V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

MAMAJONOV SANJARBEK MIRZAYEVICH

TO‘RTINCHI TARTIBLI KARRALI XARAKTERISTIKALI VA PARABOLO-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PHD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

UDK: 517.956

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich
To‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali va parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar …….....3

Мамажонов Санжарбек Мирзаевич
Краевые задачи для уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками и параболо-гиперболического типа.....19

Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich
Boundary Value Problems for Fourth-Order Equations with Multiple Characteristics and Parabolic-Hyperbolic Type.....35

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published works 39

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

MAMAJONOV SANJARBEK MIRZAYEVICH

TO‘RTINCHI TARTIBLI KARRALI XARAKTERISTIKALI VA PARABOLO-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PHD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B2023.2.PhD/FM865 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (http://kengash.mathinst.uz/) va “ZiyoNet” Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Apakov Yusupjon Pulatovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Taxirov Jozil Ostanovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Karimov Kamoliddin Tuychiboyevich fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Urganch davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil “06” fevral soat 16:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40, website: www.mathinst.uz, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (176-raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil “19” yanvar kuni tarqatildi.
(2024 yil “19” yanvardagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A. Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., akademik

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A.A. Azamov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Xususiy hosilali differensial tenglamalar ko‘plab matematik va ilmiy yutuqlarning asosini tashkil etadi. XX asrda asosiy tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida sezilarli yutuqlarga erishilgan bo‘lsa-da, ayrim yuqori tartibli va aralash tipdagi tenglamalarni tahlil qilish hali boshlang‘ich bosqichda. Amaliy masalalarda yuzaga keladigan bu tenglamalarning ko‘pchiligi asosiy turlarga mansub bo‘lmay, xususiy hosilali differensial tenglamalarning turlari chegaralarida yotadi yoki tur chegarasidan tashqariga chiqib, aralash tipga tegishli bo‘ladi.

Tenglama turini samarali aniqlash va uni kanonik shaklga keltirish chegaraviy masalalarni to‘g‘ri qo‘yish va o‘rganish imkonini beradi. Biroq to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun korrekt chegaraviy masalalar qo‘yish va yechishning analitik usullarini qurish bilan bog‘liq ko‘plab savollar o‘rganilmay qoldi. O‘z navbatida, amalda ushbu tenglamalar uchun masalalarni, shuningdek, to‘rtinchi tartibli elliptik, parabolik va giperbolik tenglamalarning turli sohalarda mumkin bo‘lgan kombinatsiyalarini zamonaviy xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining dolzarb muammolaridan biri sifatida o‘rganish zarurati tug‘iladi. Aynan shu sabablar ushbu sohada jadal izlanishlarga turtki bo‘ldi.

Mamlakatimizda fundamental va amaliy fanlarni rivojlantirishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Hozirgi vaqtda fan oldida fundamental tadqiqotlarni amaliyotga yaqinlashtirish vazifasi turibdi. Ushbu masalalarni amalga oshirishda karrali xarakteristikali va parabolo-giperbolik tipdagi to‘rtinchi tartibli tenglamalar alohida o‘rin tutadi. Shuning uchun mazkur dissertatsiya yuqorida qayd etilgan dolzarb masalalarni o‘rganishga bag‘ishlangan. Matematika institutining asosiy faoliyati va vazifalari matematikaning ustuvor yo‘nalishlari, ya’ni matematik va funksional tahlil, differensial tenglamalar va matematik fizika, jumladan, dinamik tizimlar nazariyasi, amaliy matematika va matematik modellashtirish bo‘yicha jahon andozalari darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borishdan iborat.[1]

Ushbu dissertatsiya ishining mavzusi va tadqiqot obyekti, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi farmoni, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017 yil 20 apreldagi PQ- 2909- son “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4387-son qarori.

chora tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli qarori hamda boshqa normativ-huquqiy hujjatlarga mos keladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Ushbu dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi bo‘yicha amalga oshirildi.

Masalaning o‘rganilganlik darajasi. 50-yillarda Frankl F.I., Bitsadze A.B. va Babenko K.I. larning maqolalarida aralash va qo‘shma tipdagi tenglamalarning zamonaviy nazariyasiga asos solindi. Keyinchalik bu chegaraviy masalalar mamlakatimizda ham, xorijda ham ko‘plab mualliflar tomonidan o‘rganildi. Bu ishlarning asosiy natijalari va tegishli bibliografiyasi Bitsadze A.B., Smirnov M.M., Salahitdinov M.S. va Djurayev T.D. larning kitoblarida keltirilgan. Ma’lumki, geofizika, atmosfera fizikasi, okeanologiya va bir jinsli bo‘lmagan suyuqliklar dinamikasi, xususan, qatlamli suyuqliklar dinamikasini o‘rganish to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishga keltiriladi (qarang, masalan, Gabov S.A. va Sveshnikov A.G. ning monografiyasi, 1986). Jo‘rayev T.D. va Sopuyev A. larning monografiyasi (FAN nashriyoti, 2000 yil) to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni turlarga ajratish va ular uchun ayrim chegaraviy masalalarni yechishga bag‘ishlangan. Shuning uchun, tabiiyki, “kun tartibida” to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar va aralash tenglamalar nazariyasini ishlab chiqish masalasi paydo bo‘ldi.

Sabitov K.B. va Fadeyev O.V. lar konsolli balkaning majburiy tebranishlari uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalani hal qilishdi. Amanov D. va Murzambetova M.B. karrali xarakteristikali bitta kichik hadga ega bo‘lgan to‘rtinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan tenglama uchun chegaraviy masalani ko‘rib chiqishdi. Irgashev B.Yu. Grin funksiyasi qurish orqali yuqori tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun chegaraviy masalani o‘rgandi. O‘rinov A.K. va Azizov M.S. tomonidan o‘ng tomoni noma’lum bo‘lgan to‘rtinchi tartibli tenglama uchun masala o‘rganildi. Bogatov A.V. va Gilev A.V. hamda Pulkina L.S. to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun nolokal shartli masalani hal qilishdi. Khan A. va Sultana T. to‘rtinchi tartibli parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglama bilan ifodalangan uzluksiz tashqi kuch ta’sirida balkaning ko‘ndalang tebranishi haqidagi masalani raqamli usulda yechishdi.

Parabolo-giperbolik tipdagi uchinchi va yuqori tartibli tenglamalar uchun chegaraviy masalalar birinchi marta Jo‘rayev T.D. hamda uning shogirdlari tomonidan qo‘yilgan va o‘rganilgan. So‘nggi paytlarda uchinchi va yuqori tartibli parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o‘rganish keng rivojlandi. Masalan, kasr tartibli hosilali tenglamalar nazariyasi jadal rivojlanmoqda. Yechimlarni qurish, ularning xossalarini va chegaraviy masalalarni o‘rganishga bag‘ishlangan aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalarni tadqiq qilish bo‘yicha dastlabki natijalar Gelfand I.M. ning ishlarida olingan. Keyinchalik ular Struchina G.M., Uflyand Ya.F., Zolina L.A. va boshqalar tomonidan rivojlantirilgan. Bosh qismida parabolo-giperbolik va elliptiko-parabolik operatorlarni o‘z ichiga olgan uchinchi va undan yuqori tartibli qo‘shma va aralash-

qo‘shma tipdagi tenglamalarni o‘rganish Salohiddinov M.S., Jo‘rayev T.D., Yeleyev V.A., Mamajonov M. va Xolmurodov D., Zikirov O.S., Sabitov K.B. va boshqalarlarning ishlarida jadal rivojlandi. Ko‘rib chiqilgan tenglamalarning asosiy tarkiblari yangi usul va yondashuvlarni ishlab chiqishni taqozo etadi. Mavjud usullar esa energiyani baholash, funksional-analitik va boshqa usullar kabi tenglamalarning kengroq sinflari uchun qo‘llaniladigan yanada kuchli yondashuvlarga aylantirilishi kerak. Shuning uchun ushbu dissertatsiya o‘zgarmas va o‘zgaruvchan koeffitsiyentli kichik hadlarga ega bo‘lgan to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalar va parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o‘rganishga bag‘ishlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya ishi O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Matematika institutida “Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari” laboratoriyasining rejalashtirilgan ilmiy tadqiqot mavzusiga muvofiq bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi o‘zgarmas va o‘zgaruvchan koeffitsiyentli kichik hadlarga ega bo‘lgan to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalar va parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali o‘zgarmas va o‘zgaruvchan koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar uchun yangi korrekt chegaraviy masalalar qo‘yish va asoslash;

qo‘yilgan masalalarning bir qiymatli yechilishi uchun koeffitsiyentlarga yetarli shartlarni aniqlash va bu shartlar buzilganda bir jinsli masalaning notrivial yechimga ega bo‘lishiga misollar ko‘rsatish;

chegaraviy masalalarning yechimlarini oshkor ko‘rinishda tuzilgan Grin funksiyalari va Furye qatorlari usullari yordamida qurish;

ikki perpendikulyar tur o‘zgarish chizig‘iga ega bo‘lgan sohada parabolo-giperbolik tipdagi to‘rtinchi tartibli tenglama uchun birinchi tartibli operatorlari burchak koeffitsiyentlarining qiymatlari asosida yangi chegaraviy masalalar qo‘yish va tadqiq qilish.

Tadqiqotning obyekti to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali va parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalardan iborat.

Tadqiqotning predmeti to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalar uchun, shuningdek, to‘rtinchi tartibli parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o‘rganishdan iborat.

Tadqiqot usullari. Tadqiqot ishida matematik analiz, differensial tenglamalar va matematik fizika, chiziqli algebra, operatorlar va qatorlarning spektral nazariyasi usullari qo‘llaniladi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali o‘zgarmas va o‘zgaruvchan koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar uchun yangi chegaraviy masalalarning korrektligi asoslangan;

qo‘yilgan masalalarning bir qiymatli yechilishi uchun koeffitsiyentlarga yetarli shartlarni aniqlangan va bu shartlar buzilganda bir jinsli masalaning notrivial yechimga ega bo‘lishiga misollar ko‘rsatilgan;

chegaraviy masalalarning yechimlari oshkor ko‘rinishda tuzilgan Grin funksiyalari va Furye qatorlari usullari yordamida qurilgan;

ikki perpendikulyar tur o‘zgarish chizig‘iga ega bo‘lgan sohada parabolo-giperbolik tipdagi to‘rtinchi tartibli tenglama uchun birinchi tartibli operatorlari burchak koeffitsiyentlarining qiymatlari asosida chegaraviy masalalarni bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari fizik jarayonlarning sifat xususiyatlarini o‘rganishda va sonli hisob-kitoblarda analitik yechimlardan foydalanish imkoniyatini o‘z ichiga oladi.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik va funksional analiz usullari, differensial tenglamalar va matematik fizika yordamida asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, olingan natijalar yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasini yanada rivojlantirish uchun ishlatilishi mumkin.

Tadqiqotning amaliy ahamiyati olingan ilmiy natijalarni to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalar, shuningdek, to‘rtinchi tartibli parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar yordamida tasvirlangan fizik jarayonlarni o‘rganishda qo‘llash bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarini joriy etish. To‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali va parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarda olingan natijalar asosida:

to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar uchun yangi chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishidan AP08855810 raqamli “Nolokal xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy va boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning yechilishi masalalari” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida to‘rtinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masalalarni yechishda qo‘llanilgan. (Xoja Ahmad Yassaviy nomidagi Xalqaro Qozoq-Turk universitetining 2023 yil 22-sentabrdagi №05/3407-sonli ma’lumotnomasi, Qozog‘iston). Ilmiy natijani qo‘llanishi Grin funksiyasi yordamida to‘rtinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masalaning aniq yechimini qurish imkonini bergan;

Grin funksiyasi yordamida o‘zgaruvchan koeffitsiyentli to‘rtinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masalalar yechimini qurish usulidan 374874-2020 raqamli “Fazaviy o‘tishlar va kritik hodisalar masalalari. Ularning tenglamalarining matematik jihatlari, tez o‘tishlar va asimptotikalar” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida yuqori tartibli tenglama uchun masalalar yechimini qurishda foydalanilgan (O‘sh davlat universitetining 2023 yil 16-oktabrdagi №1179-sonli ma’lumotnomasi, Qirg‘iziston). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi yuqori tartibli tenglamalar uchun to‘g‘ri to‘rtburchakli sohada berilgan chegaraviy masalalarning yechimlari aniq ko‘rinishini topish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning natijalari 13 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy konferensiyalarda muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining chop etilganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha 27 ta ilmiy ishlar chop etilgan bo‘lib, shu jumladan, 11 ta ilmiy maqola O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasi tomonidan falsafa fanlari doktori (PhD) ilmiy darajasini olish uchun dissertatsiyalar himoyasi uchun tavsiya etilgan 5 tasi xorijiy va 6 tasi respublika jurnallarida chop etilgan.

Dissertatsiya hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat bo‘lib, uning hajmi 114 betdan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida tadqiqotning dolzarbligi va zarurati, respublika fan va texnologiyalarining rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlarning sharhlari, muammolarning o‘rganilganlik darajalari, tadqiqot maqsadi va vazifalari, tadqiqotning obyekti hamda predmeti, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ilmiy ishlar, dissertatsiya hajmi va tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“To‘rtinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli tenglama uchun chegaraviy masalalar”** deb nomlangan **birinchi bobida** to‘rtinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli kichik hadlarga ega bo‘lgan karrali xarakteristikali bir jinsli bo‘lmagan tenglama uchun chegaraviy masalalar qo‘yilgan, yechimning yagonaligi isbotlangan va yechimni oshkor ko‘rinishda qurilgan Grin funksiyasi yordamida yozilgan.

$\Omega = \{(x,y): 0 < x < p, 0 < y < q\}$ sohada to‘rtinchi tartibli

$$L[u] \equiv u_{xxxx} + a_1 u_{xx} + a_2 u_x + a_3 u - u_{yy} = f(x,y), \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz. Bu yerda

$$p, q, a_i \in R, \quad i = \overline{1,3}, \quad f_{xyy}(x,y) \in C(\bar{\Omega}).$$

Birinchi bobning birinchi paragrafida quyidagi chegaraviy masalalar qo‘yilgan va ularning yagona yechimga ega ekanligi ko‘rsatilgan.

A_1 **masala.** Shunday $u(x,y)$ funksiya topilsinki,

$$C_{x,y}^{4,2}(\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1}(\bar{\Omega}), \tag{2}$$

sinfga tegishli bo‘lsin, Ω sohada (1) tenglamani hamda

$$\left.\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|_{x=0} = \psi_{m+1}(y), \quad \left.\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|_{x=p} = \psi_{m+2}(y), \quad m = 0,2, \quad 0 \le y \le q; \tag{3}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p, \tag{4}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin. Bu yerda $\psi_i(y)$, $i = \overline{1,4}$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

A_2 **masala.** Shunday (2) sinfga tegishli bo‘lgan $u(x,y)$ funksiya topilsinki, Ω sohada (1) tenglamani hamda (3) va

$$u_y(x,0)=0,\quad u_y(x,q)=0,\quad 0\le x\le p, \tag{5}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin.

A_3 **masala.** Shunday (2) sinfga tegishli bo‘lgan $u(x,y)$ funksiya topilsinki, Ω sohada (1) tenglamani hamda (3) va

$$\alpha u(x,0)+\beta u_y(x,0)=0,\quad \gamma u(x,q)+\delta u_y(x,q)=0,\quad 0\le x\le p, \tag{6}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin. Bu yerda $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R\setminus\{0\}$.

1-teorema. Agar A_1 masala yechimga ega bo‘lsa hamda $a_1\le 0$ va $a_3\ge 0$ shartlar bajarilsa, bu yechim yagona.

2-teorema. Agar A_2 masala yechimga ega bo‘lsa hamda $a_1\le 0$ va $a_3\ge 0$ shartlar bajarilsa bu yechim yagona.

3-teorema. Agar A_3 masala yechimga ega bo‘lsa hamda $a_1\le 0$, $a_3\ge 0$, $\alpha\beta<0$ va $\gamma\delta>0$ shartlar bajarilsa, bu yechim yagona.

1, 2, 3 – teoremalar energiya integrallari usuli yordamida isbotlangan.

1-izoh. Agar 1-teorema shartlari buzilsa, bir jinsli (1) tenglama uchun bir jinsli A_1 masala notrivial yechimga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, agar $a_1=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2=0$, $a_3=-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2$ bo‘lsa, ushbu

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y)-u_{yy}=0,\\ u(x,0)=u(x,q)=0,\quad u(0,y)=u(p,y)=u_{xx}(0,y)=u_{xx}(p,y)=0, \end{cases}$$

bir jinsli masala $u_{k,n}=\sin\left(\frac{\pi k}{p}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right)$, $k,n\in N$ ko‘rinishdagi notrivial yechimlarga ega bo‘ladi.

Bu yerdan kelib chiqadiki, agar a_3 ajratish parametri bo‘lsa, u holda $a_3\ge 0$ da masala korrekt qo‘yilgan, $a_3<0$ da masala korrekt emas, ya’ni spektr mavjud.

2-izoh. Agar 2-teorema shartlari buzilsa, bir jinsli (1) tenglama uchun bir jinsli A_2 masala notrivial yechimga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, agar $a_1=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2=0$, $a_3=-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2$ bo‘lsa, ushbu

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y)-u_{yy}=0,\\ u_y(x,0)=u_y(x,q)=0,\quad u(0,y)=u(p,y)=u_{xx}(0,y)=u_{xx}(p,y)=0, \end{cases}$$

bir jinsli masala $u_{n,k}(x,y)=\sin\left(\frac{\pi k}{p}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{q}y\right),\quad k\in N,\quad n=0,1,2,...$ ko‘rinishdagi notrivial yechimlarga ega bo‘ladi.

3-izoh. Agar 3-teorema shartlari buzilsa, bir jinsli (1) tenglama uchun bir jinsli A_3 masala notrivial yechimga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, agar $a_1=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2=0,\ a_3=-\lambda_n<0$ bo‘lsa, ushbu

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\lambda_n u(x,y)-u_{yy}=0,\\ \alpha u(x,0)+\beta u_y(x,0)=0,\quad \gamma u(x,q)+\delta u_y(x,q)=0,\\ u(0,y)=u(p,y)=u_{xx}(0,y)=u_{xx}(p,y)=0, \end{cases}$$

bir jinsli masala $u_{n,k}(x,y)=\sin\left(\frac{\pi k}{p}x\right)Y_n(y),\quad n,k\in N,$ ko‘rinishdagi notrivial yechimlarga ega bo‘ladi. Bu yerda λ_n hamda $Y_n(y)$

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0,\\ \alpha Y(0)+\beta Y'(0)=\gamma Y(q)+\delta Y'(q)=0. \end{cases} \tag{7}$$

masalaning mos ravishda xos sonlari va xos funksiyalari.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida A_1 masala yechimining mavjudligi ko‘rsatilgan.

4-teorema. Agar ushbu

1) $D<\dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+1\right)}$;

2) $\psi_i^{(j)}(0)=\psi_i^{(j)}(q)=0$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$, $j=0,2$;

3) $f(x,0)=f(x,q)=0$, $0\le x\le p$,

shartlar bajarilsa, A_1 masalaning yechimi mavjud. Bu yerda

$$D=\max\left\{|a_i|, i=\overline{1,3}\right\},\qquad \mu_1=\sqrt{\frac{\pi}{2q}}.$$

Teorema o‘zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida isbotlangan va yechim oshkor ko‘rinishda qurilgan Grin funksiyasi yordamida yozilgan.

Birinchi bobning uchinchi paragrafida A_2 va A_3 masalalarning yechimlari qurilgan. Ushbu teoremalar isbotlangan:

5-teorema. Agar ushbu

1) $D<\min\left\{\dfrac{1}{2p^2\left(1+p+p^2\right)},\dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+1\right)}\right\}$;

2) $\psi_i'(0)=\psi_i'(q)=0$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$;

3) $f_y(x,0)=f_y(x,q)=0$, $0\le x\le p$;

shartlar bajarilsa, A_2 masalaning yechimi mavjud. Bu yerda $\mu_1=\sqrt{\dfrac{\pi}{2q}}$.

6-teorema. Agar ushbu

1) $D<\dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+1\right)}$;

2) $\alpha\psi_i^{(j)}(0)+\beta\psi_i^{(j+1)}(0)=0$, $\gamma\psi_i^{(j)}(q)+\delta\psi_i^{(j+1)}(q)=0$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$, $j=0,2$;

3) $\alpha f(x,0)+\beta f_y(x,0)=0$, $\gamma f(x,q)+\delta f_y(x,q)=0$, $0\le x\le p$,

shartlar bajarilsa, A_3 masalaning yechimi mavjud. Bu yerda $\mu_1=\sqrt[4]{\dfrac{\lambda_1}{4}}$, λ_1 – (7) masalaning birinchi xos soni.

Dissertatsiyaning **“To‘rtinchi tartibli o‘zgaruvchan koeffitsiyentli tenglama uchun chegaraviy masalalar”** deb nomlangan **ikkinchi bobida** to‘rtinchi tartibli o‘zgaruvchan koeffitsiyentli kichik hadlarga ega bo‘lgan karrali xarakteristikali bir jinsli bo‘lmagan tenglama uchun chegaraviy masalalar qo‘yilgan, yechimning yagonaligi isbotlangan va yechim yaqqol ko‘rinishda qurilgan Grin funksiyasi yordamida yozilgan.

Ω sohada to‘rtinchi tartibli ushbu

$$L[u]\equiv u_{xxxx}+a_1(x)u_{xx}+a_2(x)u_x+a_3(x)u-u_{yy}=f(x,y), \tag{8}$$

tenglamani qaraymiz. Bu yerda

$$a_1(x)\in C^2[0,p],\quad a_2(x),a_3(x)\in C^1[0,p],\quad f_{xyy}(x,y)\in C(\bar{\Omega}).$$

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida korrekt chegaraviy masalalar qo‘yilgan va ularning yagona yechimga ega ekanligi ko‘rsatilgan.

B_1 **masala.** Shunday (2) sinfga tegishli bo‘lgan $u(x,y)$ funksiya topilsinki, Ω sohada (8) tenglamani hamda (4) va

$$\left.\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|_{x=0}=\psi_m(y),\quad \left.\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|_{x=p}=\psi_{m+1}(y),\quad m=1,3,\quad 0\le y\le q, \tag{9}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin. Bu yerda $\psi_i(y)$, $i=\overline{1,4}$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

B_2 **masala.** Shunday (2) sinfga tegishli bo‘lgan $u(x,y)$ funksiya topilsinki, Ω sohada (8) tenglamani hamda (5) va (9) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin.

B_3 **masala.** Shunday (2) sinfga tegishli bo‘lgan $u(x,y)$ funksiya topilsinki, Ω sohada (8) tenglamani hamda (6) va (9) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin.

7-teorema. Agar B_1 masala yechimga ega bo‘lsa hamda $a_1'(0)-a_2(0)\ge 0$, $a_1'(p)-a_2(p)\le 0$, $a_1''(x)-a_2'(x)+2a_3(x)\ge 0$, $a_1(x)\le 0$ shartlar bajarilsa, bu yechim yagona.

8-teorema. Agar B_2 masala yechimga ega bo‘lsa hamda $a_1(x)\le 0$, $a_3(x)>0$, $2a_3(x)+a_1''(x)-a_2'(x)\ge 0$, $a_1'(0)-a_2(0)\ge 0$, $a_1'(p)-a_2(p)\le 0$ shartlar bajarilsa, bu yechim yagona.

9-teorema. Agar B_3 masala yechimga ega bo‘lsa hamda $a_1(x)\le 0$, $2a_3(x)+a_1''(x)-a_2'(x)\ge 0$, $a_1'(0)-a_2(0)\ge 0$, $a_1'(p)-a_2(p)\le 0$, $\alpha\beta<0$, $\gamma\delta>0$ shartlar bajarilsa, bu yechim yagona.

7, 8 va 9 teoremalar energiya integrallari usuli yordamida isbotlangan.

4-izoh. Agar 7-teorema shartlari buzilsa, bir jinsli (8) tenglama uchun bir jinsli B_1 masala notrivial yechimga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, agar $a_1=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2=0$, $a_3=-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2$ bo‘lsa, ushbu

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y)-u_{yy}=0, \\ u(x,0)=u(x,q)=0, \quad u_x(0,y)=u_x(p,y)=u_{xxx}(0,y)=u_{xxx}(p,y)=0, \end{cases}$$

bir jinsli masala $u_{k,n}=\cos\left(\frac{\pi k}{p}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right)$, $k=0,1,2,\ldots$, $n\in N$ ko‘rinishdagi notrivial yechimlarga ega bo‘ladi.

5-izoh. Agar 8-teorema shartlari buzilsa, bir jinsli (8) tenglama uchun bir jinsli B_2 masala notrivial yechimga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, agar $a_1=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2=0$, $a_3=-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2$ bo‘lsa, ushbu

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y)-u_{yy}=0, \\ u_y(x,0)=u_y(x,q)=0, \quad u_x(0,y)=u_x(p,y)=u_{xxx}(0,y)=u_{xxx}(p,y)=0, \end{cases}$$

bir jinsli masala $u_{k,n}=\cos\left(\frac{\pi k}{p}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{q}y\right)$, $k,n=0,1,2,\ldots$ ko‘rinishdagi notrivial yechimlarga ega bo‘ladi.

6-izoh. Agar 9-teorema shartlari buzilsa, bir jinsli (8) tenglama uchun bir jinsli B_3 masala notrivial yechimga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, agar $a_1 = \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2 = 0,\ a_3 = -\lambda_n < 0$ bo‘lsa, ushbu

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y) + \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y) - \lambda_n u(x,y) - u_{yy} = 0, \\ \alpha u(x,0) + \beta u_y(x,0) = 0, \quad \gamma u(x,q) + \delta u_y(x,q) = 0, \\ u_x(0,y) = u_x(p,y) = u_{xxx}(0,y) = u_{xxx}(p,y) = 0, \end{cases}$$

bir jinsli masala $u_{n,k}(x,y) = \cos\left(\frac{\pi k}{p}x\right) Y_n(y),\ \ n,k \in N,$ ko‘rinishdagi notrivial yechimlarga ega bo‘ladi. Bu yerda λ_n hamda $Y_n(y)$ lar (7) masalaning mos ravishda xos sonlari va xos funksiyalari.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida B_1 masala yechimining mavjudligi ko‘rsatilgan.

10-teorema. Agar ushbu

1) $a_1'(0) - a_2(0) = 0,\ a_1'(p) - a_2(p) = 0;$

2) $D < \dfrac{\mu_1^3\left(1 - e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(3 + 3\mu_1\left(1 + e^{-4\mu_1 p}\right) + 2\mu_1^2\right)};$

3) $\psi_i^{(j)}(0) = \psi_i^{(j)}(q) = 0,\ \psi_i(y) \in C^3[0,q],\ i = \overline{1,4},\ j = 0,2;$

4) $f(x,0) = f(x,q) = 0,\ 0 \le x \le p$ shartlar bajarilsa, B_1 masalaning yechimi mavjud. Bu yerda

$$D = \max_{\xi \in [0,p]} \left\{ \left|a_i^{(j)}(\xi)\right|, \left|a_1''(\xi)\right|,\ i = \overline{1,3},\ j = 0,1 \right\}, \qquad \mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}.$$

Teorema o‘zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida isbotlangan va yechim oshkor topilgan Grin funksiyasi yordamida yozilgan.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida B_2 va B_3 masalalarning yechimlari qurilgan. Ushbu teoremalar isbotlangan:

11-teorema. Agar ushbu

1) $a_1'(0) - a_2(0) = 0,\ a_1'(p) - a_2(p) = 0;$

2) $D < \dfrac{\mu_1^3\left(1 - e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(3 + 3\mu_1\left(1 + e^{-4\mu_1 p}\right) + 2\mu_1^2\right)};$

3) $\psi_i'(0) = \psi_i'(q) = 0,\ \psi_i(y) \in C^3[0,q],\ i = \overline{1,4};$

4) $f_y(x,0)=f_y(x,q)=0$, $0\le x\le p$ shartlar bajarilsa, B_2 masalaning yechimi mavjud. Bu yerda $\mu_1=\sqrt{\dfrac{\pi}{2q}}$.

12-teorema. Agar ushbu

1) $a_1'(0)-a_2(0)=0$, $a_1'(p)-a_2(p)=0$;

2) $D<\dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+3\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+3\right)}$;

3) $\alpha\psi_i^{(j)}(0)+\beta\psi_i^{(j+1)}(0)=0$, $\gamma\psi_i^{(j)}(q)+\delta\psi_i^{(j+1)}(q)=0$, $\psi_i(y)\in C^4[0,q]$, $i=\overline{1,4}$, $j=0,2$;

4) $\alpha f(x,0)+\beta f_y(x,0)=0$, $\gamma f(x,q)+\delta f_y(x,q)=0$, $0\le x\le p$ shartlar bajarilsa, B_3 masalaning yechimi mavjud. Bu yerda $\mu_1=\sqrt[4]{\dfrac{\lambda_1}{4}}$, λ_1 – (7) masalaning birinchi xos soni.

Dissertatsiyaning **“Ikki perpendikulyar tur o‘zgarish chizig‘iga ega bo‘lgan sohada to‘rtinchi tartibli** $\left(a_1\dfrac{\partial}{\partial x}+b_1\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0$ **ko‘rinishdagi tenglama uchun chegaraviy masalalar”** deb nomlangan uchinchi bobida yangi chegaraviy masalalar qo‘yilgan va ularning bir qiymatli yechilishi ikkita xarakteristik va xarakteristik bo‘lmagan perpendikulyar tur o‘zgarish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash besh burchakli sohadagi parabolo-giperbolik tipdagi to‘rtinchi tartibli tenglamalarning bir sinfi uchun isbotlangan.

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0, \tag{10}$$

tenglamani xOy tekislikning G beshburchakli sohasida qaraymiz. Bu yerda $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2$; $a_1,b_1,a_2,b_2\in R$, $a_i^2+b_i^2\ne 0$, $i=1,2$ bo‘lib, G_1 va G_3 lar mos ravishda $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$ hamda A, $D(-1,0)$, $D_0(-1,1)$, A_0 nuqtalardagi uchlarga ega bo‘lgan kvadratlar; G_2 esa B, $C(0,-1)$, D nuqtalardagi uchlarga ega bo‘lgan uchburchak; J_1 va J_2 lar mos ravishda B, D hamda A, A_0 nuqtalardagi uchlarga ega bo‘lgan ochiq kesmalar;

$$Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_i,\ i=2,3.\end{cases}$$

Uchinchi bobning birinchi paragrafida (10) tenglamaning birinchi tartibli operatorlari burchak koeffitsiyentlari $\gamma_1=\dfrac{b_1}{a_1}$ va $\gamma_2=\dfrac{b_2}{a_2}$ ning qiymatlari asosida quyidagi korrekt chegaraviy masalalar qo‘yilgan.

3.1 masala. Quyidagi shartlarni bajaruvchi $u(x,y)$ funksiya topilsin:

1) $\overline{G}$ da uzluksiz va $G \setminus J_1 \setminus J_2$ sohada (10) tenglamada qatnashuvchi uzluksiz hosilalarga ega hamda u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} lar chegaraviy shartlarda ko‘rsatilgan G soha chegarasining bir qismigacha uzluksiz;

2) $G \setminus J_1 \setminus J_2$ sohada (10) tenglamani qanoatlantiradi;

3) chegaraviy shartlar hamda tur o‘zgarish chizig‘idagi ulash shartlarini qanoatlantiradi.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida $b_1 = b_2 = 0$, ya’ni $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ bo‘lganda (10) tenglama

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Lu) = 0,$$

ko‘rinishga keladi. Uni ikki marta integrallab,

$$\begin{cases} u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(y)x + \omega_{12}(y), & (x,y) \in G_1, \\ u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(y)x + \omega_{i2}(y), & (x,y) \in G_i, \quad i = 2,3, \end{cases}$$

ni hosil qilamiz.

G_2 xarakteristik uchburchakda ikkinchi tartibli giperbolik tenglamaning o‘ng tomonida joylashgan noma’lum funksiyani chegaraviy shartlardan foydalanib topiladi va $y = 0$ tur o‘zgarish chizig‘ida yechimning ikkita izi o‘rtasida ikkita munosabat olinadi hamda pastki xarakteristik uchburchakda qo‘yilgan masalaning yechimi topiladi.

G_3 sohada davom ettirish usulidan foydalanib, $x = 0$ tur o‘zgarish chizig‘ida yechimning ikkita izi o‘rtasida bitta munosabat olindi.

G_1 sohada parabolik tenglama uchun birinchi chegaraviy masala yechimini yozib, shu yechim izlari orasida ikkinchi munosabat olinadi va noma’lum funksiyaga nisbatan ikkinchi turdagi Volter integral tenglamasi hosil qilinadi, undan izlangan funksiya aniqlanadi va 3.1 masalaning yechimi ham topildi.

Quyidagi teorema isbotlangan.

13-teorema. Agar $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_4 \in C^3[0,1]$, $\varphi_6 \in C^2[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_4 \in C^3[0,1]$, $\psi_6 \in C^2[-1,0]$ bo‘lib, $\varphi_1(0) = \psi_1(1)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(-1)$, $\tau_1(1) = \varphi_1(0)$, $\tau_1'(1) = \psi_1'(1) - \varphi_1'(0)$ kelishuv shartlari bajarilsa, 3.1 masala $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ bo‘lganda yagona yechimga ega.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida $\gamma_1 = 0$ va $1 < \gamma_2 < \infty$ bo‘lganda (10) tenglama

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu) = 0,$$

yoki

$$\begin{cases} u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{12}(y), & (x,y) \in G_1, \\ u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{i2}(y), & (x,y) \in G_i, \quad i = 2,3, \end{cases}$$

ko‘rinishga keladi va quyidagi teorema isbotlangan:

14-teorema. Agar $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_4 \in C^2[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3 \in C^3[0,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,0]$, $\psi_6 \in C^2[-1,0]$ bo‘lib, $\varphi_1(0)=\psi_1(1)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, $\psi_4'(0)=-\psi_3'(0)$ kelishuv shartlari bajarilsa, 3.1 masala $\gamma_1=0$, $1<\gamma_2<\infty$ bo‘lganda yagona yechimga ega.

Uchinchi bobning to‘rtinchi paragrafida $\gamma_1=\infty$, $\gamma_2=1$ bo‘lganda tenglama

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0,$$

yoki

$$\begin{cases} u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(x-y)+\omega_{12}(x), & (x,y)\in G_1,\\ u_{jxx}-u_{jyy}=\omega_{j1}(x-y)+\omega_{j2}(x), & (x,y)\in G_j, \quad j=2,3, \end{cases}$$

ko‘rinishga keladi va quyidagi teorema isbotlangan:

15-teorema. Agar $\varphi_1,\varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_4 \in C^3[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1/2]$, $\psi_2 \in C^4[-1,0]$, $\psi_3 \in C^3[0,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,0]$, $\psi_6 \in C^2[-1,0]$ bo‘lib, $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, $\psi_4'(0)=-\psi_3'(0)$ kelishuv shartlari bajarilsa, 3.1 masala $\gamma_1=\infty$, $\gamma_2=1$ bo‘lganda yagona yechimga ega.

Uchinchi bobning beshinchi paragrafida $\gamma_1>1$, $\gamma_2>1$ bo‘lganda (10) tenglama

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(Lu)=0,$$

yoki

$$\begin{cases} u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(bx-ay)y+\omega_{12}(bx-ay), & (x,y)\in G_1,\\ u_{jxx}-u_{jyy}=\omega_{j1}(bx-ay)y+\omega_{j2}(bx-ay), & (x,y)\in G_j, \quad j=2,3, \end{cases}$$

ko‘rinishga keladi. Bu yerda $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)$ operator xarakteristikasining burchak koeffitsiyenti $\gamma=\frac{b}{a}>1$ ko‘rinishda bo‘lib, u xarakteristika ikki karrali bo‘ladi. Quyidagi teorema isbotlangan:

16-teorema. Agar $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_4 \in C^3[0,1]$, $\varphi_6 \in C^2[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3 \in C^3[0,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,0]$, $\psi_5 \in C^2[0,1]$, $\psi_6 \in C^2[-1,0]$ bo‘lib, $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, $\psi_4'(0)=-\psi_3'(0)$ kelishuv shartlari bajarilsa, 3.1 masala $\gamma_1>1$, $\gamma_2>1$ bo‘lganda yagona yechimga ega.

XULOSA

Dissertatsiya ishi to‘rtinchi tartibli o‘zgarmas va o‘zgaruvchan koeffitsiyentli kichik tartibli hosilalar qatnashgan karrali xarakteristikali bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar va to‘rtinchi tartibli parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar qo‘yish va o‘rganishga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. To‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali o‘zgarmas va o‘zgaruvchan koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar uchun yangi chegaraviy masalalarning korrektligi asoslangan.

2. Qo‘yilgan masalalarning bir qiymatli yechilishi uchun koeffitsiyentlarga yetarli shartlarni aniqlangan va bu shartlar buzilganda bir jinsli masalaning notrivial yechimga ega bo‘lishiga misollar ko‘rsatilgan.

3. Chegaraviy masalalarning yechimlari oshkor ko‘rinishda tuzilgan Grin funksiyalari va Furye qatorlari usullari yordamida qurilgan.

4. Ikki perpendikulyar tur o‘zgarish chizig‘iga ega bo‘lgan sohada parabolo-giperbolik tipdagi to‘rtinchi tartibli tenglama uchun birinchi tartibli operatorlari burchak koeffitsiyentlarining qiymatlari asosida chegaraviy masalalarni bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАМАЖОНОВ САНЖАРБЕК МИРЗАЕВИЧ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ И ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2024 г.

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за № B2023.2.PhD/FM865.

Диссертация выполнена в Институте математики им. В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz/ и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» по адресу www.ziyonet.uz

Научный руководитель:	**Апаков Юсупжон Пулатович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Тахиров Жозил Останович** доктор физико-математических наук, профессор
	Каримов Камолиддин Туйчибоевич кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «06» февраля 2024 года в 16:00 часов на заседании Научного совета Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазрский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)207-91-40, e-mail: kengash@mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 176). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазрский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «19» января 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от «19» января 2024 года).

У.А. Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К. Адашев
Научный секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.А. Азамов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Уравнения в частных производных лежат в основе многих математических и научных достижений. Хотя за последние восемь десятилетий в теории стандартных уравнений в частных производных был достигнут значительный прогресс, анализ некоторых уравнений высокого порядка и смешанного типа все находится в зачаточном состоянии. Можно показать, что многие из этих уравнений, возникающих в прикладных задачах, уже не относятся к стандартным типам, а лежат на границах классификации уравнений в частных производных или выходят за пределы классификации и относятся к смешанному типу.

Эффективное определение типа уравнения и приведение его к каноническому виду позволяет сформулировать правильную постановку и исследование краевых задач. Однако многие вопросы, связанные с постановкой корректных краевых задач для уравнений в частных производных четвертого порядка и построением аналитических методов решения, остались неизученными. В свою очередь, на практике возникает необходимость изучения задач для этих уравнений, а также их возможных комбинаций в различных областях эллиптических, параболических и гиперболических уравнений четвертого порядка, как одной из актуальных проблем современной теории уравнений в частных производных. Эти причины послужили толчком к началу интенсивных исследований в этой области.

В нашей стране особое внимание уделяется развитию фундаментальных и прикладных наук. В настоящее время перед наукой стоит задача сближения фундаментальных исследований с практикой. Особое место в реализации этих задач занимают уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками и параболо-гиперболического типа. Поэтому, настоящая диссертационная работа посвящена исследованию вышеуказанной актуальной проблематике. Основной деятельностью и задачами Института математики является проведение научных исследований мирового уровня в приоритетных областях математики, а именно математическом и функциональном анализе, дифференциальных уравнениях и математической физике, включая теорию динамических систем, прикладную математику и математическое моделирование.[1]

Тема и объект исследования настоящей диссертационной работы соответствуют поручениям, обозначенным в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан».

мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан», и № УП-4708 от 7 мая 2020 года «О повышении качества обучения в сфере математики и о мерах развития научных исследований», а также в других нормативно-правовых актах.

Соответствие исследование приоритетным направлениям развития наук и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В 50 - е годы в работах Франкля Ф.И., Бицадзе А.В. и Бабенко К.И. было положено начало современной теории уравнений смешанного и составного типов. В дальнейшем эти краевые задачи изучались многими авторами как в нашей стране, так и за рубежом. Основные результаты этих работ и соответствующая им библиография приведены в работах Бицадзе А.В., Смирнова М.М., Салахитдинова М.С. и Джураева Т.Д. В настоящее время в связи с проблемами геофизики, физики атмосферы, океанологии и ряда других проблем возрос интерес к изучению динамики неоднородных, и, в частности, стратифицированных жидкостей, которые сводятся к решению краевых задач для уравнений в частных производных четвертого порядка (см. напр. моногр. Габова С.А. и Свешникова А.Г., 1986). Монография Джураева Т.Д. и Сопуева А. (Изд. ФАН, 2000) посвящена классификации уравнений в частных производных четвертого порядка и решению некоторых краевых задач для них. Поэтому, естественно, «на повестке дня» встал вопрос о развитии теории уравнений в частных производных четвертого порядка и смешанных уравнений.

Сабитов К. Б. и Фадеев О. В. решили задачу с начальными и граничными условиями для вынужденных колебаний консольной балки. Аманов Д. и Мурзамбетова М.Б. рассмотрели задачу для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками, имеющее один младший член. Иргашев Б. Ю. изучал краевую задачу для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками методом построения функции Грина. Уринов А.К. и Азизов М.С. исследовали задачу для уравнения четвертого порядка с неизвестной правой частью. Богатова А.В., Гилев А.В., Пулькина Л.С. решили задачу с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. Хан А. и Султана Т. с помощью численных методов рассмотрели задачу поперечной вибрации балки под действием непрерывной внешней силы, которая представлена параболическим уравнением в частных производных четвертого порядка.

Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа третьего и высокого порядка были впервые сформулированы и исследованы Джураевым Т.Д. и его учениками. В последнее время широкое развитие

получило исследование краевых задач для уравнений параболо-гиперболического типа третьего и высоких порядков. Например, быстро развиваются теория уравнений с дробными производными. Первые результаты по исследованию уравнений смешанного параболо-гиперболического типа, посвященные построению решений, изучению их свойств и исследованию краевых задач, были получены в работах Гельфанда И.М. В дальнейшем они получили развитие в работах Стручиной Г.М., Уфлянда Я.Ф. и Золиной Л.А. Исследование уравнений третьего и более высоких порядков для уравнений составного и смешанно-составного типов, содержащих в основной части параболо-гиперболические и эллиптико-параболические операторы, интенсивно развивалось в работах Салахитдинова М.С., Джураева Т.Д., Елеева В.А., Мамажанова М. и Халмурадова Д., Зикирова О.С., Сабитова К.Б. и др. Базовые структуры рассмотренных уравнений явились одним из основных мотивирующих факторов разработки новых методов и подходов. Существующие методы, наряду с методами оценки энергии, функционально-аналитическими методами и другими методами, необходимо развивать в еще более мощные подходы, применимые к более широким классам уравнений. Поэтому настоящая диссертационная работа посвящена изучению краевых задач для уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками, имеющие младшие члены с постоянными и переменными коэффициентами и уравнений параболо-гиперболического типа.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ лаборатории «Дифференциальные уравнения и их приложения» в Институте математики Академии наук Республики Узбекистан.

Целью исследования являются постановка и исследование краевых задач для уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками, имеющие младшие члены с постоянными и переменными коэффициентами и уравнений параболо-гиперболического типа.

Задачи исследования:

сформулировать и обосновать новые корректные краевые задачи для неоднородных уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками, имеющими младшие члены с постоянными и переменными коэффициентами;

найти достаточные условия на коэффициенты, при которых поставленные задачи однозначно разрешимы, а в случае нарушения этих условий строятся примеры нетривиальных решений однородных задач;

построить решения поставленных краевых задач, используя функции Грина и метод рядов Фурье;

сформулировать и изучить новые краевые задачи для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в зависимости от

значений угловых коэффициентов характеристик операторов первого порядка в многосвязной области с двумя перпендикулярными линиями смены типа.

Объектом исследования являются уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками и уравнения параболо-гиперболического типа.

Предметом исследования являются краевые задачи для уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками, а также для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа.

Методы исследования. В диссертации используются методы математического анализа, дифференциальных уравнений и математической физики, линейной алгебры, спектральной теории операторов и рядов.

Научная новизна исследования заключаются в следующем:

обоснована корректность новых краевых задач для неоднородных уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками с постоянными и переменными коэффициентами;

найдены достаточные условия для коэффициентов, при которых поставленные задачи однозначно разрешимы, а в случае нарушения этих условий построены примеры нетривиальных решений однородных задач;

решения краевых задач строятся с использованием найденных функций Грина и метода рядов Фурье;

доказаны однозначные разрешимости краевых задач, поставленных в зависимости от значений угловых коэффициентов характеристик операторов первого порядка уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в области с двумя перпендикулярными линиями изменения типа.

Практические результаты исследования заключаются в возможности использования аналитических решений при исследовании качественных свойств физических процессов и в численных расчетах.

Достоверность результатов исследования обоснована при помощи методов математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений и математической физики.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории уравнений в частных производных высокого порядка.

Практическая значимость исследования определяется применением полученных научных результатов при изучении физических процессов, описываемых с помощью уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками, а также уравнений четвертого порядка параболо-гиперболического типа.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по краевым задачам для уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками и параболо-гиперболического типа были внедрены на практике в следующих проектах:

теоретические научные результаты, разработанные в диссертации, по исследованию на однозначную разрешимость краевой задачи для уравнения

высокого порядка с постоянными коэффициентами были использованы в зарубежном гранте № AP08855810 «Вопросы разрешимости краевых и начально-краевых задач для нелокальных дифференциальных уравнений в частных производных» (справка №05/3407 Международного казахско-турецкого университета имени Ходжа Ахмеда Ясави от 22 сентября 2023 года, Казахстан) при исследовании краевых задач для уравнения четвертого порядка. Применение научного результата позволило построить явное решение краевой задачи для уравнения четвёртого порядка при помощи функции Грина, построенного в диссертации;

методика построения решения краевых задач с помощью функции Грина для уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами, использована при построении решения аналогичных задач для уравнения высокого порядка в рамках гранта № 374874-2020 «Задачи фазовых переходов и критических явления. Математические аспекты их уравнений, быстрые переходы и асимптотика» (справка №1179 Ошского государственного университета от 16 октября 2023 года, Кыргызстан). В частности, используя вышеуказанные результаты, получена явные решения новых краевых задач для уравнений высокого порядка.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 13 международных и 3 республиканских научных и научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 27 научных работ, из них 11 научных статей, в том числе опубликованы 5 в зарубежном и в 6 республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 114 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертации содержатся сведения об актуальности и необходимости темы, соответствии исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, основные обзоры зарубежных научных исследований по теме, степень изученности проблемы, цели и задачах научного исследования, объекте и предмете исследования, научной новизне и практических результатах исследования, теоретической и практической значимости полученных результатов, внедрение результатов исследований, опубликованные научные работы, объем и структура диссертации.

Первая глава диссертации под названием **«Краевые задачи для уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами»**, посвящена постановки корректных краевых задач для уравнения четвертого

порядка с кратными характеристиками, имеющие младшие члены с постоянными коэффициентами, доказательства единственность решения и построение решения с помощью найденной функции Грина.

В области $\Omega=\{(x,y):0<x<p,\,0<y<q\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u]\equiv u_{xxxx}+a_1u_{xx}+a_2u_x+a_3u-u_{yy}=f(x,y), \tag{1}$$

где $p,q,a_i\in R$, $i=\overline{1,3}$, $f_{xyy}(x,y)\in C(\bar{\Omega})$.

В первом параграфе первой главы поставлены корректные краевые задачи и доказаны единственность их решений.

Задача A_1**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса

$$C^{4,2}_{x,y}(\Omega)\cap C^{3,1}_{x,y}(\bar{\Omega}), \tag{2}$$

удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и следующим краевым условиям:

$$\left.\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|_{x=0}=\psi_{m+1}(y),\quad \left.\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|_{x=p}=\psi_{m+2}(y),\quad m=0,2,\quad 0\le y\le q; \tag{3}$$

$$u(x,0)=0,\quad u(x,q)=0,\quad 0\le x\le p, \tag{4}$$

здесь $\psi_i(y)$, $i=\overline{1,4}$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача A_2**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса (2), удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, краевым условиям (3) и

$$u_y(x,0)=0,\quad u_y(x,q)=0,\quad 0\le x\le p. \tag{5}$$

Задача A_3**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса (2), удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, краевым условиям (3) и

$$\alpha u(x,0)+\beta u_y(x,0)=0,\quad \gamma u(x,q)+\delta u_y(x,q)=0,\quad 0\le x\le p, \tag{6}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R\setminus\{0\}$.

Теорема 1. Если задача A_1 имеет решение, то при выполнении условий $a_1\le 0$ и $a_3\ge 0$, оно единственно.

Теорема 2. Если задача A_2 имеет решение, то при выполнении условий $a_1\le 0$ и $a_3\ge 0$, оно единственно.

Теорема 3. Если задача A_3 имеет решение, то при выполнении условий $a_1\le 0$, $a_3\ge 0$, $\alpha\beta<0$, $\gamma\delta>0$ оно единственно.

Теоремы 1, 2 и 3 доказываются методом интегралов энергии.

Замечание 1. Отметим, что при нарушении условий теоремы 1, однородная задача A_1 для однородного уравнения (1) может иметь нетривиальные решения. Например, когда $a_1=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2=0$, $a_3=-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2$, задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\dfrac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\left(\dfrac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y)-u_{yy}=0, \\ u(x,0)=u(x,q)=0, \quad u(0,y)=u(p,y)=u_{xx}(0,y)=u_{xx}(p,y)=0, \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения $u_{k,n}=\sin\left(\dfrac{\pi k}{p}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{q}y\right),\ k,n\in N.$

Отсюда, следует, что если a_3 является параметром разделения, тогда при $a_3\geq 0$ задача корректно поставлена, при $a_3<0$ задача не корректна, т.е. существует спектр.

Замечание 2. Отметим, что при нарушении условий теоремы 2, однородная задача A_2 для однородного уравнения (1) может иметь нетривиальные решения. Например, когда $a_1=\left(\dfrac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2=0$, $a_3=-\left(\dfrac{\pi n}{q}\right)^2$ задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\dfrac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\left(\dfrac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y)-u_{yy}=0, \\ u_y(x,0)=u_y(x,q)=0, \quad u(0,y)=u(p,y)=u_{xx}(0,y)=u_{xx}(p,y)=0, \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения $u_{n,k}(x,y)=\sin\left(\dfrac{\pi k}{p}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi n}{q}y\right),\quad k\in N,$ $n=0,1,2,\ldots.$

Замечание 3. Отметим, что при нарушении условий теоремы 3, однородная задача A_3 для однородного уравнения (1) может иметь нетривиальные решения. Например, когда $a_1=\left(\dfrac{\pi k}{p}\right)^2>0$, $a_2=0$, $a_3=-\lambda_n<0$ задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\dfrac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\lambda_n u(x,y)-u_{yy}=0, \\ \alpha u(x,0)+\beta u_y(x,0)=0, \quad \gamma u(x,q)+\delta u_y(x,q)=0, \\ u(0,y)=u(p,y)=u_{xx}(0,y)=u_{xx}(p,y)=0, \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения $u_{n,k}(x,y)=\sin\left(\dfrac{\pi k}{p}x\right)Y_n(y),\ n,k\in N,$ где λ_n и $Y_n(y)$ собственные значения и собственные функции задачи

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0, \\ \alpha Y(0)+\beta Y'(0)=\gamma Y(q)+\delta Y'(q)=0. \end{cases} \tag{7}$$

Во втором параграфе первой главы рассматривается существование решения задачи A_1.

Теорема 4. Если выполняются следующие условия:

1) $D < \dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+1\right)}$;

2) $\psi_i^{(j)}(0)=\psi_i^{(j)}(q)=0$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$, $j=0,2$;

3) $f(x,0)=f(x,q)=0$, $0\le x\le p$, то решение задачи A_1 существует. Здесь

$$D=\max\left\{|a_i|, i=\overline{1,3}\right\}, \qquad \mu_1=\sqrt{\frac{\pi}{2q}}.$$

Доказательство теоремы проводится методом разделение переменных и решение выписано через построенную функцию Грина.

В третьем параграфе первой главы построены решения задач A_2 и A_3. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 5. Если выполняются следующие условия:

1) $D < \min\left\{\dfrac{1}{2p^2\left(1+p+p^2\right)}, \dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+1\right)}\right\}$;

2) $\psi_i'(0)=\psi_i'(q)=0$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$;

3) $f_y(x,0)=f_y(x,q)=0$, $0\le x\le p$, то решение задачи A_2 существует. Здесь, $\mu_1=\sqrt{\dfrac{\pi}{2q}}$.

Теорема 6. Если выполняются следующие условия:

1) $D < \dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+1\right)}$;

2) $\alpha\psi_i^{(j)}(0)+\beta\psi_i^{(j+1)}(0)=0$, $\gamma\psi_i^{(j)}(q)+\delta\psi_i^{(j+1)}(q)=0$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$, $j=0,2$;

3) $\alpha f(x,0)+\beta f_y(x,0)=0$, $\gamma f(x,q)+\delta f_y(x,q)=0$, $0\le x\le p$, то решение задачи A_3 существует. Здесь $\mu_1=\sqrt[4]{\dfrac{\lambda_1}{4}}$, λ_1 – первое собственное значение задачи (7).

Во второй главе диссертации под названием **«Краевые задачи для уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами»**, ставятся корректные краевые задачи для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками, имеющие младшие члены с переменными коэффициентами, доказывается единственность решения и выписаны решения с помощью построенной функции Грина.

В области Ω рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv u_{xxxx} + a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x + a_3(x)u - u_{yy} = f(x,y), \qquad (8)$$

где

$$a_1(x) \in C^2[0,p], \quad a_2(x), a_3(x) \in C^1[0,p], \quad f_{xyy}(x,y) \in C(\bar{\Omega}).$$

В первом параграфе второй главы поставлены корректные краевые задачи и доказаны единственность их решений.

Задача B_1**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса (2), удовлетворяющую уравнению (8) в области Ω, краевым условиям (4) и

$$\left.\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|_{x=0} = \psi_m(y), \quad \left.\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|_{x=p} = \psi_{m+1}(y), \quad m = 1,3, \quad 0 \le y \le q, \qquad (9)$$

здесь $\psi_i(y)$, $i = \overline{1,4}$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача B_2**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса (2), удовлетворяющую уравнению (8) в области Ω, краевым условиям (5) и (9).

Задача B_3**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса (2), удовлетворяющую уравнению (8) в области Ω, краевым условиям (6) и (9).

Теорема 7. Если задача B_1 имеет решение, то при выполнении условий $a_1'(0) - a_2(0) \ge 0$, $a_1'(p) - a_2(p) \le 0$, $a_1''(x) - a_2'(x) + 2a_3(x) \ge 0$, $a_1(x) \le 0$, оно единственно.

Теорема 8. Если задача B_2 имеет решение, то при выполнении условий $a_1'(0) - a_2(0) \ge 0$, $a_1'(p) - a_2(p) \le 0$, $a_1''(x) - a_2'(x) + 2a_3(x) \ge 0$, $a_1(x) \le 0$, $a_3(x) > 0$, оно единственно.

Теорема 9. Если задача B_3 имеет решение, то при выполнении условий $a_1'(0) - a_2(0) \ge 0$, $a_1'(p) - a_2(p) \le 0$, $a_1''(x) - a_2'(x) + 2a_3(x) \ge 0$, $a_1(x) \le 0$, $\alpha\beta < 0$, $\gamma\delta > 0$, оно единственно.

Теоремы 7, 8 и 9 доказываются методом интегралов энергии.

Замечание 4. Отметим, что при нарушении условий теоремы 7, однородная задача B_1 для однородного уравнения (8) может иметь нетривиальные решения. Например, когда $a_1 = \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2$ задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y) + \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y) - \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y) - u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = u(x,q) = 0, \quad u_x(0,y) = u_x(p,y) = u_{xxx}(0,y) = u_{xxx}(p,y) = 0, \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение $u_{k,n} = \cos\left(\frac{\pi k}{p}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right)$, $k = 0,1,2,\ldots$, $n \in N$.

Замечание 5. Отметим, что при нарушении условий теоремы 8, однородная задача B_2 для однородного уравнения (8) может иметь

нетривиальные решения. Например, когда $a_1=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2=0$, $a_3=-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2$ задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y)-u_{yy}=0, \\ u_y(x,0)=u_y(x,q)=0, \quad u_x(0,y)=u_x(p,y)=u_{xxx}(0,y)=u_{xxx}(p,y)=0, \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение $u_{k,n}=\cos\left(\frac{\pi k}{p}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{q}y\right)$, $k,n=0,1,2,...$

Замечание 6. Отметим, что при нарушении условий теоремы 9, однородная задача B_3 для однородного уравнения (8) может иметь нетривиальные решения. Например, легко можно убедится, когда $a_1=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2>0$, $a_2=0$, $a_3=-\lambda_n<0$, задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\lambda_n u(x,y)-u_{yy}=0, \\ \alpha u(x,0)+\beta u_y(x,0)=0, \quad \gamma u(x,q)+\delta u_y(x,q)=0, \\ u_x(0,y)=u_x(p,y)=u_{xxx}(0,y)=u_{xxx}(p,y)=0, \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения $u_{n,k}(x,y)=\cos\left(\frac{\pi k}{p}x\right)Y_n(y)$, $n,k\in N$, где λ_n и $Y_n(y)$ собственные значения и собственные функции задачи (7).

Во втором параграфе второй главы рассматривается существование решение задачи B_1.

Теорема 10. Если выполняются следующие условия:

1) $a_1'(0)-a_2(0)=0$, $a_1'(p)-a_2(p)=0$;

2) $D<\dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(3+3\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+2\mu_1^2\right)}$;

3) $\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0$, $i=\overline{1,4}$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$;

4) $f(x,0)=f(x,q)=0$, $0\le x\le p$, то решение задачи B_1 существует. Здесь

$$D=\max_{\xi\in[0,p]}\left\{\left|a_i^{(j)}(\xi)\right|,\left|a_1''(\xi)\right|, i=\overline{1,3},\ j=0,1\right\}, \qquad \mu_1=\sqrt{\frac{\pi}{2q}}.$$

Доказательство теоремы проводится методом разделения переменных и решение выписано через построенную функцию Грина.

В третьем параграфе второй главы построены решения задач B_2 и B_3. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 11. Если выполняются следующие условия:

1) $a_1'(0)-a_2(0)=0$, $a_1'(p)-a_2(p)=0$;

2) $D<\dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(3+3\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+2\mu_1^2\right)}$;

3) $\psi_i'(0)=\psi_i'(q)=0$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$;

4) $f_y(x,0)=f_y(x,q)=0$, $0\le x\le p$, то решение задачи B_2 существует. Здесь $\mu_1=\sqrt{\dfrac{\pi}{2q}}$.

Теорема 12. Если выполняются следующие условия:

1) $a_1'(0)-a_2(0)=0$, $a_1'(p)-a_2(p)=0$;

2) $D<\dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+3\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+3\right)}$;

3) $\alpha\psi_i^{(j)}(0)+\beta\psi_i^{(j+1)}(0)=0$, $\gamma\psi_i^{(j)}(q)+\delta\psi_i^{(j+1)}(q)=0$, $\psi_i(y)\in C^4[0,q]$, $i=\overline{1,4}$, $j=0,2$;

4) $\alpha f(x,0)+\beta f_y(x,0)=0$, $\gamma f(x,q)+\delta f_y(x,q)=0$, $0\le x\le p$, то решение задачи B_3 существует. Здесь $\mu_1=\sqrt[4]{\dfrac{\lambda_1}{4}}$, λ_1 – первое собственное значение задачи (7).

В третьей главе диссертации под названием **«Краевые задачи для уравнения четвертого порядка вида** $\left(a_1\dfrac{\partial}{\partial x}+b_1\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0$**, в пятиугольной области»**, ставятся новые краевые задачи и доказана однозначная разрешимость некоторых из этих краевых задач для одного класса уравнений четвёртого порядка параболо-гиперболического типа в смешанной пятиугольной области с двумя перпендикулярными как характеристической, так и нехарактеристической линиями изменения типа.

Рассмотрим уравнение

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0, \qquad (10)$$

в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2$; $a_1,b_1,a_2,b_2\in R$, $a_i^2+b_i^2\ne 0$, $i=1,2$; а G_1 и G_3 квадраты с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$ и A, $D(-1,0)$, $D_0(-1,1)$, A_0 соответственно; G_2 – треугольник с вершинами в точках B, $C(0,-1)$, D; J_1 и J_2 интервалы с вершинами в точках B, D и A, A_0 соответственно;

$$Lu=\begin{cases} u_{xx}-u_y,\ (x,y)\in G_1, \\ u_{xx}-u_{yy},\ (x,y)\in G_i,\ i=2,3. \end{cases}$$

В первом параграфе третьей главы в зависимости от значений угловых коэффициентов $\gamma_1=\dfrac{b_1}{a_1}$ и $\gamma_2=\dfrac{b_2}{a_2}$ характеристик операторов первого порядка уравнения (10), ставится следующая задача:

Задача 3.1. Найти функцию $u(x,y)$, которая

1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (10), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях;

2) удовлетворяет уравнению (10) в области $G\setminus J_1\setminus J_2$;

3) удовлетворяет краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа.

Во втором параграфе третьей главы при $b_1=b_2=0$, т.е. $\gamma_1=\gamma_2=0$, уравнение (10) имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Lu)=0,$$

интегрируя два раза, находим

$$\begin{cases} u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(y)x+\omega_{12}(y), & (x,y)\in G_1, \\ u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_{i1}(y)x+\omega_{i2}(y), & (x,y)\in G_i, \quad i=2,3. \end{cases}$$

В нижнем характеристическом треугольнике G_2 с помощью краевых условий найдена функция, в правой части гиперболического уравнения второго порядка. Затем на линии изменения типа $y=0$ получены два соотношения между двумя следами решения, из которых найдены эти следы, тем самым – решение поставленной задачи в нижнем характеристическом треугольнике.

В области G_3 применяя метод продолжения, на линии изменения типа $x=0$ получено одно соотношение между двумя следами решения.

Далее, в области G_1 из решения первой краевой задачи для параболического уравнения получено второе соотношение между теми же следами решения и получено интегральное уравнение Вольтера второго рода относительно неизвестной функции, из которого определена искомая функция, тем самым решение задачи 3.1.

Доказана следующая теорема.

Теорема 13. Если $\varphi_1,\ \varphi_2\in C^4[0,1]$, $\varphi_4\in C^3[0,1]$, $\varphi_6\in C^2[0,1]$, $\psi_1\in C^4[0,1]$, $\psi_2\in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_4\in C^3[0,1]$, $\psi_6\in C^2[-1,0]$, причем выполняются условия согласования $\varphi_1(0)=\psi_1(1)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, $\tau_1(1)=\varphi_1(0)$, $\tau_1'(1)=\psi_1'(1)-\varphi_1'(0)$, то задача 3.1 при $\gamma_1=\gamma_2=0$ имеет единственное решение.

В третьем параграфе третьей главы при $\gamma_1 = 0$ и $1 < \gamma_2 < \infty$ уравнение (10) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)(Lu) = 0,$$

или

$$\begin{cases} u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{12}(y), & (x, y) \in G_1, \\ u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{i2}(y), & (x, y) \in G_i, \quad i = 2,3. \end{cases}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 14. Если $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_4 \in C^2[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3 \in C^3[0,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,0]$, $\psi_6 \in C^2[-1,0]$, причем выполняются условия согласования $\varphi_1(0) = \psi_1(1)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(-1)$, $\psi_4'(0) = -\psi_3'(0)$, то задача 3.1 при $\gamma_1 = 0$, $1 < \gamma_2 < \infty$ имеет единственное решение.

В четвертом параграфе третьей главы при $\gamma_1 = \infty$, $\gamma_2 = 1$ уравнение (10) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)(Lu) = 0,$$

или

$$\begin{cases} u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(x - y) + \omega_{12}(x), & (x, y) \in G_1, \\ u_{jxx} - u_{jyy} = \omega_{j1}(x - y) + \omega_{j2}(x), & (x, y) \in G_j, \quad j = 2,3. \end{cases}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 15. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_4 \in C^3[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1/2]$, $\psi_2 \in C^4[-1,0]$, $\psi_3 \in C^3[0,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,0]$, $\psi_6 \in C^2[-1,0]$, причем выполняются условия согласования $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(-1)$, $\psi_4'(0) = -\psi_3'(0)$, то задача 3.1 при $\gamma_1 = \infty$, $\gamma_2 = 1$ имеет единственное решение.

В пятом параграфе третьей главы при $\gamma_1 > 1$, $\gamma_2 > 1$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$ уравнение (10) имеет вид

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 (Lu) = 0,$$

или

$$\begin{cases} u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(bx - ay) y + \omega_{12}(bx - ay), & (x, y) \in G_1, \\ u_{jxx} - u_{jyy} = \omega_{j1}(bx - ay) y + \omega_{j2}(bx - ay), & (x, y) \in G_j, \quad j = 2,3. \end{cases}$$

Здесь угловой коэффициент характеристики оператора $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)$ имеет вид $\gamma=\frac{b}{a}>1$, причем эта характеристика является двукратной. Доказана следующая теорема.

Теорема 16. Если φ_1, $\varphi_2\in C^4[0,1]$, $\varphi_4\in C^3[0,1]$, $\varphi_6\in C^2[0,1]$, $\psi_1\in C^4[0,1]$, $\psi_2\in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3\in C^3[0,1]$, $\psi_4\in C^3[-1,0]$, $\psi_5\in C^2[0,1]$, $\psi_6\in C^2[-1,0]$, причем выполняются условия согласования $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, $\psi_4'(0)=-\psi_3'(0)$, то задача 3.1 $\gamma_1>1$, $\gamma_2>1$, $a_1=a_2=a$, $b_1=b_2=b$ имеет единственное решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению краевых задач для уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками, имеющие младшие члены с постоянными и переменными коэффициентами и уравнений параболо-гиперболического типа.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Обоснована корректность новых краевых задач для неоднородных уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками с постоянными и переменными коэффициентами.

2. Найдены достаточные условия для коэффициентов, при которых поставленные задачи однозначно разрешимы, а в случае нарушения этих условий построены примеры нетривиальных решений однородных задач.

3. Решения краевых задач строятся с использованием найденных функций Грина и метода рядов Фурье.

4. Доказаны однозначные разрешимости краевых задач, поставленных в зависимости от значений угловых коэффициентов характеристик операторов первого порядка уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в области с двумя перпендикулярными линиями изменения типа.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MAMAJONOV SANJARBEK MIRZAYEVICH

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FOURTH-ORDER EQUATIONS WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS AND PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE

01.01.02 – "Differential equations and Mathematical physics"

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOFHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number № B2023.2.PhD/FM865.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (http://kengash.mathinst.uz/) and in the webside of "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Apakov Yusupjon Pulatovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Takhirov Jozil Ostanovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Karimov Kamoliddin Tuychiboevich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent
Leading organization:	**Urgench State University**

Defense will take place "06" february 2024 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy (is registered № 176). Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40.

Abstract of dissertation sent out on "19" january 2024 year.
(Mailing report № 2 on "19" january 2024 year).

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

J.K. Adashev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., senior researcher

A.A. Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is to formulate and study boundary value problems for fourth-order equations with multiple characteristics, having lower terms with constant and variable coefficients and equations of parabolic-hyperbolic type.

The objects of the research work are fourth-order equations with multiple characteristics and equations of parabolic-hyperbolic type.

Scientific novelty of the research work are as follows:

the correctness of new boundary value problems for inhomogeneous fourth-order equations with multiple characteristics with constant and variable coefficients is substantiated;

sufficient conditions for the coefficients are found under which the posed problems are uniquely solvable, and in the case of violation of these conditions, examples of nontrivial solutions to homogeneous problems are constructed;

solutions of boundary value problems are constructed using the found Green's functions and the Fourier series method;

the unique solvability of boundary value problems posed depending on the values of the angular coefficients of the characteristics of first-order operators of a fourth-order equation of parabolic-hyperbolic type in a region with two perpendicular lines of type change is proven.

Implementation of the research results. The results obtained on boundary value problems for fourth-order equations with multiple characteristics and parabolic-hyperbolic type were put into practice in the following projects:

theoretical scientific results developed in the dissertation on the study of the unique solvability of a boundary value problem for a high-order equation with constant coefficients were used in foreign grant No. AP08855810 “Issues of solvability of boundary value and initial-boundary value problems for nonlocal partial differential equations” (Reference No. 05/3407 of the International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmed Yasawi, September 22, 2023, Kazakhstan) in the study of boundary value problems for a fourth-order equation. The application of the scientific result made it possible to construct an explicit solution to the boundary value problem for a fourth-order equation using Green's function constructed in the dissertation;

the methodology for constructing a solution to boundary value problems using Green's function for a fourth-order equation with variable coefficients was used to construct a solution to similar problems for a high-order equation within the framework of grant No. 374874-2020 “Problems of phase transitions and critical phenomena. Mathematical aspects of their equations, fast transitions and asymptotics” (Reference No. 1179 of Osh State University, October 16, 2023, Kyrgyzstan). In particular, using the above results, explicit solutions to new boundary value problems for high-order equations are obtained.

Approbation of the research results. The results of this dissertation were discussed at 13 international and 3 republican scientific and scientific-practical conferences.

Publications of the research results. 27 scientific papers have been published on the topic of the dissertation, including 11 scientific articles, including 5 published in foreign and 6 republican journals recommended by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of dissertations for the degree of Doctor of Philosophy (PhD).

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, and a list of references. The volume of the dissertation is 114 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I, Part I)

1. Apakov Y.P., Mamajonov S.M. Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2021. – Vol. 15. – № 4. – pp. 586-596. (Scopus IF=0.417).
2. Apakov Y.P., Mamajonov S.M. Boundary Value Problem for a Fourth-Order Equation of the Parabolic-Hyperbolic Type with Multiple Characteristics with Slopes Greater Than One // Russian Mathematics. – 2022. – Vol. 66. – № 4. – pp. 1-11. (Scopus IF=0.356).
3. Apakov Y.P., Mamajonov S.M. Boundary-value problem for the fourth-order equation with multiple characteristics in a rectangular domain // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – Vol. 272. – № 2. – pp. 185-201. (Scopus IF=0.314).
4. Apakov Y.P., Mamajonov S.M. Boundary Value Problem for an Inhomogeneous Fourth-Order Equation with Lower-Order Terms // Differential Equations. – 2023. – Vol. 59. – No. 2. – pp. 188-198. (Scopus IF=0.533).
5. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Краевая задача для неоднородного уравнения четвёртого порядка с постоянными коэффициентами // Челябинский физико-математический журнал. – 2023. – Т. 8, – выпуск. 2. – с.157-172. (Scopus IF=0.215).
6. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. – 2022. – № 4. – с. 7-13. (01.00.00; №7).
7. Мамажонов С.М. Третья краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами // Бюллетень Института математики. – 2022. – Vol. 5. – № 6. – с. 100-109. (01.00.00; №17).
8. Apakov Y.P., Mamajonov S.M. The third boundary problem for a fourth-order nonhomogeneous equation with variable coefficients // Uzbek Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 67. – № 3. – pp.23-32. (01.00.00; №6).
9. Мамажонов С.М. О постановке и исследования одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа // Узбекский математический журнал. – 2015. – № 3. – с. 75-84. (01.00.00; №6).
10. Мамажонов С.М. О постановке и исследования одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области // Научный вестник НамГУ. – 2020. – № 11. – с. 8-15. (01.00.00; №14).

11. Мамажонов С.М. Решение второй краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // Научный вестник НамГУ. – 2023. – № 7. – с.70-80. (01.00.00; №14).

II bo‘lim (Часть II, Part II)

12. Мамажонов С.М. Об одном классе краевых задач для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2018. – № 4(24). – с. 40-49.
13. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Об одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области // Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари. Республика илмий анжуман материаллари тўплами. Тошкент. 1-2 июнь 2021 г. – с. 222-227.
14. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Сарымсаковские чтения» Ташкент. 16-18 сентября 2021 г. – с. 30-31.
15. Мамажонов С.М. О разрешимости одной краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в пятиугольной области // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа». Бухара. 04-05 ноября 2021 г. – с. 236-238.
16. Apakov Yu.P., Mamajonov S.M. Boundary-value problem for an inhomogeneous fourth-order equation with younger terms // International Conference «Contemporary mathematics and its application». Tashkent. 19-21 November 2021 y. – p.110.
17. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Об одной краевой задаче для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка, когда угловые коэффициенты характеристики оператора S1 и S2 имеют разные знаки // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной научной конференции. Минск. 22-25 ноября 2021 г. – с. 56-57.
18. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // VI международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» Нальчик. 5-9 декабря 2021 г. – с. 32.
19. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. О краевой задаче для неоднородного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня работников науки Республики Казахстана. Алматы. – 2022. – с. 60-61.

20. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами // Международная научно-практическая конференция «Роль и значение цифровой жизни и социальных наук в воспитании гармонично развитого поколения: актуальные проблемы и перспективы». Андижан. 12 апреля 2022 г. – с. 545-549.
21. Мамажонов С.М. О решение краевой задачи для уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий». Бухара. 11-12 мая 2022 г. – с. 217-218.
22. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Краевая задача для уравнения четвертого порядка содержащее второй производной по времени // Материалы Международной научной конференции «Актуальные задачи математики, механики и информатики», посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина. Караганда. 8-9 сентября 2022 г. – с. 104-106.
23. Мамажонов С.М. О корректной постановке краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // International conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”. Samarkand. 23-24 September 2022 y. – с. 278-280.
24. Мамажонов С.М. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с младшими членами // Неклассические уравнения математической физики и их приложения. Международная научная конференция. УзМУ. Ташкент. 6-8 октября 2022 г. – с. 134-136.
25. Мамажонов С.М. О постановке краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с несимметричными условиями по времени // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан. Алматы. 4-7 апреля 2023 г. – с. 180-181.
26. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. О решение краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы физики, математики и механики» Бухара. 24-25 мая 2023 г. – с. 194-197.
27. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. О разрешимости третьей краевой задачи для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // Тезисы докладов VII Всемирного Конгресса математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023). Туркестан. 20-23 сентября 2023 г. – с. 160.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida 2023 yil 18-dekabr kuni tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 6/24.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.