MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

NE'MATILLAYEVA MUHAYYO DAVLATALI QIZI

$A(z)-$ANALITIK FUNKSIYALARNI SODDA KASRLAR BILAN IFODALASH

01.01.01– Matematik analiz

fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

UDK: 517.54

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

NE'MATILLAYEVA MUHAYYO DAVLATALI QIZI

$A(z)-$ ANALITIK FUNKSIYALARNI SODDA KASRLAR BILAN IFODALASH

01.01.01– Matematik analiz

fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida №B2023.1.PhD/FM832 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz) va "ZiyoNet" Axborot ta'lim portalida (http://www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Jabborov Nasridin Mirzoodilovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Rozikov Utkir Abdulloyevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor, akademik
	Rustamova Mastura Samadovna fizika-matematika fanlari falsafa doktori, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Urganch davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024-yil "15" fevral soat 15:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+998 71) 227-12-24, faks: (+998 71) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (8 raqami bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+998 71) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2024-yil "02" 02 kuni tarqatildi.
(2024-yil "02" 02 dagi 2- raqamli reyestr bayonnomasi).

A.Sadullayev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor, akademik

R.M.Jo'rayev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.f.d.(PhD)

R.N.G'anixodjaev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida kompleks oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasi, potensiallar nazariyasi, kompleks dinamik sistemalar hamda tomografiya masalalari boʻyicha olib borilayotgan koʻplab ilmiy-amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda kvazikonform akslantirishlar va $A(z)$ – analitik funksiyalar xossalarini oʻrganish bilan bogʻliq boʻlib, bu yoʻnalish matematikada dolzarb yoʻnalish sifatida rivojlanmoqda. Kvazikonform akslantirishlar va $A(z)$ – analitik funksiyalar kompleks oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasining muhim qismlaridan biri hisoblanadi. Analitik funksiyalar, cheksiz koʻpaytmalar nazariyasi hamda Blyashka tipida ifodalanishlar $A(z)$ – analitik va $A(z)$ – garmonik funksiyalarni oʻrganishda eng muhim usullardan biri boʻlib, kompleks dinamik sistemalar nazariyasida ekstremal funksiyaning uzluksizligi muammosini hal etishda muvaffaqiyat bilan qoʻllanilmoqda. Bu esa kompleks dinamik sistemalar nazariyasining asosiy masalalaridan boʻlib, hozirgi zamonaviy matematikaning aktual masalalaridan biri hisoblanadi.

Jahonda kompleks tekislik hamda koʻp oʻlchovli kompleks fazoda $A(z)$ – analitik funksiyalar bilan bogʻliq masalalarni yechish va ularni amaliyotga tadbiq qilish boʻyicha ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. $A(z)$ – analitik funksiyalar asosida $A(z)$ – garmonik funksiyalar sinfini va uning xossalarini oʻrganish, $A(z)$ – garmonik funksiyalarning geometrik xossalarini oʻrganish usulini takomillashtirish borasida maqsadli ilmiy tadqiqotlar olib borishga, shu bilan birga, $A(z)$ – analitik funksiyalar sinfini oʻrganish, $A(z)$ – analitik funksiyalar sinfida cheksiz koʻpaytmalar nazariyasi hamda Blyashka koʻpaytmasi va uning muhim xossalarini oʻrganish usullarini ishlab chiqishga alohida eʼtibor qaratilmoqda.

Mamlakatimizda, ayniqsa, oxirgi yillarda fundamental fanlar, xususan, matematika va fizika, ular bilan bir qatorda tibbiy va geologik tomografiya masalalarida ilmiy ahamiyatga ega boʻlgan dolzarb yoʻnalishlarga eʼtibor kuchaydi. Jumladan, soʻnggi yillarda funksiyalar nazariyasi, koʻp oʻlchovli kompleks analiz, plyuripotensiallar nazariyasi, approksimatsiyalar nazariyasi va kompleks dinamik sistemalar nazariyasiga alohida eʼtibor qaratilmoqda. Bularning barchasi qaralayotgan masalalarning naqadar dolzarbligi va zarurligini koʻrsatadi. Bugungi kunda $A(z)$ – analitik funksiyalarni tadqiq qilishda salmoqli ilmiy natijalarga erishildi. “Haqiqiy oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasi. Kompleks oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasi” fanlarining ustuvor yoʻnalishlari boʻyicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalar va faoliyat yoʻnalishlar etib belgilandi[1]. $A(z)$ – analitik funksiyalar nazariyasi boʻyicha ilmiy tadqiqotlar olib borish mazkur qarorning ijrosini taʼminlashda muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори.

Ushbu dissertatsiya ishida olib borilgan tadqiqotlar O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947 sonli Farmoni, 2017-yil 17-fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2789 sonli va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708 sonli Qarorlarida, shuningdek, mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan masalalarni hal etishga muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Taniqli olim G.Gryoch tomonidan asos solingan kvazikonform akslantrishlar nazariyasi M.A.Lavrentev va L.Alforslar tomonidan matematik fizika hamda mexanika masalalarida tadbiqlarini topishi bu yo‘nalishning keng ko‘lamda rivojlanishiga olib keldi. Tekislikdagi kvazikonform akslantirishlar nazariyasini o‘rganish Beltrami tenglamasining yechimi bilan chambarchas bog‘langan. Kvazikonform akslantrishlar nazariyasi va Beltrami tenglamasi XX asr o‘rtalarida Amerikalik olimlar L.Alfors, A.Bering, F.V.Gering, Rossiyalik olimlar M.A.Lavrentev, I.N.Vekua, P.P.Belinskiy, Yu.G.Reshetnyak, V.I.Miklyukov, V.A.Zorich, P.M.Tamrazov, S.L.Krujkal, A.V.Sichyov, I.P.Mityukov, G.D.Suvorov, V.V.Aseyevlarning fundamental ishlarida o‘z aksini topgan hamda o‘zbekistonlik olimlardan L.I.Volkovkskiy, M.Zaxirov, A.Axmedov, G.M.Lyan, E.X.Yakubov, A.K.Varisov va boshqalar tomondan rivojlantrilgan. $A(z)-$analitik funksiyalarning xossalarini o‘rganish esa o‘tgan asrning 90-yillaridan V.Gutlyanskiy, D.A.Kovtonyuk, I.V.Petkov, V.I.Ryazanov, R.R.Salimov (Ukraina), Yu.Srebro, E.X.Yakubov (Izroil), A.N.Kondrashov, A.L.Buxgeym, S.G.Kazansev, X.X.Imomnazarovlar (Rossiya) tomonidan jadallik bilan o‘rganib kelinmoqda. Agar kvazikonform akslantirishlar gomeomorfizimning geometrik xususiyatlari bilan bog‘liq bo‘lsa, $A(z)-$analitik funksiyalar nazariyasida funksional xossalar, silliqlik, singulyar nuqtalar, integral formulalar va boshqalar muhimdir. Bu xususiyatlar tibbiy va geologik tomografik masalalarda qo‘llanilishda muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekistonda 2010-yildan boshlab O‘zbekiston Milliy universiteti matematik analiz kafedrasida akademik A.Sadullayev rahbarligida uning o‘quvchilari N.M.Jabborov, T.O‘.Otaboyev, Sh.Ya.Xursanov va boshqalar tomonidan $A(z)-$analitik funksiyalarning funksional xossalarini tadqiq qilishni boshlashgan. Natijada, Koshi yadrosining analogi, Shvars va Puasson formulalari, $A(z)-$garmonik va $A(z)-$subgarmonik funksiyalarning qator xossalari isbotlandi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Milliy universitetining ilmiy tadqiqot ishlari rejasining OT-F4-(37+29) raqamli “$A(z)-$analitik funksiyalarning funksional xossalari va ularning qo‘llanilishi. Matritsaviy sohalarda kompleks analizning ba’zi masalalari” nomli ilmiy loyihasi doirasida amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi $A(z)-$analitik funksiyalar uchun umumlashgan argument prinsipini isbotlash, Veyershtrass formulasini tuzish, Blyashka ko‘paytmasi analogini isbotlash va uning xossalarini o‘rganish, $A(z)-$analitik funksiyalar uchun Mittag-Leffler teoremasini isbotlashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

$A(z)-$analitik funksiyalar uchun umumlashgan argument prinsipi va Gurvits teoremasini isbotlash;

$A(z)-$analitik funksiyalar uchun Veyershtrass faktorizatsiyasini aniqlash va ularni hosil qilish;

qavariq sohalarda $A(z)-$analitik funksiyalar uchun Blyashka teoremalarining analoglarini o‘rganish;

$A(z)-$meromorf funksiyalarning oddiy kasrlarga yoyilishini tekshirish;

qavariq sohalarda $A(z)-$analitik funksiyalar uchun Mittag – Leffler teoremasining analogini isbotlash.

Tadqiqotning obyekti $A(z)-$analitik funksiyalar, $A(z)-$analitik funksiyalar uchun umumlashgan argument prinsipi, Blyashka teoremasi, Veyershtrass ko‘paytmasidan iboratdir.

Tadqiqotning predmeti Beltrami tenglamasi, $A(z)-$analitik funksiyalar, Veyershtrass ko‘paytmasi, Blyashka formulalaridir.

Tadqiqotning usullari: Dissertatsiya ishida funksiyalar nazariyasi, analitik funksiyalar nazariyasi, kvazikonform akslantrishlar nazariyasi va $A(z)-$analitik funksiyalar nazariyasi uslublaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Analitik funksiyalar uchun ma’lum bo’lgan argument prinsipi teoremasining $A(z)-$analitik funksiyalar uchun umumlashmasi, ya’ni $D\subset\mathbb{C}$ sohada qutb nuqtalaridan tashqari barcha nuqtalarda $A(z)-$analitik bo‘lgan $f(z)$ funksiya uchun umumlashgan argument prinspi, shuningdek, Gurvits teoremasi isbotlangan;

$A(z)-$analitik funksiyalar uchun Veyershtrass faktorizatsiyasi tuzilgan va umumlashgan Veyershtrass teoremasi dalillangan;

$A(z)-$analitik funksiyalar uchun Blyashka teoremasining analogini isbotlashda muhim o‘rin tutuvchi Yensen formulasining analogi keltirib chiqarilgan;

Lemniskatada $A(z)-$analitik funksiyalar uchun Blyashka ko‘paytmasi qurilgan;

$A(z)$ – analitik funksiyalar uchun meromorf funksiya tushunchasi aniqlanib, qavariq sohalarda $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun Mittag – Leffler teoremasining analogi isbotlangan;

$A(z)$ – meromorf funksiyalarni oddiy kasrlarga yoyish ko‘rsatilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Dissertatsiya ishida isbotlangan Blyashka ko‘paytmasining formulasi va Mittag-Leffler teoremasi elliptik tipdagi chegaraviy masalalarni hamda matematik fizik tenglamalarni yechishda qo‘llashdan iborat.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiya natijalarini isbotlashda matematik fizika, potensiallar nazariyasi, plyuripotensiallar nazariyasi va ko‘p kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi uslublaridan foydalanilgani matematik qat’iyatlikni ifodalaydi. Bundan tashqari olingan dissertatsiya natijalari impakt-faktorga ega va nufuzli ilmiy jurnallarda chop etilgan hamda Xalqaro va Respublika konferensiyalarida ma’ruza qilingani bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati olingan natijalarning $A(z)$ – analitik davom ettirish masalalarida, kvazikonform akslantirishlar nazariyasi va $A(z)$ – analitik funksiyalarni sodda kasrlar bilan ifodalashda, cheksiz ko‘paytmaning ayrim xossalarini isbotlashda qo‘llanilishi bilan izohlanadi. Shuningdek, olingan natijalardan matematik fizika va mexanika masalalaridagi tenglamalarning yechimlarini o‘rganish uchun foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati kompyuter tomografiyasi va jismlar ishqalanish koeffitsiyentini hisoblashda, mexanik va matematik fizikaning turli xil masalalarini yechishda tadbiq qilishda asos bo‘lib xizmat qiladi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. $A(z)$ – analitik funksiya va $A(z)$ – garmonik funksiyalarning integrallanuvchanligi asosida:

dissertasiyada taklif qilingan $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun umumlashgan argument prinsipi va Veyershtrass teoremasining analogidan Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti tomonidan 2018-2019-yillarda bajarilgan MRU-OT-81/2017 raqamli “Математическое моделирование термодинамически согласованной математической модели двухфазных сред в диссипативном приближении с перекрестными эффектами” grant loyihasida Laplas operatori qatnashgan aralash-qo‘shma tipdagi uchinchi tartibli tenglamalar uchun nolokal boshlang‘ich-chegaraviy masalalar yechimining xossalarini o‘rganishda foydalanilgan;

umumlashgan $A(z)$ – garmonik funksiyasi va regulyar $A(z)$ – garmonik funksiyalarning umumlashgan ifodasi hosil qilingan formulalaridan Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti tomonidan 2017-2020-yillarda bajarilgan OT-F4-(37+29) “$A(z)$ – analitik funksiyalarning funksional xossalari va ularning tatbiqlari. Matritsaviy sohalarda kompleks analizning ayrim masalalari” ilmiy loyihasida foydalanilgan. Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi, $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun Shvarts lemmasini isbotlash va $A(z)$ – garmonik funksiyalar uchun Dirixle masalasini yechish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari bo‘yicha 6 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida ma’ruza qilingan. Shuningdek, olingan natijalar O‘zbekiston Milliy universiteti matematik analiz kafedrasi huzuridagi “Kompleks analizning zamonaviy muammolari” Respublika ilmiy seminarida (rahbari: akademik A.Sadullayev, DSc K.Raximov) bir necha bor, Belarus-O‘zbekiston qo‘shma tarmoqlararo amaliy texnik kvalifikatsiyalar instituti “Математическое и численное моделирование диффузионных процессов” ilmiy seminarida, (rahbarlari: f.-m.f.n., dots B.Mamasoliyev, professor A.X.Begmatov), V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Xorazm viloyati bo‘linmasi va Urganch Davlat universiteti “Matematik tahlil” kafedrasining “Kompleks potensiallar nazariyasi va uning tatbiqlari” birlashgan ilmiy seminarida (rahbari: professor S.Imomqulov), Ilmiy kengash huzuridagi matematik analiz bo‘yicha ilmiy seminarda (professor R.N.G‘anixodjayev) muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinishi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 17 ta ilmiy ish chop etilgan bo‘lib, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktorlik dissertatsiyalarining asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan, 1 tasi xorijiy va 5 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qism, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 62 betni tashkil qiladi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismda dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Dastlabki ma’lumotlar”** deb nomlanuvchi birinchi bobida dissertatsiya uchun zarur bo‘lgan, $A(z)-$analitik funksiyalar va $A(z)-$analitik funksiyalarning ba’zi xossalari, ta’riflar va teoremalar keltirib o‘tilgan. 1.1-paragrafda $A(z)-$analitik funksiyalar bo‘yicha ba’zi teoremalar va ta’riflar A.Sadullayev hamda N.M.Jabborovlarning SFU jurnalida chop qilingan fundamental maqolasidan olingan bo‘lib, 1.2 va 1.3-paragraflardagi kerakli natijalar A.Sadullayevning “Plyuripotensiallar nazariyasi” monografiyasidan olindi.

Kvazikonforim akslantrishlar nazariyasi ushbu Beltrami tenglamasi

$$\bar{D}_A f(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

yechimi bilan ta'riflanadigan analitik funksiyalar nazariyasiga bag'ishlangan. Umumiy holda $A(z)$ funksiyasi o'lchovli va qaralayotgan $D\subset\mathbb{C}$ sohaning deyarli barcha nuqtalarida $|A(z)|\le C<1$ shartini qanoatlantiradi deb faraz qilinadi. Adabiyotlarda (1) tenglamaning yechimi $A(z)$ – *analitik funksiya deb ataladi.*

Qaralayotgan dissertatsiyada biz $D\subset\mathbb{C}$ sohada $A(z)$ – antianalitik funksiya, $\partial A=0,$ $|A(z)|\le C<1,$ $\forall z\in D$ o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda (1)ga ko'ra, $A(z)$ – analitik funksiyalar sinfi $f\in O_A(D)$ ushbu $\bar{D}_A f=0$ tenglama yordamida xarakterlanadi. Shunday qilib, antianalitik funksiyalar cheksiz silliq bo'lganligidan $O_A(D)\subset C^{\infty}(D)$ ekanligi kelib chiqadi.

Teorema 1 (Koshi teoremasining analogi). *Agar* $f\in O_A(D)\cap C(\bar{D})$ *bo'lsa, bunda* $D\subset\mathbb{C}$ – ∂D *to'g'rilanuvchi chegaradan iborat soha bo'lsa, u holda* $\int\limits_{\partial D} f(z)(dz+A(z)d\bar{z})=0$ *bo'ladi.*

$D\subset\mathbb{C}$ – sohani qavariq deb faraz qilamiz va $\xi\in D$ – fiksirlangan nuqta bo'lsin. Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$K(z,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}}, \tag{2}$$

bu yerda $\gamma(\xi,z)$ – $\xi, z\in D$ nuqtalarni tutashtiruvchi silliq chiziq. Shunday qilib, funksiya bir bog'lamli D sohada aniqlangan va $\bar{A}(z)$ – golomorf funksiya bo'lganligi sababli, integral $I(z)=\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau$ integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi va boshlang'ich funksiya bilan ustma-ust tushadi $I'(z)=\bar{A}(z)$.

Teorema 2. $K(z,\xi)$ *funksiya* $z=\xi$ *nuqtadan tashqarida* $A(z)$ – *analitik, ya'ni* $K\in O_A(D\setminus\{\xi\})$ *da* $A(z)$ – *analitik funksiya bo'ladi. Shu bilan birga,* $z=\xi$ *nuqtada funksiya* $K(z,\xi)$ *birinchi tartibli qutbga ega.*

Agar $D\subset\mathbb{C}$ qavariq soha bo'lsa, $\psi(z,\xi)\in O_A(D)$ funksiya ichki akslantrishni amalga oshiradi. Xususan, $L(\xi,r)=\left\{z\in D:\ |\psi(z,\xi)|=\left|z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}\right|<r\right\}$ to'plam D da ochiq to'plamni ifodalaydi. Yetarlicha kichik $r>0$ uchun u D da kompakt yotadi va ξ nuqtani o'z ichiga oladi. Bu to'plam markazi ξ nuqtada bo'lgan $A(z)$ – *lemniskata deyiladi va* $L(\xi,r)$ ko'rinishda belgilanadi. Maksimum prinsipiga ko'ra, lemniskata $L(\xi,r)$ bir bog'lamli va minimum prinsipga ko'ra u bog'lamli.

Teorema 3 (Koshi formulasining analogi). *Aytaylik,* $D \subset \mathbb{C}$ *– qavariq soha va* $G \subset D$ *–* ∂G *chegarasi bo‘lakli silliq ixtiyoriy qism soha. U holda ixtiyoriy* $f(z) \in O_A(G) \cap C(\overline{G})$ *funksiya uchun quyidagi formula o‘rinli:*

$$f(z) = \int_{\partial G} K(\xi, z) f(\xi)\left(d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}\right), \quad z \in G. \qquad (3)$$

Teorema 4 (Veyershtrass teoremasining analogi). *Agar* D *sohadagi* $A(z)$ *– analitik funkiyalar qatori*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad f_n(z) \in \mathrm{O}_A(D), \qquad (4)$$

bu sohaning ixtiyoriy kompakt qism to‘plamida tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

1) $f(z) \in \mathrm{O}_A(D)$*;*
2) *(4) qatoni* z *bo‘yicha hadlarini differenssiallash mumkin:*

$$\partial f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial f_n(z), \ \bar{\partial} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\partial} f_n(z), \ D_A f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} D_A f_n(z) \qquad (5)$$

3) *(5) qator* D *sohaning ixtiyoriy qism to‘plamida tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.*

$A(z)$ **– analitik funksiyani Teylor qatoriga yoyish**. Dastlab biz quyidagi qatorni

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi^j(z, a), \ a \in D, \ c_j - \text{const} \qquad (6)$$

$A(z)$ – analitik funksiya uchun darajali qator bo‘lishini ta’kidlaymiz.

(6) qatorning yaqinlashish sohasi $L(a, r) = \{|\psi(z, a)| < r\}$ lemniskatadir, bu yerda yaqinlashish radiusi Koshi-Adamar formulasi bilan topiladi:

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{j \to \infty}} \sqrt[j]{|c_j|}.$$

Teorema 5. *Agar* $f(z) \in O_A(L(a, r)) \cap C(\overline{L}(a, r))$ *bo‘lsa bu yerda* $L(a, r) = \{\xi \in D : \ |\psi(\xi, a)| < r\} \subset\subset D$ *– lemniskata, u holda* $f(z)$ *funksiya* $L(a, r)$ *da Teylor qatoriga yoyiladi, ya’ni:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_j \psi^k(z, a), \qquad (7)$$

bu yerda

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{\left[\psi(\xi,a)\right]^{k+1}}\left(d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}\right),\ 0<\rho<r,\ k=0,1,....$$

Dissertatsiyaning "$A(z)-$**analitik funksiyalarni yakkalangan maxsus nuqtalari va chegirmalar nazariyasi**" deb nomlanuvchi ikkinchi bobi klassik analizning eng nafis va dolzarb yo‘nalishlaridan biridir. $A(z)-$analitik funksiyalarning bir qator xususiyatlari, tadqiqot usullari va nazariyasi analizning boshqa sohalari, birinchi navbatda, elliptik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumiy nazariyasi bilan bog‘liq muammolarni yechishda va ma’lum natijalarni olish uchun namuna bo‘lib xizmat qiladi. $A(z)-$analitik funksiyalar nafaqat ko‘plab matematik tadqiqotlarning, balki fizika va mexanikaning muammolarini yechishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Ushbu bobda biz analitik funksiyalar nazariyasining rivojlanishini $A(z)-$analitik funksiyalar sifatida beramiz.

Ta’rif 1. *$f(z)$ $A(z)-$analitik funksiyaning $a\in D$ yakkalangan maxsus nuqtadagi chegirmasi deb, yetarlicha kichik radiusli $L(a,r):=\left\{z\in D: |\psi(z,a)| = \left|z-a+\int_{\gamma(z,a)} A(\tau)d\bar{\tau}\right|<r\right\}$ lemniskata bo‘yicha olingan integralni $2\pi i$ ga nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:*

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) := \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial L(a,r)} f(\xi)\omega(z,\xi). \tag{8}$$

Teorema 6. *$f(z)$ $A(z)-$funksiyaning yakkalangan maxsus $a\in D$ nuqtadagi chegirmasi $L(a,r)$ lemniskata bo‘yicha Loran qatoriga yoyilmasidagi minus birinchi had oldidagi koeffitsiyentga teng:*

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = c_{-1} \tag{9}$$

Ta’rif 2. *$z=a$ nuqta $f(z)$ $A(z)-$analitik funksiyaning $n-$tartibli noli deyiladi, agar bu nuqtada*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(z-a+\overline{\int_{\Gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)^n \cdot g(z), \tag{10}$$

bu yerda $g(a)\neq 0$ va $g(z)\in O_A(D)$.

Teorema 7. *Aytaylik, $f(z)$ funksiya bir bog‘lamli $G\subset\subset D$ sohada berilgan bo‘lib, shu sohaga tegishli chekli sondagi maxsus $a_1, a_2, ...a_n$ nuqtalardan boshqa* *barcha nuqtalarda $A(z)-$analitik bo'lsin. ∂G chegara bu maxsus nuqtalarni o'z ichiga olmasin. U holda*

$$\oint_{\partial G} f(\xi)\omega(z,\xi) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a}{res} f(z). \tag{11}$$

Aytaylik, a nuqtaning biror o'yilgan atrofida $f \in O_A\left(0 < \left|\psi(z,a)\right| < R\right),\ 0 < R$ bo'lsin va nolga aylanmasin. a nuqtadagi $A(z)$ logarifmik qoldiqni $A(z)-$analitik $f(z)$ funksiyaning logarifmik hosilasining qoldig'i deb ataymiz:

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz + A(z)d\overline{z}\right) = dLnf(z)\ . \tag{12}$$

Teorema 8 (Umumlashgan argument prinsipi). *Deylik, $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ va $G \subset\subset D$ sohalarda qutblardan boshqa nuqtalarda $A(z)-$analitik funksiya bo'lsin, ∂G chegara bo'lakli silliq va $f(z)$ funksiyaning hech bir noli hamda hech bir qutbini o'z ichiga olmasin. U holda D sohada har qanday $A(z)-$ analitik $\varphi(z)$ funksiya uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\varphi(z)\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}(dz + A(z)d\bar{z}) = \sum_{i=1}^{k} n_i\varphi(a_i) - \sum_{j=1}^{l} m_j\varphi(b_j)\,. \tag{13}$$

$a_i -$ $f(z)$ funksiyaning nollari, $n_i -$ a_i nuqtadagi nolining tartibi,

$b_j -$ $f(z)$ funksiyaning qutblari, $m_j -$ b_j nuqtadagi qutbining tartibi.

Dissertatsiyaning "$A(z)-$**analitik funksiyalarni sodda kasrlar bilan ifodalash**" deb nomlanuvchi uchinchi bobi $A(z)-$antianalitik funksiya bo'lganda Veyershtrass teoremasi va Blyashka teoremasining $A(z)-$analitik funksiyalar uchun qavariq sohalardagi analoglarini o'rganishga bag'ishlangan. Sohaning qavariq bo'lishlik sharti, qavariq bo'lmagan sohalar uchun integral formulaning zarur yadrosi mavjud bo'lmasligi bilan bog'liq, bu asosiy natijalarni isbotlashda ishtirok etadi. Yensen teoremasining analogi va $A(z)-$analitik funksiyalar uchun Blyashka ko'paytmasining muhim xossalarini o'rganamiz.

Teorema 9 (Umumlashgan Veyershtrass teoremasi). *Aytaylik, $D \subset \mathbb{C}-$ qavariq soha va $G \subset\subset D-$ixtiyoriy kompakt qism soha bo'lsin. U holda G sohada limit nuqtalarga ega bo'lmagan $a_n \in G$ nuqtalar ketma-ketligi qanday* *bo'lishidan qat'i nazar* G *da barcha* a_n *nuqtalarda va faqat shu nuqtalarda nollarga ega bo'lgan* $A(z)-$*analitik* f *funksiya mavjud.*

Natija 1. *Aytaylik,* $D\subset\mathbb{C}$ *– qavariq soha va* $G\subset\subset D-$ *ixtiyoriy kompakt bir bog'lamli qism soha bo'lsin. U holda ixtiyoriy* $f(z)\in O_A(G)$ *funksiya uchun quyidagi faktorizatsiya o'rinli bo'ladi:*

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_n \frac{\psi(z,a_n)}{\psi(z,b_n)}e^{\sum\limits_{k=1}^{p_n}\frac{\psi^k(b_n,a_n)}{k\psi^k(z,b_n)}}, \qquad (14)$$

bu yerda $\{a_n\}-$ $f(z)\in O_A(G)$ *funksiyaning (chekli yoki sanoqli) nollari to'plami,* p_n,b_n *– Teorema 9da aniqlangan qiymatlar,* $g(z)-G$ *dagi biror* $A(z)-$ *analitik funksiya. Ravshanki, agar* $\{a_n\}-$ *chekli bo'lsa, u holda (14) juda oddiy bo'ladi:*

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_n \psi(z,a_n).$$

Agar $0<|\psi(a_n,a)|<R$, $n=1,2,3,...,$ va cheksiz ko'paytma

$$\prod_{n=1}^{\infty} R\cdot\frac{|\psi(a_n,a)|}{\psi(a_n,a)}\frac{\psi(a_n,a)-\psi(z,a)}{R^2-\overline{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)} \qquad (15)$$

$\{|\psi(z,a)|<R\}\setminus\{a_n\}$ ichida tekis yaqinlashsa, u holda $L(a,R)$ da $A(z)-$ analitik bo'lgan biror funksiyani ifodalaydi. U *Blyashka ko'paytmasi* deyiladi.

Lemma 1. *Agar* $f\in O_A(L(a,R))$ *funksiya va* $L(a,R)$ *da* $|f|\le M$ *chegaralangan bo'lsa, u holda* $\partial L(a,R)$ *ning deyarli hamma joyida radial limit mavjud* $\lim\limits_{z\to\xi\in\partial L(a,R)} f(z)$.

$A(z)-$meromorf funksiyalar ikkita $A(z)-$analitik funksiyaning nisbati sifatida aniqlanadi:

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)},\ g(z),h(z)\in O_A(D),\ h(z)\not\equiv 0.$$

Ta'rif 3. $A(z)-$*meromorf funksiyalar qatori* M *to'plamda yaqinlashuvchi (tekis yaqinlashuvchi) deyiladi, agar uning hadlaridagi* M *to'plamda faqat chekli sondagi qutblari bo'lsa va ular olib tashlangandan keyin* M *to'plamda qator yaqinlashsa (mos ravishda tekis yaqinlashsa).*

Teorema 10 (Mittag – Leffler teoremasining analogi). *Aytaylik,* $D\subset\mathbb{C}$ *– qavariq soha va* $G\subset\subset D-$*ixtiyoriy kompakt qism soha bo'lsin. U holda* G *sohada limit nuqtalarga ega bo'lmagan* $a_n\in G$ *nuqtalar ketma-ketligi va*

$g_n(z)=\sum_{\nu=1}^{p_n}\frac{c_{-\nu}^{(n)}}{\psi^{\nu}(z,a_n)}$, $p_n\in N,\ n=1,2,...,m,$ *ko'rinishdagi* g_n *funksiyalar ketma-ketligi qanday bo'lishidan qat'i nazar, faqat* $a_n\in G$ *nuqtalarda qutblarga ega bo'lgan va* f *ning bosh qismi har bir* a_n *qutbda* g_n *bilan ustma-ust tushadigan* G *da* $A(z)-$*meromorf funksiya mavjud* $f(z)\in M_A(G)$.

Natija 2 ($A(z)-$**meromorf funksiyalarni oddiy kasrlarga yoyish).** *Aytaylik,* $D\subset\mathbb{C}-$*qavariq soha va* $G\subset\subset D-$*ixtiyoriy kompakt bir bog'lamli qism soha bo'lsin. U holda har qanday* $A(z)-$*meromorf funksiyani* $f(z)\in M_A(G)$ $\{a_n\}$ *qutb nuqtalarda qatorga yoyish mumkin:*

$$f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_n(z)-Q_n(z)\right), \qquad (16)$$

bu yerda $g_n(z)-$ $f(z)$ *funksiyaning* a_n *qutbdagi Loran yoyilmasinig bosh qismi,* $Q_n(z)-$ $\frac{1}{\psi(z,a_n)}$ *ga nisbatan* G *da* $A(z)-$*analitik bo'lgan ratsional funksiya,* $h(z)\in O_A(G)$. *Bundan tashqari, (16) qator* $G\setminus\{a_n\}$ *da tekis yaqinlashadi. Ravshanki, agar* $\{a_n\}-$*chekli to'plam bo'lsa, u holda (16) juda oddiy shaklda bo'ladi* $f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{m}g_n(z).$

XULOSA

Ushbu dissertatsiyada $A(z)$ – analitik funksiyalarning bir qancha xossalari o‘rganilgan. Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

− $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun umumlashgan chegirmalar nazariyasi kiritildi. Hisoblash usullari keltirilgan;

− $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun umumlashgan argument prinsipi isbotlangan;

− $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun Gurvits teoremasining analogi dalillangan;

− $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun Veyershtrass teoremasining analogi isbotlangan;

− $\psi(z,a)$ yadro yordamida $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun Blyashka ko‘paytmasi aniqlandi. $A(z)$ – analitik funksiyalarni Blyashka ko‘paytmasiga yoyilishi asoslangan;

− $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun Yensen formulasi isbotlangan;

− $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun cheksiz ko‘paytmaning kompaktda tekis yaqinlashishining yetarli sharti berilgan;

− $A(z)$ – analitik funksiyalar uchun cheksiz ko‘paytmaning ayrim xossalari isbotlangan;

− $A(z)$ – meromorf funksiyalarni oddiy kasrlarga yoyish haqidagi Mittag-Leffler teoremasining analogi dalillangan;

Umuman olganda, olingan natijalarni dissertatsiya tadqiqotining maqsadlariga muvofiq deb hisoblash mumkin.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА им. МИРЗО УЛУГБЕКА

НЕЪМАТИЛЛАЕВА МУХАЙЁ ДАВЛАТАЛИЕВНА

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $A(z)-$АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРОСТЫМИ ДРОБЯМИ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2024 года

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико–математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2023.1.PhD/FM832

Диссертация выполнена в Ташкентском государственном техническом университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на информационно образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Жабборов Насридин Мирзоодилович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор, академик
	Рустамова Мастура Самадовна д.ф.(PhD) ф.-м.н., доцент
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «15» февраль 2024 года в 15:00 на заседании Научного совета DSc.30.09.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 8). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан «02» 02 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от «02» 02 2024 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор, академик

Р.М.Жураев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н.(PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие теоретические и прикладные исследования, проводимые на мировом уровне в комплексном анализе, в теории потенциала, в комплексной теории динамических систем, а также в томографиях сводится к свойствам квазиконформных отображений и $A(z)$ – аналитических функций. Квазиконформные отображения и $A(z)$ – аналитические функции составляют важный раздел комплексного анализа. Классические методы аналитических функций, такие как представление бесконечным произведением простых дробей, в частности разложения типа Вейерштрасса и Бляшке являются одним из важнейших методов исследования аналитических и гармонических функций, успешно применяются для решения различных задач о непрерывности экстремальных функций в теории потенциала и в комплексных динамических системах.

В настоящее время изучение функциональных свойств $A(z)$ – аналитических функций остается одной из важных задач теории функций комплексных переменных. Одним из важнейших вопросов в современном мире является изучение класса $A(z)$ – аналитических функций и их свойств на основе $A(z)$ – аналитических функций, совершенствование метода изучения геометрических свойств $A(z)$ – гармонической функции в связи с этим, особое внимание уделяется целевым исследованиям, в том числе изучению класса $A(z)$ – аналитических функций, развитию теории факторизация Вейерштрасса в классе $A(z)$ – аналитических функций, а также методам изучения Бляшке. Вышеупомянутое исследование в области исследований объясняет актуальность данной темы диссертации.

В нашей стране, особенно в последние годы, повышено внимание к фундаментальным наукам, в частности математике и физике, и в ряду с ним к актуальным направлениям, имеющие научное значение в задачах медицинской и геологической томографии. В последние годы уделяется особое внимание развитию теории функций, теории потенциалов, теории аппроксимаций и теории комплексных динамических систем. Все эти факторы показывают, что рассматриваемые задачи являются насколько актуальным. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлением «Теория функций действительного переменного, теория функций комплексного переменного»[1]. определены как основные задачи и направления деятельности предмета математики. Проведение научных исследований по теории $A(z)$ – литических функций имеет важное значение при исполнении постановления.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Исследования данной диссертации в определенной степени служат также решению задач, поставленных в Указах и Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», и ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также других нормативно-правовых актов, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Теория квазиконформных отображений и уравнение Бельтрами бурно развивалась в конце XX века, благодаря Американским математикам Л. Альфорса, Ф.В. Геринга, Российским математикам М.А. Лаврентьева, И.Н.Векуа, П.П. Белинского, Польского математика В. Боярского и Узбекских математиков Л.И. Волковыцкого, А.К. Варисова и др. Изучение свойств $A(z)-$аналитических функций получило развитие в 90х годах прошлого века в работах известных ученых У. Сребро, Э. Якубова, В.И.Рязанова, А.Л.Бухгейма и др. Это связано с тем, что если квазиконформные отображения связаны с геометрическими свойствами гомеоморфизмов, то для $A(z)-$аналитических функций важны функциональные свойства, гладкости, особые точки, складки и др. Эти свойства используются в применениях к медицинской и геологической томографических вопросах .

С 2010 года на кафедре математического анализа НУУз велась интенсивное исследование функциональных свойств $A(z)-$аналитических функций, для одного важного случая, когда функция $A(z)-$ антианалитическая, $\frac{\partial A(z)}{\partial z}=0$ (А.Садуллаев, Н.М.Жабборов, Т.У.Отабоев и др. получены аналоги формул Шварца, Пуассона, аналог представления Рисса для $A(z)-$аналитических и $A(z)-$субгармонических функций. В нашей диссертации нами тоже рассматривается только случай антианалитичесности функции $A(z)$.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планами научных исследований по теме кафедры математического анализа «Многомерный комплексный анализ» (2018-2023 гг.) Национального университета Узбекистана, по гранту «Функциональные свойства $A(z)-$аналитических функций и их применения. Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях» (2017-2020 гг.), MRU-OT-9/2017.

Целью исследования является доказательство аналогов факторизационных теорем Вейерштрасса и Бляшке для $A(z)-$ аналитических функций, разложение типа Миттага-Леффлера по простейшим дробям.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

доказательство обобщенного принципа аргумента для $A(z)-$ аналитических функций и теоремы Гурвица;

доказательство факторизации Вейерштрасса для $A(z)-$аналитических функций;

построение факторизации Бляшке для $A(z)-$аналитических функций в лемнискатах;

исследование разложения $A(z)-$мероморфной функции на простейшие дроби;

изучение аналогов теоремы Миттага-Леффлера для $A(z)-$ аналитических функций в выпуклых областях;

Объект исследования. $A(z)-$аналитические функции, обобщенный принцип аргумента для $A(z)-$аналитических функций, теорема Бляшке, факторизации Вейерштрасса, разложение Миттага-Лефлера.

Предмет исследования. Уравнение Бельтрами, $A(z)-$аналитические функции, факторизации Вейерштрасса и формула Бляшке, разложение Миттага-Лефлера.

Методика исследования. В диссертационной работе используются методы теория аналитических функций, теории потенциала, теория квазиконформных отображений и $A(z)-$аналитических функций.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Доказаны обобщенный принцип аргумента и теорема Гурвица для $A(z)-$аналитических функций, за исключением полюсов в области $D\subset\mathbb{C}$.(здесь $D\subset\mathbb{C}$ область с кусочно гладкой границей)

построена факторизации Вейерштрасса для $A(z)-$аналитических функций;

дается Формула Иенсена $A(z)-$аналитических функций;

дана формула Бляшке для $A(z)-$аналитических функций;

доказан аналог теоремы Миттаг – Леффлера для $A(z)-$аналитических функций в выпуклых областях;

дано достаточное условие равномерной сходимости бесконечного произведения $A(z)-$аналитических дробей.

Практические результаты исследования заключаются в возможности применения полученной в диссертации формулы Бляшке, представления

Вейерштрасса и разложения Миттага – Леффлера в теории потенциала и в математической физики.

Достоверность результатов исследования обоснована строгими математическими доказательствами теорем, применением известных методов математической физики, классической теории потенциала и теории функций многих комплексных переменных. Кроме того, публикацией результатов диссертации в авторитетных научных журналах, в частности с импакт-факторами и апробациями работы на научных семинарах, на Республиканских и Международных конференциях. Все это доказывают достоверность результатов диссертации.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Практическая значимость диссертации заключается в том, что она позволяет восстанавливать значения $A(z)-$аналитических и $A(z)-$гармонических функций, используемых для компьютерной томографии и расчета трения жидкости, задач механики и других задач математической физики по характеристиками на дискретных особых точках или на границы области.

Внедрение результатов исследования. Интегральные представления $A(z)-$аналитических и $A(z)-$гармонических функций использовались в проекте MRU-OT-81/2017 “Математическое моделирование термодинамически согласованной математической модели двухфазных сред в диссипативном приближении с перекрестными эффектами”, выпольненной в 2018-2019 годах в Национальном университете Узбекистана. Интегральные представление $A(z)-$гармонических функций дали возможность исследовать качественные свойства решений начально-краевых задач для уравнений третьего порядка смешанно-составного типа, с оператором Лапласа в главной части.

М.Д.Неъматиллаева не участвовала в работе указанного проекта.

Определение обобщенных $A(z)-$аналитических функций и обобщенное интегральное представление регулярных $A(z)-$гармонических функций использовались в проекте MRU-OT-9/2017 «Функциональные свойства $A(z)-$аналитических функций и их применения. Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях» выпольненной в 2017-2020 годах в Национальном университете Узбекистана. Применение научных результатов дали возможность доказать лемму Шварца для $A(z)-$аналитических функций и решить задачу Дирихле для $A(z)-$гармонических функций.

М.Д.Неъматиллаева не участвовала в работе указанных проектах.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 6 научно-практических конференциях, в том числе на 3 международных и 3 республиканских, на научном семинаре «Теория функций» кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана (руководитель: академик А. Садуллаев, д.ф.н., наук К.Рахимов) неоднократно; на научном семинаре «Математическое и численное моделирование диффузионных процессов» кафедры интеллектуальные системы Белорусско-Узбекского межотраслевого института прикладных технических квалификаций (руководители: ф.-м.ф.н., доц Б.Мамасолиев, профессор А.Х.Бегматов); на объединенном научном семинаре «Комплексная теория потенциала и ее применения» Хорезмского отдела Математического института им. В.И. Романовского и кафедры математического анализа Ургенчского государственного университета (руководитель: профессор С. Имомкулов); на научном семинаре по математическому анализу при научном совете DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 (председатель профессор Р.Н. Ганиходжаев).

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 17 статей, из них 6 в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики, в том числе 1 опубликована в зарубежном журнале, индексируемой в базе SCOPUS и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Нумерации теорем, предложений, определений, формул сквозные, отдельно для каждой главы. Общее число страниц диссертационной работы – 62.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **“Предварительные сведения”**, содержит теоремы и определения основных результатов теории $A(z)-$ аналитических функций. В параграфе 1.1 представлены основные теоремы и определения из фундаментальной работы А. Садуллаева и Н. М. Жабборова, опубликованной в журнале СФУ, по $A(z)-$аналитическим функциям, в параграфах 1.2 и 1.3 приведены необходимые предварительные сведения, необходимые обозначения, основные определения и важные теоремы и известные результаты из монографии А. Садуллаева «Теория плюрипотенциала», используемые в дальнейшем в диссертации.

Как известно, что решение уравнения Бельтрами:

$$\bar{D}_A f(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

непосредственно связано с квазиконформными отображениями. В общем случае, относительно функции $A(z)$, предполагается, что она измерима и $|A(z)| \le C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. Решение уравнения (1.1) называют $A(z)-$*аналитическими* функциями.

Наиболее интересным является случай, когда $A(z)-$антианалитическая функция, $\partial A = 0,$ в области $D \subset \mathbb{C}$ такая, что $|A(z)| \le C < 1, \ \forall z \in D.$ В диссертации мы рассматриваем именно этот случай. Тогда согласно (1) класс $A(z)-$аналитических функций $f \in O_A(D)$ характеризуется тем, что $\bar{D}_A f = 0$. Так как антианалитическая функция является бесконечно гладкой, то из теоремы Векуа вытекает, что $O_A(D) \subset C^{\infty}(D).$ В этом случае имеет место следующая

Теорема 1 (Аналог теоремы Коши). *Если* $f \in O_A(D) \cap C(\bar{D}),$ *где* $D \subset \mathbb{C} -$ *область со спрямляемой границей* ∂D*, то*

$$\int_{\partial D} f(z)\left(dz + A(z)\, d\,\bar{z}\right) = 0 .$$

Предположим теперь, что область $D \subset \mathbb{C} -$выпуклая и $\xi \in D-$ её фиксированная точка. Рассмотрим функцию

$$K(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau}}, \quad (2)$$

где $\gamma(\xi, z)-$ гладкая кривая, соединяющая точки $\xi, z \in D.$ Так как область $D-$односвязная и функция $\bar{A}(z)-$голоморфная, то интеграл $I(z) = \int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau$ не зависит от пути интегрирования; он совпадает с первообразной, $I'(z) = \bar{A}(z).$

Теорема 2. $K(z,\xi)$ *является* $A(z)-$*аналитической функцией вне точки* $z = \xi$*, т.е.* $K \in O_A(D \setminus \{\xi\}).$ *Более того, в точке* $z = \xi$ *функция* $K(z,\xi)$ *имеет полюс первого порядка.*

Пусть область $D \subset \mathbb{C}$ является выпуклой. То функция $\psi(z,\xi) \in O_A(D)$ осуществляет внутреннее отображение. В частности, множество $L(\xi, r) = \left\{ z \in D: \ |\psi(z,\xi)| = \left| z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau} \right| < r \right\}$ представляет собой открытое множество в D. Для достаточно маленьких $r>0$ оно компактно принадлежит D и содержит точку ξ. Это множество называется $A(z)$–*лемнискатой, с центром в точке* ξ и обозначается как $L(\xi,r)$. По принципу максимума лемниската $L(\xi,r)$ является односвязной и по принципу минимума она – связная.

Теорема 3. *(*Формула Коши*). Пусть* $D\subset\mathbb{C}$ – *выпуклая область и* $G\subset D$ – *произвольная подобласть, с кусочно гладкой границей* ∂G. *Тогда для любой функции* $f(z)\in O_A(G)\cap C(\bar{G})$ *имеет место формула*

$$f(z)=\int_{\partial G}K(\xi,z)f(\xi)\left(d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right),\ z\in G. \tag{3}$$

Теорема 4.(*аналог теоремы Вейерштрасса*). *Если ряд из* $A(z)$–*аналитических в области* D *функций*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z),\ \ f_n(z)\in \mathrm{O}_A(D), \tag{4}$$

сходится равномерно на любом компактном подмножестве этой области, то

1) $f(z)\in \mathrm{O}_A(D)$;
2) *ряд (4) можно почленно дифференцировать по* z:

$$\partial f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\partial f_n(z),\ \bar{\partial}f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\partial}f_n(z),\ D_A f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}D_A f_n(z) \tag{5}$$

3) *ряды (5) сходятся равномерно на любом компактном подмножестве* D.

Здесь уместно отметить, что от того что произвольный (не из $A(z)$–аналитических функций) ряд сходится равномерно, в общем случае его нельзя продифференцировать. Для этого нужно еще равномерная сходимость ряда из дифференциалов.

Разложение $A(z)$–аналитических функций в ряд Тейлора.

Сначала заметим, что аналогом степенных рядов для $A(z)$–аналитических функций будут ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty}c_j\psi^j(z,a),\ a\in D,\ c_j \text{ – константы.} \tag{6}$$

Областью сходимости ряда (6) будет лемниската $L(a,r)=\left\{\left|\psi(z,a)\right|<r\right\}$, где радиус сходимости r находится по формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|c_j|}.$$

Теорема 5. *Если* $f(z) \in O_A(L(a,r)) \cap C(\bar{L}(a,r))$, *где* $L(a,r) = \{\xi \in D: |\psi(\xi,a)| < r\} \subset\subset D$ *–лемниската, то в* $L(a,r)$ *функция* $f(z)$ *разлагается в ряд Тейлора:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_j \psi^k(z,a), \tag{7}$$

где $$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{[\psi(\xi,a)]^{k+1}} \left(d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}\right), \; 0 < \rho < r, \; k = 0,1,....$$

Вторая глава диссертации, названная **«Изолированные особые точки** $A(z)$ **– аналитические функций и теория вычеты»**, целью данной главы является теория аналитических функций представляет собой один из наиболее изящных и стройных разделов классического анализа. Ряд свойств аналитических функций, методы исследования и аппарат теории служат образцом для постановки задач и получения тех или иных результатов, относящихся к другим разделам анализа и, прежде всего, к общей теории дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа. Аналитических функций занимают важное место не только во многих математических исследованиях, но также и в приложениях анализа к физике и механике, где ими часто описываются различные стационарные процессы.

В этой главе мы дадим развитие теории аналитических функций в класс $A(z)$ – аналитических функций.

Определение 1. *Пусть точка* $a \in D$ *является изолированной особой точкой* $A(z)$ *– аналитической функции* $f(z)$, $f \in O_A(0 < |\psi(z,a)| < R)$, $R > 0$. *Интеграл от* $f(z)$ *по достаточно малой* $A(z)$ *– лемнискате* $L(a,r)$, *деленный на* $2\pi i$ *называется вычетом* $f(z)$ *в точке* a:

$$\underset{z=a}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial L(a,r)} f(\xi)\omega(z,\xi), \; r < R. \tag{8}$$

Теорема 6. *Вычет функции* $f(z)$ *в изолированной особой точке* $a \in \mathbb{C}$ *равен коэффициенту при минус первой степени* $z - a$ *в ее лорановском разложении (6) в достаточно малой окрестности* $L(a,r)$:

$$\underset{z=a}{res} f(z) = c_{-1}. \tag{9}$$

Определение 2. (см. [10]). *Точка* $z = a$ *называется нулем* $A(z)-$ *аналитической функции* $f(z)$ *порядка* n, *если в этой точке*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(z-a+\overline{\int\limits_{\Gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau} \right)^n \cdot g(z), \qquad (10)$$

здесь $g(a) \neq 0$ *и* $g(z) \in \mathrm{O}_A(D)$.

Тогда имеет место следующий аналог теоремы Коши об $A(z)-$ вычетах.

Теорема 7. *Пусть функция* $f(z)$ *является* $A(z)-$ *аналитической всюду, за исключением изолированного множества особых точек области* $G \subset\subset D$, *а граница* $\partial G -$*кусочно гладкая и не содержат особых точек. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial G} f(\xi)\omega(z,\xi) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a}{res} f(z). \qquad (11)$$

Пусть функция $f \in O_A\left(0<\left|\psi(z,a)\right|<R\right),\ 0<R,$ и в некоторой проколотой окрестности a и не обращается нулю. Мы назовем $A(z)$ логарифмическим вычетом в точке a $A(z)-$аналитический функции $f(z)$ вычет логарифмической производной

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz + A(z)d\overline{z}\right) = dLnf(z) \qquad (12)$$

в точке a.

Теорема 8 (Обобщенный принцип аргумента). *Пусть функция* $f(z)$ *является* $A(z)-$*аналитической функцией, за исключением полюсов в области* $D \subset \mathbb{C}$ *и* $G \subset\subset D-$ *область, граница* ∂G *которой является кусочно-гладкой кривой, причем* ∂G *не содержит ни нулей, ни полюсов функции* $f(z)$. *Тогда для любой* $A(z)-$ *аналитической в* D *функции* $\varphi(z)$ *имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \varphi(z)\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}(dz + A(z)d\overline{z}) = \sum_{i=1}^{k} n_i\varphi(a_i) - \sum_{j=1}^{l} m_j\varphi(b_j)\,. \qquad (13)$$

Здесь a_i – нули функции $f(z)$, а n_i – порядок нуля точке a_i; b_j – полюсы функции $f(z)$, а m_j – порядок полюса в точке b_j.

В третьей главе диссертации, названной "**Представление $A(z)-$ аналитических функций простыми дробями**" посвящена изучению разложению $A(z)-$аналитических функций на простые дроби, определяемые ядровой функцией $\psi(z,a)$. Сюда относится в первую очередь факторизация Вейерштрасса и Бляшке. Кроме того мы докажем аналог Теоремы Миттага-Леффлера о разложении $A(z)-$мероморфных функций в простейшую сумму. В доказательствах этих теорем существенно используется аналог формула Иенсена.

Теорема 9 (Аналог теорема Вейерштрасса). *Пусть $D\subset\mathbb{C}-$выпуклая область и $G\subset\subset D-$произвольная компактная подобласть. Тогда, какова бы ни была последовательность точек $a_n\in G,$ не имеющая предельных точек в $G,$ существует $A(z)-$аналитическая в G функция f, которая имеет нули во всех точках a_n и только в этих точках.*

Следствие 1. *Пусть $D\subset\mathbb{C}-$выпуклая область и $G\subset\subset D-$ произвольная компактная односвязная подобласть. Тогда, любая функция $f(z)\in O_A(G)$ допускает факторизацию*

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_n\frac{\psi(z,a_n)}{\psi(z,b_n)}e^{\sum_{k=1}^{p_n}\frac{\psi^k(b_n,a_n)}{k\psi^k(z,b_n)}},\qquad(14)$$

где $\{a_n\}-$ совокупность (конечная или счетная) нулей функции $f(z)\in O_A(G)$, p_n,b_n-величины, определенные в доказательстве Теоремы 9, а $g(z)-$некоторая $A(z)-$аналитическая в G функция. Отметим, что если $\{a_n\}-$конечное, то представление (14) получается очень простое,

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_n\psi(z,a_n).$$

Пусть как выше, $f\in O_A(L(a,R))$ и $a_1,a_2,...\in L(a,R)-$ее нули в порядке неубывания модулей $r_n=|\psi(a,a_n)|$. Без нарушения общности предположим, что $|\psi(a_1,a)|>0,$ что эквивалентно $f(a)\neq 0.$ В противном случае, вместо $f(z)$мы можем рассмотреть функцию $\frac{f(z)}{\psi^m(z,a)},$ $m\in\mathbb{N}.$ Кроме того, для удобства преобразуя $z \to Rz$ мы можем считать, что $R=1,\ L(a,1)=\{|\psi(z,a)|<1\}$. Исследуем теперь следующее произведение, которое является аналогом классического *произведения Бляшке*

$$B(z)=\prod_n \frac{|\psi(a_n,a)|}{\psi(a_n,a)}\frac{\psi(a_n,a)-\psi(z,a)}{1-\bar{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)}. \tag{15}$$

Если число нулей $a_1,a_2,...,a_m$ − конечное, то это произведение представляет собой $A(z)$ − аналитическую в $L(a,1)$ функцию, такую что $\left|B(z)\right|_{L(a,1)}<1,\ \left|B(z)\right|_{\partial L(a,1)}=1,\ \dfrac{f(z)}{B(z)}=e^{g(z)},\ g(z)\in O_A(L(a,1))$. Если, же $a_1,a_2,...$ − бесконечно много, то $A(z)$ − аналитичность произведения зависит от равномерной сходимости (15).

Исследуем равномерную сходимость произведения Бляшке (15). Имеем

$$\frac{|\psi(a_n,a)|}{\psi(a_n,a)}\frac{\psi(a_n,a)-\psi(z,a)}{1-\bar{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)}=\left[|\psi(a_n,a)|\frac{1-\dfrac{\psi(z,a)}{\psi(a_n,a)}}{1-\bar{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)}\right]$$

и сходимость произведения (15) связана со сходимостью ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[|\psi(a_n,a)|\frac{1-\dfrac{\psi(z,a)}{\psi(a_n,a)}}{1-\bar{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)}-1\right].$$

Имеем

$$|\psi(a_n,a)|\frac{1-\dfrac{\psi(z,a)}{\psi(a_n,a)}}{1-\bar{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)}-1=\frac{\left(|\psi(a_n,a)|-1\right)\left(1+\dfrac{|\psi(a_n,a)|}{\psi(a_n,a)}\psi(z,a)\right)}{1-\bar{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)}.$$

Модуль этого общего члена ряда оценивается как

$$\left|\left(\left|\psi(a_n,a)\right|-1\right)\frac{\left(1+\frac{\left|\psi(a_n,a)\right|}{\psi(a_n,a)}\psi(z,a)\right)}{1-\bar{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)}\right|\le\left(1-\left|\psi(a_n,a)\right|\right)\frac{\left|1+\frac{\left|\psi(a_n,a)\right|}{\psi(a_n,a)}\psi(z,a)\right|}{\left|1-\bar{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)\right|}\le$$

$$\le\left(1-\left|\psi(a_n,a)\right|\right)\frac{\left(1+\left|\psi(z,a)\right|\right)}{\left(1-\left|\psi(z,a)\right|\right)}\le\left(1-\left|\psi(a_n,a)\right|\right)\frac{1+r}{1-r},\ z\in L(a,r),\ r<1.$$

Отсюда следует, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\psi(a_n,a)\right|\right)<\infty$, то бесконечное произведение

$$B(z)=\prod_n\frac{\left|\psi(a_n,a)\right|}{\psi(a_n,a)}\frac{\psi(a_n,a)-\psi(z,a)}{1-\bar{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)}$$

равномерно сходится и его сумма

$$B(z)\in O_A\left(L(a,1)\right),\ \left|B(z)\right|_{L(a,1)}<1,\quad \frac{f(z)}{B(z)}=e^{g(z)},\ g(z)\in O_A\left(L(a,1)\right).$$

Верно и обратное, если бескончное произведение

$$B(z)=\prod_n\frac{\left|\psi(a_n,a)\right|}{\psi(a_n,a)}\frac{\psi(a_n,a)-\psi(z,a)}{1-\bar{\psi}(a_n,a)\psi(z,a)}$$

равномерно сходится в лемнискате $L(a,1)$, то $0\ne\left|B(a)\right|=\prod_n^{\infty}\left|\psi(a_n,a)\right|<\infty$, а это эквивалентно тому, что $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\psi(a_n,a)\right|\right)<\infty$.

Из следующего утверждения вытекает, что почти во всех точках границы $\partial L(a,1)$ произведение Бляшке имеет радиальные пределы.

Лемма 1. Если функция $f\in O_A\left(L(a,1)\right)$ ограничена в $L(a,1)$, $|f|\le M$, то почти всюду на $\partial L(a,1)$ она имеет радиальный предел $\lim\limits_{z\to\xi\in\partial L(a,1)}f(z)$.

Теорема 10. Почти всюду на $L(a,1)$ имеет место $\left|B^*(z)\right|_{\partial L(a,1)}\overset{п.в}{=}1$.

Теорема 11*(Аналог теоремы Бляшке). Пусть функция* $f(z)\in \mathrm{O}_A\left(L(a,1)\right)$ *и* $a_1,a_2,a_3,\ldots$ *– нули функции* f *в* $L(a,1)$ *в порядке не убывания модулей* $r_n=\left|\psi(a,a_n)\right|$. *Предположим, что*

$$M = \sup_{0<r<R} \frac{1}{2\pi r} \int_{|\psi(z,a)|=r} \ln|f(z)|\left|dz + Ad\bar{z}\right| < \infty$$

ограничен сверху. Тогда

$$\sum_n \left(1 - |\psi(a_n, a)|\right) < \infty$$

и произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_n \frac{|\psi(a,a_n)|}{\psi(a,a_n)} \frac{\psi(a,a_n) - \psi(z,a)}{1 - \overline{\psi}(a,a_n)\psi(z,a)}$$

является $A(z)-$*аналитической функцией в лемнискате* $\{|\psi(z,a)|<1\}$ *и имеет место равенство* $f(z) = B(z)\cdot G(z)$, *где функция* $G(z) \in O_A\left(L(a,1)\right),\ G(z) \neq 0.$

$A(z)-$мероморфные функции определяются как отношение двух $A(z)-$аналитических функций:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},\ g(z), h(z) \in O_A(D),\ h(z) \not\equiv 0.$$

Определение 3. *Ряд из* $A(z)-$*мероморфных функций называется сходящимся (равномерно сходящимся) на множестве* M *, если лишь конечное число его членов имеет полюсы на* M *и после их удаления ряд сходится (соответственно, равномерно сходится) на* M *.*

Теорема 12(*аналог теоремы Миттага - Леффлера*). *Пусть* $D \subset \mathbb{C}-$ *выпуклая область и* $G \subset\subset D-$*произвольная компактная подобласть. Тогда, какова бы ни была последовательность точек* $a_n \in G,$ *не имеющая предельных точек в* G *и последовательность функций* g_n *вида* $g_n(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n} \frac{c_{-\nu}^{(n)}}{\psi^{\nu}(z,a_n)},\quad p_n \in N,\ n = 1,2,...,m,$ *существует* $A(z)-$*мероморфная в* G *функция* $f(z) \in M_A(G)$, *которая имеет полюсы только в точках* a_n, *причем главная часть* f *в каждом полюсе* a_n *совпадает с* g_n *.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена изучению некоторых представлений $A(z)$ – аналитических функций. Основные результаты исследования состоят из следующих:

- введены обобщенные вычеты $A(z)$ – аналитической функции. Приведены способы вычисления;

-доказан обобщенный принцип аргумента для $A(z)$ – аналитических функций;

- доказан аналог теоремы Гурвица для $A(z)$ – аналитических функций;

-доказана аналог теорема Вейерштрасса для $A(z)$ – аналитических функций;

- при помощи ядра $\psi(z,a)$ определено произведение Бляшке для $A(z)$ – аналитических функций. Доказано возможность разложения $A(z)$ – аналитических функций в произведение Бляшке;

- доказана формула Иенсена для $A(z)$ – аналитических функций;

-доказан аналог теоремы Миттага – Леффлера о разложении $A(z)$ – мероморфных функций в простейшие дроби.

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении цели исследования диссертации.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NE’MATILLAYEVA MUHAYYO DAVLATALI QIZI

REPRESENTATION OF $A(z)-$ANALYTIC FUNCTIONS AS FRACTIONS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent - 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2023.1.PhD/FM832.

Dissertation has been prepared at Tashkent state technical university.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Zhabborov Nasridin Mirzaodilovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Rozikov Utkir Abdulloevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician
	Rustamova Mastura Samadovna PhD, associate professor
Leading organization:	**Urganch State University**

Defense will take place on "15" february 2024 at 15⁰⁰ at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No. 8). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on "02" 02 2024.
(Mailing report No. 2 on "02" 02 2024).

A.Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F-M.S., Academician

R.M.Juraev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

R.N.Ganixodjaev
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

Relevance and relevance of the dissertation topic. Many theoretical and applied studies carried out at the world level in complex analysis, in potential theory, in the complex theory of dynamical systems, as well as in tomography, are reduced to the properties of quasiconformal mappings and $A(z)-$analytic functions. Quasiconformal mappings and $A(z)-$analytic functions form an important branch of complex analysis.

Analytic functions, the theory of infinite product, and Blaschke-type expressions are one of the most important methods for studying $A(z)-$analytic and $A(z)-$harmonic functions and are successfully used to solve the problem of the continuity of extremal functions in the theory of complex dynamical systems. This is one of the main issues in the theory of complex dynamical systems and is considered one of the topical issues of modern mathematics.

At present, the study of the functional properties of $A(z)-$analytic functions is considered one of the important problems in the theory of functions of a complex variable. To study the class of $A(z)-$analytic functions and its properties based on analytic functions, to conduct targeted scientific research to improve the methodology for studying the geometric properties of $A(z)-$analytic functions, at the same time to study the class of $A(z)-$analytic functions, in the class of $A(z)-$analytic functions, special attention is paid to the theory of infinite products and the development of Blaschke methods of the product and its important properties. Huge scientific research conducted in the above research direction explains the relevance of the topic of this dissertation.

Conducting scientific research at the level of international standards in priority areas such as “Functional analysis, mathematical analysis and complex analysis” corresponds to the main priorities of the Government and the Academy of Sciences of Uzbekistan, Resolution of the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan dated May 18, 2017 No. 292 “On measures to organize activities newly created research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan”.

The research of this dissertation to a certain extent serves to solve the problems specified in the Decrees of the President of the Republic of Uzbekistan UP-4947 dated February 7, 2017 "On the Action Strategy for the Further Development of the Republic of Uzbekistan", UP-2789 dated February 17, 2017 "On measures to further improve activities Academy of Sciences, Organization, Management and Financing of Research Activities” and PP-4387 dated July 9, 2019 “On Measures of State Support for the Further Development of Mathematical Education and Science, as well as Fundamental Improvement of the Activities of the V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan”, as well as in other regulatory legal acts related to this field of activity.

Compliance of the study with the priority areas of development of science and technology of the republic. This study was carried out in accordance with the priority direction of the development of science and technology in the Republic of Uzbekistan IV. "Mathematics, Mechanics and Computer Science".

The degree of knowledge of the problem. As is known, the theory of flat quasiconformal mappings, constructed by G.Grech, M.A.Lavrentiev and L.Alfors, found important applications in problems of mathematical physics and mechanics, established fruitful connections with such areas as the theory of Kleinian groups, functional spaces and differential operators. The role of the moduli method, introduced in 1950, is growing strongly. L. Alfors and A. Behring and extended dimensional spaces by B. Fuglede and B. V. Shabat . The theory of spatial quasi-conformal mappings was introduced in 1938 by M.A. Lavrentiev. The development of the theory of quasiconformal mappings on the plane is closely related to the solution of the Beltrami equation. The theory of quasi-conformal mappings and the Beltrami equation developed rapidly in the middle of the 20th century, thanks to the American mathematicians L. Ahlfors, A. Bering, F.V. Gering, Russian mathematicians M.A. Lavrentiev, I.N. Vekua, P.P. Belinsky, Yu.G. Reshetnyak, V.I. Miklyukov, V.A. Zorich, P.M. Tamrazova, S.L. Kruzhkal, A.V. Sychev, I.P. Mityukov, G.D. Suvorov, V.V. Volkovysky, M.Zakhirov, A.Akhmedov, G.M.Lyan, A.K. Varisova and others. The study of the properties of $A(z)-$analytic functions was developed in the 90s of the last century, in the works of famous scientists such as: Yu. Srebro, E. Yakubova, V. I. Ryazanov, V. Gutlyansky (Ukraine), Srebro, E. Kh. Israel), D.A. Kovtonyuk (Ukraine), I.V. Petkov, V.I. Ryazanov(Ukraine), R.R. Salimov (Ukraine), A.N. Kondrashov (Russia), A.L. Bukhgeyma (Russia), S.G. Kazantsevlar (Russia), etc. This is due to the fact that if quasi-conformal mappings are related to the geometric properties of homeomorphisms, then functional properties, smoothness, singular points, folds, etc. are important for analytic functions. These properties are important in applications in medical and geological tomography.

In Uzbekistan since 2010 at the Department of Mathematical Analysis of the National University of Uzbekistan under the guidance of Academician A. Sadullaev and his students N. M. Zhabborov, T. Yu. Otaboev, Sh. Ya. Khursanov. and others began to study the functional properties of $A(z)-$analytic functions (A.Sadullaev, N.M.Zhabborov, T.U.Otaboev and others); analogues of the Cauchy kernel, Schwarz and Poisson formulas, an analogue of the Riesz representation for $A(z)-$analytic and $A(z)-$subharmonic functions are obtained.

The connection of the topic of the dissertation with the research work of the institution where the dissertation was carried out. The study was carried out in accordance with the research plans under the grants "Functional Properties of Analytic Functions and Their Applications. Some problems of complex analysis in matrix domains" (2017-2020), MRU-OT-9/2017 "Multivariate complex analysis" (2018-2020) of the National University of Uzbekistan.

The aim of the research is to find analogs of the Weierstrass theorem and Blaschke's theorem for $A(z)-$analytic functions in convex domains when the $A(z)-$antianalytic function; construct Weierstrass factorizations of $A(z)-$analytic functions.

Research tasks to be solved in this work:

proof theorem generalized argument principle for $A(z)-$analytic functions and Hurwitz's theorem;

definition of generalized $A(z)-$analytic functions and their generation for $A(z)-$analytic functions of Weierstrass factorization;

studying analogs of Blaschke's theorems for $A(z)-$analytic functions in convex domains;

study of the decomposition of a $A(z)-$meromorphic function into simple fractions;

study of analogues of the Mittag-Leffler theorem for $A(z)-$analytic functions in convex domains;

The object of research. $A(z)-$analytic functions, generalized argument principle for $A(z)-$analytic functions, Blaschke's theorem, Weierstrass factorizations.

The subject of research. The Beltrami equation, $A(z)-$analytic functions, Weierstrass factorizations and Blaschke formulas.

The scientific novelty of the research work is as follows:

the generalized argument principle for $A(z)-$analytic functions is proved;

the Hurwitz theorem for $A(z)-$analytic functions was proved;

Weierstrass factorization for $A(z)-$analytic functions was constructed;

the Jensen formula of $A(z)-$analytic functions is given;

the Blaschke formula for $A(z)-$analytic functions was proved;

proved analogues of the Mittag-Leffler theorem for $A(z)-$analytic functions in convex domains;

a sufficient condition is given that the infinite product for $A(z)-$analytic functions converges uniformly compact sets.

proved some properties of the infinite product for $A(z)-$analytic functions;

The practical results of the study lie in the possibility of applying the Blaschke formula obtained in the dissertation, the Weierstrass representation, Mittag-Leffler analogues, and in other sections of mathematical physics.

Implementation of the research results is substantiated by the use of well-known methods of mathematical physics, classical potential theory, pluripotential theory and the theory of functions of many complex variables, rigorous mathematical proofs. In addition, the publication of the results of the dissertation in reputable scientific journals, in particular with impact factors and approbation of work in scientific seminars and at Republican and International conferences. All this proves the reliability of the results of the dissertation.

Scientific and practical significance of the research results. The practical significance of the dissertation lies in the fact that it allows you to restore the values of $A(z)-$ harmonic functions used for computed tomography and calculation of friction fluid, problems of mechanics and other problems of mathematical physics inside the region from data on the boundary.

Approbation of the research results. The main content of the dissertation was discussed at 6 scientific and practical conferences, including 3 international and 3 republican scientific and practical conferences, at the scientific seminar "Theory of Functions" of the Department of Mathematical Analysis of the National University of Uzbekistan (head: Academician A. Sadullaev) repeatedly; at the scientific seminar "Modern problems of mathematical physics" of the scientific laboratory "Differential equations and their applications" of the Mathematical Institute. IN AND. Romanovsky (heads: academician Sh.A. Alimov, professor R.R. Ashurov); at the joint scientific seminar "Complex Potential Theory and Its Applications" of the Khorezm Department of the Mathematical Institute. IN AND. Romanovsky and the Department of Mathematical Analysis of the Urgench State University (Head: Professor S. Imomkulov); at the scientific seminar on mathematical analysis at the scientific council DSc.03/12.30.2019.FM.01.01 (chairman professor R.N. Ganixodjaev).

Publication of research results. 17 scientific papers have been published on the topic of the dissertation, of which 6 articles are in scientific publications recommended by the Higher Attestation Commission of the Republic, including 1 published in foreign journals and 6 in republican scientific publications.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The numbering of theorems, propositions, definitions, formulas is end-to-end, separately for each chapter. The total number of pages of the thesis is 62.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Неъматиллаева М.Д, Хурсанов Ш.Я. “Обобщенный принцип аргумента для A(z)-аналитических функций” // журнала Доклады академии наук Республики Узбекистан (ДАН). – Т., 2022. – № 3. – С. 22-26 (01.00.00. № 7).

2. Неъматиллаева М.Д. “Разложение мероморфных функций на простейшие дроби” // Доклады академии наук Республики Узбекистан (ДАН). – Т., 2023. – № 2. – С. 11-16 (01.00.00. № 7).

3. Неъматиллаева М.Д., Хурсанов Ш.Я. “Обобщенная теорема Вейерштрасса для A(z)-аналитических функций” // Доклады академии наук Республики Узбекистан (ДАН). Т., 2023. – № 3. – С. 22-29 (01.00.00. № 7).

4. Ne’matillayeva M., Khursanov Sh. “Analog of the Weierstrass Theorem and the Blaschke Product for A(z)-analytic Functions” // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2023. – № 16 (4). – P. 420-430 (01.00.00. № 59).

5. Ne’matillayeva M. Analogue of the Mittag-Leffler theorem for A(z)-analytic functions // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2022. Vol. 5. Iss. 2. Article 2. – P. 67-78. DOI: https://doi.org/10.56017/2181-1318.1217 (01.00.00. № 8).

6. Ne’matillayeva M.D. Gurvitz' s theorem for A(z)-analytic functions // Tashkent University of Information Technologies scientific-practical and information-analytical journal. – T., 2022. – № 1 (19). – P. 145-151. e-mail:alxorazmiy@tuit.uz (01.00.00. № 9).

II бўлим (2 часть; part 2)

1. Zhabborov N.M., Nematillayeva M.D. “Принцип компактности для A-аналитических функций” / Proceedings of International Conference on Humanities, Social Sciences and Educational Advancements (HSSEA) Hosted from Samsun. – Turkey, 2020. October 10th. – S. 12-18 // https://conferencepublication.com.

2. Неъматиллаева М.Д. Теорема Гурвица для A(z)-аналитических функций / Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых Сарымсаковские чтения. – Ташкент, Узбекистан, 2021. 16-18 сентября. – С. 113- 115.

3. Неъматиллаева М.Д. Теорема гурвитц для A(z)-аналитических фунций / Международная научно-практическая конференция “Кластер педагогического образования: проблемы и решения”. – Т., 2021. 25-26 июня. – С. 682-685.

4. Неъматиллаева М.Д. “Обобщенный принцип аргумента для A(z) - аналитических функции и аналог теорема Гурвица” / I Международная

научная конференция “Научные основы использования информационных технологий нового уровня и современные проблемы автоматизации”. – Т., 2022. 25-26 апреля. – С. 172-175.

5. Ne’matillayeva M.D. Generalized argument principle for A(z)-analytic functions” / I Mejdunarodnaya konferensiya “Nauchnie osnovi ispolzovaniya informatsionnix texnologiy novogo urovnya I sovremennie problem avtomatizatsii”. – M., 2022. 25-26-aprel. – P. 75-79.

6. Неъматиллаева М.Д. Теорема Миттаг-Леффлера для A(z)-аналитических функции” / “Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари” мавзусидаги Халқаро илмий анжуман материаллари. – Бухоро, 2022. 11-12 май. – Б. 69-70.

7. Ne’matillayeva M.D. Teorema Veyershtrassa dlya A(z)- analiticheskix funktsiy / Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international conference Computational models and technologies. – T., 2022. September 16-17 th. – P. 133-134.

8. Неъматиллаева М.Д. “Аналог теорема Бляшке для A(z)-аналитических функций” / Актуальные вопросы алгебры и анализа” сборник матералов Республиканской научно-практической конференции. – Т., 2022. 18-19 ноября. – С. 283-284.

9. Неъматиллаева М.Д. “Аналог теорема Вейерштрасса для A(z)-аналитических функций” / Международная научно-практическая конференция “Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий”. Том – № 1. – Нукус, 2023. Май 2-3. – С. 161-163.

10. Ne’matillayeva M. “Generalized argument prinsple for A(z)-analytic functions” / “O‘zbekiston Milliy Universitetining ilm-fan rivoji va jamiyat taraqqiyotida tutgan o‘rni” nomli konferensiya to‘plami. I to‘plam. – T., 2023. 12-may. – B. 277-280.

11. Ne’matillayeva M. “A properties of Blaschke product for A(z)-analytic functions” / Abstracts of the II Republican scientific and practical conference of young scientists. – Tashkent, Uzbekistan, 2023. March 28-29. – P. 61-62.

Avtoreferat «O‘zMU Xabarlari» jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 5/24.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.