SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

ABRAYEV BUNYOD O‘RINBOYEVICH

RAQOBATLASHUVCHI O‘ZARO TA’SIRLI SOS MODELI UCHUN GIBBS O‘LCHOVLARI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Samarqand – 2024

UDK: 517.984

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

ABRAYEV BUNYOD O‘RINBOYEVICH

RAQOBATLASHUVCHI O‘ZARO TA’SIRLI SOS MODELI UCHUN GIBBS O‘LCHOVLARI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Samarqand – 2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2021.3.PhD/FM619 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Chirchiq davlat pedagogika universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (www.samdu.uz) va «ZiyoNet» ta'lim axborot tarmog'ida (http://www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Raxmatullayev Muzaffar Muxammadjanovich** fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
Rasmiy opponentlar:	**Botirov G'olibjon Isroilovich** fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
	Hakimov Otabek Norbo'ta o'g'li fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
Yetakchi tashkilot:	**Buxoro davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Samarqand davlat universiteti huzuridagi DSc.30/30.12.2019.FM.02.01 raqamli Ilmiy kengashning «23» 01 2024-yil soat 10^00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+998 66) 231 06 31, faks: (+998 66) 235 19 38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertatsiya bilan Samarqand davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (2 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+998 66) 231 06 31, faks: (+998 66) 235 19 38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertatsiya avtoreferati 2024-yil «11» 01 kuni tarqatildi.
(2024 yil «11» 01 dagi 2-raqamli reyestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI • SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI •

A.S. Soleev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, fizika-matematika fanlari doktori, professor

A.M. Xalxo'jayev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, fizika-matematika fanlari doktori

S.N. Laqayev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi Ilmiy seminar raisi, fizika-matematika fanlari doktori, professor, akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyligi. Jahonda olib borilayotgan ko‘plab ilmiy va amaliy tadqiqotlarda fizika, biologiya, statistik mexanika va boshqa sohalarda fazaviy o‘tish nazariyasini o‘rganish fanning eng zamonaviy tadqiqot sohalaridan hisoblanadi. Hozirgi kunda fazaviy o‘tish masalalarini yechishning eng samarali usuli bu Gibbs o‘lchovlari nazariyasidir. O‘z navbatida, Gibbs o‘lchovlari nazariyasi o‘lchovlar nazariyasining yangi sohasi bo‘lib, bunday o‘lchovlar statistik fizikada ko‘p sonli zarrachalardan tashkil topgan sistemalarni tavsiflashning asosiy vositalaridan biri hisoblanadi. Gibbs o‘lchovlari nazariyasi bo‘yicha tadqiqotlarni rivojlantirish klassik modellar uchun Gibbs o‘lchovlarining mavjudligini tekshirish usullarining yetarli darajada shakllanmaganligi hamda bunday o‘lchovlar to‘plamini tavsiflashning murakkabligi sababli muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda. Shuningdek, statistik mexanikaning klassik modellari samaradorligini oshirish uchun raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli modellarni o‘rganishga alohida e’tibor berilmoqda.

Jahonda Keli daraxtida SOS (solid-on-solid) modeli uchun translyatsion-invariant, davriy va davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlarini tadqiq qilish, davriy, davriy bo‘lmagan va kuchsiz davriy asosiy holatlar to‘plamini o‘rganishga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda. Ushbu yo‘nalishda fazaviy o‘tishning mavjudligini hal qilinishiga oid tadqiqotlar ustivor hisoblanmoqda. Shuningdek, raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli modellarni, raqobatlashuvchi ikkilik o’zaro ta’sirli modellarni o‘rganish dolzarb masalalardan biridir. Bu borada, statistik mexanikaning klassik modellari uchun davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlarini topish hamda topilgan o‘lchovlar to‘plamini tavsiflash, raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli modellar uchun davriy, davriy bo‘lmagan va kuchsiz davriy asosiy holatlar to‘plamini tasvirlash bo‘yicha tadqiqotlarni rivojlantirish dolzarb vazifalardan hisoblanmoqda.

Respublikamizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbig‘iga ega bo‘lgan sanoqli graflarda aniqlangan, spin qiymatlari soni chekli yoki sanoqli bo‘lgan statistik mexanikaning klassik modellari uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlarini tavsiflash borasida salmoqli natijalarga erishilmoqda. “Algebra va uning tatbiqlari, differensial tenglamalar va uning tatbiqlari, chiziqsiz sistemalar, dinamik sistemalar va ularning tatbiqlarini matematik modellashtirish, stoxastik tahlil, funksional analiz, tibbiy-biologik informatika, hisoblash matematikasi”[1] fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilangan. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, xususan, Keli daraxtidagi statistik mexanikaning raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli modellari uchun asosiy holatlar va fazaviy o‘tish nazariyasini rivojlantirish muhim ilmiy ahamiyatga ega hisoblanadi.

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari, 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning Taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi va 2023-yil 11-sentabrdagi PF-158-son “O‘zbekiston – 2030” strategiyasi to‘g‘risidagi Farmonlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Amerikalik olim J.U. Gibbs tomonidan doimiy harorat saqlanadigan va atrof-muhit bilan issiqlik muvozanatida bo‘lgan sistemalar uchun muhim bo‘lgan kanonik Gibbs taqsimoti kiritilishiga qaramasdan, limit Gibbs o‘lchovining umumiy ta’rifi R.L. Dobrushin, O.E. Lanford va D. Ruelle ishlarida berilgan. R.L. Dobrushin tomonidan limit Gibbs o‘lchovining mavjudligi haqidagi teorema isbotlangan. Har bir Gibbs o‘lchovi fizik sistemaning bitta holatiga mos keladi. Agar bir nechta Gibbs o‘lchovlari mavjud bo‘lsa, u holda fizik sistemada fazaviy o‘tish mavjud deyiladi. Faza o‘tishlarining asosiy nazariyasi S.A. Pirogov, Y.G. Sinay, R.A. Minlos, N. Datta, R. Fernandez va M. Zahradnik ishlarida isbotlangan.

Fazaviy o‘tish masalasini o‘rganish uchun $\mathbb{Z}^d$ panjara va Keli daraxtlarida mos ravishda asosan quyidagi usullardan foydalaniladi: $\mathbb{Z}^d$ panjarada H.O. Georgii, R.A. Minlos, R. Payerls, S. A. Pirogov, Y. G. Sinaylar tomonidan kontur usuli (Pirogov-Sinay nazariyasi) qo‘llanilgan va Keli daraxtida P.M. Bleher, N.N. G‘anixodjayev, J. Ruiz, J.B. Martin, U.A. Roziqov, M. Zahradniklar tomonidan Markov tasodifiy maydon nazariyasi qo‘llanilgan. Pirogov-Sinay nazariyasida konfiguratsiyalar Payerls shartlarini qanoatlantiruvchi konturlar yordamida tavsiflanishi mumkin. Y.G. Sinay bu nazariyadan parametrlarning muvofiq fazolar sohasida Gibbs o‘lchovlarining tuzilishi haqida batafsil ma’lumotlar olishda ajoyib vosita sifatida foydalangan. Nazariya faqat bu holatlar bilan cheklanmaydi va A. Bovier, I. Merol, E. Prezutti tomonidan uning juda ko‘plab turli xil tatbiqlarga ega ekanligi, turli xil faza o‘tishlarini o‘z ichiga qamrab olishini isbotlangan. Pirogov-Sinay nazariyasini to‘g‘ridan-to‘g‘ri Keli daraxtiga qo‘llab bo‘lmaydi va kontur usulini Keli daraxtiga qo‘llash masalasi asosan U.A. Roziqov va uning shogirlari tomonidan o‘rganilmoqda.

SOS modeli uchun Keli daraxtida translyatsion-invariant, davriy va davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlarini topish, shuningdek, bunday o‘lchovlar to‘plamining strukturasini tahlil qilish bo‘yicha Y.M. Suhov, U.A. Roziqov, C. Kulske, Sh.A. Shoyusupov, R.M. Xakimov, O.N. Hakimov, M.M. Raxmatullayev va boshqalar ilmiy izlanishlar olib borishgan. Kuchsiz davriy Gibbs oʻlchovi tushunchasi birinchi marta U.A. Roziqov va M.M. Raxmatullayev tomonidan kiritilgan. Keli daraxtida Izing, Potts va HC modellari uchun bunday oʻlchovlarning mavjudligi U.A. Roziqov, M.M. Raxmatullayev va R.M. Xakimovlar ishlarida isbotlangan. Shuni ta'kidlash joizki, Keli daraxtida hozirgacha birorta ham model uchun limit Gibbs oʻlchovlarining toʻliq tavsifi olinmagan.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy oʻquv yurtining ilmiy-tadqiqot ishlari bilan bogʻliqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Chirchiq davlat pedagogika universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq "Fundamental tadqiqotlar" tarmogʻi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi uch holatli raqobatlashuvchi oʻzaro ta'sirli SOS modeli uchun asosiy holatlarni aniqlash hamda Gibbs oʻlchovlari toʻplamini tavsiflashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

ikkinchi va uchinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi oʻzaro ta'sirli SOS modeli uchun kuchsiz davriy asosiy holatlarni tavsiflash;

ikkinchi tartibli Keli daraxtidagi raqobatlashuvchi oʻzaro ta'sirli SOS modeli uchun davriy boʻlmagan asosiy holatlar toʻplamini aniqlash;

yuqori tartibli Keli daraxtida uch holatli SOS modeli uchun davriy boʻlmagan Gibbs oʻlchovlari mavjudligini isbotlash;

ixtiyoriy tartibli Keli daraxtida uch holatli SOS modeli uchun Gibbs oʻlchovlarining yangi sinflarini topish.

Tadqiqotning obyekti Keli daraxtida raqobatlashuvchi oʻzaro ta'sirli va raqobatlashuvchi ikkilik oʻzaro ta'sirli SOS modellaridan iborat.

Tadqiqotning predmeti Keli daraxtida raqobatlashuvchi oʻzaro ta'sirli va raqobatlashuvchi ikkilik oʻzaro ta'sirli SOS modellari uchun ikki indeksli normal boʻluvchiga nisbatan translyatsion-invariant, davriy asosiy holatlar va davriy boʻlmagan asosiy holatlar hamda SOS modeli uchun Gibbs oʻlchovlarining mavjudligini aniqlashdan iborat.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida matematik analiz, funksional analiz, kombinatorika, gruppalar nazariyasi, oʻlchovlar nazariyasi, dinamik sistemalar nazariyasi usullaridan hamda Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekkurent tenglamalari, Pirogov-Sinay nazariyasidan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ikkinchi va uchinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi oʻzaro ta'sirli SOS modeli uchun ikki indeksli normal boʻluvchiga nisbatan kuchsiz davriy asosiy holatlar toʻla tavsiflangan va ularning barchasi davriy ekanligi isbotlangan;

ikkinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi oʻzaro ta'sirli SOS modeli uchun davriy boʻlmagan asosiy holatlarning sanoqli toʻplami topilgan;

tartibi toʻrtdan katta boʻlgan Keli daraxtida uch holatli SOS modeli uchun kamida ikkita davriy boʻlmagan Gibbs oʻlchovlari mavjudligi isbotlangan;

ixtiyoriy tartibli Keli daraxtidagi uch holatli SOS modeli uchun Gibbs oʻlchovlarining yangi kattaroq sinfi mavjudligi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

statistik mexanikaning raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modellari uchun davriy, davriy bo‘lmagan va kuchsiz davriy asosiy holatlar to‘plamini tavsiflangan, natijada qaralayotgan model uchun fazaviy o‘tish mavjudligi aniqlangan;

Keli daraxtida SOS modeli uchun parametrlarning fazaviy o‘tishlarini ta’minlaydigan aniq yoki taqribiy qiymatlari topilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Funksional analiz, sonlar nazariyasi, diskret vaqtli dinamik sistemalar, Gibbs o‘lchovlari nazariyasi, Konturlar usuli, nochiziqli operatorlar nazariyasi usullari va qo‘zg‘almas nuqtalar haqidagi teoremalardan foydalanilgan. Olingan natijalar qat’iy matematik mulohazalarga asoslanib isbotlangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati asosiy holatlarni aniqlash va davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlarini topish borasidagi ilmiy natijalar statistik mexanikaning boshqa modellari uchun asosiy holatlarni tadqiq qilishda qo‘llanilishi mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlariga va asosiy holatlarga oid natijalardan foydalanib fizik sistemalarda faza almashishini tekshirishda asos sifatida xizmat qilishi bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS model uchun asosiy holatlar va SOS modeli uchun Gibbs o‘lchovlari bo‘yicha olingan natijalar asosida:

SOS modeli uchun Gibbs o‘lchovlari mavjudligi haqidagi natijadan YOFA-Ftex-2018-78 raqamli “Amenabel bo‘lmagan graflarda dinamik va termodinamik sistemalar” mavzusidagi fundamental loyihada Keli daraxtida Potts-SOS modeli uchun davriy Gibbs o‘lchovlarini tadqiq qilishda foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining 2023-yil 5-iyundagi 2/221-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi ikkinchi tartibli Keli daraxtida Potts-SOS modeli uchun davriy Gibbs o‘lchovlarini mavjudligini isbotlash imkonini bergan.

Keli daraxtida raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun davriy asosiy holatlarning tavsifi haqidagi natijadan OT-F-4-03 “Uzluksiz hamda diskret vaqtli aniq dinamik sistemalar, qismiy integral operatorlar spektrlari” nomli fundamental loyihada diskret vaqtli dinamik sistemalar asimptotik xossalarini va davriy trayektoriyalarini o‘rganishda foydalanilgan (Qarshi davlat universiteti 2023-yil 6-iyundagi 04/2264-sonli ma’lumotnomasi). Ushbu ilmiy natijaning qo‘llanilishi diskret vaqtli dinamik sistemalar asimptotik xossalarini isbotlash va davriy trayektoriyalarini tavsiflash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 13 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 5 ta xalqaro va 8 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya tadqiqoti mavzusi bo‘yicha jami 18 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 5 ta, jumladan 2 tasi xorijiy va 3 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 97 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi **“Raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun asosiy holatlar”** deb nomlanib, Keli daraxtining gruppaviy tasvirining ikki indeksli normal bo‘luvchilariga mos keladigan raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun davriy, davriy bo‘lmagan va kuchsiz davriy asosiy holatlar to‘plamini tavsiflashga bag‘ishlangan.

Tartibi $k\geq 1$ ga teng bo‘lgan Keli daraxti, bu har bir uchidan $k+1$ ta qirra chiquvchi siklsiz cheksiz graf bo‘lib, odatda $\Gamma^k=(V,L)$ kabi belgilanadi, bu yerda $V-$ daraxtning uchlari to‘plami, $L-$ daraxtning qirralari to‘plami. Agar $x,y\in V$ uchlar uchun ularni tutashtiruvchi $l\in L$ qirra mavjud bo‘lsa, u holda x va y uchlar eng yaqin qo‘shnilar deyiladi va $l=\langle x,y\rangle$ kabi belgilanadi. G_k-barpo etuvchilari $a_1,a_2,...,a_{k+1}$ bo‘lgan $k+1$ ta ikkinchi tartibli siklik gruppalarning ozod ko‘paytmasi bo‘lsin. Ma’lumki, k-tartibli Keli daraxtining V uchlar to‘plami bilan G_k gruppa o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. Keli daraxtida x va y uchlarni tutashtiruvchi eng qisqa yo‘ldagi qirralar soni bu uchlar orasidagi *masofa* deyiladi va $d(x,y)$ bilan belgilanadi.

Fiksirlangan $x^0\in V$ uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$W_n=\{x\in V: d(x,x^0)=n\},\ V_n=\{x\in V: d(x,x^0)\leq n\}.$$

$x\in W_n$ uchun $S(x)=\{y\in W_{n+1}:\ d(x,y)=1\}$ to‘plam x uchning to‘g‘ri avlodlari to‘plami deyiladi.

$x\in G_k$ uchun $S_1(x)=\{y\in G_k:\langle x,y\rangle\}$ to‘plam x uchning yaqin qo‘shni uchlari to‘plami deyiladi. Bu belgilashlardan yagona elementli $\{x_\downarrow\}=S_1(x)\setminus S(x)$ to‘plamni hosil qilamiz.

$\Phi=\{0,1,2,...,m\},\ m\geq 1$ bo‘lsin. V to‘plamda aniqlangan $\sigma: V\mapsto\Phi$ funksiya konfiguratsiya deyiladi. V to‘plamda aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to‘plami $\Omega=\Phi^V$ bilan belgilanadi.

Raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS (solid-on-solid) modelining gamiltoniani quyidagi ko‘rinishga ega:

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=1}} |\sigma(x)-\sigma(y)| - J_2 \sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=2}} |\sigma(x)-\sigma(y)|, \tag{1}$$

bu yerda $(J_1, J_2)\in\mathbb{R}^2$, $\sigma\in\Omega$.

$H(\sigma)-\Omega$ dagi biror gamiltonian, σ va φ chekli nuqtalarda farq qiluvchi konfiguratsiyalar bo‘lsin.

1-ta’rif. *Agar* $\forall\sigma\in\Omega$ *uchun* $H(\varphi)\le H(\sigma)$ *tengsizlik o‘rinli bo‘lsa,* $\varphi\in\Omega$ *konfiguratsiya* H *gamiltonian uchun asosiy holat deyiladi.*

$G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, ..., H_r\}-$faktor gruppa bo‘lsin, bunda $G_k^* -$ indeksi $r\ge 1$ bo‘lgan normal bo‘luvchi.

2-ta’rif. *Agar* $\forall x\in G_k$ *uchun* $x\in H_i$ *bo‘lganda* $\sigma(x)=\sigma_i$ *bo‘lsa, u holda* $\sigma(x)$, $x\in V$ *konfiguratsiya* G_k^**-davriy konfiguratsiya deyiladi.* G_k*-davriy konfiguratsiya translyatsion-invariant konfiguratsiya deyiladi.*

3-ta’rif. *Agar* $\forall x\in G_k$ *uchun* $x_\downarrow\in H_i$, $x\in H_j$ *bo‘lganda* $\sigma(x)=\sigma_{ij}$ *bo‘lsa, u holda* $\sigma(x)$, $x\in V$ *konfiguratsiya* G_k^**-kuchsiz davriy konfiguratsiya deyiladi.*

Dissertatsiyada $m=2$ hol qaraladi, ya’ni $\Phi=\{0,1,2\}$.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafi ikkinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun 2 indeksli normal bo‘luvchiga nisbatan davriy va kuchsiz davriy asosiy holatlar hamda davriy bo‘lmagan asosiy holatlar tavsifiga bag‘ishlangan.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$A_1=\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\le 0;\ J_2\le -\frac{1}{4}J_1\right\},\ A_2=\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\le 0;\ J_2=-\frac{1}{4}J_1\right\},$$

$$A_3=A_9=\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2: J_1=0;\ J_2=0\right\},\ A_4=\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1=0;\ J_2\le 0\right\},$$

$$A_5=\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\le 0;\ J_2\ge -\frac{1}{4}J_1\right\},\ A_6=\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\ge 0;\ J_2\ge \frac{1}{4}J_1\right\},$$

$$A_7=\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\ge 0;\ J_2\le \frac{1}{4}J_1\right\},\ A_8=\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1=0;\ J_2\ge 0\right\},$$

$$A_{10}=\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\ge 0;\ J_2=\frac{1}{4}J_1\right\} \text{ va } \bigcup_{i=1}^{10} A_i=\mathbb{R}^2.$$

$A\subset\{1, 2, ..., k+1\}$ bo‘lsin. $H_A=\left\{x\in G_k: \sum_{j\in A}\omega_j(x) - \text{juft}\right\}$, bunda $\omega_j(x)-x$ so‘zdagi a_j lar soni. Ma’lumki, H_A to‘plam G_k gruppada 2 indeksli normal bo‘luvchi bo‘ladi.

$G_k / H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ faktor-gruppani qaraymiz. H_A-davriy konfiguratsiyalar quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, \text{ agar } x \in H_A \text{ bo'lsa}, \\ \sigma_2, \text{ agar } x \in G_k \setminus H_A \text{ bo'lsa}, \end{cases} \qquad (2)$$

bu yerda $\sigma_i \in \Phi,\ i = 1,2.$

1-teorema. $k = 2$ *bo‘lsin. U holda (1) model uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli:*

a) $|A| = 1$ *bo‘lsin. Agar* $|\sigma_1 - \sigma_2| = i,\ i \in \{0,1,2\}$ *bo‘lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo‘lishi uchun* $(J_1, J_2) \in A_{i^2+1}$ *bo‘lishi zarur va yetarli;*

b) $|A| = 2$ *bo‘lsin.*

i) agar $|\sigma_1 - \sigma_2| = 1$ *bo‘lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo‘lmaydi;*

ii) agar $|\sigma_1 - \sigma_2| = 2$ *bo‘lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo‘lishi uchun* $(J_1, J_2) \in A_6$ *bo‘lishi zarur va yetarli;*

c) $|A| = 3$ *bo‘lsin. Agar* $|\sigma_1 - \sigma_2| = i,\ i \in \{1,2\}$ *bo‘lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo‘lishi uchun* $(J_1, J_2) \in A_{3i+1}$ *bo‘lishi zarur va yetarli;*

1-izoh. 1) 1-teoremaning c) bandidagi H_A-davriy asosiy holatlar $G_2^{(2)}$-davriy asosiy holat bo‘ladi, bu yerda $G_2^{(2)} = \{x \in G_2 : |x| - \text{juft}\}$.

2) Agar $|A| \in \{2,3\}$ va $|\sigma_1 - \sigma_2| = 0$ bo‘lsa, u holda H_A-davriy asosiy holatlar translyatsion-invariant asosiy holat bo‘ladi. Shuning uchun 1-teoremaning b) va c) bandlarda $|\sigma_1 - \sigma_2| = 0$ hol qaralmaydi.

H_A-kuchsiz davriy konfiguratsiyalar quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_{00}, \text{ agar } x_\downarrow \in H_A,\ x \in H_A \text{ bo'lsa}, \\ \sigma_{01}, \text{ agar } x_\downarrow \in H_A,\ x \in G_k \setminus H_A \text{ bo'lsa}, \\ \sigma_{10}, \text{ agar } x_\downarrow \in G_k \setminus H_A,\ x \in H_A \text{ bo'lsa}, \\ \sigma_{11}, \text{ agar } x_\downarrow \in G_k \setminus H_A,\ x \in G_k \setminus H_A \text{ bo'lsa}, \end{cases} \qquad (3)$$

bu yerda $\sigma_{ij} \in \Phi,\ \ i, j \in \{0, 1\}$.

Kelgusida qulaylik uchun (3) ko‘rinishdagi H_A-kuchsiz davriy konfiguratsiyani $\sigma = (\sigma_{00}, \sigma_{01}, \sigma_{10}, \sigma_{11})$ ko‘rinishda yozamiz.

Quyidagi teorema raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun kuchsiz davriy asosiy holatlarni tavsiflaydi.

2-teorema. $k = 2$ *bo‘lsin. U holda (1) model uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli:*

I. a) $|A| = 1$ *bo‘lsin.*

i) agar $(J_1,J_2)\in A_2$ *bo‘lsa, u holda to‘rtta* H_A*-kuchsiz davriy asosiy holatlar mavjud bo‘lib, ular* H_A*-davriy bo‘ladi, lekin translyatsion-invariant bo‘lmaydi va quyidagi ko‘rinishga ega:* $(l,p,l,p),\ |l-p|=1,\ l,p\in\{0,1,2\}$;

ii) agar $(J_1,J_2)\in A_5$ *bo‘lsa, u holda ikkita* H_A*-kuchsiz davriy asosiy holatlar mavjud bo‘lib, ular* H_A*-davriy bo‘ladi, lekin translyatsion-invariant bo‘lmaydi va quyidagi ko‘rinishga ega:* $(l,p,l,p),\ |l-p|=2,\ l,p\in\{0,\ 2\}$;

b) $|A|=2$ *bo‘lsin. Agar* $(J_1,J_2)\in A_6$ *bo‘lsa, u holda ikkita* H_A*-kuchsiz davriy asosiy holatlar mavjud bo‘lib, ular* H_A*-davriy bo‘ladi, lekin translyatsion-invariant bo‘lmaydi va quyidagi ko‘rinishga ega:* $(l,p,l,p),\ |l-p|=2$, $l,p\in\{0,\ 2\}$;

II. I punktda keltirilgan konfiguratsiyalardan tashqari barcha (3) ko‘rinishdagi konfiguratsiyalar translyatsion-invariant asosiy holat bo‘ladi.

2-izoh. $|A|=3$ hol uchun, H_A normal bo‘luvchilar $G_2^{(2)}$ bilan ustma-ust tushgani uchun H_A-kuchsiz davriy asosiy holatlar (umumiy holda $G_2^{(2)}$- kuchsiz davriy konfiguratsiya) $G_2^{(2)}$-davriy asosiy holat bo‘ladi.

Endi biz davriy bo‘lmagan asosiy holatlarni topamiz. $\mathrm{GS}(H)$ bilan (1) ko‘rinishdagi gamiltonianning barcha asosiy holatlar to‘plami belgilaylik.

3-teorema. *(i) Agar* $(J_1,J_2)\in A_3$ *bo‘lsa, u holda* $GS(H)=\Omega$.

(ii) Agar $(J_1,J_2)\in A_i\setminus\{(0,0)\},\ i=2,8,10$ *bo‘lsa, u holda davriy bo‘lmagan asosiy holatlarning kamida sanoqli to‘plami mavjud.*

Birinchi bobning uchinchi paragrafi uchinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun 2 indeksli normal bo‘luvchiga nisbatan davriy va kuchsiz davriy asosiy holatlar tavsifiga bag‘ishlangan.

Birinchi bobning uchinchi paragrafining asosiy natijasi quyidagi teoremada keltirilgan.

4-teorema. $k=3$ *bo‘lsin. (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo‘lishi uchun quyidagi shartlardan biri bajarilishi zarur va yetarli:*

a) $|A|=1$.

i) $|\sigma_1-\sigma_2|=0$ *va* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\le 0;\ J_2\le -\frac{1}{6}J_1\right\}$;

ii) $|\sigma_1-\sigma_2|=1$ *va* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\le 0;\ J_2=-\frac{1}{6}J_1\right\}$;

iii) $|\sigma_1-\sigma_2|=2$ *va* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\le 0;\ -\frac{1}{6}J_1\le J_2\le -\frac{1}{2}J_1\right\}$;

b) $|A|=2.$ $|\sigma_1-\sigma_2|=2$ *va* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_2\ge \frac{1}{2}|J_1|\right\}$;

c) $|A|=3.$ $|\sigma_1-\sigma_2|=2$ *va* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\ge 0;\ \frac{1}{6}J_1\le J_2\le \frac{1}{2}J_1\right\}$;

d) $|A|=4$.

i) $|\sigma_1-\sigma_2|=1$ *va* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1=0;\ J_2\le 0\right\}$;

ii) $|\sigma_1-\sigma_2|=2$ *va* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\ge 0;\ J_2\le \frac{1}{6}J_1\right\}$.

3-izoh. $|A|\in\{2,3\}$ bo‘lsin. Agar $|\sigma_1-\sigma_2|=1$ bo‘lsa, u holda H_A - davriy asosiy holat bo‘lmaydi.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi **“Keli daraxtida raqobatlashuvchi ikkilik o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun asosiy holatlar”** deb nomlanib, ushbu bob ikkinchi va uchinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi ikkilik o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun davriy va davriy bo‘lmagan asosiy holatlarga bag‘ishlangan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida asosiy tushuncha va ma’lum faktlar keltirilgan. Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida ikkinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi ikkilik o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun asosiy holatlar to‘plamini tavsiflash muammosi hal qilingan.

Raqobatlashuvchi ikkilik o‘zaro ta’sirli SOS modelining gamiltoniani quyidagi ko‘rinishga ega:

$$H(\sigma)=-J_1\sum_{\substack{\langle x,y\rangle:\\ d(x,y)=1}}|\sigma(x)-\sigma(y)|-J_2\sum_{\substack{\rangle x,y\langle:\\ d(x,y)=2}}|\sigma(x)-\sigma(y)|-J_3\sum_{\substack{\rangle x,y\langle:\\ d(x,y)=2}}|\sigma(x)-\sigma(y)|, \qquad (4)$$

bu yerda $(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3$, $\rangle x,y\langle-$masofasi 2 ga teng bo‘lgan turli qavatdagi qo‘shnilar va $\rangle x,y\langle-$masofasi 2 ga teng bo‘lgan bitta qavatdagi qo‘shnilar.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$A_1^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\le 0;\ J_2\le -\frac{1}{4}J_1;\ J_3\le -\frac{1}{2}J_1-J_2\right\},$$

$$A_2^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\le 0;\ J_2=-\frac{1}{4}J_1;\ J_3\le J_2\right\},$$

$$A_3^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\le 0;\ J_2\le -\frac{1}{4}J_1;\ J_3=-\frac{1}{2}J_1-J_2\right\},$$

$$A_6^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1=0;\ J_2\le 0;\ J_3\le -J_2\right\},$$

$$A_7^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\le 0;\ J_2\ge -\frac{1}{4}J_1;\ J_3\le J_2\right\},$$

$$A_9^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\le 0;\ J_2\ge J_3;\ J_3\ge -\frac{1}{2}J_1-J_2\right\},$$

$$A_{10}^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\ge 0;\ J_2\ge \frac{1}{4}J_1;\ J_3\le J_2\right\},$$

$$A_{11}^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\geq 0;|\ J_2|\leq J_3;\ J_3\geq\frac{1}{2}J_1-J_2\right\},$$

$$A_{12}^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\geq 0;\ J_2\leq\frac{1}{4}J_3;\ J_3\leq\frac{1}{2}J_1-J_2\right\},$$

$$A_{13}^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1=0;\ J_2\geq 0;\ J_3\leq J_2\right\}.$$

5-teorema. $k=2$ *bo'lsin. U holda (4) ko'rinishdagi model uchun quyidagi tasdiqlar o'rinli:*

a) $|A|=1$ *bo'lsin.*

i) agar $\sigma_1=\sigma_2,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$ *bo'lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo'lishi uchun* $(J_1,J_2,J_3)\in A_1^{(2)}$ *bo'lishi zarur va yetarli;*

ii) agar $\sigma_1=\sigma_2\pm 1,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$ *bo'lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo'lishi uchun* $(J_1,J_2,J_3)\in A_2^{(2)}\cap A_3^{(2)}$ *bo'lishi zarur va yetarli;*

iii) agar $\sigma_1=\sigma_2\pm 2,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$ *bo'lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo'lishi uchun* $(J_1,J_2,J_3)\in A_7^{(2)}\cap A_9^{(2)}$ *bo'lishi zarur va yetarli;*

b) $|A|=2$ *bo'lsin.*

i) agar $\sigma_1=\sigma_2\pm 1,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$ *bo'lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo'lmaydi;*

ii) agar $\sigma_1=\sigma_2\pm 2,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$ *bo'lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo'lishi uchun* $(J_1,J_2,J_3)\in A_{10}^{(2)}\cap A_{11}^{(2)}$ *bo'lishi zarur va yetarli;*

c) $|A|=3$ *bo'lsin.*

i) agar $\sigma_1=\sigma_2\pm 1,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$ *bo'lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo'lishi uchun* $(J_1,J_2,J_3)\in A_6^{(2)}$ *bo'lishi zarur va yetarli;*

ii) agar $\sigma_1=\sigma_2\pm 2,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$ *bo'lsa, u holda (2) konfiguratsiya* H_A*-davriy asosiy holat bo'lishi uchun* $(J_1,J_2,J_3)\in A_{12}^{(2)}$ *bo'lishi zarur va yetarli.*

Quyidagi belgilashni olaylik. $l(x)=l(a_{i_1}...a_{i_n})=i_1$, bu yerda $x\in G_k$, ya'ni $l(x)-$ x so'zdagi birinchi harfining indeksi va

$$P=\{x\in G_k:|\,x|\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4)\}\cup\{x\in G_k:|\,x|\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,4),\ l(x)=3\}\cup$$
$$\cup\{x\in G_k:|\,x|\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,4),\ l(x)\neq 3\},\ \ Q=G_k\setminus P.$$

6-teorema. $k=2$ *bo'lsin. Agar* $(J_1,J_2,J_3)\in A_{13}^{(2)}$ *bo'lsa, u holda kamida ikkita davriy bo'lmagan asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishda bo'ladi:*

$$\varphi(x)=\begin{cases} i,\ \text{agar } x\in P\ \text{ bo'lsa,}\\ j,\ \text{agar } x\in Q\ \text{bo'lsa,}\end{cases}\qquad (5)$$

bu yerda $|i-j|=2,\ i,j\in\Phi.$

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafi uchinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi ikkilik o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun H_A-davriy asosiy holatlar tavsifiga bag‘ishlangan.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A_1^{(3)} = \left\{ (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 \le 0; \ J_2 \le -\frac{1}{6} J_1; \ J_3 \le -\frac{1}{4} J_1 - \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_2^{(3)} = \left\{ (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 \le 0; \ J_2 = -\frac{1}{6} J_1; \ J_3 \le J_2 \right\},$$

$$A_3^{(3)} = \left\{ (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 \le 0; \ J_2 \le -\frac{1}{6} J_1, \ J_3 = -\frac{1}{4} J_1 - \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_5^{(3)} = \left\{ (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 \le 0; \ J_2 \ge -\frac{1}{6} J_1; \ J_3 \le -\frac{1}{4} J_1 + \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_6^{(3)} = \left\{ (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 \le 0; \ J_2 \le -\frac{1}{2} J_1; \ J_3 \ge -\frac{1}{4} J_1 - \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_9^{(3)} = \left\{ (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 = 0; \ J_2 \ge 0; \ J_3 \ge \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_{10}^{(3)} = \left\{ (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 \ge 0; \ J_2 \ge \frac{1}{6} J_1; \ J_3 \le \frac{1}{4} J_1 + \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_{11}^{(3)} = \left\{ (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 \ge 0; \ J_2 \le \frac{1}{2} J_1; \ J_3 \ge \frac{1}{4} J_1 - \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_{18}^{(3)} = \left\{ (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 = 0; \ J_2 \le 0; \ J_3 \le -\frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_{19}^{(3)} = \left\{ (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 \ge 0; \ J_2 \le \frac{1}{6} J_1; \ J_3 = \frac{1}{4} J_1 - \frac{1}{2} J_2 \right\}.$$

7-teorema. *$k = 3$ bo‘lsin. U holda (4) ko‘rinishdagi model uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli:*

a) $|A| = 1$ bo‘lsin.

i) agar $(J_1, J_2, J_3) \in A_1^{(3)}$ bo‘lsa, u holda har bir translyatsion-invariant konfiguratsiya translyatsion-invariant asosiy holat bo‘ladi;

ii) agar $(J_1, J_2, J_3) \in A_2^{(3)} \cap A_3^{(3)}$ bo‘lsa, u holda (2) ko‘rinishdagi $\sigma_1 = \sigma_2 \pm 1, \ \sigma_1, \sigma_2 \in \Phi$ tenglikni qanoatlantiradigan H_A-davriy konfiguratsiyalar asosiy holat bo‘ladi;

iii) agar $(J_1, J_2, J_3) \in A_5^{(3)} \cap A_6^{(3)}$ bo‘lsa, u holda (2) ko‘rinishdagi $\sigma_1 = \sigma_2 \pm 2, \ \sigma_1, \sigma_2 \in \Phi$ tenglikni qanoatlantiruvchi H_A-davriy konfiguratsiyalar asosiy holat bo‘ladi;

b) $|A|=2$ *bo'lsin. Agar* $(J_1, J_2, J_3) \in A_9^{(3)}$ *bo'lsa, u holda (2) ko'rinishdagi* $\sigma_1=\sigma_2 \pm 2,\ \sigma_1,\sigma_2 \in \Phi$ *tenglikni qanoatlantiruvchi* H_A*-davriy konfiguratsiyalar asosiy holat bo'ladi.*

c) $|A|=3$ *bo'lsin. Agar* $(J_1, J_2, J_3) \in A_{10}^{(3)} \cap A_{11}^{(3)}$ *bo'lsa, u holda (2) ko'rinishdagi* $\sigma_1=\sigma_2 \pm 2,\ \sigma_1,\sigma_2 \in \Phi$ *tenglikni qanoatlantiruvchi* H_A*-davriy konfiguratsiyalar asosiy holat bo'ladi.*

d) $|A|=3$ *bo'lsin.*

i) agar $(J_1, J_2, J_3) \in A_{18}^{(3)}$ *bo'lsa, u holda (2) ko'rinishdagi* $\sigma_1=\sigma_2 \pm 1,\ \sigma_1,\sigma_2 \in \Phi$ *tenglikni qanoatlantiruvchi* $G_k^{(2)}$*-davriy konfiguratsiyalar asosiy holat bo'ladi.*

ii) agar $(J_1, J_2, J_3) \in A_{19}^{(3)}$ *bo'lsa, u holda (2) ko'rinishdagi* $\sigma_1=\sigma_2 \pm 2,\ \sigma_1,\sigma_2 \in \Phi$ *tenglikni qanoatlantiruvchi* $G_k^{(2)}$*-davriy konfiguratsiyalar asosiy holat bo'ladi.*

4-izoh. $k=3$ va $|A| \in \{2,3\}$ bo'lsin. Agar $\sigma_1=\sigma_2 \pm 1, \sigma_1,\sigma_2 \in \Phi,$ bo'lsa, u holda (2) ko'rinishda aniqlangan konfiguratsiya H_A-davriy asosiy holat bo'lmaydi.

Dissertatsiyaning uchinchi bobi **"Keli daraxtida SOS modeli uchun Gibbs o'lchovlari"** deb nomlangan.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida Gibbs o'lchovlari haqida asosiy ta'riflar va ma'lum faktlar keltirilgan.

SOS modelining gamiltoniani quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\substack{x,y \in V: \\ d(x,y)=1}} |\sigma(x) - \sigma(y)|, \tag{6}$$

bu yerda $J \in \mathbb{R}$.

$h: x \mapsto h_x = (h_{0,x}, h_{1,x}, ..., h_{m,x}) \in \mathbb{R}^{m+1} -$ $x \in V \setminus \{x^0\}$ ning vektor qiymatli funksiyasi bo'lsin. Ω_{V_n} da $\mu^{(n)}$ ehtimollik o'lchovi quyidagicha aniqlanadi:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\Big(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\Big), \tag{7}$$

bu yerda $\sigma_n \in \Omega_{V_n},\ \beta = 1/T,\ T > 0-$harorat,

$$Z_n = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp\Big(-\beta H(\tilde{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\tilde{\sigma}(x),x}\Big).$$

Agar ixtiyoriy $n \geq 1$ va $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ uchun

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \tag{8}$$

tenglik bajarilsa $\mu^{(n)}$ ehtimollik o'lchovlar ketma-ketligi muvofiq deb ataladi, bu yerda $\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}$.

Agar $\mu^{(n)}$ uchun muvofiqlik sharti bajarilsa, u holda Ω da $\forall n$ va $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ uchun quyidagi

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi yagona μ o‘lchov mavjud. Bunday o‘lchov H gamiltonian va $x \mapsto h_x, x \neq x_0$ vektor qiymatli funksiyaga mos keladigan limit Gibbs o‘lchovi deb ataladi.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafi (6) model uchun ba’zi davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlarini tadqiq qilishga bag‘ishlangan.

8-teorema. *SOS modeli uchun* $\theta = \theta_{cr} (\approx 0.1242)$ *bo‘lsa, u holda 5-tartibli Keli daraxtida kamida ikkita davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovi mavjud.*

$k = a + b + 2,\ a, b \in \mathbb{N}$ tartibli Keli daraxtini qaraymiz. Quyidagicha belgilash kiritaylik:

$$E(a,b) = \left\{\theta \in \mathbb{R}_+ : \theta < \theta_{cr} (\approx 0.1414)\right\} \cap \left\{\theta \in \mathbb{R}_+ : (y_1(\theta))^a \cdot (y_2(\theta))^b = 1\right\},$$

bu yerda y_1 va y_2 lar quyidagi $\ln y_i = \ln \dfrac{y_i^2 + 2\theta}{\theta^2 + \theta y_i^2 + 1}$, $i = 1,2$ tenglamaning yechimlari.

9-teorema. SOS modeli uchun $\theta \in E(a,b)$ bo‘lsa, u holda $k = a + b + 2, a, b \in \mathbb{N}$ tartibli Keli daraxtida kamida ikkita davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovi mavjud.

5-izoh. 8-teoremadagi $a = 1,\ b = 2$ hol uchun $E(a,b) \neq \varnothing$. Ko‘rish mumkinki, $a = n, b = 2n, \forall n \in N$ hol uchun ham $E(a,b) \neq \varnothing$.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafi ixtiyoriy tartibli Keli daraxtida SOS modeli uchun Gibbs o‘lchovlari sinfi yangi o‘lchovlar bilan kengaytirishga bag‘ishlangan. Bu paragrafda Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi uchun shartlar topilgan. Shuningdek, bu o‘lchovlar ma’lum bo‘lgan Gibbs o‘lchovlari bilan taqqoslanib, parametrlarning ba’zi qiymatlarida ma’lum bo‘lgan Gibbs o‘lchovlaridan farqli bo‘lishi isbotlangan. Bundan tashqari, haroratga bog‘liq bo‘lgan parametrlarning ba’zi qiymatlarida yangi Gibbs o‘lchovlar soni kamida bitta, ikkita yoki uchta ekanligi topilgan.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun Gibbs o‘lchovlarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Dissertatsiyaning birinchi bobida ikkinchi va uchinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli haqida so‘z boradi. Dissertatsiyaning ikkinchi bobida ikkinchi va uchinchi tartibli Keli daraxtida eng yaqin qo‘shnilar va raqobatlashuvchi ikkilik o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun davriy asosiy holatlar qaralgan. Uchinchi bob esa ixtiyoriy tartibli Keli daraxtida uch holatli SOS modeli uchun Gibbs o‘lchovlari mavjudligi masalalarini yechishga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

ikkinchi va uchinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun ikki indeksli normal bo‘luvchilarga nisbatan davriy va kuchsiz davriy asosiy holatlar tavsiflangan;

ikkinchi va uchinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi ikkilik o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun davriy asosiy holatlar tavsiflangan;

ikkinchi tartibli Keli daraxtida raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli va raqobatlashuvchi ikkilik o‘zaro ta’sirli SOS modellari uchun davriy bo‘lmagan asosiy holatlar tavsiflangan;

beshinchi va $k = a + b + 2,\ a, b \in \mathbb{N}$ tartibli Keli daraxtida uch holatli SOS modeli uchun kamida ikkita davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovi mavjudligi isbotlangan;

ixtiyoriy tartibli Keli daraxtida SOS modeli uchun Gibbs o‘lchovlari sinfi yangi o‘lchovlar bilan kengaytirilgan va bu o‘lchovlar ma’lum bo‘lgan Gibbs o‘lchovlari bilan taqqoslanib, parametrlarning ba’zi qiymatlarida ma’lum bo‘lgan Gibbs o‘lchovlaridan farqli bo‘lishi isbotlangan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ЧИРЧИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

АБРАЕВ БУНЁД УРИНБОЕВИЧ

МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ SOS С КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Самарканд–2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2021.3.PhD/FM619.

Диссертация выполнена в Чирчикском государственном педагогическом университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (https://www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Официальные оппоненты:	**Ботиров Голибжон Исроилович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
	Хакимов Отабек Норбута угли доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Бухарский государственный университет**

Защита диссертации состоится «23» 01 2024 года в 10^{00} часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете (Адрес: 140104, г. Самарканд, ул. Университетский бульвар, 15. Тел.: (+998 66) 231 06 32, факс: (+998 66) 235 19 38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за № 2). (Адрес: г. Самарканд, ул. Университетский бульвар, 15. Тел.: (+998 66) 231 06 32, факс: (+998 66) 235 19 38).

Автореферат диссертации разослан «11» 01 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от «11» 01 2024 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI • SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI •

А.С. Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук

С.Н. Лакаев
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во многих научных и практических исследованиях, проводимых в мире, изучение теории фазового перехода в физике, биологии, статистической механике и других областях считается одной из самых современных научных областей науки. В настоящее время наиболее эффективным методом решения задач фазового перехода является теория мер Гиббса. В свою очередь теория мер Гиббса представляет собой новую ветвь теории мер, а такие меры являются одним из основных средств описания систем, состоящих из большого числа частиц, в статистической физике. Развитие исследований относительно существования мер Гиббса является одной из востребованных задач из-за сложности описания гиббсовских мер для классических моделей и недостаточности формализованной проверки их существования. Также особое внимание уделяется исследованию моделей с конкурирующими взаимодействиями для повышения эффективности классических моделей статистической механики.

В мире проводятся научные исследования по изучению трансляционно-инвариантных, периодических и непериодических мер Гиббса, а также множества периодических, слабо периодических и непериодических основных состояний для модели SOS (solid-on-solid) на дереве Кэли. В этом направлении исследования по решению проблемы существования фазового перехода являются приоритетными. Также одной из актуальных задач является изучение моделей с конкурирующими взаимодействиями и моделей с конкурирующими бинарными взаимодействиями. В связи с этим актуальными проблемами считаются исследования по нахождению мер Гиббса для классических моделей статистической механики и описанию множества таких мер, а также множества периодических, непериодических и слабо периодических основных состояний для моделей с конкурирующими взаимодействиями.

В нашей республике значительные результаты достигаются в описании трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для классических моделей статистической механики с конечным или счетным значением спина, заданным на счетных графах, что является одной из областей фундаментальных наук с научным и практическим применением. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям, таким как алгебра и ее приложения, дифференциальные уравнения и ее приложения, моделирование нелинейных систем, динамические системы и их приложения, стохастический анализ, функциональный анализ, медико-биологическая информатика, вычислительная математика[2], является

---

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан №PQ-4387 от 9 июля 2019 года «О государственной поддержке дальнейшего развития математического образования и науки, а также мерах по коренному совершенствованию деятельности Института математики Академии наук Республики Узбекистан имени В. И. Романовского».

основной задачей и направлением математической науки. При этом наиболее важное научное значение имеют исследования основных состояний и теории фазовых переходов для моделей статистической механики с конкурирующими взаимодействими на дереве Кэли.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, определенных в Указах Президента Республики Узбекистан № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», в постановлениях № УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы» и № УП-158 от 11 сентября 2023 года «Узбекистан – 2030», Указах о стратегии, а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Несмотря на то, что американский ученый Дж.У. Гиббс ввел каноническое распределение Гиббса, важное для систем с постоянной температурой и находящихся в тепловом равновесии с окружающей средой, общее определение предельной меры Гиббса дано в работах Р.Л. Добрушина, О.Е. Ланфорда и Д. Руэлля. Р.Л. Добрушин доказал теорему о существовании предельной меры Гиббса. Каждая мера Гиббса соответствует одному состоянию физической системы. Если сушествует несколько мер Гиббса, то говорят, что в физической системе имеет место фазовый переход. Основы теории фазовых переходов были доказаны в работах С.А. Пирогова, Я.Г. Синая, Р.А. Минлоса, Н. Датта, Р. Фернандеса, А.С. Д Энтера и М. Захрадника.

Для изучения проблемы фазового перехода для системы на $\mathbb{Z}^d$ и на дереве Кэли, соответственно, существуют два основных метода: на $\mathbb{Z}^d$ метод контуров (теория Пирогова-Синая), который был изучен в работах Х.О. Георги, Р.А. Минлоса, Р. Пайерлса, С.А. Пирогова, Я.Г. Синая, и на дереве Кэли метод теории случайных полей Маркова, который был применен в работах П.М. Блехера, Н.Н. Ганиходжаева, Ж. Руиза, Ж.Б. Мартина, У.А. Розикова, М. Захрадника. В теории Пирогова–Синая конфигурации могут описываться контурами, удовлетворяющими условию Пайерлса. Эта теория предоставляет средство для очень подробного понятия структуры мер Гиббса параметров в области соответствующего пространства в работе Я.Г. Синая. Но теория не ограничивается такими случаями и в работах А. Бовиэра, И. Мерола, Э. Презутти доказано ее применение к самым разным ситуациям, охватывая различные типы фазовых переходов. Теорию Пирогова–Синая невозможно напрямую применить к деревьям Кэли. Задача применения контурных методов на дереве Кэли в основном начала изучаться У.А. Розиковым и его учениками.

Ю.М. Сухов, У.А. Розиков, К. Кульске, Ш.А. Шоюсупов, Р.М. Хакимов, О.Н. Хакимов, М.М. Рахматуллаев и другие провели научные исследования по нахождению трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса на дереве Кэли для модели SOS, а также по анализу структуры множеств таких мер. Понятия слабо периодической меры Гиббса и слабо периодического основного состояния (для модели Изинга) впервые были введены У.А. Розиковым и М.М. Рахматуллаевым. Существование таких мер для моделей Изинга, Поттса и НС на дереве Кэли было доказано в работах У.А. Розикова, М.М. Рахматуллаева и Р.М. Хакимова. Отметим, что для любой модели на дереве Кэли до сих пор не получено полное описание предельных мер Гиббса и основных состояний.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательских работ в направлении «Фундаментальные исследования» Чирчикского государственного педагогического университета.

Целью исследования являются описание множества мер Гиббса и нахождение основных состояний для модели SOS с тремя состояниями и с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.

Задачи исследования:

описание слабо периодических основных состояний для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями относительно нормального делителя индекса два на дереве Кэли порядков два и три;

нахождение непериодических основных состояний для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка два;

доказательство существования непериодических мер Гиббса для модели SOS с тремя состояниями на дереве Кэли высокого порядка;

нахождение новых классов мер Гиббса для модели SOS с тремя состояниями на дереве Кэли произвольного порядка.

Объектом исследования являются основные состояния для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями и бинарными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.

Предметом исследования являются трансляционно-инвариантные, периодические основные состояния относительно нормального делителя индекса два и непериодические основные состояния для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли и нахождение меры Гиббса для модели SOS.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы математического анализа, функционального анализа, комбинаторики, теории групп, теории мер, теории динамических систем, также теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории, теории Пирогова-Синая.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказано, что слабо периодические основные состояния являются периодическими для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядков два и три относительно нормального делителя индекса два;

найдено существование счетного множества непериодических основных состояний для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка два;

доказано существование не менее двух непериодических мер Гиббса для модели SOS с тремя значениями спина на дереве Кэли порядка больше четырех;

доказано существования расширенного класса новых мер Гиббса для модели SOS с тремя состояниями на дереве Кэли.

Практическими результатами исследования являются следующие:

для модели SOS статистической механики с конкурирующими взаимодействиями было описано множество периодических, непериодических и слабо периодических основных состояний, в результате чего было установлено, что для рассматриваемой модели существует фазовый переход;

найдено точное или приближенное значение параметра, обеспечивающее для фазового перехода модели SOS на дереве Кэли.

Достоверность результатов исследования обосновывается использованием известных методов функционального анализа, теории чисел, динамических систем с дискретным временем, теории мер Гиббса, метода Контура, теории нелинейных операторов и теоремы о неподвижных точках. Полученные результаты доказаны на основе строгости математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что научные результаты по определению основных состояний могут быть использованы при исследовании основных состояний для других моделей статистической механики.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты, касающиеся непериодических мер Гиббса и основных состояний, позволяют проверить существование фазовых переходов физических систем.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

методы доказательства существования мер Гиббса для модели SOS использовались в фундаментальном проекте № YOFA-Ftex-2018-78 «Динамические и термодинамические системы на неаменабельных графах» при исследовании периодических мер Гиббса для модели Поттс-SOS на дереве Кэли (Свидетельство Института математики им. В.И. Романовского АН РУз от 5 июня 2023 г. № 2/221). Применение научных результатов позволило доказать существование периодических мер Гиббса для модели Поттс-SOS на дереве Кэли порядка два;

метод описания периодических основных состояний для модели SOS с конкурирующими взаимодествиями на дереве Кэли использовался в фундаментальном проекте ОТ-Ф-4-03 “Непрерывные и дискретные точные динамические системы, спектры частных интегральных операторов” при изучении асимптотических свойств и периодических траекторий, используемых в дискретных динамических системах (справка Каршинского государственного университета № 04/2264 от 06.06.2023). Применение этого научного результата дало возможность изучить асимптотические свойства и периодические траектории динамических систем с дискретным временем.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждались на 13 научно-практичеких конференциях, в том числе на 5 международных и 8 республиканских конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан по защите диссертации на степень доктора философии. 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах и 3 – в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на девять параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 97 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении освещаются актуальность и необходимость исследования, соответствие его приоритетам науки и технологий, уровень изученности проблемы, цель, задачи, объект и предмет исследования, научная новизна и практические результаты, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, реализация результатов исследований, опубликованные работы и информация о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, озаглавленная **« Об основных состояниях для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями»**, посвящена описанию множества периодических, непериодических и слабо периодических основных состояний для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями, соответствующих нормальным делителям индекса 2 группового представления дерева Кэли.

Пусть $\Gamma^k = (V, L),\ k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, где $V -$ множество вершин, $L -$ множество ребер Γ^k. Две вершины x и y называются ближайшими соседями, если существует ребро $l \in L$, соединяющее их, и для них будем использовать обозначение $l = \langle x, y \rangle$. Пусть $G_k -$свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$, соответственно. Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и элементами группы G_k. Расстояние $d(x,y)$ между вершинами x и y на дереве Кэли есть количество ребер кратчайшего пути, соединяющего вершины x и y.

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V : d(x,x^0) = n\}, V_n = \{x \in V : d(x,x^0) \le n\}.$$

Для каждого $x \in G_k$, через $S(x)$ обозначается множество прямых потомков точки x, т.е. если $x \in W_n$, то $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x,y) = 1\}$. Через $S_1(x)$ обозначается множество всех ближайших соседей точки x, т.е. $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x,y \rangle \in L\}$. Множество $S_1(x) \setminus S(x)$ является одноэлементным. Пусть $\{x_\downarrow\}$ единственный элемент этого множества.

Пусть $\Phi = \{0,1,2,...,m\}$. Функция $\sigma:\ x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$ называется конфигураций на V. Множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели SOS (solid-on-solid) с конкурирующими взаимодействиями имеет вид:

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\substack{x,y \in V: \\ d(x,y)=1}} |\sigma(x) - \sigma(y)| - J_2 \sum_{\substack{x,y \in V: \\ d(x,y)=2}} |\sigma(x) - \sigma(y)|, \tag{1}$$

где $(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma \in \Omega$.

Пусть $H(\sigma)-$ некоторый гамильтониан, σ и $\varphi-$конфигурации, различающиеся в конечных точках.

Определение 1. *Конфигурация $\varphi \in \Omega$ называется основным состоянием для гамильтониана H, если $H(\varphi) \le H(\sigma), \forall \sigma \in \Omega$.*

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1,...,H_r\}-$фактор-группа, где G^*_k-нормальный делитель индекса r с $r \ge 1$.

Определение 2. Конфигурация σ называется G_k^*-*периодической*, если $\sigma(x) = \sigma_i$ для $x \in H_i$, $\forall x \in G_k$. G_k - периодическая конфигурация называется *трансляционно-инвариантной*.

Определение 3. Конфигурация σ называется G_k^*-*слабо периодической*, если $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ при $x_\downarrow \in H_i$ и $x \in H_j$ для любого $x \in G_k$.

Диссертации рассматривается случай $m = 2$, то есть $\Phi = \{0,1,2\}$.

Второй параграф первой главы посвящен описанию периодических и слабо периодических основных состояний для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями, соответствующих нормальным делителям индекса 2 группового представления, а также непериодических основных состояний на дерева Кэли порядка два.

Обозначим

$$A_1 = \left\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 :\ J_1 \le 0;\ J_2 \le -\frac{1}{4}J_1\right\},\ A_2 = \left\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 :\ J_1 \le 0;\ J_2 = -\frac{1}{4}J_1\right\},$$

$$A_3 = A_9 = \left\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : J_1 = 0;\ J_2 = 0\right\},\ A_4 = \left\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 :\ J_1 = 0;\ J_2 \le 0\right\},$$

$$A_5 = \left\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 :\ J_1 \le 0;\ J_2 \ge -\frac{1}{4} J_1\right\},\ A_6 = \left\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 :\ J_1 \ge 0;\ J_2 \ge \frac{1}{4} J_1\right\},$$

$$A_7 = \left\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 :\ J_1 \ge 0;\ J_2 \le \frac{1}{4} J_1\right\},\ A_8 = \left\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 :\ J_1 = 0;\ J_2 \ge 0\right\},$$

$$A_{10} = \left\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 :\ J_1 \ge 0;\ J_2 = \frac{1}{4} J_1\right\} \text{ и } \bigcup_{i=1}^{10} A_i = \mathbb{R}^2.$$

Пусть $A \subset \{1, 2, ..., k+1\}$. $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{четное}\}$, где $\omega_x(a_i) -$ количество a_i в слове *x*. H_A является нормальным делителем индекса 2 в G_k.

Рассмотрим фактор-группу $G_k / H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$. H_A-периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, \text{ если } x \in H_A, \\ \sigma_2, \text{ если } x \in G_k \setminus H_A, \end{cases} \tag{2}$$

где $\sigma_i \in \Phi,\ i = 1, 2$.

Теорема 1. *Пусть* $k = 2$. *Тогда для модели (1) выполняются следующие утверждения:*

а) Пусть $|A| = 1$. *Если* $|\sigma_1 - \sigma_2| = l,\ l \in \{0, 1, 2\}$, *то конфигурация (2) является* H_A*-периодическим основным состоянием тогда и только тогда, когда* $(J_1, J_2) \in A_{l^2+1}$;

б) Пусть $|A| = 2$.

i) если $|\sigma_1 - \sigma_2| = 1$, *то* H_A*-периодического основного состояния не существует;*

ii) если $|\sigma_1 - \sigma_2| = 2$, *то конфигурация (2) является* H_A*-периодическим основным состоянием тогда и только тогда, когда* $(J_1, J_2) \in A_6$.

c) Пусть $|A| = 3$. *Если* $|\sigma_1 - \sigma_2| = l,\ l \in \{1, 2\}$, *то конфигурация (2) является* H_A*-периодическим основным состоянием и существует тогда и только тогда, когда* $(J_1, J_2) \in A_{3l+1}$;

Замечание 1. 1) В случае с), H_A-периодическое основное состояние совпадает с $G_2^{(2)}$-периодическим основным состоянием, где $G_2^{(2)} = \left\{x \in G_2 : |x| - \text{четно}\right\}$.

2) Если $|A| \in \{2, 3\}$ и $|\sigma_1 - \sigma_2| = 0$, то H_A-периодическое основное состояние совпадает с трансляционно-инвариантным основным состоянием. Поэтому в случаях b) и c) конфигурация $|\sigma_1 - \sigma_2| = 0$ не рассматривается.

H_A-слабо периодическая конфигурация имеет следующий вид:

$$\sigma(x)=\begin{cases}\sigma_{00}, \text{ если } x_{\downarrow}\in H_A,\, x\in H_A,\\ \sigma_{01}, \text{ если } x_{\downarrow}\in H_A,\, x\in G_k\setminus H_A,\\ \sigma_{10}, \text{ если } x_{\downarrow}\in G_k\setminus H_A,\, x\in H_A,\\ \sigma_{11}, \text{ если } x_{\downarrow}\in G_k\setminus H_A,\, x\in G_k\setminus H_A,\end{cases} \tag{3}$$

где $\sigma_{ij}\in\Phi,\ i,j\in\{0,1\}$.

В дальнейшем мы будем писать $\sigma=(\sigma_{00},\sigma_{01},\sigma_{10},\sigma_{11})$ для такой слабо периодической конфигурации $\sigma(x),\ x\in G_k$.

В следующей теореме доказываются слабо периодические основные состояния для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями.

Теорема 2. *Пусть* $k=2$. *Для модели (1) выполняются следующие утверждения:*

I. a) Пусть $|A|=1$.

i) если $(J_1,J_2)\in A_2$, *то существуют четыре* H_A*-слабо периодические основные состояния, которые являются* H_A*-периодическими, но не трансляционно-инвариантными. При этом они имеют вид:* $(l,p,l,p),\,|l-p|=1,\ l,p\in\{0,1,2\}$;

ii) если $(J_1,J_2)\in A_5$, *то существуют два* H_A*-слабо периодических основных состояния, которые являются* H_A*-периодическими, но не трансляционно-инвариантными. При этом они имеют вид:* $(l,p,l,p),\,|l-p|=2,\ l,p\in\{0,\ 2\}$;

a) Пусть $|A|=2$. *Если* $(J_1,J_2)\in A_6$, *то существуют два* H_A*-слабо периодические основные состояния, которые являются* H_A*-периодическими, но не трансляционно-инвариантными. При этом они имеют вид:* $(l,p,l,p),\,|l-p|=2,\ l,p\in\{0,\ 2\}$;

II. Все остальные H_A*-периодические основные состояния, не упомянутые в утверждении I, являются трансляционно-инвариантными.*

Замечание 2. В случае $|A|=3$ нормальный делитель H_A совпадает с $G_2^{(2)}$. В этом случае слабо периодическое основное состояние (в общем $G_2^{(2)}$-слабо периодическая конфигурация) совпадает с $G_2^{(2)}$- периодическим основным состоянием.

Теперь рассмотрим непериодические основные состояния. Пусть $\mathrm{GS}(H)-$множество всех основных состояний гамильтониана (1).

Теорема 3. *(i) Если* $(J_1,J_2)\in\{(0;0)\}$, *то* $GS(H)=\Omega$.

(ii) Если $(J_1,J_2)\in A_i\setminus\{(0,0)\},\quad i=2,8,10,$ *то существует счетное множество непериодических основных состояний.*

Третий параграф первой главы посвящен описанию периодических и слабо периодических основных состояний для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями, соответствующих нормальным делителям индекса 2 группового представления дерева Кэли порядка три.

Основной результат третьего параграфа первой главы представлен в следующей теореме.

Теорема 4. *Конфигурация (1) является H_A-периодическим основным состоянием тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

a) $|A|=1$.

i) $|\sigma_1-\sigma_2|=0$ *и* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\le 0;\ J_2\le-\frac{1}{6}J_1\right\}$;

ii) $|\sigma_1-\sigma_2|=1$ *и* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\le 0;\ J_2=-\frac{1}{6}J_1\right\}$;

iii) $|\sigma_1-\sigma_2|=2$ *и* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\le 0;\ -\frac{1}{6}J_1\le J_2\le-\frac{1}{2}J_1\right\}$;

б) $|A|=2$. $|\sigma_1-\sigma_2|=2$ *и* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_2\ge\frac{1}{2}|J_1|\right\}$;

c) $|A|=3$. $|\sigma_1-\sigma_2|=2$ *и* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\ge 0;\ \frac{1}{6}J_1\le J_2\le\frac{1}{2}J_1\right\}$;

д) $|A|=4$.

i) $|\sigma_1-\sigma_2|=1$ *и* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1=0;\ J_2\le 0\right\}$;

ii) $|\sigma_1-\sigma_2|=2$ *и* $(J_1,J_2)\in\left\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2:\ J_1\ge 0;\ J_2\le\frac{1}{6}J_1\right\}$.

Замечание 3. Пусть $|A|\in\{2,3\}$. Если $|\sigma_1-\sigma_2|=1$, то нет H_A-периодического основного состояния;

Вторая глава диссертации **«Основные состояния для модели SOS с конкурирующим бинарными взаимодействиями на дереве Кэли»** описывает непериодические и периодические основные состояния для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядков два и три.

В первом параграфе второй главы изложены основные понятия и некоторые факты. Во втором параграфе второй главы расматривается задача описания множества основных состояний для модели SOS с конкурирующими бинарными взаимодействиями на дереве Кэли порядка два.

Гамильтониан модели SOS с конкурирующими бинарными взаимодействиями имеет вид:

$$H(\sigma)=-J_1\sum_{\substack{\langle x,y\rangle:\\ d(x,y)=1}}|\sigma(x)-\sigma(y)|-J_2\sum_{\substack{\rangle x,y\langle:\\ d(x,y)=2}}|\sigma(x)-\sigma(y)|-J_3\sum_{\substack{\rangle x,y\langle:\\ d(x,y)=2}}|\sigma(x)-\sigma(y)|,\quad (4)$$

где $(J_1, J_2, J_3)\in \mathbb{R}^3$, $\rangle\ x,y\langle -$удаленные соседи на разных этажах с расстоянием 2 и $\rangle x,y\langle -$соседи на одном этаже с расстоянием 2.

Обозначим

$$A_1^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\le 0;\ J_2\le -\frac{1}{4}J_1;\ J_3\le -\frac{1}{2}J_1-J_2\right\},$$

$$A_2^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\le 0;\ J_2=-\frac{1}{4}J_1;\ J_3\le J_2\right\},$$

$$A_3^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\le 0;\ J_2\le -\frac{1}{4}J_1;\ J_3=-\frac{1}{2}J_1-J_2\right\},$$

$$A_6^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1=0;\ J_2\le 0;\ J_3\le -J_2\right\},$$

$$A_7^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\le 0;\ J_2\ge -\frac{1}{4}J_1;\ J_3\le J_2\right\},$$

$$A_9^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\le 0;\ J_2\ge J_3;\ J_3\ge -\frac{1}{2}J_1-J_2\right\},$$

$$A_{10}^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\ge 0;\ J_2\ge \frac{1}{4}J_1;\ J_3\le J_2\right\},$$

$$A_{11}^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\ge 0;|\ J_2|\le J_3;\ J_3\ge \frac{1}{2}J_1-J_2\right\},$$

$$A_{12}^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\ge 0;\ J_2\le \frac{1}{4}J_3;\ J_3\le \frac{1}{2}J_1-J_2\right\},$$

$$A_{13}^{(2)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1=0;\ J_2\ge 0;\ J_3\le J_2\right\}.$$

Теорема 5. *а) Пусть* $k=2$. *Тогда для модели (4) выполняются следующие утверждения:*

a) Пусть $|A|=1$.

i) если $\sigma_1=\sigma_2$, $\sigma_1,\sigma_2\in\Phi$, *то* H_A*-периодическое основное состояние существует тогда и только тогда, когда* $(J_1,J_2,J_3)\in A_1^{(2)}$;

ii) если $\sigma_1=\sigma_2\pm 1$, $\sigma_1,\sigma_2\in\Phi$, *то* H_A*-периодическое основное состояние существует тогда и только тогда, когда* $(J_1,J_2,J_3)\in A_2^{(2)}\cap A_3^{(2)}$;

iii) если $\sigma_1=\sigma_2\pm 2$, $\sigma_1,\sigma_2\in\Phi$, *то* H_A*-периодическое основное состояние существует тогда и только тогда, когда* $(J_1,J_2,J_3)\in A_7^{(2)}\cap A_9^{(2)}$;

b) Пусть $|A|=2$.

i) если $\sigma_1=\sigma_2\pm 1$, $\sigma_1,\sigma_2\in\Phi$, *то* H_A*-периодического основного состояния не существует;*

ii) если $\sigma_1 = \sigma_2 \pm 2,\ \sigma_1, \sigma_2 \in \Phi,$ *то* H_A*-периодическое основное состояние существует тогда и только тогда, когда* $(J_1, J_2, J_3) \in A_{10}^{(2)} \cap A_{11}^{(2)};$

c) Пусть $|A| = 3.$

i) если $\sigma_1 = \sigma_2 \pm 1,\ \sigma_1, \sigma_2 \in \Phi,$ *то* H_A*-периодическое основное состояние существует тогда и только тогда, когда* $(J_1, J_2, J_3) \in A_6^{(2)};$

ii) если $\sigma_1 = \sigma_2 \pm 2,\ \sigma_1, \sigma_2 \in \Phi,$ *то* H_A*-периодическое основное состояние существует тогда и только тогда, когда* $(J_1, J_2, J_3) \in A_{12}^{(2)};$

Рассмотрим функцию $l(x) = l(a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_n}) = i_1,$ сопоставляющую каждому слову x индекс первой буквы этого слова, т.е. $l(x) -$ индекс первой буквы слова x и

$$P = \{x \in G_k : |x| \equiv 0\ (\mathrm{mod}\, 4)\} \cup \{x \in G_k : |x| \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, 4), l(x) = 3\} \cup$$
$$\{x \in G_k : |x| \equiv 3\ (\mathrm{mod}\, 4), l(x) \neq 3\},\ Q = G_k \setminus P.$$

Теорема 6. Пусть $k = 2$. Если $(J_1, J_2, J_3) \in A_{13}^{(2)}$, то существуют, по крайней мере, два непериодических основных состояния, и они имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} i, \text{ если } x \in P, \\ j, \text{ если } x \in Q, \end{cases} \tag{5}$$

где $|i - j| = 2,\ i, j \in \Phi.$

Третий параграф второй главы посвящен описанию H_A-периодических основных состояний для модели SOS с конкурирующим бинарными взаимодействиями на дереве Кэли порядка три.

Обозначим

$$A_1^{(3)} = \left\{(J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 :\ J_1 \leq 0;\ J_2 \leq -\frac{1}{6} J_1;\ J_3 \leq -\frac{1}{4} J_1 - \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_2^{(3)} = \left\{(J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 :\ J_1 \leq 0;\ J_2 = -\frac{1}{6} J_1;\ J_3 \leq J_2 \right\},$$

$$A_3^{(3)} = \left\{(J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 :\ J_1 \leq 0;\ J_2 \leq -\frac{1}{6} J_1,\ J_3 = -\frac{1}{4} J_1 - \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_5^{(3)} = \left\{(J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 :\ J_1 \leq 0;\ J_2 \geq -\frac{1}{6} J_1;\ J_3 \leq -\frac{1}{4} J_1 + \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_6^{(3)} = \left\{(J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 :\ J_1 \leq 0;\ J_2 \leq -\frac{1}{2} J_1;\ J_3 \geq -\frac{1}{4} J_1 - \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_9^{(3)} = \left\{(J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 :\ J_1 = 0;\ J_2 \geq 0;\ J_3 \geq \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_{10}^{(3)} = \left\{(J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 :\ J_1 \geq 0;\ J_2 \geq \frac{1}{6} J_1;\ J_3 \leq \frac{1}{4} J_1 + \frac{1}{2} J_2 \right\},$$

$$A_{11}^{(3)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1\geq 0;\ J_2\leq\frac{1}{2}J_1;\ \ J_3\geq\frac{1}{4}J_1-\frac{1}{2}J_2\right\},$$

$$A_{18}^{(3)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:\ J_1=0;\ \ J_2\leq 0;\ \ J_3\leq-\frac{1}{2}J_2\right\},$$

$$A_{19}^{(3)}=\left\{(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3:J_1\geq 0;\ J_2\leq\frac{1}{6}J_1;\ J_3=\frac{1}{4}J_1-\frac{1}{2}J_2\right\}.$$

Теорема 7. *Пусть $k=3$. Тогда для модели (3) выполняются следующие утверждения:*

a) Пусть $|A|=1$.

i) если $(J_1,J_2,J_3)\in A_1^{(3)}$, то каждая трансляционно-инвариантная конфигурация является основным состоянием;

ii) если $(J_1,J_2,J_3)\in A_2^{(3)}\cap A_3^{(3)}$, то H_A-периодическая конфигурация вида (2) с $\sigma_1=\sigma_2\pm 1,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$ является основным состоянием;

iii) если $(J_1,J_2,J_3)\in A_5^{(3)}\cap A_6^{(3)}$, то H_A-периодическая конфигурация вида (2) с $\sigma_1=\sigma_2\pm 2,\sigma_1,\sigma_2\in\Phi$, является основным состоянием.

б) Пусть $|A|=2$. Если $(J_1,J_2,J_3)\in A_9^{(3)}$, то H_A-периодическая конфигурация вида (2) с $\sigma_1=\sigma_2\pm 2, \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$, является основным состоянием.

c) Пусть $|A|=3$. Если $(J_1,J_2,J_3)\in A_{10}^{(3)}\cap A_{11}^{(3)}$, то H_A-периодическая конфигурация вида (2) с $\sigma_1=\sigma_2\pm 2,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$, является основным состоянием.

d) Пусть $|A|=4$.

i) если $(J_1,J_2,J_3)\in A_{18}^{(3)}$, то $G_k^{(2)}$-периодическая конфигурация вида (2) с $\sigma_1=\sigma_2\pm 1,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$ является основным состоянием;

ii) если $(J_1,J_2,J_3)\in A_{19}^{(3)}$, то $G_k^{(2)}$-периодическая конфигурация вида (2) с $\sigma_1=\sigma_2\pm 2, \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$, является основным состоянием.

Замечание 4. Пусть $k=3$ и $|A|\in\{2,3\}$. Если $\sigma_1=\sigma_2\pm 1,\ \sigma_1,\sigma_2\in\Phi$, то конфигурация (2) не является H_A-периодическим основным состоянием.

Третья глава диссертации называется **«Меры Гиббса для модели SOS на дереве Кэли»**. В первом параграфе третьей главы приводятся основные определения и некоторые факты о мерах Гиббса.

Гамильтониан модели SOS определяется следующим образом:

$$H(\sigma)=-J\sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=1}}|\sigma(x)-\sigma(y)|, \qquad (6)$$

где $J\in\mathbb{R}$.

Пусть $h:x\mapsto h_x=(h_{0,x},h_{1,x},...,h_{m,x})\in\mathbb{R}^{m+1}$ – векторнозначная функция на $x\in V\setminus\{x^0\}$ и вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n}:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1}\exp\Big(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\sigma(x),x}\Big), \tag{7}$$

где $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ и $\beta = 1/T,\ T > 0 -$температура,

$$Z_n = \sum_{\tilde\sigma_n\in\Omega_{V_n}} \exp\Big(-\beta H(\tilde\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\tilde\sigma(x),x}\Big).$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для любого $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$, верно равенство:

$$\sum_{\omega_n\in\Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \tag{8}$$

где $\sigma_{n-1}\vee\omega_n \in \Omega_{V_n}$.

В этом случае существует единственная мера μ на Ω такая, что $\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$ для всех n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$. Такая мера называется мерой Гиббса, соответствующей гамильтониану H и функции $x \mapsto h_x, x \neq x_0$.

Второй параграф третьей главы посвящен описанию для модели (6) некоторых непериодических мер Гиббса.

Теорема 8. *Для модели SOS с* $\theta = \theta_{cr}(\approx 0{,}1242)$ *на дереве Кэли порядка пять существует, по крайней мере две, непериодические меры Гиббса.*

Рассмотрим дерево Кэли порядка $k = a + b + 2,\quad a, b \in \mathbb{N}$. Введем обозначение

$$E(a,b) = \{\theta\in\mathbb{R}_+ : \theta < \theta_{cr}(\approx 0.1414)\}\bigcap\{\theta\in\mathbb{R}_+ : (y_1(\theta))^a\cdot y_2(\theta))^b = 1\}.$$

Здесь y_1 и y_2 решения следующего уравнения $\ln y_i = \ln\dfrac{y_i^2 + 2\theta}{\theta^2 + \theta y_i^2 + 1}$, $i = 1,2$.

Теорема 9. *Для SOS-модели с* $\theta\in E(a,b)$ *на дереве Кэли порядка* $k = a + b + 2$ *существует не менее двух непериодических мер Гиббса.*

Замечание 5. Заметим, что множество $E(a,b) \neq \varnothing$, так как случай $a = 1, b = 2$ рассматривается в теореме 8. Также легко проверить, что в случаях $a = n,\ b = 2n,\ \forall n \in N$ множество $E(a,b) \neq \varnothing.$

Третий параграф третьей главы посвящен расширению класса мер Гиббса для модели SOS на дереве Кели произвольного порядка. В этом параграфе найдены условия существования мер Гиббса. Также эти меры сравниваются с известными мерами Гиббса и доказывается, что они отличаются от известных мер Гиббса при некоторых значениях параметров. Кроме того, число новых мер Гиббса оказалось не менее одного, двух или трех для некоторых значений параметров, зависимых от температуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению меры Гиббса для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями. В первой главе рассмотрена модель SOS с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядков два и три. Во второй главе диссертации рассмотрены периодические основные состояния для модели SOS с конкурирующими бинарными взаимодействиями на дереве Кэли второго и третьего порядков. В третьей главе рассматриваются модели SOS с тремя значениями спина на дереве Кэли произвольного порядка.

Получены следующие результаты:

описаны периодические и слабо периодические основные состояния для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядков два и три относительно нормального делителя индекса два;

описаны периодические основные состояния для модели SOS с конкурирующими бинарными взаимодействиями ближайших соседей и следующих ближайших соседей на дереве Кэли порядков два и три;

описаны непериодические основные состояния для модели SOS с конкурирующими бинарными взаимодействиями и модель SOS с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка два;

доказано существование, по крайней мере, двух непериодических мер Гиббса для модели SOS с тремя значениями спина на дереве Кэли порядков пять и $k=a+b+2$ где $a,b\in\mathbb{N}$;

расширен класс мер Гиббса для модели SOS на дереве Кели произвольного порядка и эти меры сравниваются с известными мерами Гиббса и доказывается, что они отличаются от известных мер Гиббса при некоторых значениях параметров.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

CHIRCHIK STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY

ABRAEV BUNYOD URINBOEVICH

GIBBS MEASURES FOR SOS MODEL WITH COMPETING INTERACTIONS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministery of Higher Education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2021.3.PhD/FM619.

Dissertation has been prepared at Chirchik state pedagogical university.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (https://www.samdu.uz) and the "ZiyoNet" information and educational portal (http://www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Rahmatullaev Muzaffar Muxammadjanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher
Official opponents:	**Botirov Golibjon Isroilovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher
	Khakimov Otabek Norbuta ugli Doctor of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher
Leading organization:	**Bukhara State University**

Defense will take place on "23" 01 2024 at 10⁰⁰ at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at Samarkand state university. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+998 66) 231 06 32, fax: (+998 66) 235 19 38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand state university. (registered for No. 2). (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+998 66) 231 06 32, fax: (+998 66) 235 19 38).

Abstract of dissertation sent out on "11" 01 2024 year.
(Mailing report No. 2 on "11" 01 2024 year).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI • SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI •

A.S. Soleev
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

A.M. Khalkhuzhaev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

S.N. Lakaev
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to determine the ground states for the three-state SOS model with competing interactions and to describe the set of Gibbs measures.

The object of the research work is the SOS models with competing interactions and competing binary interactions on the Cayley tree.

Scientific novelty of the research work is as following:

the weakly periodic ground states with respect to normal divisor of index two for the SOS model with competing interactions on the Cayley tree of order two and three are described completely and it is proved that all of them are periodic;

it is found that a countable set of non-periodic ground states for the SOS model with competing interactions on the Cayley tree of order two;

it is proved that there are at least two non-periodic Gibbs measures for the SOS model with three spin values on the Cayley tree of order higher than four;

it is proved that the existence of the new wider class of Gibbs measures for the three-state SOS model on the Cayley tree of an arbitrary order.

Implementation of the research results. Based on scientific results obtained on the ground states for the SOS model with competing interactions and the Gibbs measures for SOS model:

proof of the existence of Gibbs measures for the SOS model, was used in the fundamental project No. YOFA-Ftex-2018-78 "The dynamic and thermodynamic systems on nonamenable graphs" for the study of periodic Gibbs measures for the Potts-SOS model on the Cayley tree (Certificate of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated June 5, 2023, No. 2/221). The application of scientific results made it possible to prove the existence of periodic Gibbs measures of the Potts – SOS model on the Cayley tree of order two;

the result on the description of the periodic ground states for the SOS model with competing interactions is used to the study of asymptotic properties and periodic trajectories of discrete-time dynamical systems in the fundamental project OT-F-4-03 "Continuous and discrete-time exact dynamical systems, spectra of partial integral operators" (Karshi State University reference No. 04/2264 dated June 6, 2023). The application of this scientific result gave possibility proving the asymptotic properties and describing the periodic trajectories of discrete-time dynamic systems;

The structure and volume of the dissertation. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 97 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I boʻlim (I часть; part I)

1. Рахматуллаев М.М., Абраев Б.У., Существование непериодических мер Гиббса для модели SOS на дереве Кэли. // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, –2018, –№ 5, –С.11-14. (01.00.00; № 7).
2. Rahmatullaev M.M., Abraev B.U., Non-translation-invariant Gibbs measures of an SOS model on a Cayley tree. // Reports on Mathematical Physics. –2020, –Vol 86., –No.3, –P. 315-324. (3.Scopus. IF=0.808).
3. Abraev B.U., On weakly periodic ground states for the SOS model. // Scientific Bulletin of Namangan State University. Namangan –2020, –Vol 2., –No.3, –P. 14-21. (01.00.00; № 14).
4. Rahmatullaev M.M., Abraev B.U., On ground states for the SOS model with competing interactions. // Journal of Siberian Federal University, –2022, –Vol 15., –No.2, –P. 1-14. (3.Scopus. IF=0.54).
5. Abraev B.U., Ground states for the SOS model with competing binary interactions on a Cayley tree. // Uzbek Mathematical Journal. Tashkent –2022, –Vol 66, —№ 3, –P.10-20. (01.00.00; № 6).

II boʻlim (II часть; part II)

6. Rahmatullaev M.M., Abraev B.U., On Gibbs measures for the model of SOS on a Cayley tree of order three. // “Modern problems of the applied mathematics and information technology- Al-Khorezmiy 2018”. International scientific conference. –Tashkent, 2018, –P.182–183.
7. Botirov G.I., Abraev B.U., An infinite system of functional equation and its exponential solution for the Potts model on a Cayley tree. // “Actual problems of differential equations and their applications”. International scientific conference. –Tashkent, 2017, –P.126-128.
8. Abrayev B.Oʻ., Keli daraxtida aniqlangan spin qiymati sanoqsiz boʻlgan bir model uchun Gibbs oʻlchovlari. // “Новые результаты математики и их приложения” Республиканская научная конференция. –Самарканд, 2018 г., –С.123-124.
9. Abrayev B.Oʻ., Keli daraxti va Kantor toʻplami orasidagi oʻzaro bir qiymatli moslik. // “Новые результаты математики и их приложения”, Республиканская научная конференция. –Самарканд, 2018 г., –С.125-126.
10. Рахматуллаев М.М., Абраев Б.У., Основные состояния для одной модели с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. // “Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики”, Международной научной конференции. –Фергана, 2020, год, –С. 80-81.

11. Рахматуллаев М.М., Абраев Б.У., Периодические основные состояния для модели SOS с конкурирующими бинарными взаимодействиями на дереве Кэли порядка два. // VIII Международной научно-практической конференции “Актуальные вопросы общества, науки и образования”. Международной научной конференции.–Пенза, 2023 г., –С. 18-21.
12. Abraev B.U. , Some construction of new Gibbs measure for the SOS model on a Cayley tree. // Actual problems of stochastic Analysis. Scientific conference. –Tashkent, 2021, –P.367-370.
13. Rahmatullaev M.M., Abraev B.U., A new set of Gibbs measures for the SOS model on a Cayley tree. // arXiv preprint arXiv:2310.15824, 2023.
14. Rahmatullaev M.M., Abrayev B.O‘., Raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli SOS modeli uchun Keli daraxtida sanoqlita davriy bo‘lmagan asosiy holatlar. // Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых Сарымсаковские чтения. –Ташкент, 2021 г. –С. 309-311.
15. Rahmatullaev M.M., Abraev B.U., Ground states for the SOS model with competing interactions on the Cayley tree of order three. // Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021. International scientific conference. –Fergana, 2021, –P.15-17.
16. Abraev B.U., SOS model on Cayley tree: a new classes of Gibbs measures. // New theorems of young mathematicians-2022. Scientific conference. –Namangan, 2022, –C. 105-106.
17. Abraev B.U., On constructive description of Gibbs measures for the SOS model on a Cayley tree. // Operator algebras, non-associative structures and related problems. Scientific conference. –Toshkent, 2022, –P. 270-272.
18. Abraev B.U., Ground states for the SOS model with special external field and countable set of spin values on a Cayley tree. // Mathematical analysis and its Applications in modern mathematical Physics. Scientific conference. –Samarkand, 2022, –P.21-22.

Avtoreferat “Samarqand davlat universiteti taxririy-nashriyot bo‘limi” tahririyatida tahrirdan o‘tkazildi va o‘zbek, ingliz, rus (rezyume) tillardagi matnlari mosligi tekshirildi (06.01.2024-y.)

06.01.2024-yilda bosishga ruxsat etildi.
Shartli bosma tabog‘i 2,5. Qog‘oz bichimi 60x84 $^{1}/_{16.}$
“Times” garniturasi. Adadi 70 nusxa. Buyurtma №1/1.

“Sardor poligraf” OK bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Samarqand viloyati, Samarqand tumani “Xishrav” MFY