля на внутренней характеристике и на отрезке вырождения уравнения.

В первом параграфе этой главы приводится постановка задачи TF (Трикоми-Франкля).

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости z, ограниченная при $y>0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y<0$ – характеристиками AB и BC уравнения

$$(signy)\,|\,y\,|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0,\ \ m = const > 0\,. \qquad (1)$$

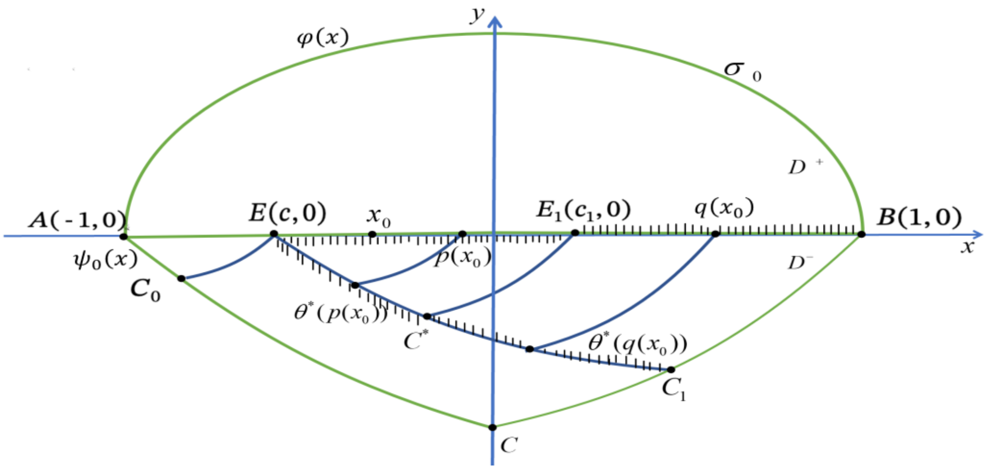


Рис.1.1

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, а через C_0 и C_1 соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками, выходящих из точки $E(c,0)$, через C^* обозначим точку пересечения характеристики EC_1 с характеристикой исходящей из точки $E_1(c_1,0)$, где c,c_1- некоторые числа, принадлежащие интервалу $I=(-1,1)$, причем $-1<c<c_1<1$ (Рис.1.1).

Пусть $p(x)=a_1x-b_1$, $q(x)=a_2-b_2x$ линейные функции, соответственно отображают отрезок $[c,1]$ на отрезки $[c,c_1]$ и $[c_1,1]$, причём $p(c)=c$, $p(1)=c_1$, $q(c)=1$, $q(1)=c_1$, где $a_1=(c_1-c)/(1-c)$, $b_1=c(c_1-1)/(1-c)$, $a_2=(1-cc_1)/(1-c)$, $b_2=(1-c_1)/(1-c)$, $a_1+b_2=1$, $a_2+b_1=1$.

Задача TF (Трикоми-Франкля). Требуется найти в области D функцию $u(x,y)\in C\left(\bar{D}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

функция $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2\left(D^+\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;

функция $u(x,y)$ является в области D^- обобщенным решением класса R_1 уравнения (1);

на отрезке вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}(\partial u/\partial y)=\lim_{y\to+0}y^{-m/2}(\partial u/\partial y)\,,x\in I\setminus\{c\}, \tag{2}$$

причём эти пределы при $x=\pm1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

выполняются равенства

$$u(x,y)|_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad x\in\bar{I}; \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC_0}=\psi_0(x),\quad x\in[-1,(c-1)/2]; \tag{4}$$

$$u[\theta^*(p(x))]-\mu u[\theta^*(q(x))]=\psi_1(x),\quad x\in[c,1]; \tag{5}$$

$$u(p(x),0)-u(q(x),0)=f(x),\quad x\in[c,1],\tag{6}$$

где $\theta^*(x_0)=(x_0+c)/2-i[(m+2)(x_0-c)/4]^{2/(m+2)}$ – аффикс точки пересечения характеристики EC_1 с характеристикой, исходящей из точки $M(x_0,0)$, $x_0\in(c,1)$, μ – заданное число, причем $\mu\in(0,1)$, $\varphi(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $f(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Заметим, что условия (5) и (6) соответственно являются аналогами условия Франкля на внутренней характеристике $EC_1=EC^*\cup C^*C_1$ и на отрезке вырождения $EB=(EE_1\cup E_1B)\subset AB$.

Во втором параграфе первой главы с помощью принципа экстремума доказывается единственность решения задачи TF.

Теорема 1. *Решение* $u(x,y)$ *задачи TF при выполнении условий* $\psi_0(x)\equiv 0$, $\psi_1(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$ *своих наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области* $\bar{D}^+$ *может принимать только в точках кривой* σ_0.

Следствие. *Задача TF имеет не более одного решения.*

В третьем параграфе первой главы исследуется существование решения задачи TF. Доказано, что имеет место следующая.

Теорема 2. *Пусть для числовых параметров задачи TF выполняется неравенство*

$$\frac{4}{(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{c_1-c}{1-c_1}}\left[\mu(1+b_2^*)+\left(\frac{1-c_1}{c_1-c}\right)(1+a_1^*)\right]<1,\tag{7}$$

в котором $a_1^*=cos(\theta\pi)-0{,}5a_1sin(\theta\pi)$, $b_2^*=cos(\theta\pi)-0{,}5b_2sin(\theta\pi)$, $\theta\pi=arctg[(1+\mu)/(1-\mu)]$. *Тогда задача TF однозначно разрешима.*

Используя в области D^+ интегральное представление решения задачи Дирихле, а в области D^- формулу Даламбера, дающей решение видоизменной задачи Коши, в силу условий (4)-(5), задача *TF* однозначно сводиться к решению следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\tau_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)\tau_0(t)dt+$$

$$+\frac{a_1b}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)\tau_1(t)dt}{p(bt+a)-ax+b}+(1+x)T[\tau_1]+(1+x)F_2(x),\ x\in I,\ x\in I,\tag{8}$$

$$(1-\mu)\tau_1(x)-\frac{a_1b}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{p(bx+a)-c}{p(bt+a)-c}\right)\frac{\tau_1(t)dt}{p(bt+a)-p(bx+a)}+$$

$$+\frac{\mu bb_2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-q(bx+a)}{1-q(bt+a)}\right)\left(\frac{1}{q(bt+a)-q(bx+a)}+\frac{1}{1-q(bx+a)q(bt+a)}\right)\tau_1(t)dt=$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{p(bx+a)-c}{at-b-c}\right)\frac{\tau_0(t)dt}{at-b-p(bx+a)}-$$

$$-\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{p(bx+a)-c}{q(bt+a)-c}\right)\frac{b_2}{q(bt+a)-p(bx+a)}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1-q(bx+a)}{1-p(bt+a)}\right)\frac{\mu a_1}{p(bt+a)-q(bx+a)}\right]\tau_1(t)dt+$$

$$+(1+x)R_0[\tau_0]+(1+x)R_1[\tau_1]+(1+x)E_2(x),\ x\in I, \tag{9}$$

где $\tau_0(x)=\tau(ax-b)$, $\tau_1(x)=\tau(q(bx+a))$, $T[\tau_1]$, $R_0[\tau_0]$, $R_1[\tau_1]$ – регулярные операторы, $F_2(x)$, $E_2(x)$ – известные функции, причем $b_2+a_1=1$, $a_1+b_2=1$, $a+b=1$, $a-b=c$, $a=(1+c)/2$, $b=(1-c)/2$.

Уравнение (8) является неклассическим сингулярным интегральным уравнениям Трикоми, так как оно имеет две особенности:

несингулярная часть ядра оператора Трикоми имеет некарлемановские сдвиги видов $ax-b$, $at-b$;

первый интегральный оператор в правой части уравнения (8) не является регулярным, поскольку ядро этого оператора в точке $(x,t)=(1,-1)$ имеет изолированные особенности первого порядка (и поэтому оно выделено отдельно).

Теорема 3. *Если $g_0(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x\in(-1,1)$ и $g_0(x)\in L_p(-1,1)$, $p>1$, то решение уравнения (8) в классе функций $H(-1,1)$, в котором функция $(1+x)^{-1}\tau_0(x)$ может быть неограниченной в точке $x=-1$ и ограниченной при $x=1$, выражается формулой*

$$\tau_0(x)=\frac{g_0(x)}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1/4}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1/2}\left(\frac{1-c(ax-b}{1-c(at-b)}\right)^{1/4}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)g_0(t)dt,\ x\in I, \tag{10}$$

где

$$g_0(x)=\frac{a_1b}{\pi(1+c_1)}\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)\tau_1(t)dt}{b_0t-a_0x+1}+(1+x)T[\tau_1]+(1+x)F_2(x),\quad x\in(-1,1), \tag{11}$$

$a_0=(1+c)/(1+c_1)$, $b_0=(c_1-c)/(1+c_1)$, $a_0+b_0=1$.

Теперь выражение для $g_0(x)$ из (11) подставляя в (10), после несложных преобразований, имеем

$$\tau_0(x)=\frac{a_0^{-1/4}b_0^{-1/4}a_1b}{\pi(1+c_1)}(1+x)^{1/2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+s}\right)^{1/4}\frac{\tau_1(s)ds}{b_0s-a_0x+1}+$$

$$+(1+x)^{1/2}T_2[\tau_1]+(1+x)F_2(x),\ x\in I. \tag{12}$$

Решение (12) характерно тем, что оно разрешено относительно $\tau_0(x)$, что позволяет из (9) исключить $\tau_0(x)$. Выражение для $\tau_0(x)$ из (12) подставляя в (9) после несложных преобразований имеем

$$\rho(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\alpha}{t-x}-\frac{\beta b_3}{1-(b_3x-a_3)(b_3t-a_3)}\right)\rho(t)dt=(\alpha-\beta)g\left(\alpha,\beta;x\right),\ x\in I, \tag{13}$$

где $\rho(x)=(1+x)^{-1}\tau_1(x)$, $\alpha=(1+\mu)/(1-\mu)$, $\beta=\mu/(1-\mu)$, $\alpha=1+2\beta$, а $g\left(\alpha,\beta;x\right)$ получается из $g_0\left(x\right)$ заменой в нем числовой параметр μ на $\beta/(\alpha-\beta)$,

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{b_2}{b_2t+a_1x-1}+\frac{\mu a_1}{a_1t+b_2x-1}\right)\rho(t)dt+R_3[\rho]-E_3(x),\ \ x\in I, \tag{14}$$

Заметим, что уравнение (16) является ранне не изученным нестандартным сингулярным интегральным уравнением, так как $\alpha\neq 1,\beta\neq 1$.

Теорема 4. *Если* $g(\alpha,\beta;x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера при* $x\in(-1,1)$ *и* $g(\alpha,\beta;x)\in L_p(-1,1)$, $p>1$, *то решение уравнения (13) в классе функций* $H(-1,1)$, *в котором функция* $\rho(x)$ *может быть неограниченной в точке* $x=-1$ *и ограниченной при* $x=1$, *т.е. решение из класса* $h(1)$ *выражается формулой*

$$\rho(x)=\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha^2}g(\alpha,\beta;x)+\frac{\alpha-\beta}{\pi(1+\alpha^2)}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^2\left(\frac{1-x}{1-t}\right)\frac{(1-c_1(b_3x-a_3))}{(1-c_1(b_3t-a_3))}\right)^{\theta}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha}{t-x}g(\alpha,\beta;x)+\frac{b_3\beta((1+\alpha i)/(1+\beta i))}{1-(b_3x-a_3)(b_3t-a_3)}g(\alpha,\beta;x)\right)dt,\ \ x\in I, \tag{15}$$

где $\theta\pi=arctg\alpha,\ 0<\theta<1/2$, $\rho(x)=(1+x)^{-1}\tau_1(x)$.

Подставляя $g_0(x)$ из (11) в (10) и $g(x)$ из (14) в (15), соответственно, после несложных преобразований, получим уравнение Винера-Хопфа вида

$$\rho(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}K_0(y-s)\rho(s)ds+R_4[\rho], \tag{16}$$

где $K_0(y-s)$ – известное ядро, причем $K_0(x)$ непрерывно дифференцируемо и имеет показательный порядок убывания на бесконечности, а оператор $R_4[\rho]$ также имеет показательный порядок убывания на бесконечности, где $R_4[\rho]$ – регулярный оператор.

Хорошо известно, что теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свёртки справедливы лишь в одном частном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю. Поэтому сначала доказано, что индекс уравнения (16) равен нулю, следовательно уравнение (16) с помощью преобразования Фурье однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи TF.

Во второй главе диссертации, названной **«Задача со смещением на внутренних характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом»**, в неограниченной области для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с условием смешения на внутренних характеристиках и условием типа условия Франкля на отрезке вырождения уравнения.

В параграфе 2.1 дается постановка задачи SV. Пусть $D = D^{+} \cup D^{-} \cup AB$ – неограниченная область комплексной плоскости z, D^{+} – полуплоскость $y > 0$, D^{-} конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^{m} u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-m/2}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \qquad (17)$$

исходящими из точек $A(-1,0)$ и $B(1,0)$ и отрезком $AB = \{(x,y): -< x < 1,\ y = 0\}$ (Рис. 2.1).

В уравнение (17) предполагается, что $m,$ α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$m > 0, |\alpha_0| < (m+2)/2, -m/2 < \beta_0 < 1.$$

Пусть $p(x) = ax - b$ и $q(x) = a - bx$ линейные диффеоморфизмы из множества точек отрезка $[-1,1]$ во множество точек отрезков $[-1,c]$ и $[c,1]$ соответственно, где $a = (1+c)/2$, $b = (1-c)/2$, причем $p(-1) = -1$, $p(1) = c$, $q(-1) = 1$, $q(1) = c$.

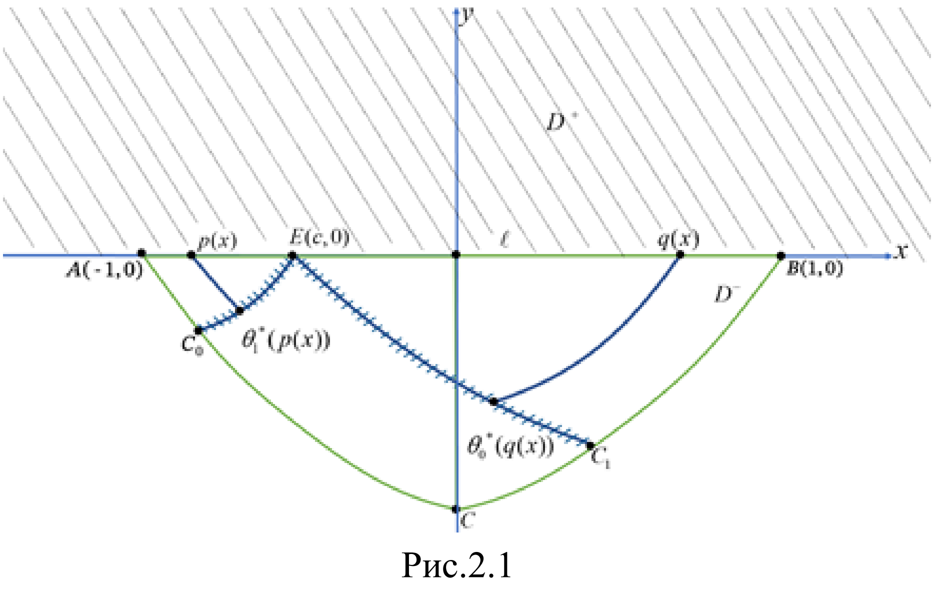


Рис.2.1

Известно что, в задачах со смещением носителями краевых данных были граничные характеристики AC и BC. В данной главе исследуется корректность задачи, где носителями условий со смешением будут внутренние характеристики EC_0 и EC_1.

Задача SV. В области D требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\bar{D}_R \subset D$;

$u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (20) в области D^+;

$u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области $D^- \setminus (EC_0 \cup EC_1)$;

на отрезке вырождения AB имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}(\partial u/\partial y) = \lim_{y\to +0} y^{\beta_0}(\partial u/\partial y), \quad x\in(-1,c)\cup(c,1), \tag{18}$$

причем эти пределы при $x=\pm 1$, $x=c$ могут имеет особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2))$, $\beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2))$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<1$;

выполняется равенство

$$\lim_{R\to+\infty} u(x,y)=0, \ y\geqslant 0, \tag{19}$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2}$;

$u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0} = \tau_i(x), \ \forall x\in \overline{\ell_i}, \ i=1,2; \tag{20}$$

$$a(x)(1-x)^{\alpha} D_{x,1}^{1-\beta} u\left[\theta_0^*(q(x))\right] + b(x)(1-x)^{\beta} D_{x,1}^{1-\alpha} u\left[\theta_1^*(p(x))\right] = \psi(x), \ x\in\ell; \tag{21}$$

$$u(p(x),0) - u(q(x),0) = f(x), \quad x\in\ell, \tag{22}$$

где $\ell=(-1,1)$, $\ell_1=(-\infty,-1)$, $\ell_2=(1,+\infty)$; $\theta_0^*(q(x))$, $\theta_1^*(p(x))$ точки пересечения внутренних характеристик EC_1 и EC_0 с характеристиками, исходящими из точек $(q(x_0),0)$, $(p(x_0),0)$, $x_0\in\bar{\ell}$, соответственно, т.е. $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Заметим, что условие (21) является условием смещения на внутренних характеристиках EC_0 и EC_1, а (22) - условием локального смещения на отрезке $[-1,1]$ оси $y=0$.

В параграфе 2.2. доказана единственность решения задачи SV. Используя формулу Дарбу, дающей решение видоизменной задачи Коши для уравнения (17) в D^-, из условия (21) нетрудно получить соотношение

$$b^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\beta)a(x)\nu(q(x)) + a^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\alpha)b(x)\nu(p(x)) =$$

$$=\gamma\left\{b^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha)a(x)D^{1-\alpha-\beta}_{c,q(x)}\tau(x)+a^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\beta)b(x)D^{1-\alpha-\beta}_{p(x),c}\tau(x)\right\}+\Psi_1(x),\ x\in\ell,\ (23)$$

где $\nu(x)=\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}(\partial u/\partial y)$.

Соотношение (23) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенным на интервал ℓ из области D^-. Доказана

Теорема 5 *(Аналог принципа экстремума А.В.Бицадзе)*.

Пусть $\tau_1(x)\equiv 0,\tau_2(x)\equiv 0,\psi_1(x)\equiv 0,\ f_1(x)\equiv 0$ *и*

$$a(x)\geqslant 0,\ b(x)\geqslant 0,\ \forall\ x\in\bar{\ell}. \qquad (24)$$

Тогда решение $u(x,y)$ *задачи SV, своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в области* $\bar{D}^+_R$ *достигает в точках кривой* σ_R.

Теорема 6. Задача SV при выполнении условия (24) имеет не более одного решения.

Параграф 2.3 посвящен доказательству существования решения задачи SV. Используя формулу, дающей решение задачи Дирихле в полуплоскости $y>0$, получим

$$\nu(x)=-k_2(1-\beta_0)\big((m+2)/2\big)\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\tau'(t)\left[(x-t)\,|\,x-t\,|^{2a_0-2}\,exp\left(-2b_0 arcsin\frac{t-x}{|\,t-x\,|}\right)\right]dt+\Phi(x),\ x\in(-1,1), \qquad (25)$$

где $a_0=(m+2\beta_0)/2(m+2)$, $b_0=-\alpha_0/(m+2)$, k_2 – известные величины, а $\Phi(x)$ – известная функция.

Соотношение (25) является основным функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенное на интервал $x\in(-1,1)$ из области D^+.

Теперь выражение для $\nu(x)$ из (25) подставляя в (23), после несложных преобразований, получим сингулярное интегральное уравнение

$$A(x)\tau_1(x)+B(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2a_0}\frac{\tau_1(t)dt}{t-x}=g_0(x), \qquad (26)$$

где $A(x)$, $B(x)$ – известные функции,

$$g_0(x)=a_1(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2a_0}\frac{\tau_1(t)dt}{at+bx-1}+b_1(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2a_0}\frac{\tau_1(t)dt}{bt+ax-1}+$$

$$+\int_{-1}^{1}R(x,t)\tau_1(t)dt+F(x),\ x\in\bar{\ell}, \qquad (27)$$

$a_1,\ b_1$ – известные величены, а $R(x,t)$, $F(x)$ – известные функции.

Теорема 7. *Если функция* $g_0(x)$ *удовлетворяет условию Гельдера при* $x\in(-1,1)$ *и принадлежит классу* $L_p(-1,1),\ p>1,$ *то решение уравнения (26) в классе* $H(-1,1),$ *в котором функция* $(1-x)^{2a_0-1}\tau_1(x)$ *ограничена на левом конце* $x=-1$ *интервала* $(-1,1)$ *и может быть неограниченной на его правом конце* $x=1,$ *выражается формулой*

$$\tau_1(x)=\frac{A(x)g_0(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}-\frac{B(x)}{A^2(x)+\pi B^2(x)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{\delta_0}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2a_0-\delta_1}\times$$

$$\times\frac{\delta(x)}{\delta(t)}\frac{A(x)+i\pi B(x)}{A(t)+i\pi B(t)}\frac{g_0(t)dt}{t-x},\ x\in\bar{\ell}\,, \tag{28}$$

где $\tau_1\left(x\right)=\tau\left(q\left(x\right)\right)$.

Теперь выражение для $g_0(x)$ из (27) подставляя в (28), после несложных вычислении, получим уравнение

$$\rho(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}K_0(y-t)\rho(t)dt+H_3[\rho]+F_2(y),\ \ y\in[0,+\infty)\,, \tag{29}$$

здесь $\rho(y)=e^{(0.5-2a_0)y}\tau_1(1-2e^{-y})$,

$$K_0(x)=\frac{\sqrt{2\pi}\pi}{b\sin(\delta_1\pi)}\left[B_1k^{\delta_1}\frac{e^{\delta_1x}}{ke^{x/2}+e^{-x/2}}+B_2k^{-\delta_1}\frac{e^{\delta_1x}}{e^{x/2}+ke^{-x/2}}\right], \tag{30}$$

$0.5-2a_0<0,\qquad (\beta_0>(2-m)/4),\qquad 0<\delta_1<1/2,\qquad k=a/b,$

$2a_0=\alpha+\beta=\dfrac{m+2\beta_0}{m+2}\in(0,1),$ $F_2(y)$ – известная функция, $H_3[\rho]=e^{(0.5-2a_0)y}H_2[\rho]$ – регулярный оператор.

Уравнение (29) представляет собой интегральное уравнение Винера-Хопфа. Так как в (30) $0<\delta_1<1/2,$ то функция $K_0(x)$ имеет показательный порядок убывания на бесконечности, причем $K_0(x)\in C^1[0,+\infty).$ Тогда $K_0(x)\in L_2\cap H_\alpha=\{0\}$. При выпольнении условия

$$\left|\left(2\pi\,|\,A(1)+\pi B(1)\,||\,a_1(1)+b_1(1)\,|\right)/\left(\sqrt{1-c^2}A^2(1)\right)\right|<1, \tag{31}$$

индекс интегрального уравнения (29) равно нулю. Следовательно, уравнение (29) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи SV. Таким образом, доказана

Теорема 8. *Решение задачи SV при выполнении условий (24), (31) и* $0.5-2a_0<0(\beta_0>(2-m)/4)$ *существует.*

Третья глава диссертации, названная **«Задача с локальными и нелокальными условиями для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом»,** посвящена доказательству теоремы единственности и существования решения задачи с локальными и нелокальными условиями на частях граничной характеристики для вырождаюшегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом.

В параграфе 3.1 дается постановка задачи А. Пусть Ω характеристический четырехугольник комплексной плоскости $C=\{z=x+iy\}$, ограниченная характеристиками, исходящих из точек $A=A(-1,0)$ и $B=B(1,0)$:

$$\left.\begin{matrix} AC_1 \\ BC_1 \end{matrix}\right\}: x\mp\frac{2}{m+2}y^{(m+2)/2}=\mp 1, \quad \text{при} \quad y>0,$$

$$\left.\begin{matrix} AC_2 \\ BC_2 \end{matrix}\right\}: x\mp\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=\mp 1, \quad \text{при} \quad y<0,$$

вырождающегося внутри области гиперболического уравнения

$$-|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\alpha_0|y|^{(m-2)/2}u_x+(\beta_0/y)u_y=0, \qquad (32)$$

где m, α_0, β_0 некоторые постоянные удовлетворяющие условиям $m>0$, $-m/2<\beta_0<1$, $-(m+2)/2<\alpha_0<(m+2)/2$ (Рис. 3.1).

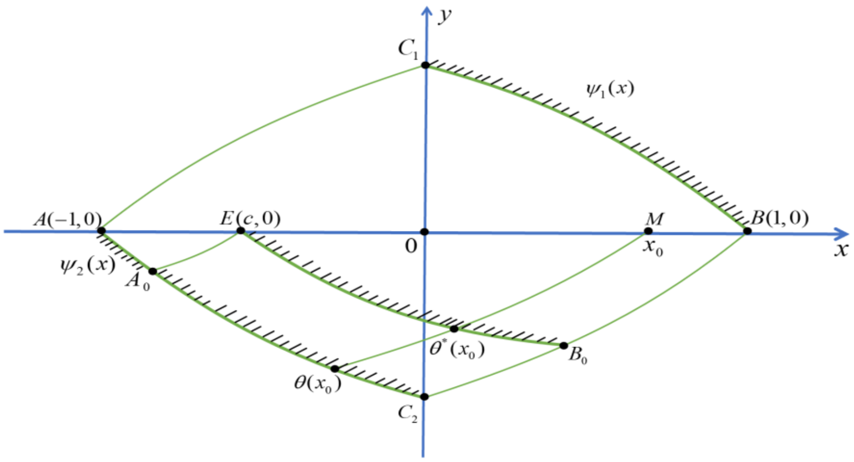


Рис.3.1

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, а через A_0 и B_0 соответственно точки пересечения характеристик AC_2 и BC_2 с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c\in I=(-1,1)$.

Настоящая глава посвящена исследованию корректности задачи в области Ω, для уравнения (35), когда граничная характеристика AC_2 области Ω_2 произвольным образом разбивается на два куска AA_0 и A_0C_2 и на первой части $AA_0\subset AC_2$ задается локальное условие, а на второй части $A_0C_2\subset AC_2$ и параллельной ей внутренней характеристике EB_0 задается нелокальное условие Бицадзе-Самарского, на граничной характеристике BC_1 области Ω_1 задается значения искомого решения.

Задача А. Требуется найти в области Ω функцию $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющее следующим условиям:

функция $u(x,y)$ является обобщенным решением из класса R_1 в областях Ω_1 и Ω_2;

на отрезке вырождения AB имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ \ x\in I\setminus\{c\}, \tag{33}$$

причем эти пределы при $x=\pm 1, x=c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=\dfrac{m+2(\beta_0\pm\alpha_0)}{2(m+2)}$, причем $0<\alpha$, $\beta<1$, $\alpha+\beta<1$;

выполняются граничные условия

$$u(x,y)\,|_{BC_1}=\psi_1(x),\quad 0\le x\le 1; \tag{34}$$

$$u(x,y)\,|_{AA_0}=\psi_2(x),\ -1\le x\le (c-1)/2; \tag{35}$$

$$u[\theta(x_0)]=\mu u[\theta^*(x_0)]+\rho(x),\quad c\le x\le 1, \tag{36}$$

где μ – некоторая отрицательная постоянная, $\theta(x_0)(\theta^*(x_0))$ – аффикс точки пересечения характеристики $A_0C_2(EB_0)$ с характеристикой, исходящей из точки $M(x_0,0)$, где $x_0\in[c,1]$: $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\rho(x)$ – заданные функции, причем они непрерывны в замыкании множества их определения, $\psi_1(1)=0$, $\psi_2(-1)=0$.

Заметим, что условия (34), (35) являются локальными условиями заданными на граничных характеристиках BC_1 и $AA_0\subset AC_2$, а условие (36) есть условие Бицадзе-Самарского заданное на граничной характеристике $A_0C_2\in AC_2$ и параллельной ей внутренней характеристике EB_0.

В параграфе 3.2 доказана единственность решения задачи А.

Теорема 9. *Задача А может иметь не более одного решения.*

При доказательстве этой теоремы, используя формулу Дарбу, дающее в характеристических треугольниках решение видоизменной задачи Коши, в силу условий (34), (35) и (36) соответственно, имеем функциональные соотношения

$$\gamma_1\Gamma(\beta)\left(\frac{1-x}{2}\right)^{1-\alpha-\beta}D_{x,1}^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}\tau(x)-$$

$$-\gamma_2\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\alpha)D_{x,1}^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}\nu(x)=\psi_1\left(\frac{1+x}{2}\right)x\in(-1,1). \tag{37}$$

$$\nu(x)=\gamma D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+\Psi_2(x), x\in(-1,c), \tag{38}$$

$$\nu(x)=\gamma\omega(x)\left[(x-c)^{\alpha}D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)-\mu(1+x)^{\alpha}D_{c,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)\right]+\Psi_3(x),\ x\in(c,1), \quad (39)$$

где $\omega(x)=\left[(x-c)^{\alpha}-\mu(1+x)^{\alpha}\right]^{-1}$.

Теорема 8 с использованием соотнощений (37), (38) и (39) доказывается методом интегралов энергии.

В параграфе 3.3 доказано существование решения задачи *A*.

Теорема 10. *Пусть* $\rho(x)\in C[c,1]\cap C^{3,\delta}(c,1)$, $\psi_1(x)\in C[0,1]\cap C^{3,\delta}(0,1)$, $\psi_2(x)\in C[-1,(c-1)/2]\cap C^{3,\delta}(-1,(c-1)/2)$, $\delta=const>0$. *Тогда решение задачи A существует.*

Используя (37) и (39) выпольнив стандартные вычисления и введя обозначения $\nu_0(x)=\nu(ax-b)$, $\nu_1(x)=\nu(bx+a)$, получим сингулярного интегрального уравнения относительно неизвестной функции $\nu_0(x)$:

$$\nu_0(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\theta}\frac{\nu_0(t)dt}{t-x}=g_0(x), \quad (40)$$

где $\theta=(1-\alpha-\beta)/2$,

$$g_0(x)=-\lambda b\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-bs+a}{a(1+x)}\right)^{2\theta}\frac{\nu_1(s)ds}{bs-ax+1}+\Psi_{21}(ax-b). \quad (41)$$

Теорема 11. *Решение уравнения (40) в классе функций Гёльдера на интервале* $(-1,1)$, *где функция* $(1+x)^{2\theta}\nu_0(x)$ *может допускать особенность порядка не выше* 2θ *в точке* $x=1$ *и ограниченна в точке* $x=-1$, *т.е. в классе* $h(-1)$ *имеет вид*

$$\nu_0(x)=\frac{g_0(x)}{1+\lambda^2\pi^2}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t^2}{1-x^2}\right)^{\theta}\frac{g_0(t)dt}{t-x}. \quad (42)$$

Теперь выражение для $g_0(x)$ из (41) подставляя в (42), получим

$$\nu_0(x)=-\frac{\lambda^2 b^{1+\theta}\pi}{(1+\lambda^2\pi^2)\sin(\theta\pi)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{(1+bt+a)^2}{a^2(1+x)(1+a-bt)}\right)^{\theta}\times$$

$$\times\left(\frac{1+t}{1-x}\right)^{\theta}\frac{\nu_1(t)dt}{bt-ax+1}+\Psi_{22}(x),\ x\in(-1,1). \quad (43)$$

(43) есть первое уравнение из системы уравнений для неизвестных функций $\nu_0(x)$ и $\nu_1(x)$. Заметим, что соотношение (43) характерно тем, что оно разрешено относительно неизвестной функции $\nu_0(x)$.

Аналогично как и выше, в силу соотношений (39), получим уравнение

$$\nu_1(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{\nu_1(s)ds}{s-x}=-\lambda(b(1+x))^{\alpha}\omega(bx+a)\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1+s)}{1+bx+a}\right)^{1-\alpha-\beta}\times$$

$$\times\frac{a\nu_0(s)ds}{as-bx-1}+H_1[\nu_1]+\Psi_{31}(x),\quad x\in(-1,1). \tag{44}$$

(44) является вторым уравнением из системы уравнений для неизвестных функций $\nu_0(x)$ и $\nu_1(x)$. С учетом (43), из (44) исключив $\nu_0(x)$, после стандартных вычислений, получим интегральное уравнение

$$\nu_1(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\theta}\frac{\nu_1(t)dt}{t-x}=H_2[\nu_1]+\Psi_{32},\quad x\in(-1,1), \tag{45}$$

где $H_2[\nu_1]$ – регулярный оператор.

Решение сингулярного интегрального (45) будем искать в классе функций Гёльдера на интервале $(-1,1)$ в котором функция $(1+x)^{2\theta}\nu_1(x)$ может быть не ограниченной в близи точки $x=1$ и ограниченной в близи точки $x=-1$. Так как $1+\lambda^2\pi^2\neq 0$, то уравнение (45) является уравнением нормального типа и его индекс в указанном классе решений равна нулю.

Следовательно уравнение (45) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи *A*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию задач с локальными и нелокальными условиями для эллиптико-гиперболического уравнения и вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом.

В первой главе в конечной области для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с недостаюшим условием Трикоми на части граничной характеристики и аналогом условия Франкля на внутренней характеристике.

Во второй главе для уравнения смешанного типа с двумя младшими членами с сингулярными коэффициентами исследована задача со смещением на внутренних характеристиках.

В третьей главе в характеристическом четырехугольнике для вырождаюшегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом исследуется задача с локальным и нелокалным условием, где одна из граничных характеристик произволным образом разбивается на два куска и на первом куске задается значения искомой функции (условие Трикоми), а на втором куске и паралелльной ей внутренней характеристике задается условие Бицадзе-Самарского.

Единственность решения задач для уравнения смешанного типа доказывается методом принципа экстремума, а для доказательства единственности решения задачи с условием Бицадзе-Самарского для вырождаюшегося внутри области гиперболического уранения применяется метод интегралов энергии.

При доказательстве существования решения задач зарание предполагается, что известны значения: $u(x,0)=\tau(x)$, $\lim_{|y|\to 0}|y|^{\beta}(\partial u/\partial y)=\nu(x)$ – искомой функции, затем в силу известных интегральных представлений решений задачи Дирихле в эллиптической части D^{+} смешанной области D и видоизменненой задачи Коши в гиперболической части смешанной области D^{-}, сформулированная задача сводится к нестандартным сингулярным интегральным уравнениям типа Ф.Трикоми. Полученные сингулярные интегральные уравнения имеют три особенности: 1) «несингулярная» часть ядра имеет некарлемановские сдвиги; 2) нехарактеристическая часть сингулярного интегрального уравнения содержит нефредгольмовые интегральные операторы, точнее ядра этих операторов имеют изолированные особенности первого порядка; 3) в отличие от интегрального уравнения Ф.Трикоми ядра уравнения имеют различные числовые множители α и β. В уравнение Трикоми $\alpha=\beta=1$.

В работе разработан алгоритм решения таких нестандартных интегральных уравнений: сначало временно считая нехарактеристическую часть уравнения известной величиной, получено сингулярное интегральное уравнение Трикоми со сдвигом; затем регуляризуя его методом Карлемана, развитого С.Г.Михлиным, получено уравнение Винера-Хопфа, которые с помощью преобразование Фурье сводиться к задаче Римана теории функций комплексного переменного; далее доказывается, что индекс задачи Римана равно нулю, что обеспечивает однозначную регуляризацию уравнения Винера-Хопфа к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения сформулированных задач.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 FERGANA STATE UNIVERSITY
TERMEZ STATE UNIVERSITY

MIRSABUROVA UMIDA MIRAKHMATOVNA

PROBLEMS WITH A SHIFT FOR ELLIPTIC-HYPERBOLIC AND DEGENERATING INSIDE THE DOMAIN OF HYPERBOLIC EQUATIONS WITH SINGULAR COEFFICIENTS

01.01.02 Differential equations and mathematical physics
(Physical and mathematical sciences)

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Fergana-2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission of the Ministery of Higher Education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under №B 2023.2.PhD/FM867.

Dissertation has been prepared at Termez State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.fdu.uz) and the "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisors:	**Urinov Akhmadjon Kushakovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Apakov Yusufjon Pulatovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Ruziyev Mengliboy Xoltojiboyevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place «18» 01 2024 at 10.00 at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University. (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-02, fax: (+99873)244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Fergana State University (is registered №326). (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-94.

Abstract of dissertation sent out on «05» 01 2024 year.

(Mailing report № 6 on «04» 01 2024 year).

Sh.T.Karimov
Deputy chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Docent

I.U.Khaydarov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S., Docent

E.T.Karimov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Docent

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The purpose of the study is to prove the correctness of problems with local and nonlocal conditions on boundary and internal characteristics for mixed-type equation with a singular coefficient and hyperbolic equations with singular coefficients degenerate inside the domain.

The scientific novelty of the research lies in the following:

in a limited mixed domain for mixed-type equation with a singular coefficient, a non-classical problem with an analogue of the Frankl condition on the internal characteristic is presented, the uniqueness of the solution to the problem is proven using an analogue of the extremum principle of A.V. Bitsadze, and the existence of a solution to the problem is proven using the theory of integral equations;

an algorithm has been developed for regularizing the non-standard singular integral Tricomi equation to the Fredholm integral equation of the second kind;

in an unbounded domain for mixed-type equation with a singular coefficient, problems with the displacement condition of A.M.Nakhushev on internal characteristics were studied, the correctness of the problem is proven using the extremum principle and the application of the theory of integral equations;

in the characteristic quadrilateral for hyperbolic equations with singular coefficients degenerate inside the domain, the problem is studied when the Bitsadze-Samarsky conditions are specified on a part of the boundary characteristic and the internal characteristic parallel to it, the unique solvability of the problem is justified using energy integrals and the method of the theory of integral equations.

Implementation of research results. The obtained research results on problems with displacement for elliptic-hyperbolic and hyperbolic equations with singular coefficients degenerating within the domain were introduced into the following research projects:

The developed methods for regularizing non-standard singular integral equations were used in solving boundary value problems for a mixed type equation with a singular coefficient in project No. OT-F4-88 on the topic “Study of direct and inverse problems for mixed type equations of the second and high orders” for 2017-2020. (Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, certificate of implementation No. 2/344 dated 09/04/2023). As a result, the unique solvability of some nonlocal boundary value problems for the Gellerstedt equations with a singular coefficient was proved;

conclusions of theorems to substantiate the correctness of new nonlocal boundary value problems of the Bitsadze-Samarsky type for an equation of mixed type with a singular coefficient were used to solve the solvability of boundary value problems for differential equations of fractional order in the project AP008856594 “Development of an intelligent system for the analysis and control of the dynamics of water flows in river beds and canals » for 2020-2022 (Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, certificate of implementation No. 01-07/248 dated 08/14/2023). As a result, this made it possible to analyze finite element fractional-stochastic models of filtration of immiscible liquids.

The Scope and structure of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of used literatures containing 82 literatures. The volume of the dissertation is 118 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I bo‘lim (I часть; I part)

1. Мирсабурова У.М. Задача с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 2021. том 57. № 6. – С.735–751. (1. Journal IF: 0.78)
2. Mirsaburova U.M. On a uniqueness of the solution of a problem with an analogue of a condition of Frankl on the internal characteristic for the equation of the mixed type // Uzbek Mathematical Journal. 2021. Volume 65. Issue 2. – pp.106-110. (01.00.00; №6)
3. Мирсабурова У. М. Задача со смещением на внутренних характеристиках в неограниченной области для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Известия вузов. Математика. 2022. №9. – С.70-82. (3. Journal IF: 0.35)
4. Уринов А.К. Мирсабурова У.М. Задача с локальными и нелокальными условиями для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом // Бюллетень Института математики. 2022. Т.5. №3. – С.234-242. (01.00.00; №17)
5. Mirsaburova U.M. A problem with a displacement on the internal characteristics in an unbounded domain for the Gellerstedt equation with singular coefficients// Uzbek Mathematical Journal. 2022, Volume 66. Issue 3. – pp.96-100. (01.00.00; №6)
6. Мирсабурова У., Эргашева С. Задача с локальными и нелокальными условиями для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом // Сурхондарёда илм ва фан. илмий-инновацион журнал. – Термиз. 2021. №1. 12-20 бетлар.

II bo‘lim (II часть; II part)

7. Мирсабурова У.М., Омонов Б. Об одном обобщении задачи Трикоми для уравнения Геллерстедт с сингулярным коэффициентом // Материалы IV Международной научной конференции. «Актуальные проблемы прикладной математики». 22-26 мая 2018 г. – Нальчик-Эльбрус, 2018. – С. 189.
8. Мирсабурова У. О единственности решения обобщеонной задачи Трикоми с общими условиями сопряжения и аналогом условия Франкля на внутренной характеристике для уравнения смешанного типа // Тезисы докладов Международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики» 12-13 марта 2020 г. – Фергана, 2020. – С.112-114.

9. Мирсабурова У.М. О единственности решения задачи Трикоми в специальной области для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффицентом // “Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар” мавзусидаги республика миқёсидаги илмий онлайн конференция материаллари тўплами. 21-23 октябр 2020 йил, – Термиз, 2020. 131-134 бетлар.
10. Мирсабурова У.М. Решение сингулярного интегрального уравнения типа Трикоми со сдвигом // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики». 12-15 сентября 2021 г. – Стерлитамак, 2021. том 1. – С. 206-210.
11. Мирсабурова У.М. Задача со смещением на внутренних характеристиках в бесконечной области для Геллерстедта с сингулярным коэффициентами // Материалы IV Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». 5-9 декабря 2021 г. – Нальчик, 2021. – С.144.
12. Мирсабурова У.М. Задача со смещением на внутренних характеристиках в бесконечной области для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Сборник материалов международной конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы». 25-29 октября 2021 г. – Белгород, 2021. – С.177-179.
13. Мирсабурова У.М. Об одном применение теории вычетов к вычисленнию интеграла Фурье // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвященной 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы. 20-21 октября 2022 г. – Душанбе, 2022. – С.101-103.
14. Мирсабурова У.М., Норкулова М.Н. О некоторых композициях несобственных интегралов // “Алгебра ва анализнинг долзарб масалалари” мавзусидаги республика илмий-амалий анжумани материаллари тўплами, 18-19 ноябрь 2022 йил. – Термиз, 2022. 2-қисм, 140-142 бетлар.
15. Мирсабурова У. Задача с условием Бицадзе-Самарского для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики», посвещенной 50-летию Института математики им А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана. 26-27 мая 2023 г. – Душанбе, 2023. – С. 132-134.

Avtoreferat Farg‘ona davlat universiteti «FarDU. Ilmiy xabarlar – Научный вестник. ФерГУ» ilmiy – metodik jurnal tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.