QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

BAHRONOV BEKZOD ISLOM O‘G‘LI

PANJARADAGI IKKI VA UCH ZARRACHALI SISTEMALARGA MOS MODEL OPERATORLARNING SPEKTRAL XOSSALARI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Qarshi – 2024

UDK: 517.984

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Bahronov Bekzod Islom o‘g‘li
Panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarning spektral xossalari…………………………………………………………….. 5

Бахронов Бекзод Ислом угли
Спектральные свойства модельных операторов, соответствующих системам двух и трех частиц на решетке …………………………………….. 21

Bahronov Bekzod Islom ugli
Spectral properties of model operators corresponding to systems of two and three particles on a lattice……………………………………………………... 39

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published works ……………………………………………………. 43

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

BAHRONOV BEKZOD ISLOM O‘G‘LI

PANJARADAGI IKKI VA UCH ZARRACHALI SISTEMALARGA MOS MODEL OPERATORLARNING SPEKTRAL XOSSALARI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Qarshi – 2024

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.3.PhD/FM906 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Buxoro davlat universitetida bajarilgan.
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (www.qarshidu.uz) va “Ziyonet” axborot ta’lim tarmog‘ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Rasulov To‘lqin Husenovich** fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor
Rasmiy opponentlar:	**Mo‘minov Zahriddin Eshqobilovich** fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent
	Xamrayev Axror Yusupovich fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Qarshi davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.06.2020.FM.70.04-raqamli Ilmiy kengashning 2024-yil “_____” ____________ soat _____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 180119, Qarshi sh., Ko‘chabog‘ ko‘chasi, 17-uy. Tel.: (+998 75) 225-34-13; faks: (+998 75) 221-00-56, e-mail: kasu_info@edu.uz). Qarshi davlat universiteti, 2-bino 202-xona.

Dissertatsiya bilan Qarshi davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (____ raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 180119, Qarshi sh., Ko‘chabog‘ ko‘chasi, 17-uy. Tel.: (+998 75) 225-34-13; faks: (+998 75) 221-00-56, e-mail: kasu_info@edu.uz).

Dissertatsiya avtoreferati 2024-yil “_____” ____________ kuni tarqatildi
(2024-yil “______” ______________ dagi ______ raqamli reestr bayonnomasi).

B.A. Shoimqulov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

Sh.D. Nodirov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.f.d. (PhD), dotsent

A.A. Imomov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash qoshidagi
Ilmiy seminar raisi
f.-m.f.d. (DSc), dotsent

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda olib borilayotgan aksariyat izlanishlar panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarning spektral xossalarini aniqlashga olib kelinadi. Bunda ikki zarrachali sistemaga mos model operator spektri haqidagi natijalardan foydalanib uch zarrachali sistemaga mos model operator muhim va diskret spektrlarini tadqiq qilish muhim ahamiyat kasb etadi. Uch zarrachali sistemaga mos model operatorning muhim spektri va xos qiymatlarining mavjudligi bilan bog‘liq masalalar qattiq jismlar fizikasi, kvant maydon nazariyasi va boshqa ko‘plab sohalardagi dolzarb masalalardan hisoblanadi. Shuning uchun panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarga oid tadqiqotlarni rivojlantirish muhim hisoblanadi.

Dunyoda panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarning muhim spektri va xos qiymatlarining mavjudligini o‘rganishga doir ko‘plab ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. Bu borada, ikki zarrachali sistemaga mos Fridrixs modeli uchun bo‘sag‘aviy hodisalarni tahlil qilish, ulardan foydalanib sonli tasvirni tadqiq qilish, uch zarrachali sistemaga mos model operator muhim spektrining tuzilishini aniqlash, xos qiymatlar sonining chekli yoki cheksiz bo‘lish shartlarini topish, muhim spektr ichida joylashgan xos qiymatlarni aniqlashga alohida e’tibor berilmoqda.

Mamlakatimizda panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarning xossalarini tadqiq qilishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarning muhim spektrini aniqlash va xos qiymatlarining mavjudligiga oid salmoqli natijalarga erishildi. “Algebra va funksional analiz, differensial tenglama va matematik fizika, dinamik tizimlar nazariyasi, geometriya va topologiya, ehtimollik nazariyasi va matematik statistika, amaliy matematika va matematik modellashtirish” fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish asosiy vazifalar va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi[1]. Bu borada panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarning spektral nazariyasini rivojlantirish, uch zarrachali sistemasiga mos model operatorning muhim spektri joylashuv o‘rni va tuzilishini topish hamda uning xos qiymatlari mavjudligini ko‘rsatish muhim ilmiy ahamiyatga ega hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi Farmoni, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ–huquqiy hujjatlarda belgilangan

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar mahkamasi 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish to‘g‘risida”gi 292-sonli qarori.

vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlar spektral nazariyasiga oid tadqiqotlar S. Albeverio, G.F. Dell’Antonio, S.N. Laqayev, Z.E. Mo‘minov, T.H. Rasulov, Yu.X. Eshkabilov va boshqa ko‘plab olimlar tomonidan olib borilgan. Hozirgi vaqtda panjaradagi uch zarrachali sistemaga mos model operator xos qiymatlari sonini tadqiq qilish masalasi diskret Shryodinger operatori tipidagi model operatorlar spektral nazariyasining chuqur o‘rganilayotgan obyektlaridan biri hisoblanadi. Bunday turdagi operatorlar spektral tahlilidagi asosiy masalalardan biri uning muhim spektridan tashqarida yotuvchi kamida bitta yoki cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjudligini o‘rganish masalasidir. Cheksiz sondagi xos qiymatlarning mavjudligi dastlab uchta zarrachalar sistemasi uchun V.N. Yefimov tomonidan o‘rganilgan hamda keyinchalik Yefimov hodisasi deb atalgan. Ushbu hodisa mavjudligining qat’iy matematik isboti dastlab D.R. Yafayev tomonidan keltirilgan. Keyinchalik Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal, H. Tamura, A.V. Sobolev va boshqa olimlar tomonidan uch zarrachali uzluksiz Shryodinger operatori uchun Yefimov hodisasining mavjudligi o‘rganilgan.

Qattiq jismlar fizikasi, shuningdek, panjaraviy maydon nazariyasida $\mathbb{R}^d$ Evklid fazosidagi uch zarrachali Shryodinger operatorining panjaraviy analogi bo‘lgan diskret Shryodinger operatori deb ataluvchi operatorlar paydo bo‘ladi. Dastlab S.N. Laqayev tomonidan uch o‘lchamli panjaradagi o‘zaro juft-jufti bilan kontakt ta’sirlashuvchi uchta ixtiyoriy va uchta bir xil zarrachali sistemalar uchun Yefimov hodisasining mavjudligi matematik nuqtai nazardan qat’iy isbotlangan.

M.E. Mo‘minovning ishida panjaradagi uchta ixtiyoriy zarrachalar sistemasiga mos gamiltonian muhim spektrining bo‘shlig‘ida cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjudligi isbotlangan.

Yu.X. Eshkabilovning ishida Xabbard modelida vujudga keluvchi, uch zarrachali model diskret Shryodinger operatori uchun cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjudligi o‘rganilgan. Bunda o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan operatorlar uchun minimaks prinsipi usullari va musbat integral operatorlar xossalaridan foydalanilgan.

Ushbu dissertatsiya ishi panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operatorlar uchun oldin o‘rganilmagan muhim spektrdan tashqarida yoki ichida joylashgan xos qiymatlarning mavjudligini o‘rganishga bag‘ishlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Buxoro davlat universiteti ilmiy tadqiqot ishlari rejasining 2017-2026-yillarga mo‘ljallangan M.01.2017-raqamli “Chiziqli operatorlarning spektral nazariyasi” ilmiy tadqiqot yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi Fridrixs modeli sonli tasviri va spektri ustma-ust tushish shartlarini ko‘rsatish, panjaradagi uch zarrachali sistemaga mos model operator muhim spektrining tuzilishini aniqlash va uning xos qiymatlari mavjud bo‘ladigan shartlarni topishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos Fridrixs modelining xos qiymatlari soni va joylashuv o‘rnini, bo‘sag‘aviy xos qiymat va virtual sathlar mavjud bo‘lish shartlarini aniqlash;

Fridrixs modelining sonli tasviri tuzilishini ko‘rsatish, sonli tasvir yopiq to‘plam bo‘ladigan hamda spektr bilan ustma-ust tushish shartlarini topish;

panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator muhim spektrining ikki va uch zarrachali tarmoqlari joylashuv o‘rnini kanal operator spektri yordamida aniqlash;

ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modellari tenzor yig‘indisi ko‘rinishidagi model operator muhim spektri tarmoqlarining tuzilishi tavsiflash va xos qiymatlarining mavjudligini ko‘rsatish.

Tadqiqotning obyekti sifatida panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlar olingan.

Tadqiqotning predmetini panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarning spektral xossalari tashkil etgan.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida matematik analiz, funksional analiz, o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarning spektral nazariyasi va zamonaviy matematik fizika usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos Fridrixs modeli uchun odatdagi xos qiymat, bo‘sag‘aviy xos qiymat va virtual sathlarning parametr funksiyalar hamda ta’sirlashish parametrlariga nisbatan mavjudlik shartlari topilgan;

panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos Fridrixs modeli sonli tasvirining tuzilishi aniqlangan, hamda uning spektri va sonli tasviri ustma-ust tushadigan shartlar bo‘sag‘aviy hodisalar nazariyasi metodlaridan foydalanib topilgan;

panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator muhim spektrining joylashuv o‘rni hamda ikki va uch zarrachali tarmoqlari kanal operator spektri yordamida aniqlangan, muhim spektrni tashkil qiluvchi kesmalarning maksimal soni topilgan;

ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modellari tenzor yig‘indisi ko‘rinishdagi model operator muhim spektri tarmoqlarining tuzilishi tavsiflangan va uning muhim spektridan tashqarida yoki ichida joylashgan xos qiymatlar mavjudligi Fridrixs modeli xos qiymatlari yordamida isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijasi quyidagilardan iborat:

panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorning spektral xossalari haqidagi xulosalar atom fizikasida, kvant mexanikasida eksperimental tadqiqotlarning sifat ko‘rsatkichini aniqlash hamda sonli hisoblashlarda foydalanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik analiz, funksional analiz, zamonaviy matematik fizika va o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarning spektral nazariyasi metodlaridan foydalangan holda aniq matematik tahlillar va isbotlashlar bilan izohlangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ulardan o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar nazariyasining kvant maydonlar nazariyasi va qattiq jismlar fizikasi paydo bo‘ladigan, xususan, ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlar bilan bog‘liq masalalarida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Dissertatsiya natijalarining amaliy ahamiyati shundan iboratki, Fridrixs modellarining xos qiymatlari soni va joylashuv o‘rni yordamida qattiq jismlar fizikasi va kvant mexanikasining panjaradagi uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarning xos qiymatlari mavjudligini ko‘rsatish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarini joriy qilinishi. Panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlar uchun olingan ilmiy natijalar asosida:

panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos Fridrixs modeli uchun xos qiymat, bo‘sag‘aviy xos qiymat va virtual sathlarning mavjudlik shartlari hamda Fridrixs modeli sonli tasvirining tuzilishi, uning spektri va sonli tasviri ustma-ust tushish shartlarini topishda qo‘llanilgan metodlardan Samarqand davlat universitetining 2017-2020-yillarda bajarilgan OT-F4-69 “Garmonik analiz, darajali geometriya va uning matematik fizika masalalariga tadbiqlari” mavzusidagi fundamental loyihada foydalanilgan (Samarqand davlat universitetining 2023-yil 5-sentabrdagi 10-4386-son ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi ayrim qavariq bo‘lmagan gipersirtlarda aniqlangan o‘lchovlarning Furye transformatsiyasi uchun integrallanuvchanlik muammosini hal qilish imkonini bergan.

Ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modeli spektri yordamida panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator muhim spektrining joylashuv o‘rni va tuzilishi aniqlashda qo‘llanilgan metodlardan Rossiya Federatsiyasi Qozon Federal Universitetining RFFI 20-01-00535 raqamli fundamental loyihasida foydalanilgan (Qozon Federal Universitetining 2023-yil 22-sentabrdagi ma’lumotnomasi). Panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator muhim va diskret spektrlari xossalaridan foydalanib chiziqli bo‘lmagan sistemani barqarorlashtirish masalasining yechimini tavsiflash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 9 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida, jami 12 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan o‘tgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 18 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta, jumladan, 3 tasi xorijiy va 3 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat bo‘lib, 88 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiyada tanlangan mavzuning dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi yoritilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy va mahalliy ilmiy-tadqiqot ishlari farqi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan maqolalar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi “**Dastlabki ma’lumotlar**” deb ataladi. Ushbu bobda dissertatsiya ishining asosiy natijalarini bayon qilishda va isbotlashda foydalanilgan muhim tushunchalar, tasdiqlar va teoremalar keltirilgan. Bundan tashqari, panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarning spektral xossalariga bag‘ishlangan ayrim maqolalarning qiyosiy tahlili keltirilgan.

Dissertatsiya ishining ikkinchi bobi **“Fridrixs modelining muhim va diskret spektrlari tadqiqi”** deb nomlanadi. Bu bobda panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos model operator (Fridrixs modeli) qaralib, uning xos qiymatlari soni va joylashuv o‘rni hamda ularning mavjudlik shartlari aniqlangan, bo‘sag‘aviy xos qiymat yoki virtual sath mavjud bo‘lishining zaruriy va yetarlilik shartlari topilgan, bundan tashqari bu operator sonli tasvirining tuzilishi tadqiq qilingan.

$\mathbb{T}^{\mathrm{d}} = (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ orqali $d\,(d \in \mathbb{N})$ – o‘lchamli torni, $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ orqali $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.

$L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ Hilbert fazosida

$$h_{\mu,\lambda} := h_{0,0} - \mu k_1 + \lambda k_2$$

kabi aniqlangan va Fridrixs modeli deb ataluvchi operatorni qaraymiz. Bunda $\mu,\lambda > 0$ haqiqiy sonlar ta’sirlashish parametrlari, $h_{0,0}$ operator ko‘paytirish operatori bo‘lib, $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ Hilbert fazosida

$$(h_{0,0}g)(p) = u(p)g(p)$$

tenglik yordamida aniqlangan. $k_\alpha,\ \alpha = 1,2$ potensial operatorlari bo‘lib, $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ Hilbert fazosida

$$(k_\alpha)g(p) = v_\alpha(p)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_\alpha(t)g(t)dt,\ \alpha = 1,2$$

kabi aniqlangan. Bu yerda $u(\cdot)$ va $v_\alpha(\cdot),\ \alpha = 1,2$ funksiyalar $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ torda aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar bo‘lib, $v_1(\cdot)$ va $v_2(\cdot)$lar chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar.

$L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ Hilbert fazosida aniqlangan $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.

Ko‘rsatish mumkinki, $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining $-\mu k_1 + \lambda k_2$ qo‘zg‘alish operatori 2 o‘lchamli operator bo‘ladi. Chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlarga muhim spektrning o‘zgarmasligi haqidagi mashhur Veyl teoremasiga ko‘ra, $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining muhim spektri $h_{0,0}$ operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi. Bizga yaxshi ma'lumki, $h_{0,0}$ ko'paytirish operatori sof muhim spektrga ega bo'lib

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(h_{0,0})=[E_1;E_2]$$

tenglik o'rinlidir. Bu yerda E_1 va E_2 sonlari

$$E_1=\min_{p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}u(p),\quad E_2=\max_{p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}u(p)$$

tengliklar yordamida aniqlanadi.

Oxirgi ikkita mulohazalardan $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining muhim spektri uchun

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(h_{\mu,\lambda})=[E_1;E_2]$$

tenglikni hosil qilamiz.

Faraz qilaylik, $\mathbb{C}$ kompleks tekislik bo'lsin.

Har bir $\mu,\lambda>0$ sonlari uchun $\mathbb{C}\setminus[E_1;E_2]$ sohada regulyar bo'lgan

$$\Delta_{\mu,\lambda}(z):=\Delta_{\mu}^{(1)}(z)\Delta_{\lambda}^{(2)}(z)+\mu\lambda I_{12}^2(z)$$

funksiyani qaraymiz, bunda

$$\Delta_{\mu}^{(1)}(z):=1-\mu I_{11}(z),\quad \Delta_{\lambda}^{(2)}(z):=1+\lambda I_{22}(z),$$

$$I_{\alpha\beta}(z):=\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\frac{v_{\alpha}(t)v_{\beta}(t)}{u(t)-z}dt,\quad \alpha,\beta=1,2.$$

Odatda, $\Delta_{\mu,\lambda}(\cdot)$ funksiyaga $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeliga mos Fredgolm determinanti deyiladi hamda bu funksiya $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining diskret spektrini tadqiq qilishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Quyidagi lemma $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli xos qiymatlari va $\Delta_{\mu,\lambda}(\cdot)$ funksiya nollari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

1-lemma. *$z\in\mathbb{C}\setminus[E_1;E_2]$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta_{\mu,\lambda}(z)=0$ tenglik o'rinli bo'lishi zarur va yetarlidir.*

1-lemmadan $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining diskret spektri uchun

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu,\lambda})=\{z\in\mathbb{C}\setminus[E_1;E_2]:\Delta_{\mu,\lambda}(z)=0\}$$

tenglik kelib chiqadi.

$h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli bilan birgalikda chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan $h_{\mu}^{(1)}$, $h_{\lambda}^{(2)}$ Fridrixs modellarini qaraymiz. Ular $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ Hilbert fazosida

$$h_{\mu}^{(1)}:=h_{0,0}-\mu k_1,\quad h_{\lambda}^{(2)}:=h_{0,0}+\lambda k_2$$

kabi aniqlangan operatorlardir.

Ta'kidlash joizki, $\Delta_{\mu}^{(1)}(\cdot)$, $\Delta_{\lambda}^{(2)}(\cdot)$ funksiyalar $h_{\mu}^{(1)}$, $h_{\lambda}^{(2)}$ operatorlarga mos keluvchi Fredgolm determinanti deyiladi va

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu}^{(1)})=\{z\in\mathbb{C}\setminus[E_1;E_2]:\Delta_{\mu}^{(1)}(z)=0\};$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\lambda}^{(2)})=\{z\in\mathbb{C}\setminus[E_1;E_2]:\Delta_{\lambda}^{(2)}(z)=0\};$$

$$\sigma(h_\mu^{(1)}) = [E_1; E_2] \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2] : \Delta_\mu^{(1)}(z) = 0\};$$
$$\sigma(h_\lambda^{(2)}) = [E_1; E_2] \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2] : \Delta_\lambda^{(2)}(z) = 0\}$$
tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $a \in \mathbb{R}$ bo‘lsin. L Hilbert fazosida ta’sir qiluvchi chiziqli, chegaralangan, o‘z-o‘ziga qo‘shma A operator uchun $L_A(a)$ orqali istalgan $f \in L_A(a)$ larda $(Af, f) \le a\|f\|^2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi funksiyalar qism fazosini belgilaymiz hamda $N(a, A)$ sonini
$$N(a, A) = \sup_{L_A(a)} \dim L_A(a)$$
kabi aniqlaymiz.

Agar $a > \sigma_{\text{ess}}(A)$ bo‘lsa, u holda $N(a, A)$ soni cheksizga teng bo‘ladi, agar $N(a, A)$ chekli bo‘lsa, u holda bu son A operatorning a dan kichik (karraligi bilan hisoblaganda) xos qiymatlari soniga teng bo‘ladi.

supp $v(\cdot)$ orqali $v(\cdot)$ funksiya tashuvchisini, $\text{mes}(\Omega)$ orqali $\Omega \subset \mathbb{T}^{\text{d}}$ to‘plamning Lebeg o‘lchovini belgilaymiz.

1-teorema. *A) $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli E_1 dan chapda va E_2 dan o‘ngda ko‘pi bilan bittadan sodda xos qiymatga ega.*

B) Agar
$$\text{mes}(\text{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \text{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0 \qquad (1)$$
bo‘lsa, u holda $z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2]$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining xos qiymati bo‘lishi uchun $z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2]$ soni $h_\mu^{(1)}$ va $h_\lambda^{(2)}$ operatorlardan birining xos qiymati bo‘lishi zarur va yetarlidir.

1-eslatma. $h_\mu^{(1)}$ va $h_\lambda^{(2)}$ operatorlarning aniqlanishidan ko‘rinib turibdiki, ular $h_{\mu,\lambda}$ ga nisbatan sodda ko‘rinishga ega. Shu sababli, 1-teorema $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining odatdagi va bo‘sag‘aviy xos qiymatlarini, virtual sathlarini hamda sonli tasvirini o‘rganishga muhim ahamiyat kasb etadi.

1-natija. *Agar* (1) *shart bajarilsa, u holda*
$$\sigma_{\text{disc}}(h_{\mu,\lambda}) = \sigma_{\text{disc}}(h_\mu^{(1)}) \cup \sigma_{\text{disc}}(h_\lambda^{(2)})$$
tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$I_{\alpha\alpha}(\cdot)$, $\alpha = 1, 2$ funksiya $(-\infty; E_1)$ va $(E_2; +\infty)$ oraliqlarda monoton o‘suvchi bo‘lganligi uchun Lebeg integrali ostida limitga o‘tish haqidagi teoremaga ko‘ra
$$I_{11}(E_1) = \lim_{z \to E_1 - 0} I_{11}(z), \quad I_{22}(E_2) = \lim_{z \to E_2 + 0} I_{22}(z)$$
chekli yoki cheksiz limitlar mavjud bo‘ladi.

Ushbu
$$|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| < +\infty, \quad \alpha = 1, 2$$
shart bajarilganda quyidagicha
$$\mu_0 = (I_{11}(E_1))^{-1}, \quad \lambda_0 = -(I_{22}(E_2))^{-1}$$
belgilash kiritamiz.

Quyidagi teorema $h_{\mu}^{(1)}$ operator xos qiymatlari to'plamini ifodalaydi.

2-teorema. *A) Agar $I_{11}(E_1)=+\infty$ bo'lsa, u holda $\mu>0$ parametrning barcha qiymatlarida $h_{\mu}^{(1)}$ operator E_1 dan chapda yotuvchi yagona xos qiymatga ega bo'ladi.*

B) Faraz qilaylik, $I_{11}(E_1)<+\infty$ bo'lsin.

B_1) Agar $0<\mu\le\mu_0$ bo'lsa, u holda $h_{\mu}^{(1)}$ operator $(-\infty;E_1)$ oraliqda xos qiymatlarga ega emas;

B_2) agar $\mu>\mu_0$ bo'lsa, u holda $h_{\mu}^{(1)}$ operator E_1 dan chapda yotuvchi yagona xos qiymatga ega.

C) $\mu>0$ parametrning barcha qiymatlarida $h_{\mu}^{(1)}$ operator $(E_2;+\infty)$ oraliqda yotuvchi xos qiymatlarga ega emas.

Quyidagi teorema $h_{\lambda}^{(2)}$ operator xos qiymatlari to'plamini ifodalaydi.

3-teorema. *A) Agar $I_{22}(E_2)=-\infty$ bo'lsa, u holda $\lambda>0$ parametrning barcha qiymatlarida $h_{\lambda}^{(2)}$ operator E_2 dan o'ngda yotuvchi yagona xos qiymatga ega bo'ladi.*

B) Faraz qilaylik, $|I_{22}(E_2)|<+\infty$ bo'lsin.

B_1) Agar $0<\lambda\le\lambda_0$ bo'lsa, u holda $h_{\lambda}^{(2)}$ operator $(E_2;+\infty)$ oraliqda xos qiymatlarga ega emas;

B_2) agar $\lambda>\lambda_0$ bo'lsa, u holda $h_{\lambda}^{(2)}$ operator E_2 dan o'ngda yotuvchi yagona xos qiymatga ega.

C) $\lambda>0$ parametrning barcha qiymatlarida $h_{\lambda}^{(2)}$ operator $(-\infty;E_1)$ oraliqda yotuvchi xos qiymatlarga ega emas.

2-natija. *A) Faraz qilaylik, (1) shart bajarilib, $\left|I_{\alpha\alpha}(E_{\alpha})\right|=+\infty,\ \alpha=1,2$ bo'lsin, u holda $\mu>0$ va $\lambda>0$ parametrning barcha qiymatlarida $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli E_1 dan chapda, E_2 dan o'ngda yotuvchi bittadan oddiy xos qiymatlari mavjud.*

B) Faraz qilaylik, (1) shart bajarilib, $\left|I_{\alpha\alpha}(E_{\alpha})\right|<+\infty,\ \alpha=1,2$ bo'lsin.

B_1) Agar $0<\mu\le\mu_0$ va $0<\lambda\le\lambda_0$ bo'lsa, u holda $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli o'zining muhim spektridan tashqarida yotuvchi xos qiymatlarga ega emas;

B_2) agar $0<\mu\le\mu_0$ va $\lambda>\lambda_0$ bo'lsa, u holda $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli E_2 dan o'ngda yotuvchi bitta oddiy xos qiymati mavjud;

B_3) agar $\mu>\mu_0$ va $0<\lambda\le\lambda_0$ bo'lsa, u holda $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli E_1 dan chapda yotuvchi bitta oddiy xos qiymati mavjud;

B_4) agar $\mu>\mu_0$ va $\lambda>\lambda_0$ bo'lsa, u holda $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli E_1 dan chapda, E_2 dan o'ngda yotuvchi bittadan oddiy xos qiymatlari mavjud.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida $d=3$ hol qaralgan bo'lib, $u(\cdot)$ funksiya $p_1\in\mathbb{T}^3$ nuqtada yagona aynimagan minimumga va $p_2\in\mathbb{T}^3$ nuqtada yagona aynimagan maksimumga ega bo‘lsin deb faraz qilinadi. Bundan tashqari, v_α funksiya $p_\alpha \in \mathbb{T}^3$, $\alpha = 1,2$ atrofida 3-tartibligacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lishini talab qilamiz.

$C(\mathbb{T}^3)$ va $L_1(\mathbb{T}^3)$ orqali mos ravishda $\mathbb{T}^3$ torda aniqlangan uzluksiz va integrallanuvchi funksiyalar Banax fazosini belgilaymiz.

1-ta’rif. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilsin. Agar* 1 *soni*

$$(G_\alpha \psi_\alpha)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\mu v_1(p) v_1(t) - \lambda v_2(p) v_2(t)}{u(t) - E_\alpha} \psi_\alpha(t) dt, \quad \psi \in C(\mathbb{T}^3)$$

integral operatorning xos qiymati bo‘lib, hech bo‘lmaganda bitta ψ_α mos xos funksiya $\psi_\alpha(p_\alpha) \neq 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli $z = E_\alpha$ nuqtada virtual sathga (E_α *energiyali rezonansga*) *ega deyiladi.*

Ta’kidlash joizki, agar $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli $z = E_\alpha$ nuqtada virtual sathga ega bo‘lsa, u holda $G_\alpha \psi_\alpha = \psi_\alpha$ tenglamaning yechimi o‘zgarmas son aniqligida $v_\alpha(\cdot)$ funksiyaga teng bo‘ladi. 1-ta’rifdagi G_α operatorning 1 ga teng xos qiymatining mavjudligi $h_{\mu,\lambda} f_\alpha = E_\alpha f_\alpha$ tenglama yechimining mavjudligiga mos keladi, $\psi_\alpha(p_\alpha) \neq 0$ shartdan esa bu tenglamaning f_α yechimi $L_2(\mathbb{T}^3)$ fazoda tegishli bo‘lmasligi kelib chiqadi. Aniqroq qilib aytganda, agar $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli $z = E_\alpha$ nuqtada virtual sathga ega bo‘lsa, u holda

$$f_\alpha(p) = (-1)^{\alpha+1} \frac{v_\alpha(p)}{u(p) - E_\alpha} \tag{2}$$

funksiya $h_{\mu,\lambda} f_\alpha = E_\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3)$ tenglamani qanoatlantiradi.

Agar $z = E_\alpha$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining xos qiymati bo‘lsa, u holda (2) formula bilan aniqlangan f_α funksiya $h_{\mu,\lambda} f_\alpha = E_\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^3)$ tenglamani qanoatlantiradi.

4-teorema. *A) Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilsin va $\lambda > 0$ ixtiyoriy son bo‘lsin.*

A_1) $z = E_1$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining xos qiymati bo‘lishi uchun $\mu = \mu_0$ va $v_1(p_1) = 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir;

A_2) $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli $z = E_1$ nuqtada virtual sathga ega bo‘lishi uchun $\mu = \mu_0$ va $v_1(p_1) \neq 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

B) Faraz qilaylik, (1) *shart bajarilsin va $\mu > 0$ ixtiyoriy son bo‘lsin.*

B_1) $z = E_2$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining xos qiymati bo‘lishi uchun $\lambda = \lambda_0$ va $v_2(p_2) = 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir;

B_2) $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli $z = E_2$ nuqtada virtual sathga ega bo‘lishi uchun $\lambda = \lambda_0$ va $v_2(p_2) \neq 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Faraz qilaylik, $\mathcal{H}$ kompleks Hilbert fazosi, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ chiziqli operator bo‘lib, $D(A) \subset \mathcal{H}$ uning aniqlanish sohasi bo‘lsin.

2-ta'rif. *Quyidagi*

$$W(A) := \{(Ax, x) : x \in D(A), \|x\| = 1\}$$

tenglik yordamida aniqlangan to'plamga A chiziqli operatorning sonli tasviri deyiladi, bunda $(\cdot,\cdot)$ orqali $\mathcal{H}$ kompleks Hilbert fazosidagi skalyar ko'paytma belgilangan.

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $W(A)$ to'plam kompleks tekislikning qism to'plami bo'ladi va $W(A)$ to'plamning geometrik xossalari A operator haqida ayrim ma'lumotlarni olish imkonini beradi[2].

Sonli tasvir tushunchasi birinchi marotaba matritsalar uchun Tyoplitz tomonidan kiritilgan va o'rganilgan[3]. Tyoplitz matritsaning sonli tasviri uning barcha xos qiymatlarini o'zida saqlashi va sonli tasvir chegarasi qavariq chiziq bo'lishini isbotlagan. Xausdorfning ishida esa $W(A)$ to'plamning qavariq to'plam bo'lishi isbotlangan[4]. Keyinchalik bu xossalar nafaqat matritsalar uchun balki istalgan chiziqli chegaralangan operatorlar uchun o'rinli bo'lib, bunday operatorlarning spektri $\overline{W(A)}$ to'plamning yopig'ida yotishi isbotlangan[5].

$h^{(1)}_{\mu}$ va $h^{(2)}_{\lambda}$ Fridrixs modellarining xos qiymatlari mavjud bo'lgan holda ularni mos ravishda $E_1(\mu)$ va $E_2(\lambda)$ orqali belgilaymiz. Bunda $E_1(\mu) < E_1$ va $E_2(\lambda) > E_2$.

I hol. $d = 1,2$ bo'lsin.

5-teorema. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilib,* $v_\alpha(p_\alpha) \neq 0,\ \alpha = 1,2$ *bo'lsin. U holda ixtiyoriy* $\mu > 0$ *va* $\lambda > 0$ *lar uchun* $h_{\mu,\lambda}$ *Fridrixs modelining sonli tasviri uchun*

$$W(h_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu); E_2(\lambda)]$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Quyidagi teorema $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining sonli tasviri yopig'ining tuzilishini tavsiflaydi.

6-teorema. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilib,* $v_\alpha(p_\alpha) = 0,\ \alpha = 1,2$ *bo'lsin.*

A) Agar $0 < \mu \le \mu_0$ *va* $0 < \lambda \le \lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})} = [E_1; E_2]$ *tenglik o'rinli bo'ladi.*

B) Agar $0 < \mu \le \mu_0$ *va* $\lambda > \lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})} = [E_1; E_2(\lambda)]$ *tenglik bajariladi.*

C) Agar $\mu > \mu_0$ *va* $0 < \lambda \le \lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})} = [E_1(\mu); E_2]$ *tenglik o'rinli bo'ladi.*

D) Agar $\mu > \mu_0$ *va* $\lambda > \lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $W(h_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu); E_2(\lambda)]$ *tenglik bajariladi.*

---

[2] Gustafson K.E., Rao D.K.M. Numerical range. The field of values of linear operators and matrices. Universitext. Springer, New York, 1997.

[3] Toeplitz O. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. Math. Z., **2**:1-2 (1918). – Pp. 187-197.

[4] Hausdorff F. Der Wertvorrat einer Bilinearform. Math. Z., **3**:1 (1919). – Pp. 314-316.

[5] Wintner A. Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen. Math. Z., **30**:1 (1929). – Pp. 228-281.

3-natija. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilib,* $v_1(p_1)\neq 0$ *va* $v_2(p_2)=0$ *bo'lsin.*

A) *Agar* $0<\lambda\leq\lambda_0$ *bo'lsa, u holda ixtiyoriy* $\mu>0$ *uchun* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1(\mu);E_2]$ *bo'ladi.*

B) *Agar* $\lambda>\lambda_0$ *bo'lsa, u holda ixtiyoriy* $\mu>0$ *uchun* $W(h_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu);E_2(\lambda)]$ *bo'ladi.*

4-natija. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilib,* $v_1(p_1)=0$ *va* $v_2(p_2)\neq 0$ *bo'lsin.*

A) *Agar* $0<\mu\leq\mu_0$ *bo'lsa, u holda ixtiyoriy* $\lambda>0$ *uchun* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1;E_2(\lambda)]$ *bo'ladi.*

B) *Agar* $\mu>\mu_0$ *bo'lsa, u holda ixtiyoriy* $\lambda>0$ *uchun* $W(h_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu);E_2(\lambda)]$ *bo'ladi.*

II hol. $d\geq 3$ bo'lgan holda $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modelining sonli tasvirini tadqiq qilamiz.

7-teorema. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilsin.*

A) *Agar* $0<\mu\leq\mu_0$ *va* $0<\lambda\leq\lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1;E_2]$ *bo'ladi.*

B) *Agar* $0<\mu\leq\mu_0$ *va* $\lambda>\lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1;E_2(\lambda)]$ *bo'ladi.*

C) *Agar* $\mu>\mu_0$ *va* $0<\lambda\leq\lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1(\mu);E_2]$ *bo'ladi.*

D) *Agar* $\mu>\mu_0$ *va* $\lambda>\lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $W(h_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu);E_2(\lambda)]$ *bo'ladi.*

$d=3$ bo'lsin.

8-teorema. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilib,* $\mu=\mu_0,\ \lambda=\lambda_0$ *bo'lsin.*

A) *Agar* $v_\alpha(p_\alpha)=0,\ \alpha=1,2$ *bo'lsa, u holda* $W(h_{\mu,\lambda})=[E_1;E_2]$ *bo'ladi.*

B) *Agar* $v_1(p_1)=0$ *va* $v_2(p_2)\neq 0$ *bo'lsa, u holda* $W(h_{\mu,\lambda})=[E_1;E_2)$ *bo'ladi.*

C) *Agar* $v_1(p_1)\neq 0$ *va* $v_2(p_2)=0$ *bo'lsa, u holda* $W(h_{\mu,\lambda})=(E_1;E_2]$ *bo'ladi.*

D) *Agar* $v_\alpha(p_\alpha)\neq 0,\ \alpha=1,2$ *bo'lsa, u holda* $W(h_{\mu,\lambda})=(E_1;E_2)$ *tenglik o'rinli.*

Shuni ta'kidlash joizki, agar $\mu=\mu_0,\ \lambda=\lambda_0$ va $v_\alpha(p_\alpha)=0,\ \alpha=1,2$ bo'lsa, u holda $z=E_\alpha$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli uchun bo'sag'aviy xos qiymat bo'ladi. Agar $\mu=\mu_0,\ \lambda=\lambda_0$ va $v_\alpha(p_\alpha)\neq 0,\ \alpha=1,2$ bo'lsa, u holda $z=E_\alpha$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli uchun virtual sath bo'ladi.

Dissertatsiyaning "**Panjaradagi uch zarrachali sistemaga mos model operatorning spektral xossalari**" deb nomlangan uchinchi bobida panjaradagi uchta zarrachali sistemaga mos $H_{\mu,\lambda}$ model operatorning muhim spektri va xos qiymatlarining mavjudlik shartlari topilgan.

$L_2^{s}((\mathbb{T}^{d})^2)$ orqali $(\mathbb{T}^{d})^2$ to'plamda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.

$L_2^{s}((\mathbb{T}^{d})^2)$ Hilbert fazosida ta'sir qiluvchi va

$$H_{\mu,\lambda}:=H_{0,0}-\mu(V_{11}+V_{12})+\lambda(V_{21}+V_{22}),\quad \mu,\lambda>0 \tag{3}$$

tenglik orqali aniqlanuvchi model operatorni qaraymiz. Bunda $\mu,\lambda>0$ ta'sirlashish parametrlari, $H_{0,0}$ operator $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ Hilbert fazosidagi $\omega(\cdot,\cdot)$ funksiyaga ko'paytirish operatori:

$$(H_{0,0}f)(p,q)=\omega(p,q)f(p,q).$$

$V_{ij},\ i,j=1,2$ operatorlar esa $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ Hilbert fazosidagi lokal bo'lmagan potensial operatorlar:

$$(V_{i1}f)(p,q)=v_i(p)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v_i(t)f(t,q)dt,\quad (V_{i2}f)(p,q)=v_i(q)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v_i(t)f(p,t)dt.$$

$\omega(\cdot,\cdot)$ funksiya $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz, simmetrik funksiya. $v_i(\cdot),\ i=1,2$ funksiyalar esa $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ torda aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar.

(3) tenglik yordamida ta'sir qiluvchi $H_{\mu,\lambda}$ model operator $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma bo'ladi.

Mazkur bobning asosiy natijalarini bayon qilish maqsadida $H_{\mu,\lambda}$ model operator bilan bir qatorda $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ Hilbert fazosida

$$h_{\mu,\lambda}(p):=h_{0,0}(p)-\mu k_1+\lambda k_2$$

kabi ta'sir qiluvchi va Fridrixs modellari oilasi deb ataluvchi operatorni qaraymiz. Bu yerda

$$(h_{0,0}(p)f)(q)=\omega(p,q)f(q),\qquad (k_if)(q)=v_i(q)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v_i(t)f(t)dt, i=1,2$$

kabi aniqlangan.

Kiritilgan $h_{\mu,\lambda}(p)$ operator $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma bo'ladi.

Chekli o'lchamli qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(h_{\mu,\lambda}(p))=[m(p);M(p)]$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda $m(p)$ va $M(p)$ sonlari

$$m(p):=\min_{q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\omega(p,q),\quad M(p):=\max_{q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\omega(p,q)$$

tengliklar yordamida aniqlanadi.

Har bir tayinlangan $\mu,\lambda>0$ sonlari va $p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ element uchun $\mathbb{C}\setminus[m(p);M(p)]$ sohada regulyar bo'lgan

$$\Delta_{\mu,\lambda}(p,z):=\Delta_\mu^{(1)}(p,z)\Delta_\lambda^{(2)}(p,z)+\mu\lambda I_{12}^2(p,z)$$

funksiyani qaraymiz. Bu yerda

$$\Delta_\mu^{(1)}(p,z):=1-\mu I_{11}(p,z),\quad \Delta_\lambda^{(2)}(p,z):=1+\lambda I_{22}(p,z),$$

$$I_{ij}(p,z):=\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\frac{v_i(t)v_j(t)}{\omega(p,t)-z}dt,\quad i,j=1,2.$$

Quyidagi lemma $h_{\mu,\lambda}(p)$ Fridrixs modellari oilasining xos qiymatlari va $\Delta_{\mu,\lambda}(p,z)$ funksiyaning nollari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

2-lemma. *Har bir tayinlangan* $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ *element uchun* $z \in \mathbb{C} \setminus [m(p); M(p)]$ *soni* $h_{\mu,\lambda}(p)$ *Fridrixs modellari oilasining xos qiymati bo'lishi uchun* $\Delta_{\mu,\lambda}(p,z)=0$ *bo'lishi zarur va yetarlidir.*

5-natija. *Ushbu*

$$\sigma(h_{\mu,\lambda}(p)) = \sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu,\lambda}(p)) \cup [m(p); M(p)],$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu,\lambda}(p)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m(p); M(p)] : \Delta_{\mu,\lambda}(p,z) = 0\}$$

tengliklar o'rinli.

3-lemma. *Har bir tayinlangan* $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ *element uchun* $h_{\mu,\lambda}(p)$ *Fridrixs modellari oilasi* $m(p)$ *dan chapda va* $M(p)$ *dan o'ngda ko'pi bilan bittadan sodda xos qiymatga ega.*

$H_{\mu,\lambda}$ operatorning spektrini tahlil qilishda muhim o'rin tutuvchi $H^{ch}_{\mu,\lambda}$ kanal operatorini kiritamiz va uning spektrini $h_{\mu,\lambda}(p)$, $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ Fridrixs modellari oilasining spektri orqali tavsiflaymiz.

$H_{\mu,\lambda}$ operatorga mos kanal operator deb ataluvchi hamda $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ Hilbert fazosida

$$H^{ch}_{\mu,\lambda} := H_{0,0} - \mu V_{11} + \lambda V_{21} \tag{4}$$

kabi ta'sir qiluvchi $H^{ch}_{\mu,\lambda}$ operatorni qaraymiz.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$m := \min_{p,q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \omega(p,q), \quad M := \max_{p,q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \omega(p,q);$$

$$\sigma_{\mu,\lambda} := \bigcup_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu,\lambda}(p)); \qquad \Sigma_{\mu,\lambda} := \sigma_{\mu,\lambda} \cup [m; M].$$

$H^{ch}_{\mu,\lambda}$ kanal operatorning spektri $h_{\mu,\lambda}(p)$ Fridrixs modellari oilasining spektri orqali ifodalashga oid tasdiqni keltiramiz.

9-teorema. $H^{ch}_{\mu,\lambda}$ *kanal operator sof muhim spektrga ega bo'lib, quyidagi*

$$\sigma(H^{ch}_{\mu,\lambda}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H^{ch}_{\mu,\lambda}) = \Sigma_{\mu,\lambda}$$

tenglik o'rinlidir.

$H_{\mu,\lambda}$ model operatorning muhim spektri quyidagi teorema yordamida tavsiflanadi.

10-teorema. $H_{\mu,\lambda}$ *model operatorning muhim spektri* $H^{ch}_{\mu,\lambda}$ *kanal operatorning spektri bilan ustma-ust tushadi, ya'ni*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = \sigma(H^{ch}_{\mu,\lambda})$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda})$ *to'plam ko'pi bilan uchta kesmalar birlashmasidan iborat.*

Keyingi izlanishlarda $\omega(p,q)$ funksiya ushbu

$$\omega(p,q) = u(p) + u(q)$$

ko'rinishda bo'lgan holi tadqiq qilinadi. Bu holda $H_{0,0}$ operatori quyidagi

$$(H_{0,0}f)(p,q)=(u(p)+u(q))f(p,q)$$

ko'rinishda tasvirlanadi.

11-teorema. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilib,* $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)|=+\infty,\ \alpha=1,2$ *bo'lsin.*

A) Agar $\mu,\lambda>0$ *bo'lsa, u holda* $H_{\mu,\lambda}$ *model operator* 2 *ta* $2E_1(\mu)$ *va* $2E_2(\lambda)$ *oddiy xos qiymatlarga ega bo'lib,*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu)+E_1;E_1(\mu)+E_2]\cup[2E_1;2E_2]\cup[E_2(\lambda)+E_1;E_2(\lambda)+E_2],$$
$$\sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda})=\{2E_1(\mu);E_1(\mu)+E_2(\lambda);2E_2(\lambda)\}$$

tengliklar o'rinli;

B) ixtiyoriy $a<E_1$ *va* $b>E_2$ *sonlari uchun shunday* $\mu^0=\mu^0(a)>0$ *va* $\lambda^0=\lambda^0(b)>0$ *parametrlar topilib,* $2a, a+b$ *va* $2b$ *sonlari* H_{μ^0,λ^0} *model operatorning xos qiymatlari bo'ladi;*

C) ixtiyoriy $c\in[2E_1;2E_2]$ *soni uchun shunday* $\mu^*>0$ *va* $\lambda^*>0$ *paramertlar topilib,* c *soni* H_{μ^*,λ^*} *model operatorning xos qiymati bo'ladi.*

12-teorema. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilib,* $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)|<+\infty,\ \alpha=1,2$ *bo'lsin.*

A) Agar $0<\mu\le\mu_0$ *va* $0<\lambda\le\lambda_0$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda})=[2E_1;2E_2],\quad \sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda})=\varnothing$$

tengliklar o'rinli;

B) agar $\mu>\mu_0$ *va* $0<\lambda\le\lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $H_{\mu,\lambda}$ *model operator* 1 *ta* $2E_1(\mu)$ *oddiy xos qiymatga ega bo'lib,*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu)+E_1;E_1(\mu)+E_2]\cup[2E_1;2E_2],\quad \sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda})=\{2E_1(\mu)\}$$

tengliklar o'rinli;

C) agar $0<\mu\le\mu_0$ *va* $\lambda>\lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $H_{\mu,\lambda}$ *model operator* 1 *ta* $2E_2(\lambda)$ *oddiy xos qiymatga ega bo'lib,*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda})=[2E_1;2E_2]\cup[E_2(\lambda)+E_1;E_2(\lambda)+E_2],\quad \sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda})=\{2E_2(\lambda)\}$$

tengliklar o'rinli;

D) agar $\mu>\mu_0$ *va* $\lambda>\lambda_0$ *bo'lsa, u holda* $H_{\mu,\lambda}$ *model operator* 2 *ta* $2E_1(\mu)$ *va* $2E_2(\lambda)$ *oddiy xos qiymatlarga ega bo'lib,*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu)+E_1;E_1(\mu)+E_2]\cup[2E_1;2E_2]\cup[E_2(\lambda)+E_1;E_2(\lambda)+E_2],$$
$$\sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda})=\{2E_1(\mu);E_1(\mu)+E_2(\lambda);2E_2(\lambda)\}$$

tengliklar o'rinli.

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$$\mu_1:=(I_{11}(2E_1-E_2))^{-1},\quad \lambda_1:=-(I_{22}(2E_2-E_1))^{-1}.$$

13-teorema. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilib,* $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)|=+\infty,\ \alpha=1,2$ *bo'lsin.*

A) Agar $0<\mu\le\mu_1$ *va* $0<\lambda\le\lambda_1$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu)+E_1;E_2(\lambda)+E_2]$$

tenglik o'rinli;

B) *agar* $\mu > \mu_1$ *va* $0 < \lambda \le \lambda_1$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o'rinli bo'lib, $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$ *bo'ladi;*

C) *agar* $0 < \mu \le \mu_1$ *va* $\lambda > \lambda_1$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tengliklar o'rinli bo'lib, $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$ *bo'ladi;*

D) *agar* $\mu > \mu_1$ *va* $\lambda > \lambda_1$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o'rinli bo'lib, $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$ *va* $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$ *bo'ladi.*

2-eslatma. Ushbu $\mu_0 < \mu_1$ va $\lambda_0 < \lambda_1$ tengsizliklar o'rinli.

14-teorema. *Faraz qilaylik,* (1) *shart bajarilib,* $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| < +\infty$, $\alpha = 1,2$ *bo'lsin.*

A_1) *Agar* $0 < \mu \le \mu_0$ *va* $0 < \lambda \le \lambda_0$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2]$$

tenglik o'rinli;

A_2) *agar* $\mu_0 < \mu \le \mu_1$ *va* $0 < \lambda \le \lambda_0$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; 2E_2]$$

tenglik o'rinli;

A_3) *agar* $\mu > \mu_1$ *va* $0 < \lambda \le \lambda_0$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2]$$

kabi bo'lib, $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$ *tengsizlik o'rinli;*

B_1) *agar* $0 < \mu \le \mu_0$ *va* $\lambda_0 < \lambda \le \lambda_1$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o'rinli;

B_2) *agar* $\mu_0 < \mu \le \mu_1$ *va* $\lambda_0 < \lambda \le \lambda_1$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o'rinli;

B_3) *agar* $\mu > \mu_1$ *va* $\lambda_0 < \lambda \le \lambda_1$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

kabi bo'lib, $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$ *tengsizlik o'rinli;*

C_1) *agar* $0 < \mu \le \mu_0$ *va* $\lambda > \lambda_1$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

kabi bo'lib, $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$ *tengsizlik o'rinli;*

C_2) *agar* $\mu_0 < \mu \le \mu_1$ *va* $\lambda > \lambda_1$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

kabi bo'lib, $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$ *tengsizlik o'rinli;*

C_3) agar $\mu > \mu_1$ va $\lambda > \lambda_1$ bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; E_1(\mu)+E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda)+E_1; E_2(\lambda)+E_2]$$

tenglik o‘rinli bo‘lib, $E_1(\mu)+E_2 < 2E_1$ va $2E_2 < E_2(\lambda)+E_1$ bo‘ladi.

XULOSA

Mazkur dissertatsiya ishida panjaradagi ikki va uch zarrachali sistemalarga mos model operatorlarning muhim va diskret spektrlari tadqiq qilingan. Bunda o‘rganilayotgan $H_{\mu,\lambda}$ model operator panjaradagi uchta bir xil zarrachalar sistemasi gamiltonianiga mos keladi.

Dissertatsiya ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

$h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli xos qiymatlarining soni va joylashuv o‘rni aniqlangan;

μ va λ ta’sirlashish parametrlariga nisbatan $h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli xos qiymatlarining mavjudlik shartlari topilgan;

$h_{\mu,\lambda}$ Fridrixs modeli muhim spektrining quyi va yuqori chegaralari bo‘sag‘aviy xos qiymat yoki virtual sath bo‘lishining zaruriylik va yetarlilik shartlari aniqlangan;

Fridrixs modeli uchun $W(h_{\mu,\lambda})$ sonli tasvirning tuzilishi μ va λ parametrlarga nisbatan o‘rganilgan. Uning yopiq to‘plam bo‘ladigan hamda spektr bilan ustma-ust tushadigan hollar alohida ajratib ko‘rsatilgan;

$H_{\mu,\lambda}$ model operatorga mos $H_{\mu,\lambda}^{ch}$ kanal operator ajratilgan, $H_{\mu,\lambda}$ model operatorning muhim spektri $H_{\mu,\lambda}^{ch}$ kanal operatorning spektri bilan ustma-ust tushishi isbotlangan;

ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modellari tenzor yig‘indisi ko‘rinishdagi $H_{\mu,\lambda}$ model operator muhim spektri tarmoqlarining tuzilishi tavsiflangan hamda muhim spektr bitta, ikkita, uchta kesmalarning birlashmasidan iborat bo‘lish shartlari aniqlangan;

$H_{\mu,\lambda}$ operatorning yakkalangan va muhim spektr ichida joylashgan xos qiymatlarining mavjudlik shartlari tadqiq qilingan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
КАРШИНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

БАХРОНОВ БЕКЗОД ИСЛОМ УГЛИ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МОДЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ СИСТЕМАМ ДВУХ И ТРЕХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Карши – 2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии за B2023.3.PhD/FM906.

Диссертация выполнена в Бухарском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.qarshidu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Расулов Тулкин Хусенович** доктор физико-математических наук (DSc), профессор
Официальные оппоненты:	**Муминов Захриддин Эшкобилович** доктор физико-математических наук (DSc), доцент
	Хамраев Ахрор Юсупович кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «______» ______________ 2024 года в _____ на заседании Научного совета PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 при Каршинском государственном университете. (Адрес: 180119, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225-34-13, факс: (+998 75) 221-00-56, e-mail: kasu_info@edu.uz). Каршинский государственный университет 2-корпус (кабинет 202).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Каршинского государственного университета (зарегистрирована за №____). (Адрес: 180119, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225-34-13, факс: (+998 75) 221-00-56, e-mail: kasu_info@edu.uz).

Автореферат диссертации разослан «______» ______________ 2024 года
(протокол рассылки №______ от «______» ______________ 2024 года).

Б.А. Шоимкулов
Председатель Научного совета
по присуждению научных
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ш.Д. Нодиров
Ученый секретарь Научного совета
по присуждению научных степеней,
д.ф.ф.-м.н. (PhD), доцент

А.А. Имомов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по
присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н. (DSc), доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие исследования, проводимые в мире, приводят к определению спектральных свойств модельных операторов, соответствующих двух- и трехчастичным решеточным системам. В этом случае важно изучить существенный и дискретный спектры модельного оператора, соответствующего трехчастичной системе, используя результаты о спектре модельного оператора, соответствующего двухчастичной системе. Задачи, связанные с существованием существенного спектра и собственных значений модельного оператора, соответствующего для трехчастичной системы, являются актуальными в физике твердого тела, квантовой теории поля и многих других областях науки. Поэтому важно развивать исследования, связанные с модельными операторами, соответствующими для систем с двумя и тремя частицами на решетке.

В мире ведутся научные исследования по изучению существования существенных спектров и собственных значений модельных операторов, соответствующих двух- и трехчастичным решеточным системам. В связи с этим особое внимание уделяется анализу пороговых явлений для модели Фридрихса, соответствующий для двухчастичной системы, исследованию числовой области значений с их использованием, определению структуры существенного спектра для модельного оператора, соответствующего для трехчастичной системы, нахождению условий конечности или бесконечности числа собственных значений, определению собственных значений, находящихся внутри существенного спектра.

В нашей стране особое внимание уделяется исследованию свойств модельных операторов, соответствующих двух- и трехчастичным решеточным системам. Были получены значительные результаты относительно определения существенного спектра и существования собственных значений модельных операторов, соответствующих для двух-и трехчастичных систем. Проведение исследований на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Математики, физики и прикладной математики» обозначены как основные цели и направления деятельности исследователей[1]. В связи с этим большое научное значение имеет разработка спектральной теории модельных операторов, соответствующих двух- и трехчастичным системам на решетке, поиск положения и структуры существенного спектра модельного оператора, соответствующей трехчастичным системам и показать существование ее собственных значений.

Исследования, проводимые в рамках данной диссертационной работы, соответствуют решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

№ ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии в республике. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы.

Исследования спектральной теории модельных операторов, соответствующих двух- и трехчастичным решеточным системам проводили ученые С. Альбеверио, Г.Ф. ДельАнтонио, С.Н. Лакаев, З.Э. Муминов, Т.Х. Расулов, Ю.Х. Эшкабилов и многие другие. В настоящее время задача исследования числа собственных значений модельного оператора, соответствующий трехчастичной системе в решетке, является одним из объектов углубленного изучения спектральной теории модельных операторов типа дискретного оператора Шредингера. Одной из основных задач спектрального анализа операторов такого типа является вопрос о том, существует ли хотя бы одно или бесконечное количество собственных значений, лежащих вне его существенного спектра. Существование бесконечного числа собственных значений изначально для системы трех частиц было изучено В.Н. Ефимовым и позже назван эффектом Ефимова. Строгое математическое доказательство существования этого явления было первоначально дано Д.Р. Яфаевым. Далее существование эффекта Ефимова для трехчастичного непрерывного оператора Шредингера было изучено Ю.Н. Овчинниковым, И.М. Сигал, Х. Тамура, А.В. Соболевым и другими учеными.

В физике твердого тела, а также в теории поля решеток появляются операторы, называемые дискретными операторами Шредингера, которые являются решетчатыми аналогами трехчастичного оператора Шредингера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. В начале С.Н. Лакаевым с математической точки зрения было строго доказано существование эффекта Ефимова для трех произвольных и трех одиноковых систем частиц, взаимодействующих парными контактными потенциалами на трехмерной решетке.

В работе М.Э. Муминова доказано существование бесконечного числа собственных значений на лакуне существенного спектра гамильтониана, соответствующих системе трех произвольных частиц на решетке.

В работе Ю.Х. Эшкабилова изучено существование бесконечного числа собственных значений для трехчастичного моделного дискретного оператора Шредингера, которые возникают в модели Хаббарда. При этом использовались методы принципа минимакса для самосопряженных ограниченных операторов и свойства положительных интегральных операторов.

Диссертация посвящена исследованию наличия ранее не изучавшийся собственных значений вне или внутри существенного спектра у модельных операторов, соответствующих трехчастичным системам на решетке.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами института, в котором выполняется диссертация.

Диссертационное исследование выполнено в соответствие с планом научного исследования научного направления М.01.2017 «Спектральная теория линейных операторов» Бухарского государственного университета на 2017-2026 гг.

Целью исследования является показать условия совпадения числовой области значений и спектра модели Фридрихса, определение структуры существенного спектра модельного оператора, соответствующего трехчастичной системе на решетке, и нахождение условий, при которых будут существовать его собственные значения.

Задачи исследования:

определение количества и расположения собственных значений модели Фридрихса, соответствующих двухчастичной системе на решетке, условий существования пороговых собственных значений и виртуальных уровней;

показать структуру числового образ значений модели Фридрихса, найти условия, при которых цифровой образ становится замкнутым множеством и совпадает со спектром;

определить местоположение двухчастичной и трехчастичной ветвей существенного спектра модельного оператора, соответствующей трехчастичной системе на решетке с помощью спектра канального оператора;

описать структуру ветвей существенного спектра модельного оператора в виде тензорных сумм моделей Фридрихса с двумерным возмущением и показать существование собственных значений.

В качестве **объекта исследования** были взяты модельные операторы, соответствующие двух-и трехчастичным системам на решетке.

Предметом исследования – спектральные свойства модельных операторов, соответствующих двух и трехчастичным решеточным системам.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, функционального анализа, спектральной теории самосопряженных операторов и математической физики.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

для модели Фридрихса, соответствующей двухчастичной системе на решетке, найдены условия существования обычного собственного значения, порогового собственного значения и виртуальных уровней по отношению к функциям параметра и параметрам влияния;

с помощью методов теории пороговых явлений определена структура числовой области значения модели Фридрихса, соответствующей двухчастичной системе на решетке, а также найдены условия, при которых его спектр и числовая область значений совпадают;

по спектру канального оператора определено местоположение существенного спектра модельного оператора, соответствующего системе трех частиц на решетке, а также двух- и трехчастичных ветвей, найдено максимальное количество отрезков, образующих существенный спектр;

при помощи двумерного возбуждения описана структура ветвей существенного спектра модельного оператора в виде тензорной суммы моделей Фридрихса с двумерным возбуждением и доказано с использованием собственных значений модели Фридрихса существование собственных значений, расположенных вне или внутри его существенного спектра.

Практический результат исследования состоит в следующем:

выводы о спектральных свойствах модельного оператора, соответствующей для двух- и трехчастичных систем на решетке, использовались для определения качественного показателя экспериментальных исследований в атомной физике, квантовой механике, а также для численных расчетов.

Достоверность результатов исследования. Использовались методы математического и функционального анализа, элементы современной математической физики и спектральная теория самосопряженных операторов. Полученные результаты имеют строгие математические доказательства.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость полученных в исследовании результатов объясняется тем, что они могут быть использованы в задачах теории самосопряженных операторов, связанных с модельными операторами, которые появляются в квантовой теории поля и физике твердого тела, в частности, для систем с двумя и тремя частицами.

Практическая значимость результатов диссертации объясняется тем, что с помощью числа и местоположения собственных значений моделей Фридрихса можно показать, что существуют собственные значения модельных операторов, соответствующих трехчастичных систем на решетке физики твердого тела и квантовой механики.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов, полученных для операторов моделей, соответствующих двум- и трехчастичным системам на решетке:

из методов, применяемых при нахождении условий собственных значений, пороговых значений и виртуальных уровней модели Фридрихса, соответствующих системе из двух частиц в решетке, а также условий нахождения совпадений структуры числовой области значений спектра модели Фридрихса, были использованы при выполнении научно-исследовательских работ по проекту ОТ-Ф4-69 в Самаркандском государственном университете в 2017-2020 гг. «Гармонический анализ, степенная геометрия и ее приложения к задачам математической физики» (Справка Самаркандского государственного университета за номером № 10-4386 от 05 сентября 2023 года). Применение научных результатов позволило решить задачу интегрируемости для преобразования Фурье измерений, определенных на некоторых невыпуклых гиперповерхностях.

Методы, использованные для определения местоположения и структуры существенного спектра модельного оператора, соответствующей системе трех частиц на решетке с использованием спектра модели Фридрихса с двумерным возмущением, были использованы в фундаментальном проекте Казанского федерального университета Российской Федерации № РФФИ 20-01-00535 (справка Казанского федерального университета от 22 сентября 2023 г.). Модельный оператор, ассоциированного с системой трех частиц на решетке, позволило описать решение задачи стабилизации нелинейной системы с использованием свойств существенных и дискретных спектров.

Апробации результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждены на 12 научно-практических конференциях, в том числе на 3 международных и 9 республиканских.

Опубликование результатов. По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией для защиты диссертации доктора философии, в том числе 3 статьи опубликованы в зарубежных журналах и 3 статьи в республиканских журналах входящих в перечень научных изданий.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 88 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных и отечественных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется **«Предварительные сведения»**. В этой главе представлены важные понятия, утверждения и теоремы, используемые при изложении и доказательстве основных результатов диссертации. А также, анализируются некоторые статьи, посвященные спектральным свойствам модельных операторов, соответствующих двух- и трехчастичным решеточным системам.

Вторая глава диссертационной работы называется **«Исследование существенных и дискретных спектров модели Фридрихса».** В этой главе рассматривается модельный оператор, соответствующей двухчастичной системы на решетке (модель Фридрихса), определяются число и расположение его собственных значений, найдены необходимые и достаточные условия существование пороговое собственное значение или виртуальный уровень, а также изучается структура числовой области значения этого оператора.

Для $d \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} = (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ – $d-$мерный тор, $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплексно-значных) функций, определённых на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ рассмотрим оператора $h_{\mu,\lambda}$ с равенством

$$h_{\mu,\lambda} := h_{0,0} - \mu k_1 + \lambda k_2 .$$

Здесь параметры взаимодействия $\mu,\lambda > 0$ вещественные числа, $h_{0,0}$ является оператором умножения в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ и определяется как:

$$(h_{0,0}g)(p) = u(p)g(p).$$

$k_\alpha,\ \alpha = 1,2$ потенциальные операторы в пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ определяется как:

$$(k_\alpha)g(p) = v_\alpha(p)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_\alpha(t)g(t)dt, \alpha = 1,2.$$

Здесь $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$ вещественнье непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а функции $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ линейно независимые.

Оператор $h_{\mu,\lambda}$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ является линейным, ограниченным и самосопряженным.

Можно показать, что оператор возмущения $-\mu k_1 + \lambda k_2$ оператора $h_{\mu,\lambda}$ является самосопряженным оператором с рангом 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $h_{\mu,\lambda}$ совпадает с существенным спектром оператора $h_{0,0}$. Очевидно, что оператор $h_{0,0}$ имеет чистый существенный спектр и $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_{0,0}) = [E_1;E_2]$. Здесь числа E_1 и E_2 определяются следующим образом

$$E_1 = \min_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(p), \quad E_2 = \max_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(p).$$

Из последних фактов следует, что для существенного спектра оператора $h_{\mu,\lambda}$ имеет место равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_{\mu,\lambda}) = [E_1;E_2]$.

Пусть $\mathbb{C}$ множество всех комплексных чисел. При каждом $\mu,\lambda > 0$ определим регулярную функцию

$$\Delta_{\mu,\lambda}(z) := \Delta_\mu^{(1)}(z)\Delta_\lambda^{(2)}(z) + \mu\lambda I_{12}^2(z)$$

в области $\mathbb{C} \setminus [E_1;E_2]$, где

$$\Delta_\mu^{(1)}(z) := 1 - \mu I_{11}(z), \quad \Delta_\lambda^{(2)}(z) := 1 + \lambda I_{22}(z),$$

$$I_{\alpha\beta}(z) := \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_\alpha(t)v_\beta(t)}{u(t) - z} dt, \quad \alpha,\beta = 1,2.$$

Функция $\Delta_{\mu,\lambda}(\cdot)$ обычно называется детерминантом Фредгольма, ассоцированным с оператором $h_{\mu,\lambda}$ и играет важную роль при изучении дискретного спектра оператора $h_{\mu,\lambda}$.

Установим связь между собственными значениями оператора $h_{\mu,\lambda}$ и нулями функции $\Delta_{\mu,\lambda}(\cdot)$.

Лемма 1. *Число* $z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2]$ *является собственным значением оператора* $h_{\mu,\lambda}$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta_{\mu,\lambda}(z) = 0$.

Учитывая лемму 1 для дискретного спектра оператора $h_{\mu,\lambda}$ следует равенство

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu,\lambda}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2] : \Delta_{\mu,\lambda}(z) = 0\}.$$

Вместе с оператором $h_{\mu,\lambda}$ рассматриваем самосопряженные и ограниченные операторы $h_\mu^{(1)}$, $h_\lambda^{(2)}$. Эти операторы действуют в пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ и определяется с равенством

$$h_\mu^{(1)} := h_{0,0} - \mu k_1, \quad h_\lambda^{(2)} := h_{0,0} + \lambda k_2.$$

Надо отметит, что функции $\Delta_\mu^{(1)}(\cdot)$, $\Delta_\lambda^{(2)}(\cdot)$ называется определителем Фредгольма, ассоциированным оператором $h_\mu^{(1)}$, $h_\lambda^{(2)}$, соответственно и имеют места равенства

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_\mu^{(1)}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2] : \Delta_\mu^{(1)}(z) = 0\};$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_\lambda^{(2)}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2] : \Delta_\lambda^{(2)}(z) = 0\};$$

$$\sigma(h_\mu^{(1)}) = [E_1; E_2] \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2] : \Delta_\mu^{(1)}(z) = 0\};$$

$$\sigma(h_\lambda^{(2)}) = [E_1; E_2] \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2] : \Delta_\lambda^{(2)}(z) = 0\}.$$

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Для любого ограниченного самосопряженного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве L определим $L_A(a)$ подпространство функций $f \in L_A(a)$, удовлетворяющих неравенству $(Af, f) \leq a \| f \|^2$ и введем обозначения $N(a, A) = \sup\limits_{L_A(a)} \dim L_A(a)$.

Величина $N(a, A)$ бесконечна, если $a > \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$, если $N(a, A)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора A, меньших чем a, с учетом кратности.

Обозначим через $\mathrm{supp}\, v(\cdot)$ носитель функции $v(\cdot)$, а через $\mathrm{mes}(\Omega)$ мера Лебега множества $\Omega \subset \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Теорема 1. *А) Оператор* $h_{\mu,\lambda}$ *имеет простое собственное значение не более одного слева от* E_1 *и не более одного справа от* E_2.

Б) Если

$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \mathrm{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0, \tag{1}$$

тогда для того, чтобы число $z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2]$ *было собственным значением* *оператора* $h_{\mu,\lambda}$, *необходимо и достаточно, чтобы число* $z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2]$ *было собственным значением одного из операторов* $h_\mu^{(1)}$ *и* $h_\lambda^{(2)}$.

Замечание 1. Как видно из определения оператора $h_\mu^{(1)}$ *и* $h_\lambda^{(2)}$, они выглядят проще, чем $h_{\mu,\lambda}$. По этой причине теорема 1 приобретает важное значение для изучения простых и пороговых собственных значений, виртуальных уровней и числовой области значений оператора $h_{\mu,\lambda}$.

Следствие 1. *Если выполняется условие* (1), *то*

$$\sigma_{\rm disc}(h_{\mu,\lambda}) = \sigma_{\rm disc}(h_\mu^{(1)}) \cup \sigma_{\rm disc}(h_\lambda^{(2)}).$$

Поскольку функция $I_{\alpha\alpha}(\cdot)$, $\alpha = 1,2$ на интервалах $(-\infty; E_1)$ и $(E_2; +\infty)$ является монотонно возрастающим, тогда согласно теореме о переходе к пределу под интегралом Лебега, существуют конечные и бесконечные пределы:

$$I_{11}(E_1) = \lim_{z \to E_1 - 0} I_{11}(z), \quad I_{22}(E_2) = \lim_{z \to E_2 + 0} I_{22}(z).$$

Если $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| < +\infty$, $\alpha = 1,2$, тогда возьмем, что

$$\mu_0 = (I_{11}(E_1))^{-1}, \quad \lambda_0 = -(I_{22}(E_2))^{-1}.$$

Следующая теорема представляет множество собственных значений оператора $h_\mu^{(1)}$.

Теорема 2. *А*) *Если* $I_{11}(E_1) = +\infty$, *то во всех значениях параметра* $\mu > 0$ *оператор* $h_\mu^{(1)}$ *имеет единственное собственное значение, лежащее слева от* E_1.

Б) *Пусть* $I_{11}(E_1) < +\infty$.

Б$_1$) *Если* $0 < \mu \le \mu_0$, *то оператор* $h_\mu^{(1)}$ *не имеет собственных значений на промежутке* $(-\infty; E_1)$;

Б$_2$) *если* $\mu > \mu_0$, *то оператор* $h_\mu^{(1)}$ *имеет единственное собственное значение, лежащее слева от* E_1.

С) *При всех значениях параметра* $\mu > 0$ *оператор* $h_\mu^{(1)}$ *не имеет собственных значений, лежащих в интервале* $(E_2; +\infty)$.

Следующая теорема представляет множество собственных значений оператора $h_\lambda^{(2)}$.

Теорема 3. *А*) *Если* $I_{22}(E_2) = -\infty$, *то во всех значениях параметра* $\lambda > 0$ *оператор* $h_\lambda^{(2)}$ *имеет единственное собственное значение, лежащее справа от* E_2.

Б) *Пусть* $|I_{22}(E_2)| < +\infty$.

Б$_1$) *Если* $0 < \lambda \le \lambda_0$, *то оператор* $h_\lambda^{(2)}$ *не имеет собственных значений на промежутке* $(E_2; +\infty)$;

$Б_2$) если $\lambda > \lambda_0$, то оператор $h_\lambda^{(2)}$ имеет единственное собственное значение, лежащее справа от E_2.

C) При всех значениях параметра $\lambda > 0$ оператор $h_\lambda^{(2)}$ не имеет собственных значений, лежащих в интервале $(-\infty; E_1)$.

Следствие 2. *Предположим, что выполняется условия* (1).

A) Если $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| = +\infty,\ \alpha = 1,2$, то при всех значениях параметра $\mu > 0$ и $\lambda > 0$ оператор $h_{\mu,\lambda}$ имеет по одному простому собственному значению, лежащие слева от E_1 и справа от E_2.

$Б$) Если $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| < +\infty,\ \alpha = 1,2$, то, для $0 < \mu \le \mu_0$, $0 < \lambda \le \lambda_0$ оператор $h_{\mu,\lambda}$ не имеет собственных значений, лежащих вне существенного спектра. Если $\mu > \mu_0$ и $\lambda > \lambda_0$, то оператор $h_{\mu,\lambda}$ имеет по одному простому собственному значеню, лежащиму слева от E_1 и справа от E_2.

Во втором параграфе второй главы рассматривается случай $d = 3$, предполагающий, что функция $u(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_1 \in \mathbb{T}^3$ и единственный невырожденный максимум в точке $p_2 \in \mathbb{T}^3$. Мы также требуем, чтобы функция v_α имела непрерывные частные производные порядка 3 в окрестности $p_\alpha \in \mathbb{T}^3$, $\alpha = 1,2$.

Через $C(\mathbb{T}^3)$ и $L_1(\mathbb{T}^3)$ обозначим Банаховы пространства соответственно непрерывных и интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$.

Определение 1. *Пусть выпольняется условия* (1). *Говорят, что оператор $h_{\mu,\lambda}$ имеет виртуальный уровень в точке $z = E_\alpha$ (резонанс с энергией E_α), если число 1 собственное значение интегрального оператора*

$$(G_\alpha\psi_\alpha)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\mu v_1(p)v_1(t) - \lambda v_2(p)v_2(t)}{u(t) - E_\alpha}\psi_\alpha(t)dt, \quad \psi \in C(\mathbb{T}^3),$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ_α удовлетворяет условию $\psi_\alpha(p_\alpha) \ne 0$.

Следует отметить, что если оператор $h_{\mu,\lambda}$ имеет виртуальный уровень в точке $z = E_\alpha$, то решение уравнения $G_\alpha\psi_\alpha = \psi_\alpha$ равно функции $v_\alpha(\cdot)$ с точностью до константы. Наличие собственного значения оператора G_α, равного 1 в определении 1, соответствует существованию решения уравнения $h_{\mu,\lambda}f_\alpha = E_\alpha f_\alpha$, тогда из условия $\psi_\alpha(p_\alpha) \ne 0$ следует, что решение f_α этого уравнения не принадлежит пространству $L_2(\mathbb{T}^3)$. Точнее, если оператор $h_{\mu,\lambda}$ имеет виртуальный уровень в точке $z = E_\alpha$, то

$$f_\alpha(p) = (-1)^{\alpha+1}\frac{v_\alpha(p)}{u(p) - E_\alpha} \tag{2}$$

функция удовлетворяет уравнение: $h_{\mu,\lambda}f_\alpha = E_\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^3)$.

Теорема 4. *А*) *Предположим, что выполняется условие* (1) *и* $\lambda > 0$ *является произвольным числом.*

A_1) *Число* $z = E_1$ *является собственным значением оператора* $h_{\mu,\lambda}$ *тогда и только тогда, когда* $\mu = \mu_0$ *и* $v_1(p_1) = 0$;

A_2) *чтобы оператор* $h_{\mu,\lambda}$ *имел виртуальный уровень в точке* $z = E_1$ *необходимо и достаточно* $\mu = \mu_0$ *и* $v_1(p_1) \neq 0$.

Б) *Предположим, что условие* (1) *выполняется и* $\mu > 0$ *является произвольным числом.*

$Б_1$) *Число* $z = E_2$ *является собственным значением оператора* $h_{\mu,\lambda}$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda = \lambda_0$ *и* $v_2(p_2) = 0$;

$Б_2$) *чтобы оператор* $h_{\mu,\lambda}$ *имел виртуальный уровень в точке* $z = E_2$ *необходимо и достаточо* $\lambda = \lambda_0$ *и* $v_2(p_2) \neq 0$.

Предположим, что $\mathcal{H}$ комплексное гильбертово пространство, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ линейный оператор с областью определения $D(A) \subset \mathcal{H}$.

Определение 2. *Множество*

$$W(A) := \{(Ax, x) : x \in D(A), \| x \| = 1\},$$

называется числовой областью значений представлением линейного оператора A. *Здесь через* $(\cdot,\cdot)$ *обозначается скалярное произведение в комплексном гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$.

Как видно из определения, множество $W(A)$ является подмножеством комплексной плоскости, а геометрические свойства множества $W(A)$ позволяют получить некоторую информацию об операторе A[2].

Понятие числовой области значений впервые введено и изучено Теоплицем для матриц[3]. Теоплиц доказал, что числовая областью значений матрицы содержит все ее собственные значения, а граница числовой области значений будет выпуклой линией. Однако в работе Хаусдорфа доказано, что множество $W(A)$ является выпуклым множеством[4]. Вследствие эти свойства пригодны не только для матриц, но и для любых линейно ограниченных операторов, доказано, что спектр таких операторов лежит в замкнутом множестве $\overline{W(A)}$[5].

Если моделей Фридрихса $h_\mu^{(1)}$ и $h_\lambda^{(2)}$ имеют собственные значения, то обозначаем их соответственно через $E_1(\mu)$ и $E_2(\lambda)$. Тогда $E_1(\mu) < E_1$ и $E_2(\lambda) > E_2$.

---

[2] Gustafson K.E., Rao D.K.M. Numerical range. The field of values of linear operators and matrices. Universitext. Springer, New York, 1997.
[3] Toeplitz O. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. Math. Z., **2**:1-2 (1918). – Pp. 187-197.
[4] Hausdorff F. Der Wertvorrat einer Bilinearform. Math. Z., **3**:1 (1919). – Pp. 314-316.
[5] Wintner A. Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen. Math. Z., **30**:1 (1929). – Pp. 228-281.

Случай I. Пусть $d=1,2$.

Теорема 5. *Пусть выполняется условие* (1) *и* $v_\alpha(p_\alpha)\neq 0,\ \alpha=1,2.$ *Тогда, если* $\mu>0$ *и* $\lambda>0,$ *то для числовой области значений модели Фридрихса* $h_{\mu,\lambda}$ *имеет место равенство:* $W(h_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu);E_2(\lambda)].$

Следующая теорема описывает структуру замыкания числовой области значений модели Фридрихса $h_{\mu,\lambda}$.

Теорема 6. *Пусть выполняется условие* (1) *и* $v_\alpha(p_\alpha)=0,\ \alpha=1,2.$

А) *Если* $0<\mu\le\mu_0$ *и* $0<\lambda\le\lambda_0$, *то справедливо равенство* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1;E_2]$.

Б) *Если* $0<\mu\le\mu_0$ *и* $\lambda>\lambda_0$, *то выполняется равенство* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1;E_2(\lambda)]$.

С) *Если* $\mu>\mu_0$ *и* $0<\lambda\le\lambda_0$, *то справедливо равенство* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1(\mu);E_2]$.

Д) *Если* $\mu>\mu_0$ *и* $\lambda>\lambda_0$, *то выполняется равенство* $W(h_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu);E_2(\lambda)]$.

Следствие 3. *Пусть выполняется условие* (1), *а также* $v_1(p_1)\neq 0$ *и* $v_2(p_2)=0.$

А) *Если* $0<\lambda\le\lambda_0$, *то для любого* $\mu>0$ *имеет место равенство* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1(\mu);E_2]$.

Б) *Если* $\lambda>\lambda_0$, *то для любого* $\mu>0$ *имеет место равенство* $W(h_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu);E_2(\lambda)]$.

Следствие 4. *Пусть выполняется условие* (1), *а также* $v_1(p_1)=0$ *и* $v_2(p_2)\neq 0.$

А) *Если* $0<\mu\le\mu_0$, *то для любого* $\lambda>0$ *имеет место равенство* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1;E_2(\lambda)]$.

Б) *Если* $\mu>\mu_0$, *то для любого* $\lambda>0$ *имеет место равенство* $W(h_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu);E_2(\lambda)]$.

Случай II. Для случая $d\ge 3$ исследуем числовой образ значений модели Фридрихса.

Теорема 7. *Пусть выполняется условие* (1).

А) *Если* $0<\mu\le\mu_0$ *и* $0<\lambda\le\lambda_0$, *то* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1;E_2]$.

Б) *Если* $0<\mu\le\mu_0$ *и* $\lambda>\lambda_0$, *то* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1;E_2(\lambda)]$.

С) *Если* $\mu>\mu_0$ *и* $0<\lambda\le\lambda_0$, *то* $\overline{W(h_{\mu,\lambda})}=[E_1(\mu);E_2]$.

Д) *Если* $\mu>\mu_0$ *и* $\lambda>\lambda_0$, *то* $W(h_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu);E_2(\lambda)]$.

Пусть $d=3$.

Теорема 8. *Предположим, что выполняется условие* (1) *и пусть* $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$.

А) *Если* $v_\alpha(p_\alpha) = 0,\ \alpha = 1,2$, *то* $W(h_{\mu,\lambda}) = [E_1; E_2]$.

Б) *Если* $v_1(p_1) = 0$ *и* $v_2(p_2) \neq 0$, *то* $W(h_{\mu,\lambda}) = [E_1; E_2)$.

С) *Если* $v_1(p_1) \neq 0$ *и* $v_2(p_2) = 0$, *то* $W(h_{\mu,\lambda}) = (E_1; E_2]$.

Д) *Если* $v_\alpha(p_\alpha) \neq 0,\ \alpha = 1,2$, *то* $W(h_{\mu,\lambda}) = (E_1; E_2)$.

Надо отметить, что если $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$ и $v_\alpha(p_\alpha) = 0$, $\alpha = 1,2$, то число $z = E_\alpha$ будет пороговым собственным значением для модели Фридрихса $h_{\mu,\lambda}$. Если $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$ и $v_\alpha(p_\alpha) \neq 0$, $\alpha = 1,2$, то число $z = E_\alpha$ будет виртуальным уровнем для модели Фридрихса $h_{\mu,\lambda}$.

В третьей главе диссертации, под названием **«Спектральные свойства модельного оператора, соответствующего трехчастичной системе в решетке»**, найдены условия существования существенного спектра и собственных значений модельного оператора $H_{\mu,\lambda}$, соответствующих трехчастичной системе в решетке.

Через $L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$ обозначим гильбертово пространство квадратично-интегрируемых симметричных (комплексно значений) функций, определенных на $(\mathbb{T}^d)^2$.

Рассматриваем модельный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$ и определяемый равенством

$$H_{\mu,\lambda} := H_{0,0} - \mu(V_{11} + V_{12}) + \lambda(V_{21} + V_{22}), \quad \mu, \lambda > 0. \tag{3}$$

Здесь параметры взаимодействия $\mu, \lambda > 0$, оператор $H_{0,0}$ умножения на функцию $\omega(\cdot,\cdot)$ в гильбертовом пространстве $L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$:

$$(H_{0,0} f)(p,q) = \omega(p,q) f(p,q).$$

Операторы V_{ij}, $i, j = 1,2$ являются нелокальными потенциальными операторами в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$:

$$(V_{i1} f)(p,q) = v_i(p) \int_{\mathbb{T}^d} v_i(t) f(t,q)\,dt, \quad (V_{i2} f)(p,q) = v_i(q) \int_{\mathbb{T}^d} v_i(t) f(p,t)\,dt.$$

$\omega(\cdot,\cdot)$ функция — это непрерывная симметричная функция с действительным значением, определенная на $(\mathbb{T}^d)^2$, а функции $v_i(\cdot)$, $i = 1,2$ — непрерывные функции с действительными значениями, определенные на торе $\mathbb{T}^d$.

Модельный оператор $H_{\mu,\lambda}$, определенный равенством (3), является линейным, ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$.

Чтобы объяснить основные результаты этой главы, вместе с оператором $H_{\mu,\lambda}$, рассматриваем оператор $h_{\mu,\lambda}(p)$, который действует в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ как:

$$h_{\mu,\lambda}(p):=h_{0,0}(p)-\mu k_1+\lambda k_2,$$

где

$$(h_{0,0}(p)f)(q)=\omega(p,q)f(q),\ (k_i f)(q)=v_i(q)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v_i(t)f(t)dt, i=1,2.$$

Оператор $h_{\mu,\lambda}(p)$ является линейным, ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$.

Согласно теореме Вейля о сохранении существенного спектра при конечномерных возбуждениях, имеет место равенство

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(h_{\mu,\lambda}(p))=[m(p);M(p)],$$

где $m(p)$ и $M(p)$ числа определяются с помощью равенств:

$$m(p):=\min_{q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\omega(p,q),\quad M(p):=\max_{q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\omega(p,q).$$

Для каждых фиксированных чисел $\mu,\lambda>0$ и для элемента $p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ рассмотрим регулярную функцию

$$\Delta_{\mu,\lambda}(p,z)=\Delta_{\mu}^{(1)}(p,z)\Delta_{\lambda}^{(2)}(p,z)+\mu\lambda I_{12}^2(p,z)$$

в области $\mathbb{C}\setminus[m(p);M(p)]$. Здесь

$$\Delta_{\mu}^{(1)}(p,z):=1-\mu I_{11}(p,z),\ \Delta_{\lambda}^{(2)}(p,z):=1+\lambda I_{22}(p,z),$$

$$I_{ij}(p,z):=\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\frac{v_i(t)v_j(t)}{\omega(p,t)-z}dt,\quad i,j=1,2.$$

Следующая лемма выражает связь между собственными значениями семейства моделей Фридрихса $h_{\mu,\lambda}(p)$ и нулями функции $\Delta_{\mu,\lambda}(p,z)$.

Лемма 2. *При каждом $p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ число $z\in\mathbb{C}\setminus[m(p);M(p)]$ является собственным значением семейства моделей Фридрихса $h_{\mu,\lambda}(p)$, тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mu,\lambda}(p,z)=0$.*

Следствие 5. *Верны следующие равенства:*

$$\sigma(h_{\mu,\lambda}(p))=\sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu,\lambda}(p))\cup[m(p);M(p)],$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu,\lambda}(p))=\{z\in\mathbb{C}\setminus[m(p);M(p)]:\Delta_{\mu,\lambda}(p,z)=0\}.$$

Лемма 3. *Для каждого фиксированного элемента $p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ семейства моделей Фридриха $h_{\mu,\lambda}(p)$ имеет простое собственное значение, не более одного слева от $m(p)$ и не более одного справа от $M(p)$.*

Введем канал оператор $H_{\mu,\lambda}^{ch}$, который занимает важное место в анализе спектра оператора $H_{\mu,\lambda}$, и охарактеризуем его спектр через спектр $h_{\mu,\lambda}(p)$, $p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Рассмотрим так называемый канальный оператор, соответствующим оператору $H_{\mu,\lambda}$, и действующий в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ как

$$H_{\mu,\lambda}^{ch}:=H_{0,0}-\mu V_{11}+\lambda V_{21}. \tag{4}$$

Вводим следующие обозначения:

$$m := \min_{p,q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \omega(p,q), \quad M := \max_{p,q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \omega(p,q);$$

$$\sigma_{\mu,\lambda} := \bigcup_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu,\lambda}(p)); \qquad \Sigma_{\mu,\lambda} := \sigma_{\mu,\lambda} \cup [m;M].$$

Приведем утверждение о том, что спектр канал оператора $H_{\mu,\lambda}^{ch}$ выражается через спектр семейства моделей Фридрихса $h_{\mu,\lambda}(p)$.

Теорема 9. *Канал оператор $H_{\mu,\lambda}^{ch}$ имеет чистый существенный спектр, и верно следующее*

$$\sigma(H_{\mu,\lambda}^{ch}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}^{ch}) = \Sigma_{\mu,\lambda}.$$

Существенный спектр модельного оператора $H_{\mu,\lambda}$ описывается с помощью следующей теоремы.

Теорема 10. *Существенный спектр модельного оператора $H_{\mu,\lambda}$ совпадает со спектром канал оператора $H_{\mu,\lambda}^{ch}$, то имеет место следующее равенство:* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = \sigma(H_{\mu,\lambda}^{ch})$.

Кроме того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda})$ состоит из объединения не более, чем трех отрезков.

В последующих исследованиях предположим, что функция $\omega(p,q)$ имеет следующий вид: $\omega(p,q) = u(p) + u(q)$.

В этом случае оператор $H_{0,0}$ выражается следующим образом:

$$(H_{0,0}f)(p,q) = (u(p) + u(q))f(p,q).$$

Теорема 11. *Предположим, что выполняется условие* (1) *и пусть* $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| = +\infty,\ \alpha = 1,2.$

A) Если $\mu, \lambda > 0$, то моделный оператор $H_{\mu,\lambda}$ имеет два простых собственных значений $2E_1(\mu)$, $2E_2(\lambda)$ и верны следующие равенства

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2],$$

$$\sigma_{\mathrm{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_1(\mu); E_1(\mu) + E_2(\lambda); 2E_2(\lambda)\};$$

Б) для произвольных чисел $a < E_1$ и $b > E_2$ найдутся такие параметры $\mu^0 = \mu^0(a) > 0$ и $\lambda^0 = \lambda^0(b) > 0$, что числа $2a, a+b$ и $2b$ является собственными значениями моделного оператора H_{μ^0,λ^0};

C) для произвольного числа $c \in [2E_1; 2E_2]$ найдутся такие параметры $\mu^* > 0$ и $\lambda^* > 0$, что число c будет собственным значением моделного оператора H_{μ^*,λ^*}.

Теорема 12. *Предположим, что выполняется условие* (1) *и пусть* $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| < +\infty,\ \alpha = 1,2.$

A) Если $0 < \mu \le \mu_0$ и $0 < \lambda \le \lambda_0$, то $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2]$, $\sigma_{\mathrm{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \varnothing$;

Б) *если* $\mu > \mu_0$ *и* $0 < \lambda \le \lambda_0$, *то моделный оператор* $H_{\mu,\lambda}$ *имеет одно простое собственное значение* $2E_1(\mu)$ *и верны следующие равенства:*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; E_1(\mu)+E_2] \cup [2E_1; 2E_2],\ \sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_1(\mu)\};$$

С) *если* $0 < \mu \le \mu_0$ *и* $\lambda > \lambda_0$, *то модельный оператор* $H_{\mu,\lambda}$ *имеет одно простое собственное значение* $2E_2(\lambda)$ *и верны следующие равенства:*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda)+E_1; E_2(\lambda)+E_2],\ \sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_2(\lambda)\};$$

Д) *если* $\mu > \mu_0$ *и* $\lambda > \lambda_0$, *то модельный оператор* $H_{\mu,\lambda}$ *имеет два простые собственные значения* $2E_1(\mu)$ *и* $2E_2(\lambda)$ *и верны равенства:*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; E_1(\mu)+E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda)+E_1; E_2(\lambda)+E_2],$$

$$\sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_1(\mu); E_1(\mu)+E_2(\lambda); 2E_2(\lambda)\}.$$

Вводим следующие обозначения:

$$\mu_1 := (I_{11}(2E_1 - E_2))^{-1}, \quad \lambda_1 := -(I_{22}(2E_2 - E_1))^{-1}.$$

Теорема 13. *Предположим, что выполняется условие* (1) *и пусть* $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| = +\infty$, $\alpha = 1,2$.

А) *Если* $0 < \mu \le \mu_1$ *и* $0 < \lambda \le \lambda_1$, *то* $\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; E_2(\lambda)+E_2]$;

Б) *если* $\mu > \mu_1$ *и* $0 < \lambda \le \lambda_1$, *то имеет место равенство*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; E_1(\mu)+E_2] \cup [2E_1; E_2(\lambda)+E_2]$$

и $E_1(\mu)+E_2 < 2E_1$;

С) *если* $0 < \mu \le \mu_1$ *и* $\lambda > \lambda_1$, *то*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda)+E_1; E_2(\lambda)+E_2]$$

и имеет место неравенство $2E_2 < E_2(\lambda)+E_1$;

Д) *если* $\mu > \mu_1$ *и* $\lambda > \lambda_1$, *то имеет место равенство*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; E_1(\mu)+E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda)+E_1; E_2(\lambda)+E_2]$$

и $E_1(\mu)+E_2 < 2E_1$, $2E_2 < E_2(\lambda)+E_1$.

Замечание 2. Верны неравенства $\mu_0 < \mu_1$ и $\lambda_0 < \lambda_1$.

Теорема 14. *Предположим, выполняется условие* (1), *и пусть* $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| < +\infty$, $\alpha = 1,2$.

A_1) *Если* $0 < \mu \le \mu_0$ *и* $0 < \lambda \le \lambda_0$, *то* $\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2]$;

A_2) *если* $\mu_0 < \mu \le \mu_1$ *и* $0 < \lambda \le \lambda_0$, *то* $\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; 2E_2]$;

A_3) *если* $\mu > \mu_1$ *и* $0 < \lambda \le \lambda_0$, *то*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; E_1(\mu)+E_2] \cup [2E_1; 2E_2]$$

и верно неравенство $E_1(\mu)+E_2 < 2E_1$;

$Б_1$) *если* $0 < \mu \le \mu_0$ *и* $\lambda_0 < \lambda \le \lambda_1$, *то* $\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; E_2(\lambda)+E_2]$;

$Б_2$) *если* $\mu_0 < \mu \le \mu_1$ *и* $\lambda_0 < \lambda \le \lambda_1$, *то* $\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; E_2(\lambda)+E_2]$;

$Б_3$) *если* $\mu > \mu_1$ *и* $\lambda_0 < \lambda \le \lambda_1$, *то*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu)+E_1; E_1(\mu)+E_2] \cup [2E_1; E_2(\lambda)+E_2]$$

и верно неравенство $E_1(\mu)+E_2<2E_1$;

C_1) *если* $0<\mu\le\mu_0$ *и* $\lambda>\lambda_1$, *то*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda})=[2E_1;2E_2]\cup[E_2(\lambda)+E_1;E_2(\lambda)+E_2]$$

и верно неравенство $2E_2<E_2(\lambda)+E_1$;

C_2) *если* $\mu_0<\mu\le\mu_1$ *и* $\lambda>\lambda_1$, *то*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu)+E_1;2E_2]\cup[E_2(\lambda)+E_1;E_2(\lambda)+E_2]$$

и верно неравенство $2E_2<E_2(\lambda)+E_1$;

C_3) *если* $\mu>\mu_1$ *и* $\lambda>\lambda_1$, *то*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda})=[E_1(\mu)+E_1;E_1(\mu)+E_2]\cup[2E_1;2E_2]\cup[E_2(\lambda)+E_1;E_2(\lambda)+E_2]$$

и верны неравенства $E_1(\mu)+E_2<2E_1$ *и* $2E_2<E_2(\lambda)+E_1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертационной работе исследованы существенные и дискретные спектры модельных операторов, соответствующих двух- и трехчастичным решеточным системам. При этом изучаемый модельный оператор $H_{\mu,\lambda}$ соответствует гамильтониану систем, трех одинаковых частиц на решетке.

Основные результаты данной диссертации следующие:

определяется количество и местоположение собственных значений, характерных для модели Фридрихса $h_{\mu,\lambda}$;

найдены условия существования собственных значений модели Фридрихса $h_{\mu,\lambda}$, относительно параметров взаимодействия μ и λ;

найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы нижняя грань (верхняя грань) существенного спектра являлась виртуальным уровнем рассматриваемого модели Фридрихса $h_{\mu,\lambda}$;

для модели Фридрихса изучается структура числовой области значений $W(h_{\mu,\lambda})$ относительно параметров μ и λ. Отдельно выделяются случаи, когда оно является замкнутым множеством и совпадает со спектром;

выделен каналный оператор $H^{ch}_{\mu,\lambda}$, соответствующий модельному оператору $H_{\mu,\lambda}$, и доказано, что существенный спектр модельного оператора совпадает со спектром каналного оператора;

найдены оценки для границ ветви существенного спектра модельного оператора $H_{\mu,\lambda}$ в виде тензорной суммы моделей Фридрихса с двумерным возбуждением и условия того, что существенный спектр состоит из объединения одного, двух или трёх отрезков;

при этом изучаются условия существования изолированных и находящихся во внутри существенного спектра собственных значений оператора $H_{\mu,\lambda}$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04
KARSHI STATE UNIVERSITY

BUKHARA STATE UNIVERSITY

BAHRONOV BEKZOD ISLOM UGLI

SPECTRAL PROPERTIES OF MODEL OPERATORS CORRESPONDING TO SYSTEMS OF TWO AND THREE PARTICLES ON A LATTICE

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Karshi – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission under number B2023.3.PhD/FM906.

The dissertation was performed at the Bukhara State University.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website (www.qarshidu.uz) and in the “ZiyoNet” Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Rasulov Tulkin Husenovich** doctor of physical and mathematical sciences (DSc), professor
Official opponents:	**Muminov Zahriddin Eshkobilovich** doctor of physical and mathematical sciences (DSc), associate professor
	Khamrayev Akhror Yusupovich candidate of physical and mathematical sciences, associate professor
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place “_____” ____________ 2024 at ______ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 at Karshi State University (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180119, Ph.: (+998 75) 225-34-13, fax: (+998 75) 221-00-56, e-mail: kasu_info@edu.uz). Karshi State University, Building 2 (room 202).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Karshi State University (is registered №_____). (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180119, Ph.: (+998 75) 225-34-13, fax: (+998 75) 221-00-56, e-mail: kasu_info@edu.uz).

Abstract of dissertation sent out on “_______” _________________ 2024
(Mailing report №______ on “______” _______________ 2024).

B.A. Shoimkulov
Chairman of Scientific council on
award of scientific degree,
Dr.Phys.-Math.Sci., professor

Sh.D. Nodirov
Scientific secretary of Scientific council on
award of scientific degree, PhD.,
associate professor

A.A. Imomov
Chairman of Scientific seminar
under Scientific council on
award of scientific degree, DSc.,
associate professor

INTRODUCTION (Abstract of PhD dissertation)

The aim of the research work is to show the conditions for matching the numerical image of values and the spectrum of the Friedrichs model, determining the structure of the essential spectrum of the model operator corresponding to a three-particle system on a lattice, and finding the conditions under which its eigenvalues will exist.

The object of the research work. Model operators corresponding to two- and three-particle systems on a lattice were taken as the object of study.

Scientific novelty of the research work is as follows:

for the Friedrichs model corresponding to a two-particle system on a lattice, conditions for the existence of an ordinary eigenvalue, a threshold eigenvalue and virtual levels are found with respect to the parameter functions and influence parameters;

using methods of the theory of threshold phenomena, the structure of the numerical range of values of the Friedrichs model corresponding to a two-particle system on a lattice was determined, and conditions were found under which its spectrum and numerical range of values coincide;

using the spectrum of the channel operator, the location of the essential spectrum of the model operator corresponding to a system of three particles on a lattice, as well as two- and three-particle branches, was determined, and the maximum number of segments forming the essential spectrum was found;

using two-dimensional excitation, the structure of the branches of the essential spectrum of the model operator is described in the form of a tensor sum of Friedrichs models with two-dimensional excitation and the existence of eigenvalues located outside or inside its essential spectrum is proved using the eigenvalues of the Friedrichs model.

Implementation of the research results. Based on scientific results obtained for model operators corresponding to two and three particle systems in a lattice:

of the methods used in finding the conditions for eigenvalues, threshold values and virtual levels of the Friedrichs model, corresponding to a system of two particles in a lattice, as well as the conditions for finding matches between the structure of the numerical image and its spectrum of the Friedrichs model, were used when carrying out research work on the project OT-F4-69 at Samarkand State University in 2017-2020 “Harmonic analysis, power geometry and its applications to problems of mathematical physics” (Samarkand State University, reference No. 10-4386 dated September 05, 2023). The application of scientific results made it possible to solve the integrability problem for the Fourier transform of measurements defined on some non-convex hypersurfaces.

The methods used to determine the location and structure of the significant spectrum of the model operator corresponding to a system of three particles in a lattice using the spectrum of the Friedrichs model with two-dimensional excitation were used in the fundamental project of the Kazan Federal University of the Russian Federation No. RFBR 20-01-00535 (Kazan Federal University, reference dated September 22, 2023). The model operator associated with a system of three particles on a lattice made it possible to describe the solution to the problem of stabilization of a nonlinear system using the properties of essential and discrete spectra.

The structure and volume of the dissertation. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 88 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (часть I; part I)

1. Rasulov T.H., Bahronov B.I. Existence of the eigenvalues of a tensor sum of the Friedrichs models with rank 2 perturbation. Nanosystems: Phys. Chem. Math., 14:2 (2023). – Pp. 151-157 (Scopus). (01.00.00; №5)

2. Бахронов Б.И., Расулов Т.Х., Рехман М. Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана. Известия вузов. Математика. 7 (2023). – С. 3-12 (Scopus IF=0.36).

3. Rasulov T.H., Bahronov B.I. On the numerical range of a Friedrichs model with rank two perturbation: Threshold analysis technique. AIP Conference Proceedings. 2764 (2023). – Pp. 1-10 (Scopus).

4. Bahronov B.I. Panjaradagi uch zarrachali sistemaga mos model operator xos funksiyalari uchun Faddeyev tenglamasi va uning xarakteristik xossalari. Ilm sarchashmalari. 9 (2022). – B. 11-16. (01.00.00; №12)

5. Rasulov T.H., Bahronov B.I. Structure of the numerical range of Friedrichs model: 1D case with rank two perturbation. Bulletin of the Institute of Mathematics, 4 (2020). – Pp. 21-28. (01.00.00; №17)

6. Расулов Т.Х., Бахронов Б.И. Пороговые собственные значение и резонансы модели фридрихса с двумерным возмущением. Научный вестник БухГУ, 3 (2019). – С. 31-38. (01.00.00; №3)

II bo‘lim (часть II; part II)

7. Bahronov B.I. Panjaradagi uch zarrachali sistemalarga mos model operatorning muhim spektrining joylashuv o‘rni. “Ali Qushchi – Mirzo Ulug‘bek ilmiy maktabining buyuk elchisi” xalqaro ilmiy konferensiya. – Samarqand, 2023. – B. 15-20.

8. Бахронов Б.И. Грани существенного спектра тензор суммы моделей Фридрихса. Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского. Т. 66. XVI Международная Казанская школаконференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Сборник трудов. – Казан: КФУ, 2023. – С. 41-43.

9. Bahronov B.I. Lokal bo‘lmagan qo‘zg‘alishga ega panjaradagi uch zarrachali model operator muhim spektrining tavsifi. “Operator algebralar, noassotsiativ tuzilmalar va turdosh masalalar” respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami. – Toshkent, 2022. – B. 154-156.

10. Bahronov B.I. Panjaradagi uch zarrachali sistemaga mos model operatorning xos funksiyalari uchun Faddeyev tenglamasi. “Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari” respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami. – Andijon, 2022. – B. 24-26.

11. Bahronov B.I., Rasulov T.H. Existence of the eigenvalues of a tensor sum of the Friedrichs models with rank 2 perturbation. “Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muammolari” xalqaro ilmiy-amaliy anjuman materiallari. – Buxoro, 2022. – B. 14-16.

12. Bahronov B.I. On the spectrum of a tensor sum of the Friedrichs models with rank 2 perturbations. International scientific and practical conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”. – Samarkand, 2022. – Pp. 36-37.

13. Расулов Т.Х., Бахронов Б.И. Условия существования виртуальных уровней модели Фридрихса с двумерным возмущением. Международная конференция «Комплексный анализ и теория аппроксимаций». – Уфа: Россия, 2019. – С. 40-41.

14. Бахронов Б.И. Полное исследование числовой области значений модели Фридрихса с двумерным возмущением. Международной конференции КРОМШ-2019. – Симферополь: Россия, 2019. – С. 49-50.

15. Расулов Т.Х., Бахронов Б.И. О числовой области значений модели Фридрихса с двумерным возмущением. Международная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». – Россия, 2019. – С. 61-63.

16. Бахронов Б.И. Число и местонахождение собственных значений модели Фридрихса с двумерным возмущением. Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». – Уфа: Россия, 2019. – С. 20-21.

17. Rasulov T.H., Bahronov B.I. Numerical range of a Friedrich’s model with rank two perturbation. International Conference “Science Technology Education Mathematics Medicine”. – Bukhara-Samarkand-Tashkent, 2019. – Pp. 22-23.

18. Бахронов Б.И. Число и местонахождения собственных чисел модели фридрихса с двумерным возмущением. “Fundamental matematika muammolari va ularning tatbiqlari”. Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari to‘plami. – Navoiy, 2019. – B. 121-122.

Avtoreferat Qarshi davlat universitetining “QarDU xabarlari” ilmiy-nazariy, uslubiy jurnali tahririyatida tahrirdan oʻtkazildi (04.01.2024-yil).

Guvohnoma № 14-061
04.01.2024. Bosishga ruxsat etildi.
Ofset bosma qogʻozi. Qogʻoz bichimi 60x84 1/16.
“Times” garniturasi. Ofset bosma usuli.
Hisob-nashriyot t. 3.2. shartli b.t. 3,7.
Adadi 60 nusxa. Buyurtma № 01.

Qarshi davlat universiteti
Kichik bosmaxonasida chop etildi.