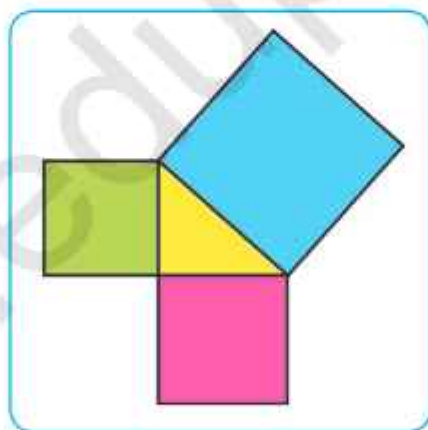


GEOMETRIYA 8

**Uliwma bilim beriw mektepleriniń 8-klası ushın
sabaqlıq**

Qayta islegen hám tolıqtırılğan 4-basılıwı

*Ózbekstan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrligi tárepinen
usınıs etilgen*



TASHKENT
«YANGIYO'L POLIGRAF SERVIS»
2019

Pikir bildiriwshiler:

*N.A. Umarova — Tashkent wálayatı XBXQT hám QAAO aǵa muǵallimi;
G.A. Fozilova — Yunusabad rayonındaǵı 274-úlıwma bilim beriw mektebiniń
matematika pání muǵallimi.*

Sabaqlıq Respublika bilimlendiriw orayı tárepinen 2018-jıl 25-noyabrde berilgen «Anıq pánler blok modeli boyınsha úlıwma orta bilim beriwdiń oqıw baǵdarlaması (VIII klass)» tiykarında jazılǵan. Sabaqlıqta belgilengen úlıwma orta bilim beriwde matematika pánin oqıtıwdıń maqseti hám wazıypaları, oqıwshılardıǵa oqıw hárketi nátiyjesinde qoyılatuǵın talaplar kórsetilgen. Sabaqlıq oqıwshılardıǵa qalıplestirilgen tayanış kompetenciya elementlerin óz ishine alǵan.

Qayta islew procesinde ekspertler hám pikir bildiriwshilerdiń usınısları itibarǵa alındı.

Hár bir bap aqırında jazba baqlaw jumıslarınan úlgiler hám testler kirgizilgen bolıp, oqıwshılardıń baqlaw jumısına puqta tayarlıq kóriwlerinde járdem beredi.

Tariyxiy maǵlıwmatlar tiykarında alımlarımızdıń pánge qosqan úlken úlesleri hám tariyxiy-ilimiy jumısları menen tanısasız.

«Inglis tilin úyrenemiz» súreninde temalarda ushırasatuǵın áhmiyetli geometriyalıq túsiniklerdiń inglis tilindegi awdarması berilgen.

Tákirarlawǵa berilgen máselelerden jıl dawamında paydalanıwıńızǵa boladı.
Temalarda kórsetilgen bilimlerdi úyreniwihizde Sizlerge tabıslar tileymiz.

SABAQLIQTAGI SHARTLI BELGILER:

-  — qaǵıyda, tuwındı, anıqlamalar;
-  — jedellestiriwshi soraw hám tapsırmalar;
-  — klasta orınlanatuǵın shınıǵıwlar;
-  — rawajlandırıwshi shınıǵıwlar;
-  — másele sheshiw úlgisi;
-  — úyge tapsırma ushın shınıǵıwlar.

**«Respublika maqsetli kitap
qorı esabınan ijara ushın
basıp shıǵarıldı».**



7-KLASTA ÓTILGENLERDI TÁKIRARLAW



1. Úshmúyeshliktiń perimetri bissektrisası hám biyikligine tiyisli máseleler



Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Úshmúyeshliktiń perimetri medianası biyikligi bissektrisası dep nege ayıladı?
2. Perimetri 18 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliktiń bissektrisası onıń perimetri 12 cm hám 15 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliklerge ajratadı. Berilgen úshmúyeshliktiń bissektrisasın tabıń (1-súwret).
3. Úshmúyeshliktiń ultanına túsirilgen medianası onı perimetri 18 cm hám 24 cm ge teń eki úshmúyeshlikke ajratadı. Berilgen úshmúyeshliktiń kishi qaptal tárepi 6 cm ge teń. Onıń úlken qaptal tárepin tabıń (2-súwret).

4. ABC úshmúyeshlikte $AB=BC$ hám BD mediana 6 cm ge teń. ABD úshmúyeshliktiń perimetri 24 cm ge teń. Berilgen úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń (3-súwret).

Berilgen: $\triangle ABC$ da: $AB=BC$, $BD=6$ cm – mediana, $P_{ABD}=24$ cm.

Tabıw kerek: $P_{ABC}=?$

Sheshiliwi. 1) $P_{ABD}=AB+BD+AD$, bunnan:

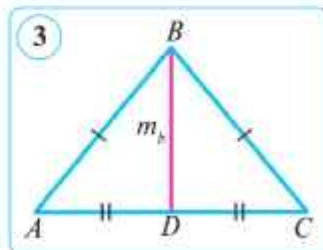
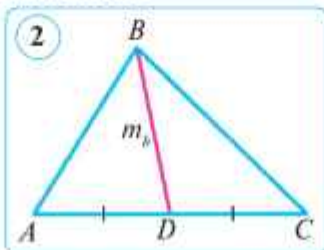
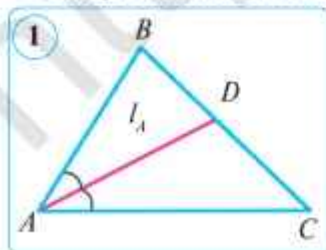
$$24=AB+AD+6, AB+AD=24-6, AB+AD=18 \text{ (cm)}.$$

2) $AB=BC$ hám $AC=2AD$, onda

$$P_{ABC}=AB+BC+AC=2(AB+AD)=2 \cdot 18=36 \text{ (cm)}.$$

Juwapı: $P_{ABC}=36$ cm.

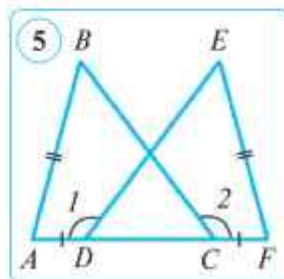
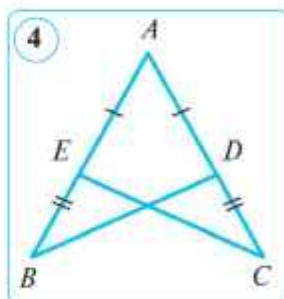
5. Úshmúyeshliktiń eki tárepi 0,5 dm hám 8,7 dm ge teń. Úshinshi tárepi niń uzunlıǵı natural san ekenin bilgen halda usı tárepti tabıń.
6. Perimetri 30 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliktiń bissektrisası onıń perimetrleri 16 hám 24 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliklerge ajratadı. Úshmúyeshliktiń bissektrisasın tabıń.



7. Perimetri 36 cm ge teñ bolğan úshmüyeshliktiñ biyikligi onıñ perimetrleri 18 cm hám 24 cm ge teñ bolğan úshmüyeshliklerge ajratadı. Berilgen úshmüyeshliktiñ biyikligin tabıń.
8. Teñ qaptalı úshmüyeshliktiñ perimetri 22,5 cm, qaptal tárepi bolsa 0,6 dm. Usı úshmüyeshliktiñ ultanın tabıń.

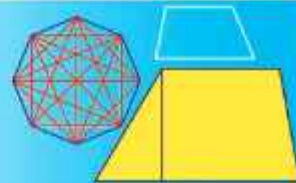
2. Úshmüyeshlikler teñliginiñ belgileri, úshmüyeshliktiñ müyeshleriniñ qosındısı hám sırtqı müyeshiniñ tuwındısına tiyisli máseleler

9. ABC hám DEF úshmüyeshliklerde: $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A = \angle D$. Bul úshmüyeshlikler teñ be?
10. Úshmüyeshlikdiñ 117° lı sırtqı müyeshine qońsı bolmağan ishki müyeshleriniñ qatnası 5:4 sıyaqlı. Úshmüyeshliktiñ ishki müyeshlerin tabıń.
11. Teñ qaptalı ABC úshmüyeshliktiñ AD hám BE bissektrisaları O noqatta kesilisedi. Bissektrisaları arasındaǵı AOE müyeshiti tabıń.
12. Teñ qaptalı úshmüyeshliktiñ ultanındaǵı müyeshi doǵal bola aladıma?
Sheshiliwi. Bizge belgili, teñ qaptalı úshmüyeshliktiñ ultanındaǵı müyeshleri teñ. Biraq, eki doǵal müyeshitiñ qosındısı 180° dan úlken boladı. Bul úshmüyeshlik ishki müyeshleriniñ qosındısı haqqındaǵı teoremaǵa qarsı. *Juwapı:* yaq, bola almaydı.
13. Úshmüyeshliktiñ 108° lı sırtqı müyeshine qońsı bolmağan ishki müyeshlerdiñ qatnası 2 : 7 sıyaqlı. Úshmüyeshlikti müyeshlerin tabıń.
14. Bir úshmüyeshliktiñ eki tárepi hám müyeshi sáykes túrde ekinshi úshmüyeshliktiñ eki tárepi hám müyeshine teñ. Bunnan usı úshmüyeshliktiñ teñligi kelip shıǵa ma?
15. ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmüyeshliklerde AB hám A_1B_1 , BC hám B_1C_1 tárepler teñ hám de sáykes túrde AB hám A_1B_1 táreplerge ótkerilgen CD hám C_1D_1 medianalar da teñ. Úshmüyeshliklerdiñ teñligin dálilleń.
16. 4-súwrette $AB=AC$ hám $AE=AD$, $BD=CE$ ekenligin dálilleń.
17. 5-súwrette $AD=CF$, $AB=FE$ hám $CB=DE$, $\angle 1 = \angle 2$ ekenin dálilleń.
18. ABC úshmüyeshliktiñ B müyeshi 42° qa, A tóbesindegi sırtqı müyeshi bolsa 100° qa teñ. ACB müyeshiti tabıń.
19. Tuwrı müyeshli ABC úshmüyeshliktiñ C müyeshi tuwrı, A tóbesindegi sırtqı müyeshi bolsa 136° qa teñ. B müyeshin tabıń.





I BAP TÓRTMÚYESHLIKLER



1- §.

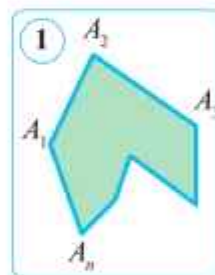
TIYKARGÍ TÓRTMÚYESHLIKLER HÁM OLARDÍŇ QÁSIYETLERI

1. KÓPMÚYESHLIKTIŇ ISHKI HÁM SÍRTQI MÚYESHLERINIŇ QÁSIYETI

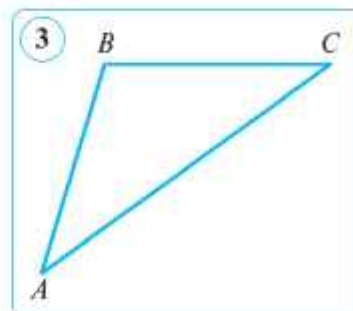
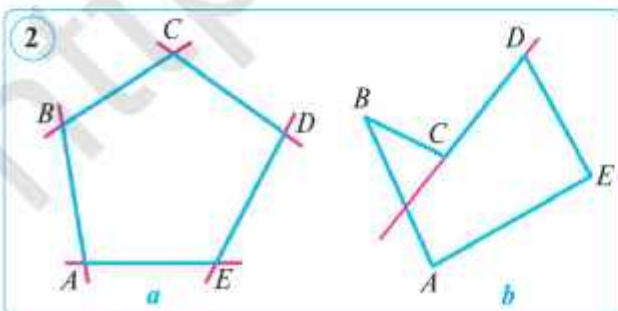
1. Kópmúyeshlikler. $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ kesindilerden düzilgen figuranı kórip shıgamız. Kesindiler sonday jaylasqan, hár qaysı eki *qońsı kesindi* (olar ulıwma tóbege iye) bir tuwrı sızıqta jatpaydı, qońsı emes kesindiler bolsa ulıwma noqatqa (tochkaga) iye emes (1-súwret). Bunday figura **kópmúyeshlik** delinedi. $A_1, A_2, \dots, A_n$ noqatlar (tóbeler) *kópmúyeshliktiŇ ushları*, $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ kesindiler bolsa kópmúyeshliktiŇ **tärepleri** dep ataladı.

Kópmúyeshlik tärepleri sanı onıń tóbeleri sanına, yaǵnıy múyeshleri sanına teń. Kópmúyeshlikler tóbeleri (tärepleri) sanına qaray *úshmúyeshlikler, tórtmúyeshlikler, besmúyeshlikler* hám basqalarǵa bólinedi.

Eger tuyıq sınıq sızıq óz-ózi menen kesilispese, bunday sınıq sızıq **ápiwayı tuyıq sınıq sızıq** dep ataladı. Ol tegisliktiŇ usı sınıq sızıqqa tiyisli emes *eki bólimge* — *ishki* hám *sırtqı bólimge* ajıratadı, hám de ulıwma shegara wazıypasın atqaradı. 1-súwrette ishki bólim boyap kórsetilgen.



1- anıqlama. Eger kópmúyeshlik onıń qálegen tärepin óz ishine alǵan tuwrı sızıq penen bir yarım tegislikte jatsa, ol **dóñes kópmúyeshlik** deyiledi. Bunda tuwrı sızıqtıń ózi de usı yarım tegislikke tiyisli boladı.



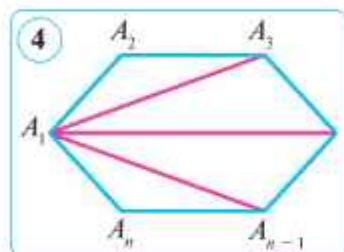
2-*a* hám 3-súwrette dónes kópmúyeshlik, 2-*b* súwrette bolsa dónes emes kópmúyeshlik kórsetilgen. Qálegen úshmúeshlik — dónes kópmúyeshlik (3-súwret).

2. Kópmúyeshliktiń ishki hám sırtqı múyeshleriniń qásiyeti.

2-anıqlama. *Kópmúyeshliktiń berilgen tóbesindegi ishki múyeshi dep, onıń usı tóbesinde kesiliwshi táreplerin payda etken múyeshke aytıladı.*

1-teorema.

Dónes n múyesh ishki múyeshleriniń qosındısı $180^\circ(n-2)$ ge teń, bunda n — tárepler sanı.



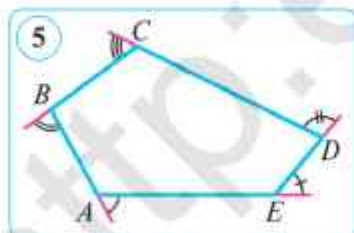
Dálil. $A_1A_2A_3...A_n$ — berilgen dónes n múyesh hám $n > 3$ bolsın (4-súwret). Bir tóbesinen, máselen A_1 den, kópmúyeshliktiń barlıq diagonalın ótkizemiz. Bul diagonallar onı $(n-2)$ úshmúyeshlikke ajıratadı. Haqıyqattan da, eki shetki úshmúyeshlikler ($\triangle A_1A_2A_3$ hám $\triangle A_1A_{n-1}A_n$) kópmúyeshliktiń eki tárepi hám bir diagonalı, qalğan úshmúyeshlikler bolsa kópmúyeshliktiń bir tárepi hám eki diagonalınan dúzilgen. Sonıń

ushın úshmúyeshlikler sanı $(n-2)$, yaki kópmúyeshliktiń tárepleri sanınan ekige kem boladı. Kópmúyeshliktiń múyeshleri qosındısı onı payda etiwshi úshmúyeshlik múyeshleri qosındısına, yaǵnıy $S_n = 180^\circ(n-2)$ ge teń boladı. Teorema dálillendi.

3-anıqlama. *Kópmúyeshliktiń berilgen tóbesindegi sırtqı múyeshi dep, onıń usı tóbesindegi ishki múyeshine qońsı múyeshke aytıladı.*

2-teorema.

Dónes n múyeshiń hárbir tóbesinen birewden alınǵan sırtqı múyeshleriniń qosındısı 360° qa teń.



Dálil. Kópmúyeshliktiń hárbir tóbesinen birewden sırtqı múyesh jasaymız. Kópmúyeshliktiń ishki múyeshi hám onıń menen qońsı bolǵan sırtqı múyeshiniń qosındısı 180° qa teń (5-súwret). Sol sebepli barlıq ishki hám hárbir tóbesinen birewden alınǵan sırtqı múyeshleriniń qosındısı $180^\circ n$ ge teń. Biraq, kópmúyeshliktiń

barlıq ishki múyeshleri qosındısı $180^\circ(n-2)$ qa teń. Bunday halda hárbir tóbesinen birewden alınǵan sırtqı múyeshlerdiń qosındısı

$$180^\circ n - 180^\circ(n-2) = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ$$

qa teń boladı. Teorema dálillendi.

1-másele. Tárepleri teń bolǵan (turaqlı) n múyeshiń hárbir ishki múyeshi (α_n) nege teń?

Sheshiliwi. Bizge málim, qálegen dónes n múyeshtiń múyeshleriniń qosındısı $180^\circ(n-2)$ qa teń. Turaqlı kópmúyeshliktiń múyeshleri teń bolǵanı

ushın olardıń hárbiri tómendegige teń: $\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

2-másele. Tárepleri teń bolǵan (turaqlı) n múyeshtiń hárbir sırtqı múyeshi (β_n) nege teń?

Sheshiliwi. Bizge málim, qálegen dónes n múyeshtiń hárbir tóbesinen birewden alıńǵan sırtqı múyeshleriniń qosındısı 360° qa teń.

Solay etip, tárepleri teń bolǵan n múyeshtiń hárbir sırtqı múyeshi tómendegige teń: $\beta_n = \frac{360^\circ}{n}$.



Soraw, másele hám tapırmalar

1. 1) Kópmúyeshliktiń berilgen tóbesindegi ishki múyeshi dep qanday múyeshge aytıladı? Sırtqı múyeshi-she?



2) Dónes n múyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı nege teń?

2. Kópmúyeshlik múyeshleriniń qosındısı: 1) 1080° qa; 2) 1620° qa; 3) 3960° qa teń. Kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?

3. 1) Tórtmúyeshlik; 2) onekimúyeshlik; 3) otız múyeshlik; 4) eliwmúyeshlik ishki múyeshleri qosındısıń tabıń.

Úlgi. 1) $S_{13} = 180^\circ(13-2) = 180^\circ \cdot 11 = 1980^\circ$.

4. Eger tórtmúyeshliktiń úshewden alıńǵan múyeshleriniń qosındısı sáykes túrde 240° , 260° hám 280° bolsa, onıń eń kishi múyeshin tabıń.

5. Hárbir ishki múyeshi: 1) 150° qa; 2) 170° qa; 3) 171° qa teń bolǵan dónes kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?

6. Kópmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı onıń hárbir tóbesinen birewden alıńǵan sırtqı múyeshleriniń qosındısınan úsh ese úlken. Usı kópmúyeshliktiń tárepleri sanı qansha? Bos jerlerine sáykes sanlardı qoyıń.

Sheshiliwi. Máseleniń shártine muwapıq, $180^\circ(n-2) = \dots 360^\circ$. Bunnan

$$180^\circ(n-2) = \dots 2 \cdot 180^\circ, \quad n-2=6, \quad n=...$$

Juwabı: $n=...$

7. Sırtqı múyeshiniń hárbiri: 1) 18° ga; 2) 24° ga; 3) 60° teń bolǵan dónes kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?

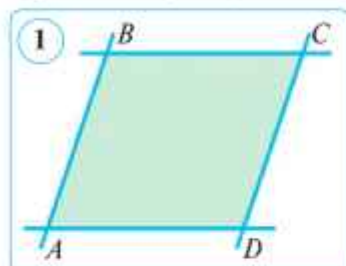
8. Eger tórtmúyeshliktiń úsh múyeshi doǵal bolsa, ol jaǵdayda tórtinshi súyir boladı. Sonı tabıń.

9. Sırtqı múyeshiniń hárbiri: 1) 15° ga; 2) 45° qa; 3) 72° qa teń bolǵan dónes kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?

10. Dónes tórtmúyeshliktiń múyeshleri 1, 2, 3 hám 4 sanlarına proporcional. Usı múyeshlerdi tabıń.

2. PARALLELOGRAMM HÁM ONÍN QÁSIYETLERI

1. Parallelogramm. Tegislikte eki parallel tuwrı sızıqtıń basqa eki parallel tuwrı sızıq penen kesisiwinen payda bolǵan tórtmúyeshlikti kórip shıǵamız (1-súwret). Bul tórtmúyeshlik *arnawlı* atqa iye bolıp, onı **parallelogramm** dep ataymız.



Anıqlama. Qarama-qarsı tárepleri óz ara parallel bolǵan tórtmúyeshlik **parallelogramm** dep ataladı.

Eger $ABCD$ parallelogramm bolsa, $AB \parallel DC$ hám $AD \parallel BC$ boladı (1-súwret).

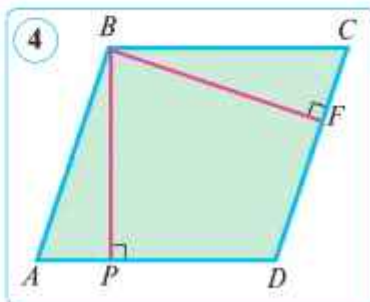
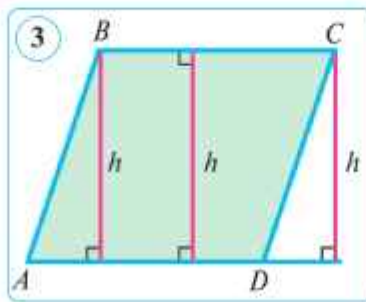
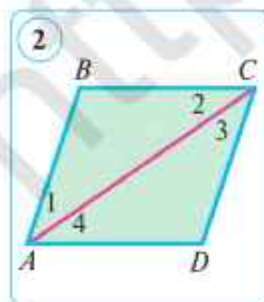
1-másele. 2-súwrette $\triangle ABC = \triangle CDA$. $ABCD$ tórtmúyeshlik parallelogramm ekenin dá-lilleń.

Sheshiliwi. ABC hám CDA úshmúyeshlikleriniń teńliginen tómendegi kelip shıǵadı: $\angle 1 = \angle 3$ hám $\angle 2 = \angle 4$. 1 hám 3 múyeshler — AB hám CD parallel tuwrı sızıqlar hám AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın teń. Tap sonday, 2 hám 4 múyeshler BC hám AD parallel tuwrı sızıqlar hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın teń. Parallel tuwrı sızıqlardıń belgisine qaray tómendegige iye bolamız: $AB \parallel DC$ hám $BC \parallel AD$. Demek, $ABCD$ tórtmúyeshlikte qarama-qarsı tárepler jup-jubı menen parallel, yaǵnıy anıqlamaǵa muwapıq, $ABCD$ — parallelogramm. Parallelogrammnıń bir tárepinde jatqan noqattan qarama-qarsı tárepti óz ishine alǵan tuwrı sızıqqa túsirilgen perpendikulyar parallelogrammnıń **biyikligi** delinedi. Parallelogrammnıń bir tárepine sheksiz kóp biyiklikler ótkeriw múmkinligi anıq (3-súwret), olar parallel tuwrı sızıqlar arasındagı aralıqlar bolǵanı ushın óz ara teń. Parallelogrammnıń bir tóbesinen onıń hár túrli tárepine bir-birinen ayırılatuǵın eki biyiklik ótkeriw múmkin. Máselen, 4-súwrette, BP hám BF — biyiklikler bolıp tabıladı.

2. Parallelogrammnıń qásiyetleri.

1-teorema.

(1-qásiyet.) Parallelogrammnıń bir tárepine jaylasǵan múyeshleriniń qosındısı 180° qa teń.



Dálil. Parallelogrammnıń bir tárepine jaylasqan múyeshler ishki bir tárepli múyeshler boladı. Sonıń ushın olardıń qosındısı 180° qa teń. Teorema dálillendi.

2-teorema.

(2-qásiyet.) Parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri hám qarama-qarsı múyeshleri óz ara teń.

Dálil. $ABCD$ – berilgen parallelogramm bolsın, yaǵnıy $AB \parallel CD$ hám $BC \parallel AD$. Parallelogrammnıń AC diagonalın ótkizemiz (2-súwretke q.). hám de ABC hám CDA úshmúyeshliklerin kórip shıǵamız. Olarda AC tárepi ulıwma, 1 hám 3 múyeshler – AB hám CD parallel tuwrı sızıqlar hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın teń, 2 hám 4 múyeshler bolsa AD hám BC parallel tuwrı sızıqlar hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın teń. Demek, úshmúyeshlikler teńliginiń ekinshi belgisine muwapıq, ABC hám CDA úshmúyeshlikler teń. Atap aytqanda, bunnan, $AB = CD$, $AD = BC$ hám $\angle B = \angle D$ hám de $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$, yaǵnıy $\angle A = \angle C$ ekeni kelip shıǵadı.

2-másele. Parallelogrammnıń múyeshlerinen ekewiniń qosındısı 172° qa teń. Onıń múyeshlerin tabıń.

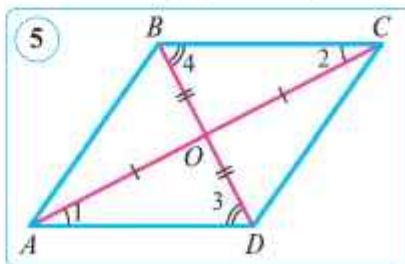
Sheshiliwi. $ABCD$ parallelogramm berilgen bolsın. Parallelogrammnıń qońsı múyeshleriniń qosındısı 180° qa teń bolǵanı ushın berilgen múyeshler qońsı múyeshler bola almaydı, demek, olar qarama-qarsı múyeshler. $\angle A + \angle C = 172^\circ$ bolsın. Parallelogrammnıń qarama-qarsı múyeshleri teń bolǵanı ushın bul jaǵdayda múyeshlerdiń hár biri $\angle A = \angle C = 172^\circ : 2 = 86^\circ$ qa teń. Parallelogrammnıń barlıq múyeshleri qosındısı 360° qa teń, sonıń ushın qalǵan eki múyeshi $\angle B = \angle D = (360^\circ - 172^\circ) : 2 = 94^\circ$ dan boladı. *Juwapı:* $86^\circ, 94^\circ, 86^\circ, 94^\circ$.

3-teorema.

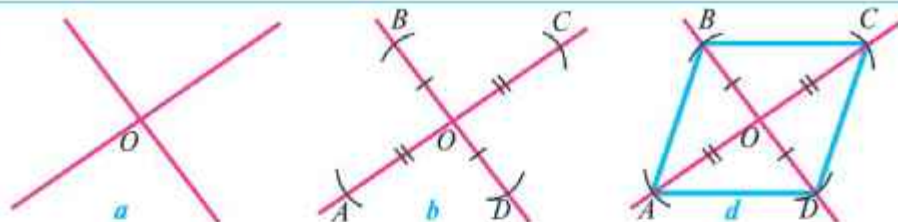
(3-qásiyet.) Parallelogrammnıń diagonaları kesilisedi hám kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi.

Dálil. $ABCD$ berilgen parallelogramm hám O – AC hám BD diagonalarınıń kesilisiw noqatı bolsın (5-súwret). $AO = OC$ hám $DO = OB$ ekenin dálilleymiz.

AOD hám COB úshmúyeshliklerin kórip shıǵamız. Bul úshmúyeshliklerde $AD = BC$ (parallelogrammnıń 2-qásiyetine muwapıq onıń qarama-qarsı tárepleri teń), $\angle 1 = \angle 2$ hám $\angle 3 = \angle 4$ (AD hám BC parallel tuwrı sızıqlardıń, sáykes túrde, AC hám BD kesiwshiler menen kesiliwinen payda bolǵan ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın). Demek, úshmúyeshlikler teńliginiń ekinshi belgisine muwapıq, $\triangle AOD = \triangle COB$. Bunnan $AO = CO$ hám $DO = OB$, yaǵnıy AC



6



h m BD diagonallarının hárbiri kesilisiw noqatı O da te  ekige bóliniw kelip shıgadı. Teorema d lillendi.

3-másele. 3-q siyetten paydalanıp parallelogramm isle .

1-q dem. Eki kesiliwshi tuwrı sızıq  tkizemiz h m olardı  kesilisiw noqatın O háribi menen belgileymiz (6-a súwret).

2-q dem. Cirkul járdeminde tuwrı sızıqlardı  birinde te  OA h m OC kesispelerin, ekinshisinde bolsa te  OB h m OD kesispelerin qoyamız (6-b s wret).

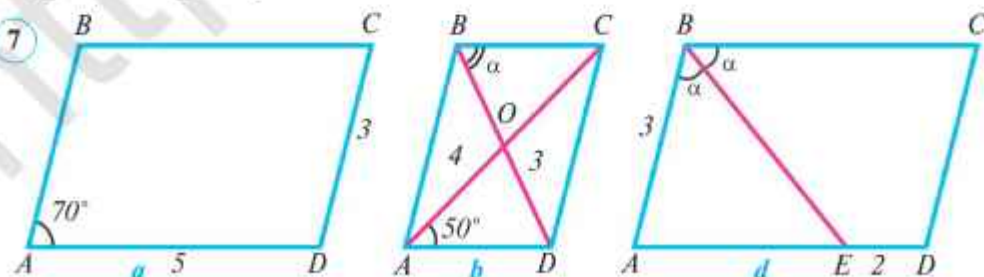
3-q dem. A , B , C h m D noqatların izbe-iz tutastırıp, izlenip atırğan $ABCD$ parallelogrammdı payda etemiz (6-d s wret).



Soraw, m sele h m tapsırmalar

- 1) Qanday t rtm yeshlikke parallelogramm delinedi? Parallelogrammın bir t repine jaylasqan müyeshleri qosındısı nege te ?
- 2) Parallelogrammın diagonalları haqqında ne dewge boladı?
3. Parallelogramm müyeshlerinen ekewini  qosındısı: 1) 70° ga; 2) 110° qa; 3) 170°  a te  bolsa onı  barlıq müyeshlerin tabı .
4. $ABCD$ parallelogrammda: $AB=7$ cm, $BC=11$ cm, $AC=14$ cm, $BD=12$ cm; O — diagonallardı  kesilisiw noqatı ekeni m lim. ABO h m BOC  shm yeshliklerdi  perimetrin tabı .
5. Parallelogrammın qo sı t replerini  qosındısı 20 cm ge, ayırması 12 cm ge te . U ı parallelogrammın t replerin tabı .
6. Parallelogrammın eki t repini  qatnası 5:3 perimetri 6,4 dm ge te . Parallelogrammın t replerin tabı .
7. 7-s wrette parallelogrammın ayırım elementlerini   lkenligi k rsetilgen. J ne qanday  lkenliklerdi tabıw m mkın?

7



3. PARALLELOGRAMMNİN BELGILERI

Dáslepki temada kórip shıqqanıımızdan belgili boldı, parallelogrammnıń qásiyetlerin paydalanıw ushın kóp jaǵdaylarda berilgen tórtmúyeshliktiń haqıyqattan da parallelogramm ekenine isenim payda etiw kerek. Bunı anıqlamaǵa muwapıq. (2-temadaǵı 1-máselege q.) yaki berilgen tórtmúyeshliktiń parallelogramm ekenin tastıyıqlawshı shártler — belgiler arqalı dálillew kerek boladı. Kóbinese ámelde qollanılatuǵın parallelogrammnıń belgilerin dálilleymiz. Endi parallelogrammnıń belgileri menen tanısamız.

1-teorema.

(1-belgi.) Eger tórtmúyeshliktiń eki tárepi teń hám parallel bolsa, bunday tórtmúyeshlik parallelogramm boladı.

Dálil. $ABCD$ tórtmúyeshlikte $AB \parallel CD$ hám $AB = CD$ bolsın (1-súwret). Onıń BD diagonalın ótkizemiz. Nátiyjede eki teń ABD hám CDB úshmúyeshliklerine iye bolamız (eki tárepi hám olar arasındadıǵı múyeshi boyınsha), sebebi olarda $AB = CD$ (shárt boyınsha), BD tárepi — ulıwma, $\angle 1 = \angle 2$ (AB hám CD parallel tuwrı sızıqlar hám de BD kesiwshi kesilisiwinen payda bolǵan ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın). Úshmúyeshliklerdiń teńliginen, $\angle 3 = \angle 4$ ekeni kelip shıǵadı. Bul múyeshler AD hám BC tuwrı sızıqlar hám de BD kesiwshi kesilisiwinen payda bolǵan ishki almasıwshı múyeshler, demek, $AD \parallel BC$. Solay etip, $ABCD$ tórtmúyeshlikleriniń qarama-qarsı tárepleri jup-jubı menen parallel. Sonıń ushın, parallelogrammnıń anıqlamasına muwapıq, $ABCD$ tórtmúyeshlik parallelogramm.

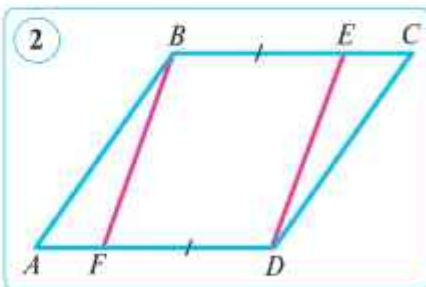
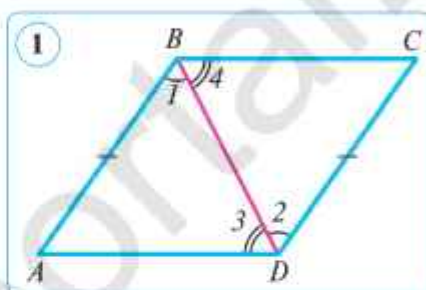
Teorema dálillendi.

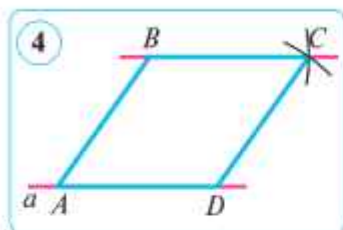
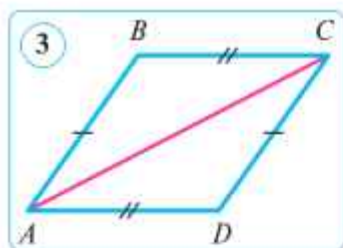
1-másele. $ABCD$ parallelogrammnıń BC hám AD táreplerine teń kesindiler sızilǵan: $BE = DF$ (2-súwret). $BEDF$ tórtmúyeshlik parallelogramm bola aladı ma?

Sheshiliwi. $BEDF$ tórtmúyeshliktiń BE hám DF qarama-qarsı tárepleri teń hám parallel. Sonıń ushın, parallelogrammnıń 1-belgisi boyınsha, $BEDF$ tórtmúyeshlik — parallelogram. *Jıwabı.* Awa, boladı.

2-teorema.

(2-qásiyet.) Eger tórtmúyeshlikdiń qarama-qarsı tárepleri óz ara bir-birine teń bolsa, bul tórtmúyeshlik parallelogramm.





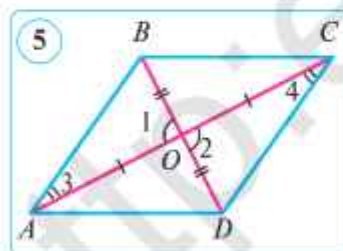
Dálil. $ABCD$ tórtmüyeshlikte $AB=CD$ hám $BC=DA$ bolsın. Onıń AC diagonalın ótkizemiz (3-súwret). Nátiyjede ABC hám CDA úshmüyeshlikler payda boladı. Úshmüyeshlikler teńliginiń 3-belgisine muwapıq, bul úshmüyeshlikler teń (AC tárep — ulıwma, teorema shártine muwapıq bolsa $AB=CD$ hám $BC=DA$). Úshmüyeshliklerdiń teńliginen CAB hám ACD müyeshlerdiń teńligi kelip shıǵadı. Bul müyeshlikler bolsa AB hám DC tuwrı sızıqlar hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı müyeshler bolıp tabıladı. Tuwrı sızıqlardıń parallellik belgisine muwapıq, $AB \parallel CD$. Solay etip, $ABCD$ tórtmüyeshlikte AB hám CD tárepler teń hám de parallel, demek, parallelogrammnıń 1-belgisine muwapıq, $ABCD$ tórtmüyeshlik — parallelogramm. Teorema dálillendi.

2-másele. Berilgen noqattan ótiwshi hám berilgen tuwrı sızıqqa parallel tuwrı sızıqtı sızıń.

Sheshiliwi. a — tuwrı sızıq, B — onda jatpaytuǵın noqat bolsın. a tuwrı sızıqta A hám D noqatların belgileymiz (4-súwret). B, D noqatlardan radiusları saykes túrde AD hám AB bolǵan sheńberler ótkizemiz. Olardıń kesilisiw noqatın C menen belgileymiz. BC tuwrı sızıqtı ótkizemiz, ol izlenip atırǵan tuwrı sızıq boladı. Haqıyqatında da, $ABCD$ tórtmüyeshliktin qarama-qarsı tárepleri teń. Parallelogrammnıń 2-belgisine muwapıq, $ABCD$ tórtmüyeshlik — parallelogramm. Sonın ushın, $BC \parallel AD$.

3-teorema.

(3-belgi.) Eger tórtmüyeshliktiń diagonaları kesilisiw noqatında teń ekige bólinse, bul tórtmüyeshlik parallelogramm bolıp tabıladı.



Dálil. O — $ABCD$ tórtmüyeshliktiń diagonaları kesilisen noqat bolsın. Shártke muwapıq, $AO=OC$ hám $BO=DO$ (5-súwret), AOB hám COD úshmüyeshliklerdi kórip shıǵamız. Bul úshmüyeshliklerde: $\angle 1 = \angle 2$ (vertikal müyeshler), $AO=CO$ hám $BO=DO$ (shártke muwapıq). Demek, úshmüyeshlikler teńliginiń birinshi belgisine muwapıq, AOB hám COD úshmüyeshlikler teń. Bul úshmüyeshlikler teńliginen olardıń saykes tárepleri hám

müyeshliklerdiń teńligi kelip shıǵadı: $AB=CD$, $\angle 3 = \angle 4$. Tuwrı sızıqlardıń parallellik belgisine muwapıq, $AB \parallel CD$, sebebi 3 hám 4 müyeshler AB hám CD tuwrı sızıqlar hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı müyeshler bolıp tabıladı. $ABCD$ tórtmüyeshlikte $AB=CD$ hám $AB \parallel CD$ bolǵanı ushın parallelogrammnıń 1-belgisine muwapıq, $ABCD$ tórtmüyeshlik parallelogramm boladı. Teorema dálillendi.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Eger tórtmüyeshliktiń eki tárepi teń hám parallel bolsa, bul tórtmüyeshlik parallelogramm bolıwın dálilley alasız ba?

2) Parallelogrammnıń 2—3-belgilerin kórsetiń.

2. (Jedellestiriwshi másele.) 1) Teń hám parallel eki kesindi berilgen. Olardıń aqırları óz ara kesilispeytuǵın kesindiler menen tutastırılǵan. Payda bolǵan tórtmüyeshlik parallelogramm boladı ma?

2) Eger tórtmüyeshliktiń eki qarama-qarsı müyeshi teń bolsa, bul parallelogramm bolama?

3. $ABCD$ tórtmüyeshlikte AB hám CD tárepler parallel, $AB=CD=11$ cm, $AD=5$ cm. Usı tórtmüyeshliktiń perimetrin tabıń.

4. Eger: 1) $\angle 1=70^\circ$, $\angle 3=110^\circ$, $\angle 2 \neq \angle 4$; 2) $\angle 1=\angle 2=60^\circ$, $\angle 3=\angle 115^\circ$ bolsa (6-súwret), bunday jaǵdayda $ABCD$ tórtmüyeshligi parallelogramm bola aladıma?

Sheshiliwi. 1) $ABCD$ tórtmüyeshlikte eki AB hám CD tárepleri parallel, sebebi $\angle 1+\angle 3=70^\circ+110^\circ=180^\circ$. Bul müyeshler — AB hám DC tuwrı sızıqlar hám de AD kesiliwshi payda etken ishki bir tárepli müyeshler. $AB \parallel DC$ bolǵanı sebepli, $\angle 1=\angle 4$ boladı (sáykes müyeshler). $ABCD$ tórtmüyeshliginiń qalǵan eki AD hám BC tárepleri parallel emes, sebebi ishki almasıwshı 1 hám 2 müyeshler teń emes ($\angle 1=\angle 4 \neq \angle 2$). Demek, $ABCD$ tórtmüyeshligi parallelogramm bolmaydı.

Juwap: joq, $ABCD$ tórtmüyeshlik parallelogramm bolmaydı.

2) 1-bántke uqsas sheshiledi

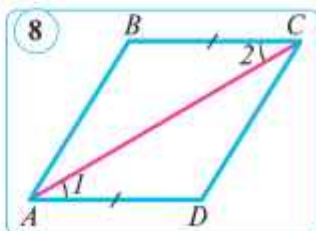
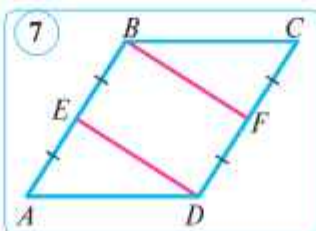
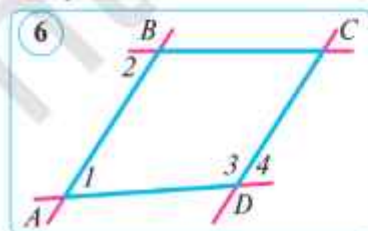
5. $ABCD$ parallelogrammnıń AB tárepi ortası E noqattan, CD tárepi ortası F noqattan ibarat. $EBFD$ tórtmüyeshliktiń parallelogram ekenin dálilleń (7-súwret).

6. $ABCD$ tórtmüyeshlikte: $AD=BC$, $\angle 1=\angle 2$ (8-súwret). $ABCD$ tórtmüyeshliktiń parallelogramm ekenin dálilleń.

7. $ABCD$ tórtmüyeshlikte AB hám CD tárepler parallel, $AB=CD=9$ cm, $AD=4$ cm. Usı tórtmüyeshliktiń perimetrin tabıń.

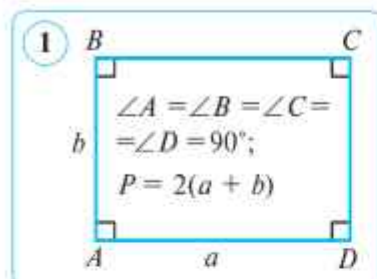
8. $ABCD$ tórtmüyeshlikte: $AB=CD$, $AD=BC$, A müyesh B müyeshтен úsh márte úlken. Usı tórtmüyeshliktiń müyeshlerin tabıń.

9. Parallelogramm müyeshlerinen biriniń bissektrisasi ózi kesip ótetuǵın tárepti 4 cm hám 5 cm li kesindilerge bóledi. Parallelogrammnıń perimetrin tabıń.



4. TUWRÍ TÓRTMÜYESHLİK HÁM ONÍN QÁSIYETLERI

Anıqlama. Barlıq müyeshleri tuwrı bolǵan parallelogramm **tuwrı tórtmüyeshlik** dep ataladı (1-súwret).

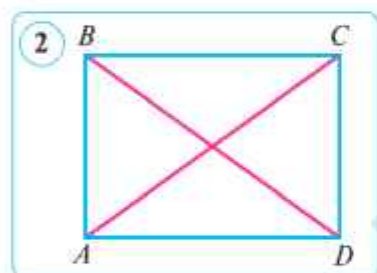


Tuwrı tórtmüyeshlik parallelogrammnıń jeke jaǵdayı bolǵanı ushın, ol parallelogrammnıń barlıq qásiyetlerine iye boladı: tuwrı tórtmüyeshliktiń qarama-qarsı tárepleri teń, diagonalı arı kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi, tuwrı tórtmüyeshliktiń diagonalı onı eki teń tuwrı müyeshli úshmüyeshlikke ajıratadı.

Tuwrı tórtmüyeshliktiń ózine tán qásiyetin kórip shıǵamız.

Teorema.

Tuwrı tórtmüyeshliktiń diagonalı óz ara teń.



Dáil. $ABCD$ tuwrı tórtmüyeshlik AC hám BD diagonal arı berilgen bolsın $AC = BD$ bolıwın dálilleymiz (2-súwret).

Tuwrı müyeshli ACD hám DBA úshmüyeshlikler eki katetine (AD — ulıwma tárepi, $CD = BA$) teń. Bunnan bul úshmüyeshlikler gipotenuzalarınń teńligi, yaǵnıy $AC = BD$ kelip shıǵadı.

Bul teoremadan tómendegi keri teorema kelip shıǵadı (**tuwrı tórtmüyeshliktiń belgisi**).

Keri teorema.

Eger parallelogrammnıń diagonalı arı teń bolsa, ol tuwrı tórtmüyeshlik boladı.

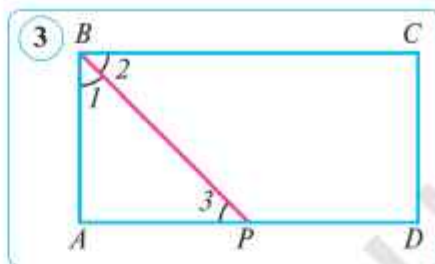
Dáil. $ABCD$ parallelogrammda AC hám BD diagonal arı teń bolsın (2-súwret). ABD hám DCA úshmüyeshlikler úsh tárepi boyınsha teń ($AB = DC$, $BD = CA$, AD — ulıwma tárep). Bunnan $\angle A = \angle D$ kelip shıqtı. Parallelogrammnıń qarama-qarsı müyeshleri teń, sonıń ushın $\angle A = \angle C$ hám $\angle B = \angle D$. Solay etip, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Parallelogramm — dóńes tórtmüyeshlik, sonıń ushın: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$. Bunnan $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$, yaǵnıy $ABCD$ parallelogrammnıń tuwrı tórtmüyeshlik ekeni kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

1-másele. $ABCD$ tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetri 24 cm ga BD diagonalı bolsa 9 cm ge teń. ABD úshmüyeshliktiń perimetrin tabıń.

Sheshiliwi. $AB + AD = P_{ABCD} : 2 = 24 : 2 = 12$ (cm) – qonısı tárepler qosındısı (2-súwretke q.) $P_{ABD} = AB + AD + BD = 12 + 9 = 21$ (cm).

Juwabı: $P_{ABD} = 21$ cm.

2-másele. $ABCD$ tuwrı tórtmüyeshlik B müyeshiniń bissektrisasi AD tárepi menen P noqatda kesisedi hám onı $AP = 17$ cm hám $PD = 21$ cm li kesindilerge bóledi (3-súwret). Usı tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetrin tabıń.



Sheshiliwi. 1) $ABCD$ – tuwrı tórtmüyeshlik bolǵanı ushın $AD \parallel BC$ hám sonıń ushın $\angle 2 = \angle 3$ (ishki almasıwshı müyeshler). Biraq, shárt boyınsha, $\angle 2 = \angle 1$, demek, $\angle 1 = \angle 3$ hám de $\triangle ABP$ – ultanı BP bolǵan teń qaptalı úshmüyeshlik. Solay etip, $AB = AP = 17$ cm.

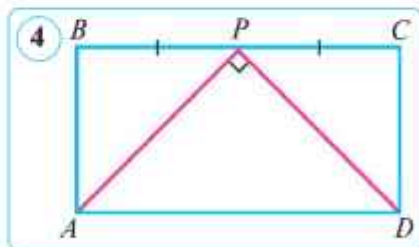
2) $AD = AP + PD = 17 + 21 = 38$ (cm);

$$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(17 + 38) = 2 \cdot 55 = 110 \text{ (cm)}.$$

Juwabı: $P_{ABCD} = 110$ cm.

Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Qanday parallelogramm tuwrı tórtmüyeshlik dep ataladı?
- 2) Tórtmüyeshliktiń qanday ózine tán qásiyeti bar?
- 3) Tuwrı tórtmüyeshliktiń belgilerin ańlatıń.
4. $ABCD$ tuwrı tórtmüyeshlikte: $AB = 9$ cm, $BC = 7$ cm.
 - 1) C noqattan AD tárepke shekem bolǵan aralıqtı tabıń.
 - 2) AB hám CD tuwrı sıyıqlar arasındaqı aralıqtı tabıń.
5. Tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetri 24 cm. Tuwrı tórtmüyeshliktiń qálegen ishki noqatınan onıń táreplerine shekemgi bolǵan aralıq qosındısı tabıń.
6. $ABCD$ tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetri 24 cm ge teń. P noqat BC tárepiniń ortası, $\angle APD = 90^\circ$ (4-súwret). Tuwrı tórtmüyeshliktiń táreplerin tabıń.
7. Eger tórtmüyeshlikte diagonallar teń hám olar kesilisiw noqatında teń ekige bölinshe, bul tórtmüyeshlik tuwrı tórtmüyeshlik bolıwın dáliyllen.
8. Parallelogrammnıń tárepleri 4 cm hám 7 cm. Bul parallelogrammnıń diagonalları: 1) 12 cm hám 5 cm; 2) 10 cm hám 3 cm bolıwı múmkın be?
9. Tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetri 42 cm ge, táreplerinen biri bolsa ekinshisinen eki márte úlken. Tuwrı tórtmüyeshliktiń táreplerin tabıń.



5-6. ROMB HÁM KVADRATTIŇ QÁSIYETLERI

1. Romb hám onıń qásiyetleri.

Anıqlama. Tárepleri teń bolǵan parallelogramm **romb** delinedi (1-súwret).

Romb parallelogrammnıń ulıwma qásiyetlerine iye bolǵan halda jáne basqa da tómendegi qásiyetke iye.

Teorema.

Rombnıń diagonalları óz ara perpendikulyar hám rombınń múyeshlerin teń ekige bólinedi.

Dáلیل. $ABCD$ — berilgen romb (2-súwret), O — onıń diagonalları kesişken noqatı bolsın. $AC \perp BD$ hám hárbir diagonalı rombınń múyeshlerin teń ekige bóletuǵınlıǵın (mısalı, $\angle BAC = \angle DAC$) dálilleymiz.

Rombnıń anıqlaması boyınsha, $AB = AD$, sonlıqtan BAD — BD ultanı teń qaptallı úshmúyeshlik. Romb parallelogramm bolǵanı ushın onıń diagonalları kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi, yaǵnıy $BO = OD$. Demek, AO — teń qaptallı BAD úshmúyeshliginiń medianası. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń qásiyeti boyınsha, onıń ultanına ótkerilgen mediana hám biyiklik bissektrisa boladı. Sonlıqtan $AC \perp BD$ hám $\angle BAC = \angle DAC$. Usını dálillew talap etilgen edi.

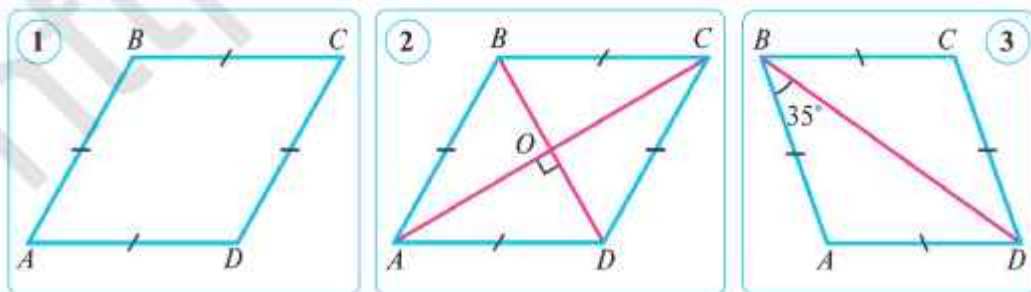
1-másele. $ABCD$ rombınń BD diagonalı tárepi menen 35° lı múyesh payda etedi. Onıń múyeshlerin tabıń.

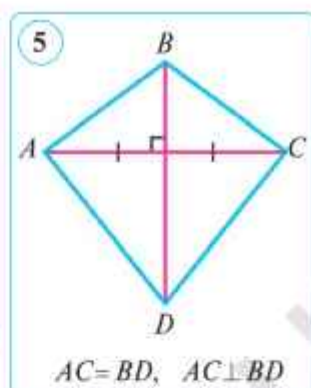
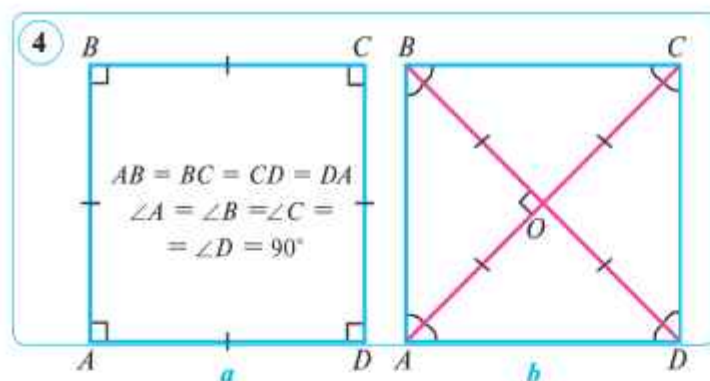
Sheshiliwi. $\angle ABD = 35^\circ$, desek (3-súwret). Bunda $\angle CBD = 35^\circ$ (rombnıń qásiyeti boyınsha), $\angle ABC = 2\angle ABD = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$, $\angle ADC = \angle ABC = 70^\circ$ (parallelogrammnıń 2-qásiyeti boyınsha), $\angle DAB = 180^\circ - \angle ABC$ (parallelogrammnıń 1-qásiyeti boyınsha). Demek, $\angle DAB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$, $\angle BCD = \angle DAB = 110^\circ$ (parallelogrammnıń 2-qásiyeti boyınsha).

Juwabı: $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$.

2-másele. Túrli romblardıń perimetrleri teń bolıwı múmkin be?

Sheshiliwi. Perimetrleri teń bolǵan romblar bir-birinen múyeshleri menen ajıraladı. Eger rombınń súyir múyeshi: 1) 40° qa teń bolsa, bunda qalǵan múyeshleri saykes halda $140^\circ, 40^\circ, 140^\circ$ boladı; 2) 15° qa teń bolsa, onda





qalğan müyeshleri sáykes halda 165° , 15° , 165° boladı hám t.b. Sonday-aq, súyır müyesh ornına hár túrli doǵal müyeshlerdi alıw múmkin. *Jawabı:* Awa, múmkin.

2. Kvadrat hám onıń qásiyeteri.

Anıqlama. Tärepleri teń bolǵan tuwrı tórtmüyeshlik **kvadrat** delinedi.

Kvadrat hám rombınıń anıqlamasınan kvadrat müyeshleri tuwrı bolǵan rombí ekenligi kelip shıǵadı (4-a súwret). Kvadrat hám parallelogramm, hám tuwrı tórtmüyeshlik, hám romb bolǵanı ushın olardıń barlıq qásiyetlerine iye. Kvadrattıń tiykargı qásiyetlerin keltiremiz.

1. Kvadrattıń barlıq müyeshleri tuwrı.

2. Kvadrattıń diagonalları óz ara teń.

3. Kvadrattıń diagonalları óz ara perpendikulyar hám kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi hám kvadrattıń müyeshlerin teń ekige bóledi (4-súwret).

Usı qásiyetlerdi óz betiñizshe dálilleń.

3-másele. Eger rombınıń diagonalları teń bolsa, onda bunday rombınıń kvadrat ekenin dálilleń.

Dánil. Romb parallelogramm bolǵanı ushın tuwrı tórtmüyeshliktiń belgisinen diagonalları teń bolǵan rombınıń tuwrı tórtmüyeshlik ekeni kelip shıǵadı hám demek ol kvadrat boladı.

4-másele. Tórtmüyeshliktiń diagonalları perpendikulyar hám óz ara birbirine teń. Usı tórtmüyeshlik kvadrat bola alama?

Sheshiliwi. Másele shártin qanaatlandırıwshı tórtmüyeshliklerden biri 5-súwrette súwretlengen. Bunda diagonallardan biri teń ekige bólingen. Biraq bul kvadrattıń 2-qásiyetin hám 3-qásiyetinde keltirilgen shárttiń bir bólimin, yaǵnıy tek óz ara perpendikulyarlıq shártin qanaatlandıradı. Keltirilgen jaǵdayda tek diagonallardan biri teń ekige bólingen, sol sebepli bul tórtmüyeshlik kvadrat bola almaydı. Belgili bir jaǵdayda tórtmüyeshliktiń hár eki diagonalı kesilisiw noqatında teń ekige bóliniwi múmkin. Tek usı jaǵdayda ǵana tórtmüyeshlik kvadrat bola aladı.

Jawabı: tórtmüyeshlik kvadrat bolıwı shárt emes.



Soraw, mäsle häm tapsırmalar

1. 1) Romb degenimiz ne? Rombın qasıyetin aytn.
 - 2) Kvadrat dep nege aytladı. Kvadrattın qasıyetlerin aytn
 - 3) Kvadratqa: 1) «parallelogramm»; 2) «romb»; 3) «tuwrı tórtmüyeshlik» túsınikleri járdeminde anıqlama berin.
 2. Kvadrattın tárepi 20 cm ge teń. Diagonalları kesilisiw noqatınan tárepleriniń birine deyingi aralıqtı tabın.
 3. $ABCD$ rombın tárepi 24 cm ge, A müyeshi bolsa 30° qa teń. B tóbesinen oǵan qarama-qarsı AD tárepine shekemgi aralıqtı tabın (6-súwret). Bos jerlerge sáykes sanlardı qoyın.
- Sheshiliwi.* B noqattan AD tuwrı sıziqqa shekemgi aralıqtı B noqattan usı tuwrı sıziqqa túsirilgen perpendikulyar, yaǵnıy BP kesindiniń uzınlıǵına teń. ABP úshmüyeshlikti kórip shıǵamız. Onda $\angle APB = \dots^\circ$, $\angle A = \dots^\circ$, $AB = \dots$. Ol jaǵdayda $BP = 0,5 \cdot \dots = 0,5 \cdot \dots = \dots$ (cm) ($\dots^\circ$ lı müyesh tuwrısında jatqan katettin qasıyeti boyınsha). *Juwapı:* $BP = \dots$ cm.
-
4. 1) (*Ámeliy tapsırma.*) 1) Eki teń úshmüyeshlikden; 2) tórt teń úshmüyeshlikten qalay etip häm kvadrat islew mümkin? Mümkin bolǵan barlıq sheshimlerin kórsetin.
 5. Teń qaptallı tuwrı müyeshli úshmüyeshlik ishine kvadrat sonday sızıladı, onıń eki tóbesi gipotenuzada, qalǵan eki tóbesi bolsa katetlerde jatadı. Gipotenuza 21 cm ge teń ekeni belgili bolsa, kvadrat tárepın tabın.
 6. Rombın diagonalları menen tárepleri arasında payda bolǵan müyeshleriniń qatnası 2:7 boladı. Rombın müyeshlerin tabın.
 7. Kvadrat tárepleriniń ortaları izli-izinen birlestirgen. Nátiyjede qanday figura payda boladı?
 8. Rombın barlıq biyikliginiń óz ara teń ekenligin dállillen.
 9. Tórtmüyeshliktiń tárepleri 2:4:5:7 kibi qatnasta, perimetri bolsa 108 cm ge teń. Usı tórtmüyeshliktiń táreplerin tabın.
 10. Müyeshlerinen biri 60° , kishi diagonalınıń uzınlıǵı 16 cm bolǵan rombın perimetrin tabın.
 11. Rombın diagonalları menen tárepleri arasında payda bolǵan müyeshleriniń qatnası 5:4 boladı. Rombın müyeshlerin tabın.
 12. Tuwrı tórtmüyeshliktiń uzınlıǵı 32 cm, eni bolsa 28 cm ge teń. Usı tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetrine teń bolǵan kvadrattın tárepın tabın.
 13. Tórtmüyeshliktiń eń kishi tárepi 5 cm ge teń, qalǵan tárepleriniń hárbiri aldınǵısınań sáykes türde 2 cm ge úlken. Usı tórtmüyeshliktiń perimetrin tabın.

7–8. TRAPECIYA HÂM ONÎN QÂSIYETLERİ

1. Trapeciyanıñ anıqlaması. Hârqanday parallelogrammda eki jup parallel tárepler bolatúğını bizge belgili. Endi biz tek bir jup parallel táreplerge iye bolğan tórtmüyeshliklerdi kórip shıǵamız.

1-anıqlama. Eki tárepi parallel, qalǵan eki tárepi parallel emes tórtmüyeshlik **trapeciya** dep ataladı.

Trapeciyanıñ parallel tárepleri onıñ *ultanı*, parallel emes tárepleri *qaptal tárepleri* dep ataladı. 1-súwrettegi $ABCD$ trapeciyada AD hâm BC tárepler ultanlar, AB hâm CD tárepler bolsa *qaptal túrler* boladı.

2-anıqlama. Táreplerinen biri ultanına *perpendikulyar* bolǵan trapeciya **tuwrı múyeshli trapeciya** delinedi (2-súwret).

3-anıqlama. Qaptal tárepleri teñ bolǵan trapeciya **teñ qaptallı trapeciya** delinedi.

3-súwrette teñ qaptallı $ABCD$ trapeciya súwretlengen: $AB = CD$.

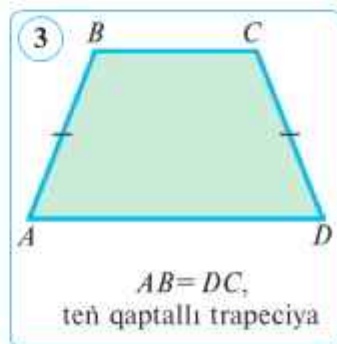
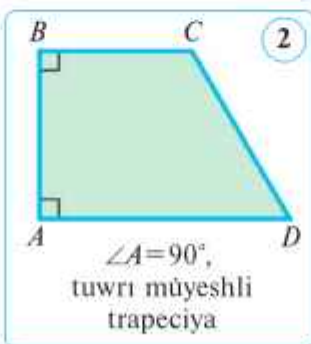
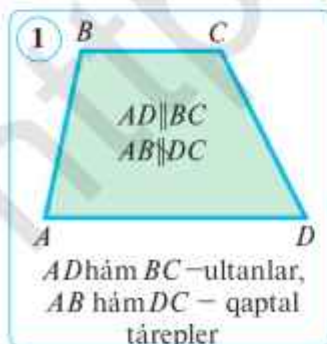
2. Trapeciyanıñ belgisi. Endi $ABCD$ tórtmüyeshliktiñ trapeciya bolıwı ushın qanday shárttı qanaatlandıırıwın kórip shıǵamız.

Teorema.

Eger tórtmüyeshliktiñ bir tárepine jaylasqan eki múyeshiniñ qosındısı 180° qa teñ hâm oǵan qońsı táreplerge jaylasqan eki múyeshiniñ qosındısı 180° dan ayırmashılıǵı bolsa, bunday tórtmüyeshlik **trapeciya** boladı.

Dáلیل. $ABCD$ tórtmüyeshlikte: $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle A + \angle D \neq 180^\circ$ bolsın. $ABCD$ tórtmüyeshliktiñ trapeciya ekenin dáلیلleymiz.

Birinshiden, bir jup qarama-qarsı tárepler parallel ekenin kórsetemiz. AB , $BC(l_1)$ hâm $AD(l_2)$ tuwrı sızılardı ótkizemiz (4-súwret). Shártke muwapiq, $\angle A + \angle B = 180^\circ$, bul jaǵdayda AD hâm BC kesindiler parallellik belgisine muwapiq parallel boladı. (Eki a hâm b tuwrı sızılardı úshinshi c tuwrı sızıq kesiliskende ishki bir tárepli múyeshlerdiñ qosındısı 180° qa teñ bolsa, bul jaǵdayda a hâm b tuwrı sızılqar parallel boladı.)



Ekinshiden, $ABCD$ törtmüyeshliktiñ qalğan eki tárepi parallel emesligin kórsetemiz. Shártke muwapiq, $\angle A + \angle D \neq 180^\circ$, bul jaǵdayda AB hám DC kesindiler parallel bola almaydı (Evklidtiñ parallel tuwrı sıızqlar haqqındaǵı 5-aksiomasına muwapiq, yaǵnıy tuwrı sıızqlar parallel bolıwınıñ zárúr shártı orınlanbadı). Demek, $ABCD$ törtmüyeshlik trapeciya eken. Usını dálillew talap etilgen edi.

Bul teoremadan tómendegi nátiyje kelip shıǵadı

Nátiyje. Trapeciyanıñ bir müyeshi 90° bolsa, onıñ jáne bir 90° lı müyeshi bar degen sóz.

4-anıqlama. Trapeciyanıñ ultanlarınan birinde jatqan noqattan ekinshi tiykardı óz ishine alǵan tuwrı sıızqqa túsirilgen perpendikulyar **trapeciyanıñ biyikligi** dep ataladı.

Trapeciya tiykarlarına perpendikulyar bolǵan hárqanday kesindini onıñ biyikligi sıpatında alıwǵa boladı. Hárqanday trapeciya qálegeninshe biyiklik ótkizse boladı (5-súwret).

3. Teñ qaptallı trapeciyanıñ qásiyeti.

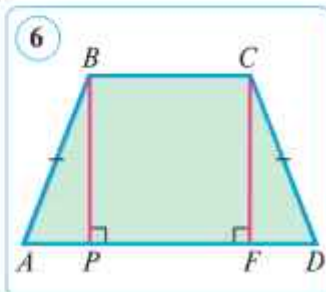
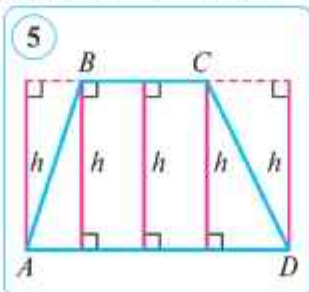
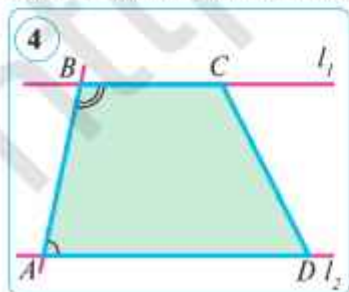
$ABCD$ teñ qaptallı trapeciyanı qarayıq. Bunda $AD=a$ — úlken ultan, $BC=b$ — kishi ultan bolsın. Kishi ultannıñ B tóbesinen BP biyiklik ótkizemiz (6-súwret). Biyikliktiñ P ultanı AD ultanın AP hám PD kesindilerge ajıratsın.

Teorema.

Teñ qaptallı trapeciyanıñ doǵal müyeshi tóbesinen ótkizilgen biyiklik úlken ultandı uzınlıqları ultanları ayırmasınıñ yarımına hám ultanları qosındısınıñ yarımına teñ bóleklerge ajratadı, yaǵnıy:

$$AP = \frac{a-b}{2}, PD = \frac{a+b}{2}.$$

Dánil. C tóbesinen $CF \perp AD$ ótkizemiz. Tuwrı müyeshli ABP hám DCF úshmüyeshlikler teñ: $AB=DC$ — shárt boyınsha, $BP=CF$ bolsa BC hám AD parallel tuwrı sıızqlar arasındǵı aralıq bolǵanı ushın. Úshmüyeshler teñliginen $AP=FD$ kelip shıǵadı. Tuwrı sıızqlardıñ parallellek belgisine muwapiq, $BP \parallel CF$, sebebi $BP \perp AD$, $CF \perp AD$. Parallel tuwrı sıızqlar arasındǵı aralıq teñ bolǵanı ushın $BC=PF=b$. Demek,



$$AP = FD = \frac{AD - PF}{2} = \frac{a - b}{2}, \quad PD = AD - AP = a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Solay etip, $AP = \frac{a - b}{2}$ hám $PD = \frac{a + b}{2}$ eken. Teorema dálillendi.

1-másele. Teń qaptallı trapeciyanın ultanındaǵı múyeshleri teń ekenin dálilleń.

Sheshiliwi. $ABCD$ — teń qaptallı trapeciya, yaǵnıy $AB = DC$ hám $AD \parallel BC$. Teń qaptallı trapeciyanın AD hám BC ultanlarına jaylasqan múyeshleri teńligin dálilleybiz ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$).

Trapeciyanın doǵal múyeshleri (B hám C) tóbelerinen AD ultanına perpendikulyar ótkizemiz: $BP \perp AD$, $CF \perp AD$ (6-súwretke q.). Tuwrı múyeshli ABP hám DCF úshmúyeshlikler (gipotenuza hám kateti boyınsha) teń: $AB = DC$ — shárt boyınsha, $BP = CF$ ese BC hám AD parallel tuwrı sıziqlar arasındaǵı aralıq bolǵanı ushın. Úshmúyeshlikler teńliginen $\angle A = \angle D$ kelib shıǵadı.

A hám B , C hám D múyeshler, AB múyeshler AD hám BC parallel tuwrı sıziqlardıń, sáykes túrde, AB hám CD kesilisiwshiler menen kesilisiwinen payda bolǵan ishki bir tárepili múyeshler, sonıń ushın $\angle A + \angle B = 180^\circ$ hám $\angle C + \angle D = 180^\circ$. Bunnan $\angle B = \angle C$ kelip shıǵadı. Solay etip, teń qaptallı trapeciyanın ultanındaǵı múyeshleri teń eken: $\angle A = \angle D$ va $\angle B = \angle C$. Usını dálillew talap etilgen edi.

2-másele. Teń qaptallı trapeciyanın kishi ultanı qaptal tárepine teń, diagonalı qaptal tárepine perpendikulyar. Trapeciyanın múyeshlerin tabıń.

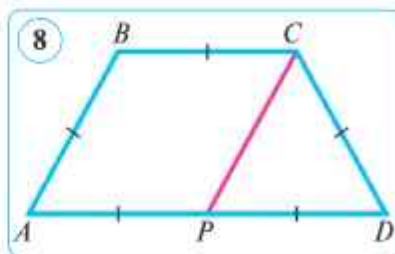
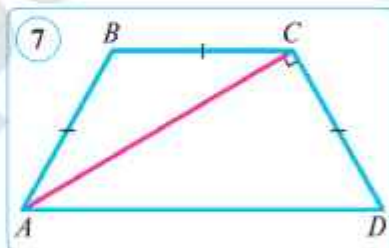
Sheshiliwi. Teń qaptallı $ABCD$ trapeciya berilgen, onda $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $AC \perp CD$ bolsın (7-súwret). Másele shártine muwapıq, AC — teń qaptallı ABC úshmúyeshliktiń ultanı, demek, $\angle BCA = \angle CAB$. Biraq $\angle A = \angle D$, sebebi teń qaptallı trapeciyanın tiykarındaǵı múyeshleri teń, CAD hám BCA múyeshler bolsa $AD \parallel BC$ hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın teń, yaǵnıy $\angle CAD = \angle BCA$.

Demek, $\angle A = 2\angle CAD$. Shártine muwapıq, ACD — tuwrı múyeshli, sonıń ushın $\angle CAD + \angle D = 90^\circ$, biraq $\angle D = \angle A$, ol jaǵdayda $90^\circ = 3\angle CAD$, demek, $\angle CAD = 30^\circ$ hám ol jaǵdayda $\angle D = \angle A = 60^\circ$, $\angle C = \angle B = 120^\circ$.

Juwapı: $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 120^\circ$.

3-másele. eń qaptallı trapeciyanın tárepleriniń qatnası 1:1:1:2. Usı trapeciyanın múyeshlerin tabıń.

Sheshiliwi. $ABCD$ trapeciyada $AB = BC = CD = 1$ hám $AD = 2$ bolsın. AD tárepiniń ortasın P menen belgileymiz (8-súwret). $ABCP$ tórtmúyeshliktiń AP hám BC tárepleri teń hám parallel.



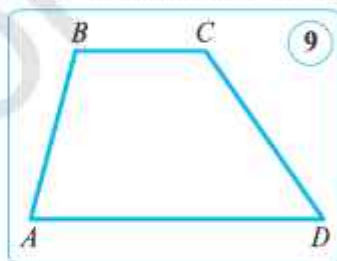
Demek, parallelogrammın belgisi boyınsha, bul tórtmüyeshlik parallelogramm boladı. Usıǵan qarap, $PC=AB=1$. PCD úshmüyeshliktiń barlıq tárepleri 1 ge teń, sonıń ushın $\angle PDC = 60^\circ$. Solay etip, $ABCD$ trapeciyada $\angle A = \angle D = 60^\circ$ hám $\angle B = \angle C = 120^\circ$.

Juwapı: $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 120^\circ$.



Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Qanday tórtmüyeshlik trapeciya dep ataladı?
- 2) Qanday trapeciya: a) teń qaptallı trapeciya; b) tuwrı müyeshli trapeciya dep ataladı?
3. Trapeciyanıń tóbesinen ótpegen biyikligi onı eki tuwrı trapeciyaǵa ajıratadı. Figuranı sıızıp kórsetiń.
4. Trapeciyanıń ultanları 12 cm hám 20 cm, qaptal tárepleri 4 cm hám 11 cm. Kishi ultanınıń tóbesinen kishi tárepine parallel tuwrı sıızıp ótkizilgen. Usı parallel tuwrı sıızıp ajıratqan úshmüyeshliktiń perimetrin tabıń.
5. AD hám BC ultanı $ABCD$ trapeciyanıń A hám C müyeshlerin tabıń, bunda $\angle A = 75^\circ$ hám $\angle D = 55^\circ$ (9-súwret). Bos orınlardı saýkes juwaplardı jazıń.
Sheshiliwi. A hám B , C hám D müyesh AD hám BC parallel tuwrı sıızılardı ... hám ... kesiwshiler menen kesilisiwinen payda bolǵan ..., sonıń ushın $\angle A + \angle B = \dots^\circ$ hám $\angle C + \angle D = \dots^\circ$. Shárt boyınsha, $\angle A = 75^\circ$ hám $\angle D = 55^\circ$, bunday jaǵdayda $\angle B = \dots^\circ - \angle A = \dots^\circ - \dots^\circ = \dots^\circ$ hám $\angle C = \dots^\circ - \angle D = \dots^\circ - \dots^\circ = \dots^\circ$.
 Juwapı: $\angle B = \dots^\circ$, $\angle C = \dots^\circ$.
6. Teń qaptallı trapeciyanıń súyir müyeshleriniń biri 60° qa, qaptal tárepi 16 cm ge teń. Eger trapeciyanıń ultanlarınıń qosındısı 38 cm ge teń. Trapeciyanıń ultanların tabıń.
7. Teń qaptallı trapeciyanıń doǵal müyeshi tóbesinen ótkerilgen biyikliktiń úlken ultanı 3 cm hám 17 cm li kesindilerge bólinedi. Onıń ultanların tabıń.
8. Teń qaptallı trapeciyanıń diagonalı teń ekenin dálilleń.
9. Trapeciya: 1) úsh tuwrı müyesh; 2) úsh súyir müyesh; 3) úsh müyesh qosındısı 180° qa teń bola alama? Juwapıńızdı dalilleń.
10. Tuwrı müyeshli trapeciyanıń eń úlken hám eń kishi müyeshleri qatnası 5:4 ge teń. Usı trapeciyanıń müyeshlerin tabıń.
11. $ABCD$ trapeciyanıń kishi ultanı 6 cm ge, ABE úshmüyeshliktiń ($BE \parallel CD$) perimetri 36 cm ge teń. Trapeciyanıń perimetrin tabıń.
12. Teń qaptallı trapeciyanıń diagonalı doǵal müyeshin teń ekige bóledi. Trapeciyanıń tiykarları 10 cm hám 20 cm, onıń perimetrin tabıń.



9. FALES TEOREMASI

Teorema.

Eger müyesh táreplerin kesiwshi parallel tuwrı sızıqlar onıń bir tárepinen teń kesindiler ajıratısa, olar ekinshi tárepinen de teń kesindiler ajıratadı.

Dáلیل. *O* müyeshin bir tárepinde (*a* nurda) óz ara teń A_1A_2 hám A_2A_3 kesindiler qoyılǵan hám olardıń aqırları (A_1, A_2, A_3) arqalı ekinshi tárepti (*b* nurdı) B_1, B_2, B_3 noqatlarda kesiwshi A_1B_1, A_2B_2 , hám A_3B_3 , tuwrı sızıqlar ótkizilgen bolsın (1-súwret).

Endi payda bolǵan B_1B_2, B_2B_3 , kesindileriniń óz ara teńligin, yaǵnıy eger $A_1A_2 = A_2A_3$ bolsa, onda $B_1B_2 = B_2B_3$ bolıwın dálilleymiz.

Bunıń ushın B_3 noqattan *a* nurgá parallel *CD* tuwrı sızıq ótkizemiz (2-súwret). Bul tuwrı sızıq A_1B_1 hám A_2B_3 tuwrı sızıqlar menen sáyes túrde *C* hám *D* noqatlarda kesiskeń. $A_1CB_2A_2$ hám $A_2B_3DA_3$ tórtmüyeshlikler — parallelogramm (anıqlamaǵa muwapıq), sebebi olardıń qarama-qarsı tárepleri shártke hám jasawǵa baylanıslı parallel. Shártke muwapıq, $A_1A_2 = A_2A_3$ hám de parallelogrammın qarama-qarsı tárepleri bolǵanı ushın $A_1A_2 = CB_2$ hám $A_2A_3 = B_2D$ dan $CB_2 = B_2D$ ǵa iye bolamız.

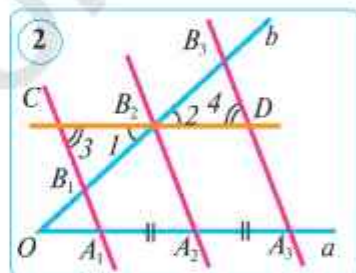
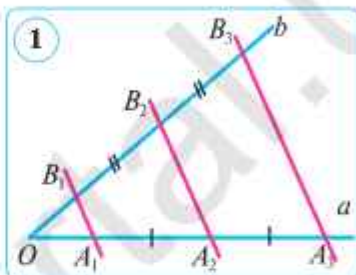
B_1B_2C hám B_3B_2D úshmüyeshliklerde $CB_2 = B_2D$ (dálilge muwapıq), sonday-aq $\angle 1 = \angle 2$ (vertikal müyeshler), $\angle 3 = \angle 4$ (A_1B_1 hám A_3B_3 parallel tuwrı sızıqlar hám de *CD* kesiwshi kesilisiwinen payda bolǵan ishki almasıwshı müyeshler bolǵanı ushın).

Úshmüyeshlikler teńliginiń ekinshi belgisine muwapıq, bul úshmüyeshlikler óz ara teń: $\triangle B_1B_2C = \triangle B_3B_2D$. Bunnan $B_1B_2 = B_3B_2$ kelip shıǵadı.

Solay etip, eger $A_1A_2 = A_2A_3$ bolsa, $B_1B_2 = B_2B_3$ bolıwı dálilendi. Usını dálillew talap etilgen edi.

Eskertiw! *Fales teoreması shártinde müyesh ornına hárqanday eki tuwrı sızıqtı alıw múmkin boladı, bunda teoremanıń juwmaǵı ózgermeydi.*

Nátiyeje. Berilgen eki tuwrı sızıqtı kesiwshi hám tuwrı sızıqlardıń birinen teń kesindilerdi bóliwshi parallel tuwrı sızıqlar ekinshi tuwrı sızıqtan da teń kesindilerdi bóledi.



1-másele. (Kesindini teń bóleklerge bóliw). Berilgen AB kesindini n teń bólekke bóliń.

Sheshiliwi. AB kesindi berilgen bolsın. Onı n teń bólekke bóliwdi kórsetemiz. A noqattan AB tuwrı sıziqta kesilispeytuǵın AC nurdı ótkizemiz hám onda A noqatta baslap n $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ teń kesindilerdi, yaǵnıy berilgen AB kesindini másele shártinen kelip shıǵıp neshe bólekke bóliw zárúr bolsa, sonsha teń kesindini qoyamız (3-súwret, $n=6$). Soń A_nB tuwrı sıziǵın ótkizemiz (A_n noqat – aqırǵı kesindiniń sońı) hám $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ noqatlar arqalı A_nB tuwrı sıziqqa parallel tuwrı sıziqlardı ótkizemiz. Bul tuwrı sıziqlar AB kesindini $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}$ noqatlarda kesilisedi hám onı Fales teoreması boyınsha n teń bólekke bóledi:

$$AB_1 = B_1B_2 = \dots = B_{n-1}B.$$

Demek, hárqanday kesindini qálegeninshe teń bólekke bóliwge boladı.

2-másele. ABC úshmúyeshliktiń BC tárepi tórt teń kesindige bólinip, bóliniw noqatları arqalı uzınlıǵı 18 cm ge teń bolǵan AB tárepke parallel túrde tuwrı sıziqlar ótkizilgen. Usı tuwrı sıziqlardıń úshmúyeshlik ishinde qalǵan kesindileriniń uzınlıqların tabıń.

Berilgen: $\triangle ABC$ da:

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3C, AB = 18 \text{ cm}; B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3 \parallel AB.$$

Tabıw kerek: B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 (4-súwret).

Sheshiliwi. 1) $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel AC$ ótkizemiz.

2) Fales teoremasına muwapıq:

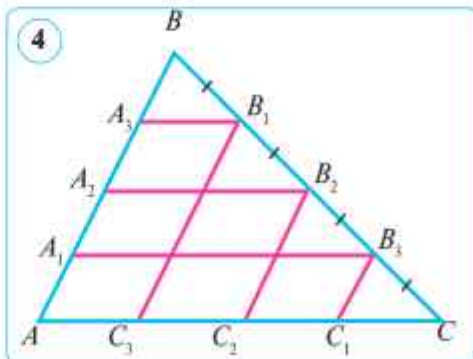
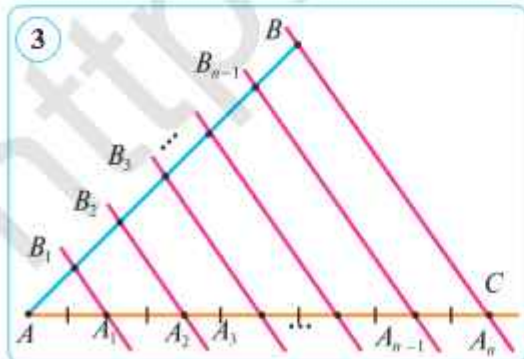
$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3B = AB:4 = 18:4 = 4,5 \text{ (cm)}.$$

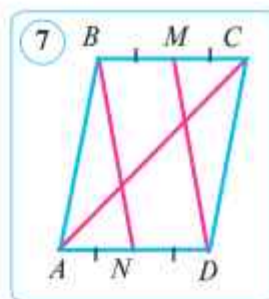
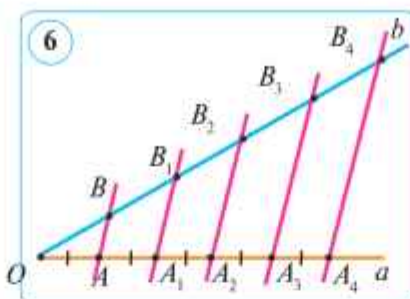
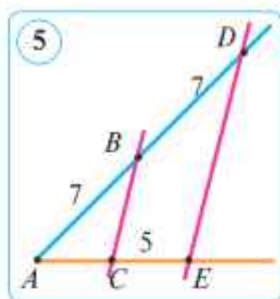
2) Anıqlamaǵa muwapıq, $AA_1B_1C_1$ tórtmúyeshlik — parallelogramm, sebebi $AA_1 \parallel C_1B_1$ (shártke muwapıq) hám $A_1B_1 \parallel AC_1$ (jasawǵa baylanıslı).

Demek, $AA_1 = C_1B_1 = 4,5 \text{ (cm)}$.

3) Anıqlamaǵa muwapıq $AA_2B_2C_2$ tórtmúyeshlik — parallelogramm, sebebi $AA_2 \parallel C_2B_2$ (shártke muwapıq) hám $A_2B_2 \parallel AC_2$ (jasawǵa muwapıq). Demek,

$$AA_2 = C_2B_2 = 2AA_1 = 2 \cdot 4,5 = 9 \text{ (cm)}.$$





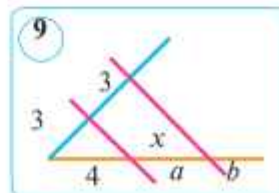
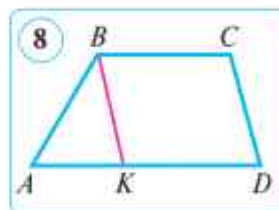
4) Anıqlamağa muwapıq, $AA_3B_1C_3$ tórtmüyeshlik — parallelogramm, sebebi $AA_3 \parallel C_3B_1$ (shártke muwapıq) hám $A_3B_1 \parallel AC_3$ (islewge muwapıq). Demek,

$$AA_3 = C_3B_1 = 3AA_1 = 3 \cdot 4,5 = 13,5 \text{ (cm)}.$$

Juwapı: $C_1B_3 = 4,5 \text{ cm}$, $C_2B_2 = 9 \text{ cm}$, $C_3B_1 = 13,5 \text{ cm}$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Fales teoremasın aytıń.
- 2) Fales teoreması tek müyesh ushın orınlıma?
- 3) Berilgen kesindi qalay etip n teń bólekke bólinedi?
2. (Ámeliy tapsırma.) Cirkul hám sıızgısh járdeminde berilgen AB kesindini: 1) eki; 2) úsh; 3) altı; 4) jeti teń bólekke bólin.
3. Berilgen: $\angle A$, $AB = BD = 7 \text{ cm}$, $BC \parallel DE$, $CE = 5 \text{ cm}$ (5-súwret).
Tabıw kerek: AC .
4. Berilgen: $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
 $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_4 = 8 \text{ cm}$ (6-súwret).
Tabıw kerek: OB_1 , OB_2 , OB_3 .
5. $ABCD$ parallelogrammda M noqat BC tárepiniń ortası, N noqat AD tárepleriniń ortası. BN hám MD tuwrı sıızqları parallelogrammnıń AC diagonalın teń úsh bólekke bóliniwın dálilleń (7-súwret).
6. $ABCD$ trapeciyada B tóbesi arqalı CD tárepke parallel BK tuwrı sıızq ótkizilgen (8-súwret).
1) $KBCD$ — parallelogramm ekenin dálilleń.
2) Eger $BC = 4 \text{ cm}$, $P_{ABK} = 11 \text{ cm}$ bolsa, trapeciyanıń perimetrin tabıń.
7. Cirkul hám sıızgısh járdeminde berilgen AB kesindisin: 1) tórtke, 2) bes teń bólekke bólin.
8. $a \parallel b$ ekeni belgili. 9-súwrette berilgen maǵlıwmatlardan paydalanıp, x tı tabıń.
9. Berilgen: $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
 $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_4 - B_3B_4 = 18 \text{ cm}$ (6-súwretke q.).
Tabıw kerek: OB_1 , OB_2 , OB_3 .



10-11. ÚSHMÚYESHLIKTİN ORTA SIZIĞINIŇ QÁSIYETI. TRAPECIYA ORTA SIZIĞINIŇ QÁSIYETI

1. Úshmúyeshliktiń orta sızıǵınıń qásiyeti.

Anıqlama. Úshmúyeshliktiń *orta sızıǵı* dep onıń eki tárepiniń ortaların tutastırırshı kesindige ayıladı.

ABC úshmúyeshliginde $AD = DB$ hám $CE = EB$ bolsın, bunday halda DE orta sızıq boladı (anıqlama boyınsha). DE orta sızıqqa qaraǵanda AC tárep *ultan* dep ataladı (1-súwret). Hárqanday úshmúyeshliktiń úsh orta sızıq boladı (2-súwret).

1-teorema.

Úshmúyeshliktiń orta sızıǵı onıń úshinshi tárepine parallel bolıp, uzınıǵı bolsa sol tárep uzınıǵınıń yarımına teń.

Berilgen: $\triangle ABC$ da: $AD = DB$, $CE = EB$, DE — orta sızıq (3-súwret).

Dáلیلew kerek: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \frac{1}{2} AC$.

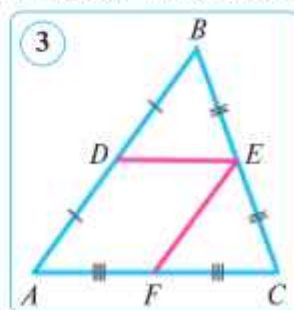
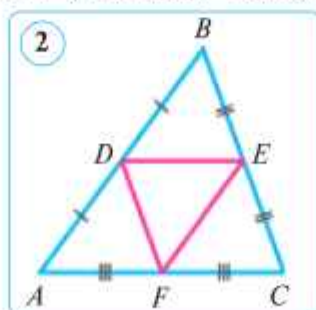
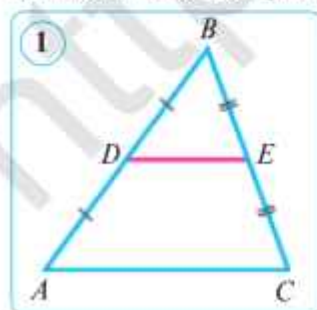
Dáلیل. 1) DE kesindi ABC úshmúyeshliktiń orta sızıǵı bolsın. D noqat arqalı AC tárepke parallel tuwrı sızıq ótkizemiz. Bul tuwrı sızıq Fales teoremasına muwapıq BC kesindini ortasınan kesip ótedi, yaǵnıy DE orta sızıqtı óz ishine aladı. Jasalıwına qaray, $DE \parallel AC$.

2) Endi EF orta sızıqtı ótkizemiz. 1-bántte dáلیلengenine qaray, ol AB tárepke parallel boladı: $EF \parallel AB$, bunnan $EF \parallel AD$. $ADEF$ tórtmúyeshliktiń qarama-qarsı tárepleri óz ara parallel bolǵanı ushın anıqlama boyınsha parallelogramm boladı. Parallelogrammnıń qásiyetine qaray $DE = AF$, Fales teoremasına muwapıq $AF = FC$ bolǵanı ushın, $DE = \frac{1}{2} AC$ bolsa.

Teorema dáلیلendi.

1-másele. Úshmúyeshliktiń perimetri p ǵa teń. Tóbeleri berilgen úshmúyeshliktiń tárepleriniń ortasında bolǵan úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

Sheshiliwi. Payda bolǵan úshmúyeshliktiń tárepleri berilgen úshmúyeshliktiń orta sızıqları boladı (2-súwret). Demek, olar sáykes tárepleriniń



yarımına teň. Sol sebepli izlenip atırğan perimetr berilgen úshmüyeshliktiń perimetriniń yarımına teň boladı:

$$P_{DEF} = DE + EF + FD = 0,5(AC + AB + BC) = 0,5 p.$$

Juwbabı: 0,5 p.

2. Trapeciya orta sızıǵınıń qásiyeti.

Añqlama. Trapeciyanıń qaptal tárepleriniń ortasın tutastırwshı kesindi **trapeciyanıń orta sızıǵı** delinedi.

Bizge $ABCD$ trapeciyası berilgen bolıp, onda AD hám BC — trapeciya ultanları; AB hám DC onıń qaptal tárepleri, E hám F noqatları qaptal tárepleriniń ortaları bolsın (4-súwret). Bunda EF — trapeciyanıń orta sızıǵı boladı.

2-teorema.

Trapeciyanıń orta sızıǵı onıń ultanına parallel hám onıń uzınlıǵı trapeciya ultanları uzınlıqları qosındısınnıń yarımına teň.

Dáلیل. EF — ultanları AD hám BC bolǵan $ABCD$ trapeciyanıń orta sızıǵı bolsın ($AD \parallel BC$). BF tuwrı sızıq ótkizimiz hám onıń AD tuwrı sızıq penen kesiliskeń noqatın P dep belgileymiz (5-súwret). Úshmüyeshlikler teńliginiń ekinshi belgisi boyınsha, BCF hám PDF úshmüyeshlikler teń ($CF = DF$ shárt boyınsha, $\angle 1 = \angle 2$ — vertikal müyeshler hám $\angle 3 = \angle 4$ — BC hám AD parallel tuwrı sızıqlar hám de CD kisilsiwshı payda etken ishki almasıwshı müyeshler bolǵanı ushın). Bul úshmüyeshliklerdiń teńliginen tárepler teń degen juwmaq shıǵadı: $BF = PF$ hám $BC = DP$. Demek, trapeciyanıń EF orta sızıǵı ABP úshmüyeshliktiń orta sızıǵı eken. Úshmüyeshliktiń orta sızıǵınıń qásiyetine muwapıq:

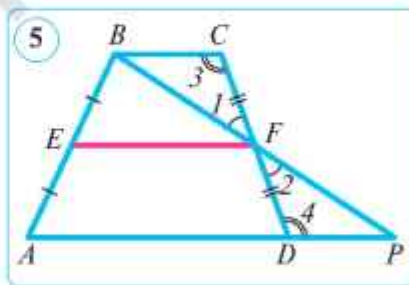
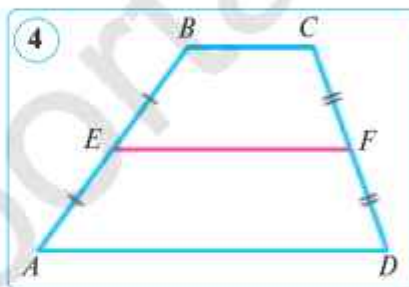
$$EF \parallel AP \text{ hám } EF = \frac{1}{2} AP$$

$AD \parallel BC$ bolǵanı sebepli, EF hár eki ultanǵa parallel boladı hám tómendegishe anlatıwǵa boladı:

$$EF = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} (AD + DP) = \frac{1}{2} (AD + BC)$$

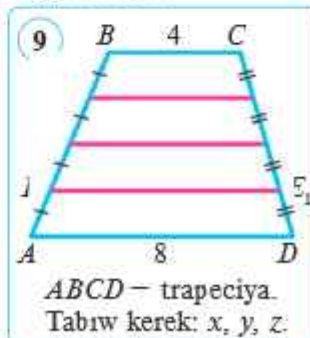
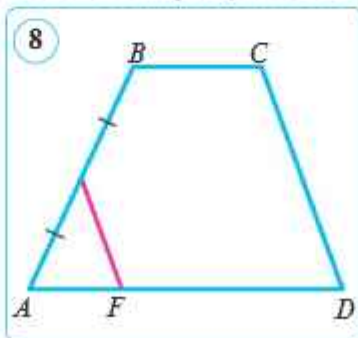
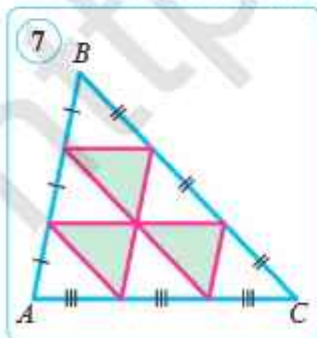
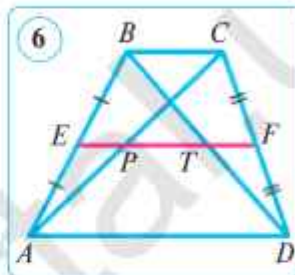
Demek, $EF \parallel AD \parallel BC$ hám $EF = \frac{1}{2} (AD + BC)$. Teorema dálillendi.

Nátiye. Trapeciyanıń qaptal tárepiniń ortasınan ótiwshı hám ultanlarına parallel tuwrı sızıq ekinshi qaptal tárepın teń ekige bóledi. Óz betińizshe dálilleń.



Soraw, mâsele hám tapsırmalar

- 1) Úshmüyeshliktiń orta sızığı dep nege ayıladı?
- 2) Úshmüyeshlikten neshe orta sızıq jasaw múmkin?
3. Úshmüyeshliktiń tárepleri 5 cm, 7 cm hám 11 cm ge teń. Tóbeleri usı úshmüyeshlik tárepleriniń ortalarında jatqan úshmüyeshlik táreplerin tabıń.
4. Trapecıyanıń diagonalları onıń orta sızığı EF ti E tóbesinen baslap 5 cm, 7 cm hám 4 cm li kesindilerge bóledi (6-súwret). Trapecıyanıń ultanların tabıń. Bos jerlerge sáykes juwaplardı jazıń.
5. ABC úshmüyeshlik tárepleriniń hárbiri úsh teń kesindige bólingen hám bóliniw noqatları kesindiler menen tutastırılğan. ABC úshmüyeshliktiń perimetri p ge teń bolsa, 7-súwrette payda bolğan figuranıń perimetrin tabıń.
6. Trapecıyanıń tiykarları: 1) 4,5 dm hám 8,2 dm; 2) 9 cm hám 21 cm ge teń. Onıń orta sızığınıń uzınlığı qansha?
7. $ABCD$ trapecıyada (8-súwret) EF kesindi CD tárepke parallel, E noqat bolsa AB nıń ortası. $EF=0,5CD$ ekenligin dálilleń.
8. 9-súwrettegi belgisiz uzınlıqlardı esaplań.
9. Trapecıyanıń diagonalları onıń orta sızığınıń hárbirin 6 cm li kesindilerge bóledi. Usı trapecıyanıń ultanların tabıń.
10. Teń qaptallı trapecıyada uzınlığı 6 cm ge teń diagonalınıń ultanı menen 60° lı múyesh payda etedi. Trapecıyanıń orta sızığın tabıń.
11. Trapecıyanıń úlken ultanı kishi ultanınan 3 ese úlken hám onıń orta sızığı 20 cm ge teń. Trapecıyanıń ultanların tabıń.
12. Trapecıyanıń perimetri 40 cm ge, parallel bolmağan tárepleriniń qosındısı bolsa 16 cm ge teń. Usı trapecıyanıń orta sızığın tabıń.



12. ÁMELİY JUMÍS HÁM QOLLANÍW

Izertlew ushın máseleler.

1-másele. Tárepler sanı n bolğan kópmúyeshlikti jasań hám onıń diagonalların ótkiziń, bunda: 1) $n=5$; 2) $n=7$; 3) $n=8$. Kópmúyeshliktiń hár qıylı diagonallarınń sanın (d_n) esaplaw formulasın pikir júrgizip tabıń.

Sheshiliwi. 1) $n=5$. A tóbesinen 2 AC hám AD , B tóbesinen 2 BD hám BE diagonalılar shıǵadı hám t.b. Bes tóbesiniń hár birinen 2 den diagonal shıǵadı (1-súwret).

Bunnan dóńes besmúyeshliktiń hár bir tóbesinen shıqqan diagonallarınń sanı tárepleri (tóbeleri) sanınan 3 ke kemligi, yaǵnıy $5-3=2$ ge teń ekeni kelip shıǵadı. Barlıq tóbelerinen shıqqan diagonalıları sanını tabıw ushın táreplerinen 2 ge kóbeytemiz:

$$5 \cdot (5-3) = 5 \cdot 2 = 10.$$

Bul kóbeymede hár bir diagonal eki márteden esapqa alınǵan. Biraq AC hám CA , BD hám DB hám t.b. bir diagonaldıń eki túrli belgileniwi, yaǵnıy olar jańa diagonalılar emes. Sol sebepli payda etilgen kóbeymeni 2 ge bólip, jámi hár qıylı diagonalılar sanın tabamız:

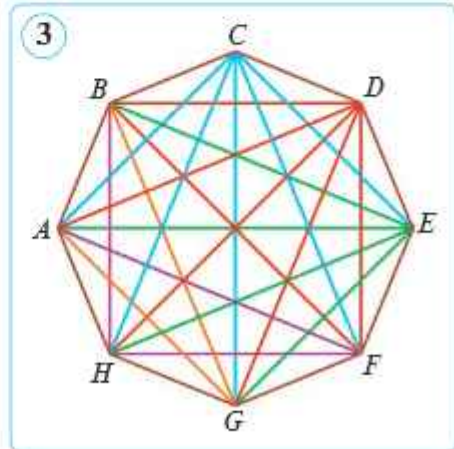
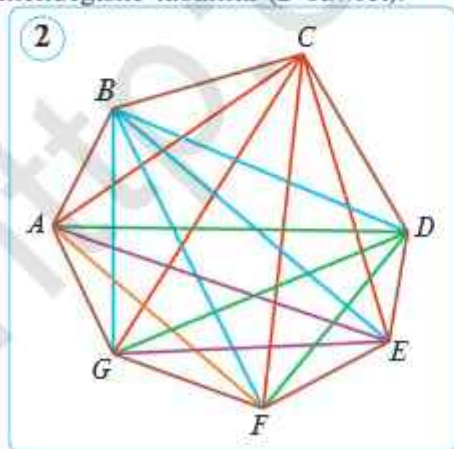
$$5 \cdot 2 : 2 = 5.$$

Solay etip, jámi hár túrli diagonalılar sanın tómendegishe tabamız:

$$d_5 = \frac{5 \cdot (5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2^1}{1 \cdot 2} = 5.$$

Juwabı: 5.

2) $n=7$. Dóńes jetimúyeshliktiń jámi hár túrli diagonalıları sanı joǵarıda kórsetip ótilgen másele sheshimine uqsap tabıladı. Islengen pikirlesiwlerde anıqlanǵan nızamshılıqqa tiykarlanıp, dóńes jetimúyeshliktiń diagonalıları sanın tómendegishe tabamız (2-súwret):



$$d_7 = \frac{7 \cdot (7-3)}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14.$$

Juwapı: 14.

3) $n=8$. Dónes segizmúyeshliktiń jámi hár qıylı diagonalları sanı joqarıda kórsetip ótilgen másele sheshimine uqsap tabıladı. Isengen pikir-lesiwlerde anıqlanǵan nızamshılıqqa tiykarlanıp, dónes segizmúyeshliktiń diagonallarınıń sanın tabamız (3-súwret):

$$d_8 = \frac{8 \cdot (8-3)}{2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 5}{2} = 20.$$

Juwapı: 20.

Demek, dónes kópmúyeshliktiń hár qıylı diagonalları sanı tómendegi formula boyınsha tabıladı:

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Eskertiw! Dónes n múyeshtiń bir tóbesinen shıqqan diagonalları onı $(n-2)$ úshmúyeshlikke bóledi.

2-másele. Kópmúyeshliktiń 25 diagonalı bolıwı múmkin be?

Sheshiw. n múyeshtiń jámi hár túrli diagonallarınıń sanı $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ ge teń. Demek, $\frac{n(n-3)}{2} = 25$. Ol jaǵdayda $n(n-3)=50$ yaqı $n(n-3)=2 \cdot 5 \cdot 5$. Bunnan kórinip tur, 50 dı bir-birinen 3 ge parqı bolatuǵın 2 ki natural sannıń kóbeymesi kórinisinde ańlatıp bolmaydı. Sonıń ushın jámi hár qıylı diagonallarınıń sanı 25 bolatuǵın kópmúyeshlik joq.

Juwapı: joq, bolmaydı.

3-másele. Matematika bólmesindegi súwretlerde súwretlengen úshmúyeshlik hám tórtmúyeshliklerdiń sanı 15. Olardıń tárepleri sanı 53. Súwretlerde neshe úshmúyeshlik hám neshe tórtmúyeshlik súwretlengen?

Sheshiliwi. Tórtmúyeshliktiń tárepleriniń sanı natural sannıń qálegen máni-sinde tórtke kóbeyedi, yaǵnıy jup san boladı. Úshmúyeshlikler sanı taq san bolǵanda ǵana, qosındı taq boladı.

Másele shártine muwapıq teńleme dúzemiz: $3x+4y=53$.

Tómende múmkin bolǵan jaǵdaylardı kórip shıǵamız. Teńlemeдеgi belgi-sizler ornına tiyisli mánislerin qoyıp, onı qanaatlandırıwshı sheshimdi tabamız.

1-jaǵday. $x=1$ hám $y=14$ bolsın. Ol jaǵdayda $3 \cdot 1 + 4 \cdot 14 = 53$, yaǵnıy $59 \neq 53$.

2-jaǵday. $x=3$, $y=13$; $3 \cdot 3 + 4 \cdot 12 = 53$, yaǵnıy $57 \neq 53$.

3-jaǵday. $x=5$, $y=10$; $3 \cdot 5 + 4 \cdot 10 = 53$, yaǵnıy $55 \neq 53$.

4-jaǵday. $x=7$, $y=8$; $3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 53$, yaǵnıy $53 = 53$.

4-jaǵday másele shártin qanaatlandırdı, sol sebepli basqa jaǵdaylar qaralmaydı.

Juwapı: 7 úshmúyeshlik, 8 tórtmúyeshlik

Bekkemlew ushın qosımsha shınıǵıwlar.

1. Dónes kópmúyeshliktiń bir tóbesinen shıqqan diagonallarınıń sanı 13. Usı kópmúyeshliktiń tárepleriniń sanı qansha? Barlıq diagonallarınıń sanı-she?
2. Diagonallarınıń sanı: 1) tárepleri sanına teń; 2) tárepleriniń sanına az bolǵan; 2) tárepleriniń sanınan artıq bolǵan kópmúyeshlik bar ma?

ÁMELİY KOMPETENSIYANÍ RAWAJLANDIRIWSHÍ QOSIMSHA MATERIALLAR

DURIS KÓPMÜYESHLI PARKETLER

Siz, álbette, parket haqqında belgili bir túsinikke iyesiz. Kóbinese úyler, hár túrli imaratlar pollar tuwrı tórtmüyesh, kvadrat hám duris müyeshli parketler menen bezetiledi.

Matematikalıq kóz qarastan qaraǵanda, parket bul tegislikti geometriyalıq figuralar menen bir-birine tıǵız hám olardı kesispeytuǵın etip jaylastırıw. Dáslep tuwrı kópmüyeshlikler — kvadrat, tórtmüyeshlik hám altımüyeshlik parketlerdi kórip shıǵamız. Birdey kvadratlardan dúzilgen ketekli dápterińiz eń ápi-wayı parketlerge mısál boladı. 1-súwrette duris úsh-müyeshliklerden; 2-súwrette kvadrat penen duris altımüyeshlikten; 3-súwrette bolsa duris altımüyeshlikler, kvadratlar hám teń tárepli úshmüyeshliklerden; 4-súwrette tuwrı altımüyeshlikler hám úshmüyeshliklerden dúzilgen sulıw parketler súwretlengen.

Parket dep, tegislikti kópmüyeshlikler menen sonday qaplawǵa aytıladı, bunda qálegen eki kópmüyeshlik ulıwma tárepke yaki ulıwma tóbege iye boladı, yamasa ulıwma tóbelerge iye bolmaydı.

Eger parket tuwrı kópmüyeshliklerden quralsa hám hárbir tóbe átirapında kópmüyeshlikler birdey usılda jaylasqan bolsa, parket *duris* delinedi.

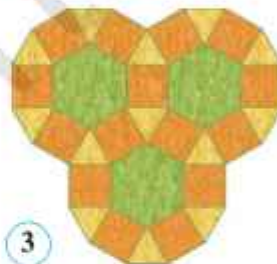
Teń tárepli úshmüyeshlikler, kvadratlar hám duris altımüyeshlikler tegislikti qaplawshı parketlerge mısál boladı. Bulardan basqa duris kópmüyeshlikler menen tegislikti qaplaw múmkin emesligin dálilleymiz. Bunıń ushın parkettiń bir tóbesinen shıǵıwshı kópmüyeshliklerdiń müyeshleri qosındısı 360° ǵa teń bolıwınan paydalanamız.



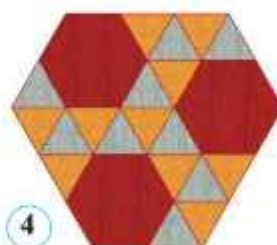
1



2



3

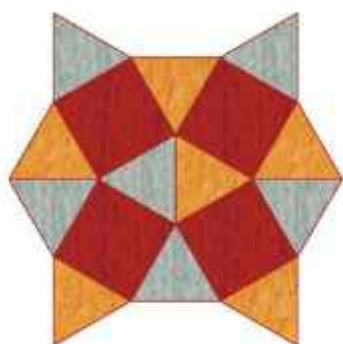


4





5



6

Bunıń ushın durıs besmüyeshlikti kórip shıǵamız. Bizge belgili, durıs besmüyeshliktiń ishki müyeshleri 108° ǵa teń. Parkettiń bir tóbesine úsh durıs besmüyeshlikti jaylastırıw múmkin emes, sebebi bul jaǵdayda müyeshler qosındısı $324^\circ < 360^\circ$ boladı. Eger tuwrı besmüyeshlikler sanı 4 ge teń yaki onnan úlken bolsa, ol jaǵdayda müyeshler qosındısı $432^\circ > 360^\circ$ boladı. Sonıń ushın durıs besmüyeshliklerden dúzilgen parketler joq. Tap usıǵan uqsas parkettiń bir tóbesine úsh yaki onnan kóp bolǵan tuwrı jetimüyeshli, durıs segiz müyeshli hám t.b. parket bólegin jaylastırıwǵa bolmaydı, sebebi olardıń hárbir müyeshi 120° dan úlken hám olardıń qosındısı 360° dan úlken boladı. Sol sebepli tuwrı jetimüyeshlik, durıs segizmüyeshlikten hám t.b. dúzilgen parketler joq.

5-súwrettegi durıs altımüyeshler, kvadratlar da teń tárepli úshmüyeshliklerden dúzilgen parketler 3-súwrettegi parketlerden jaylasıwı menen pariǵ etedi. 6-súwrette bolsa teń tárepli úshmüyeshlikler hám kvadratlardan dúzilgen parket súwretlengen.

Keltirilgen hár eki parkette de ulıwma nızamshılıq saqlaǵanın kóriwge boladı, yaǵnıy tár tóbesi átirapında jaylasqan figuralardıń ishki müyeshleri qosındısı 360° ǵa teńligi óz-ózinen anıq. Máselen, 5-súwrette $60^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 120^\circ = 360^\circ$, yaǵnıy bir tóbesi átirapında bir teń tárepli úshmüyeshlik, 2 kvadrat hám bir tuwrı altımüyeshlik jaylasqan; 6-súwrette bolsa bir tóbesi átirapında 3 teń tárepli úshmüyeshlik (hárbir ishki müyeshi 60° dan) hám 2 kvadrat (hárbir ishki müyeshi 90° dan) jaylasqan.

Tegislikti qaplawshı tuwrı parketlerdiń basqa túrlerin kestede keltiremiz. 5–6-súwretlerdegi parketlerdi jasadı kórin.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots = 360^\circ$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Úshmüyeshliklerden dúzilgen parket
60°	60°	120°	120°			Úshmüyeshlikler hám altımüyeshliklerden dúzilgen parket
60°	90°	90°	120°			Úshmüyeshlik, kvadratlar hám altımüyeshlikten dúzilgen parket
60°	150°	150°				Úshmüyeshlik hám onkimüyeshliklerden dúzilgen parket
90°	90°	90°	90°			Kvadratlardan dúzilgen parket
120°	120°	120°				Altımüyeshliklerden dúzilgen parket

13–14. 1-BAQLAW JUMISI. QÁTELER ÚSTINDE ISLEW

1. Tuvrı tórtmüyeshliktiń perimetri 40 cm ge, tárepleriniń qatnası 3:5 ge teń. Usı tuwrı tórtmüyeshliktiń táreplerin tabıń.
2. Parallelogramnıń táreplerinen biri ekinshisinen 4 ese úlken, perimetri bolsa 30 cm ge teń. Parallelogramnıń táreplerin tabıń.
3. Tuvrı müyeshli trapeciyanıń súyir müyeshi 45° ğa teń, kishi qaptal tárepi hám de kishi ultanı 16 cm ge teń. Trapeciyanıń úlken ultanın tabıń.
4. $ABCD$ trapetsiyada AD — úlken ultanı. B tóbesi arqalı CD tárepke parallel hám AD tárepti E noqat kesilsetuǵın tuwrı sızıq ótkizilgen, $BC=7$ cm, $AE=4$ cm. 1) Trapetsiyanıń orta sızıǵın; 2) eger ABE úshmüyeshliktiń perimetri 17 cm ge teń bolsa, usı trapeciyanıń perimetrin tabıń.

1-TEST

Ózińizdi sınap kóriń!

1. Dónes tórtmüyeshliktiń müyeshlerinen biri tuwrı müyesh, qalǵanlari bolsa óz ara 3:4:8 qatnasta. Tórtmüyeshliktiń kishi müyeshin tabıń.
A) 72° ; B) 54° ; D) 144° ; E) 90° .
2. Hár bir ishki müyeshi 156° bolǵan dónes kópmüyeshliktiń neshe tárepi bar?
A) 10 ta; B) 15 ta; D) 12 ta; E) 8 ta.
3. $ABCD$ parallelogramnıń perimetri 32 cm ge, BD diagonalı 9 cm ge teń. ABD úshmüyeshliktiń perimetrin tabıń.
A) 16 cm; B) 25 cm; D) 23 cm; E) 41 cm.
4. Eki müyeshinin qosındısı 100° qa teń bolǵan parallelogramnıń úlken müyeshin tabıń.
A) 120° ; B) 110° ; D) 150° ; E) 130° .
5. Rombınıń müyeshlerinen biri 150° qa teń, kishi diagonalı bolsa 4,5 cm. Rombınıń perimetrin tabıń.
A) 27 cm; B) 18 cm; D) 13 cm; E) 21,5 cm.
6. $ABCD$ trapeciyanıń orta sızıǵı onı orta sızıqları 13 cm hám 17 cm ge teń bolǵan eki trapeciyaǵa ajratadı. Trapeciyanıń úlken ultanın tabıń.
A) 19 cm; B) 21 cm; D) 18 cm; E) 30 cm.
7. Úshmüyeshliktiń orta sızıǵı onıń ultanına 5,4 cm ge qısqa. Úshmüyeshliktiń orta sızıǵı menen ultanınıń qosındısı tabıń.
A) 13,5 cm; B) 16,2 cm; D) 10,8 cm; E) 21,6 cm.
8. Teń qaptalı trapeciyanıń perimetri 36 cm, orta sızıǵı 10 cm. Qaptal tárepiniń uzınlıǵın tabıń.
A) 10 cm; B) 8 cm; D) 12 cm; E) 13 cm.
9. Trapeciyanıń orta sızıǵı 9 cm, ultanlarınan biri ekinshisinen 6 cm qısqa. Trapeciyanıń úlken ultanın tabıń.
A) 15 cm; B) 18 cm; D) 12 cm; E) 10 cm.



Köpmüeshlik — polygon
Tuwrı törtmüeshlik — rectangle
Romb — rhombus
Kvadrat — square
Biyiklik — height

Perimetr — perimeter
Diagonal — diagonal
Parallelogramm — parallelogramm
Trapeciya — trapezoid
Müesh — angle



Tariyxıy mağlıwmatlar



Abu Rayhan Beruniy
 (973–1048)

Ayyemgi Mısır hám Bobil matematikasında törtmüeshliklerdiń tómendegi túrleri ushırasadı: kvadratlar, tuwrı törtmüeshlikler, tuwrı müeshli hám teń qaptalı trapeciyalar.

Orta aziyalı alımlardan **Abu Rayhan Beruniy** da törtmüeshliklerdiń túrleri boyınsha köplegen izertlewler alıp barǵan. Ol óziniń «Astronomiya kórkem ónerinen baslanǵısh mağlıwmat beriwshi kitap» atamasındaǵı shıǵarmasında «Törtmüeshliklerdiń túri qanday» — dep soraw qoyadı hám oǵan tómendegishe juwap beredi:

«Olardan **birinshisi** — **kvadrat**, onıń barlıq tárepleri teń, barlıq müeshleri tuwrı, diagonalları, yaǵnıy qarama-qarsı müeshlerin (tóbelerin) tutastırıwshı sızıqları óz ara teń.

Ekinshisi — **tuwrı törtmüeshlik**, ol kvadratqa qaraǵanda uzınıraq, barlıq müeshleri tuwrı, tárepleri hár qıylı, olardıń tek qarama-qarsı tárepleri hám diagonalları teń.

Üshinshisi — **romb**, onıń tört tárepi teń, biraq diagonalları hár qıylı, müeshleri bolsa tuwrı müesh emes.

Törtinshisi — **romboid**, onıń diagonalları hár qıylı, tek eki qarama-qarsı tárepleri teń.

Bul figuralardan parqlı törtmüeshlikler **trapeciyalar** dep ataladı.

Kvadrat latinsha sóz, «tört müeshli» degen mánisti bildiredi. Beruniy arabsha «murabba» terminin qollanǵan, latinshaǵa usı termin awdarma etilgen. Tuwrı törtmüeshlik arab tilinde «mustatıl» — «sozılǵısh» degen mánini ańlatadı.

Romb termininiń payda bolıwı hár qıylı túsindiriledi. Ol grekshe sóz bolıp, romb «aylanıwshı zat», «dóńgelek» mánisin bildiredi. Geometriyada bul termin dóńgelek kesindiniń rombǵa uqsawı sebebinen kirgen. Arabshada «romb» ushın «muayyan» termini alınǵan.

Trapeciya grekshe sóz bolıp, awdarması «kishistol» (awqat jeytuǵın stol) ǵa tuwrı keledi, sóz mánisi — tört ayaqlı. Haqıyqattan, grekshe «trapedzion» — «kishi stol», «awqatlanıw stoli» degen mánisti ańlatadı.

Beruniy shıǵarmalarında «trapeciya» — «muxarrif» dep atalıp, bul termin grekshe «trapedzion» sóziniń arab tilindegi awdarması.

Parallelogramm grekshe sóz bolıp, tuwrı sızıqlı maydan degen mánisti bildiredi. «Parallelogramm» arab tilinde «mutavozı al-azla», yaǵnıy «ultanları parallel» degen mánisti bildiredi.



II BAP TUWRÍ MÜYESHLI ÚSHMÜYESHLIKTIN TÁREPLERI HÁM MÜYESHLERI ARASINDAGÍ QATNASLAR



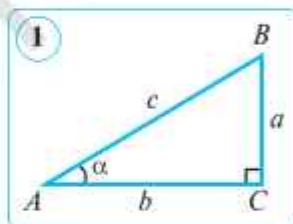
3-§.

SÚYIR MÜYESHTIN TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKSIYALARI

15. SÚYIR MÜYESHTIN SINUSÍ, KOSINUSÍ, TANGENSÍ HÁM KOTANGENSÍ

Trigonometriya matematikanin bólimi bolip, úshmüyeshliktin tárepleri menen müyeshler arasindagi baylanislar, trigonometriyalıq funkciyalardin qásiyetleri hám olardin arasindagi qatnasıqlardı úyrenedi. «**Trigonometriya**» sózi grekshe «**trigon**» — úshmüyeshlik hám «**metrezis**» — ólshew degen sózlerinen alingan bolip, ózbek tilinde «**úshmüyeshliklerdi ólshew**» degen mánisti bildiredi.

Trigonometriyanın tiykarǵı wazıypası *úshmüyeshliklerdi sheshiwden* ibarat. Úshmüyeshlik geometriyanın en áhmiyetli figuralarınan biri bolip esaplanadı. Sonın ushın úshmüyeshliklerdi úyreniwdi dawam ettiremiz. Bapnıń tiykarǵı maqseti úshmüyeshliklerdin qanday da bir elementin (tárepleri hám müyeshleri) basqa elementleri arqalı anlatıwdan ibarat.



Katetleri $BC=a$ hám $AC=b$, gipotenuzasi $AB=c$ hám súyir müyeshi $\angle A=\alpha$ bolǵan tuwrı müyeshli ($\angle C=90^\circ$) ABC úshmüyeshlik berilgen bolsın (1-súwret).

Usı úshmüyeshliktin jup-jubı menen tárepleri qatnasın alayıq:

$\frac{a}{c}$ — α müyesh tuwrısındaǵı katettin gipotenuzaǵa qatnası;

$\frac{b}{c}$ — α müyeshke jaylasqan katettin gipotenuzaǵa qatnası;

$\frac{a}{b}$ — α müyesh tuwrısındaǵı katettin usı müyeshke jaylasqan katetke qatnası;

$\frac{b}{a}$ — α müyeshke jaylasqan katettin usı müyesh tuwrısındaǵı katetke qatnası;

$\frac{c}{b}$ — gipotenuzanın α müyeshke jaylasqan katetke qatnası;

$\frac{c}{a}$ — gipotenuzanın α müyesh tuwrısındaǵı katetke qatnası.

Solay etip, jámi 6 qatnası payda ettik.

Tap usıǵan uqsas, ekinshi súyir múyesh (*B*) ushın da usı tártipte qatnaslardı dúziwimizge boladı.

Bul qatnaslardan dáslepki tórtewi *arnawlı atamalar* menen ataladı.

1-anıqlama. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik súyir múyeshiniń **sinusi** dep, usı múyesh tuwrısındaǵı katettiń gipotenuzaǵa qatnasına aytıladı.

α múyeshitiń sinus **$\sin \alpha$** sıyaqlı belgilenedi hám «*sinus alfa*» dep oqıladı. Anıqlamaǵa muwapıq:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

2-anıqlama. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik súyir múyeshiniń **kosinusi** dep, usı múyeshke jaylasqan katettiń gipotenuzaǵa qatnasına aytıladı.

α múyeshitiń kosinus **$\cos \alpha$** sıyaqlı belgilenedi hám «*kosinus alfa*» dep oqıladı. Anıqlamaǵa muwapıq:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

3-anıqlama. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik súyir múyeshiniń **tangensi** dep, usı múyesh tuwrısındaǵı katettiń múyeshke jaylasqan katetke qatnasına aytıladı.

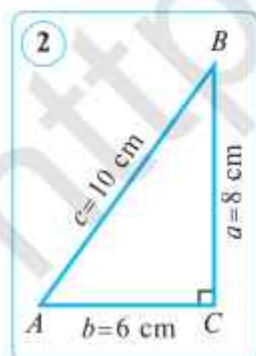
α múyeshitiń tangensi **$\operatorname{tg} \alpha$** sıyaqlı belgilenedi hám «*tangens alfa*» dep oqıladı. Anıqlamaǵa muwapıq:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

4-anıqlama. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik súyir múyeshiniń **katan-gensi** dep, usı múyeshke jaylasqan katettiń tuwrısındaǵı katetke qatnasına aytıladı.

α múyeshitiń katan-gensi **$\operatorname{ctg} \alpha$** sıyaqlı belgilenedi hám «*kotangens alfa*» dep oqıladı. Anıqlamaǵa muwapıq:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$



Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte katet gipotenuzadan kishi bolǵanı ushın **súyir múyeshitiń sinusi hám kosinusi birden kishi** boladı.

Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte katetler óz ara teń, biri ekinshisinen úlken yaki kishi bolıwı múmkin. Sonıń ushın tangens hám kotangenstiń mánisleri **1 den kishi, 1 ge teń** hám de **1 den úlken** bolıwı múmkin.

Másele. *ABC* úshmúyeshlikte $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 6$ cm (2-súwret). *A* múyeshitiń trigonometriyalıq funkciya ları mánislerin tabıń.

Sheshiliwi. Anıqlamağa muwapıq:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = 0,8; \quad \operatorname{tg} A = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3};$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = 0,6; \quad \operatorname{ctg} A = \frac{3}{4} = 0,75;$$

Juwbı: $\sin A = 0,8$; $\cos A = 0,6$; $\operatorname{tg} A = 1\frac{1}{3}$; $\operatorname{ctg} A = 0,75$.



Soraw, мәsele hám tapsırmalar

1. 1) Tuwrı müyeshli üshmüyeshlikniñ táreplerinen qanday qatnaslar dúziw mümkin hám olar qalay oqıladı?

2) Tuwrı müyeshli üshmüyeshlikte süyir müyeshtin sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensi dep nege aytıladı hám olar qanday belgilenedi?

2. Hár bir bólshek anıqlamağa muwapıq K müyeshtin qaysı trigonometriyalıq funkciyanı anıqladı (3-súwret):

a) $\frac{KN}{KM}$; b) $\frac{MN}{KN}$; d) $\frac{MN}{KM}$; e) $\frac{KN}{MN}$?

3. $\triangle ABC$ da $\angle C = 90^\circ$, $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm,

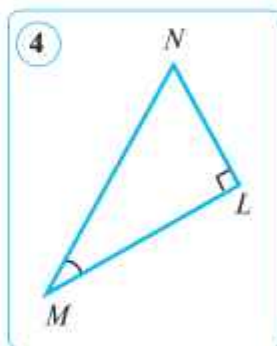
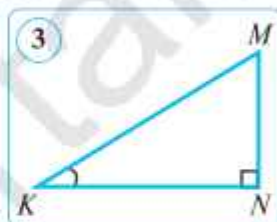
$AC = \sqrt{11}$ cm (1-súwretke q.). A hám B müyeshtin sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangenesleri mánislerin tabın.

4. Tuwrı müyeshli üshmüyeshlikte süyir müyeshtin sinusi: a) 0,98; b) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{5} - 2$ ge teń bolıwı mümkin be?

5. Tuwrı müyeshli MNL üshmüyeshlikte $\sin N = \frac{24}{25}$ ge teń. Bul teńlikten üshmüyeshlikniñ qaysı táreplerin tabıw mümkin (4-súwret)?

6. MNL üshmüyeshlikte $\angle L = 90^\circ$, $MN = 13$ cm, $ML = 12$ cm, $NL = 5$ cm (4-súwret). M müyeshtin sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensi mánislerin tabın.

7. ABC üshmüyeshlikte $\angle C = 90^\circ$, $AB = 17$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 15$ cm. A hám B müyeshtin sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensi mánislerin tabın.



Bilip qoyğan paydalı!



«Sinus» ataması latin tilinen alınğan bolıp, «iyiliw» degen mánisti ańlatadı.

«Tangens» ataması latin tilinen awdarǵanda «urımba» degen mánisti ańlatadı.

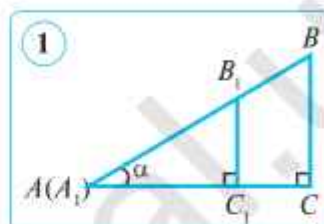
«Kosinus» hám «kotangens» atamaları «complementi sinus» hám «complementi tangens» — «tolıqtırıwshı sinus» hám «tolıqtırıwshı tangens» atamalarınan qısqartılǵan ibarat.

16. SÚYIR MÚYESHTIŇ SINUSI, KOSINUSI, TANGENSI HÁM KATANGENSI (DAWAMI)

1. Sýyir múyeshtiŇ trigonometriyalıq funkciyaları.

Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte sýyir múyeshtiŇ sinusi, kosinusi tangensi hám kotangensiniŇ mánisleri tek sýyir múyesh úlkenligine baylanıslı hám tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiŇ taŋlanıwına baylanıslı emesligin kórsetemiz.

Tuwrı múyeshli ABC hám $A_1B_1C_1$ Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte sýyir múyeshtiŇ sinusi, kosinusi tangensi hám kotangensiniŇ mánisleri tek sýyir múyesh úlkenligine baylanıslı hám tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiŇ taŋlanıwına baylanıslı emesligin kórsetemiz. Tuwrı múyeshli ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliklerde ($\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$) $\angle A = \angle A_1$ bolsın (1-súwret).



ProporciyanıŇ tiykargı qásiyeti boyınsha:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Bul teŋliklerdiŇ shep hám oŇ bólimleri sáykes túrde A hám A_1 sýyir múyeshlerdiŇ sinusları kosinusları, tangensleri hám kotangenslerine teŋ. Demek,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1, \quad \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \operatorname{tg} A_1,$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \operatorname{ctg} A_1.$$

Bulardan kórinip tur, A sýyir múyeshtiŇ sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensi úshmúyeshliginiŇ taŋlanıwına baylanıslı emes. Eger sýyir múyeshtiŇ mánisi ózgerse, bul qatnaslar, álbette, ózgeredi.

Solay etip, **sýyir múyeshtiŇ sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensi tek sýyir múyeshtiŇ úlkenligine baylanıslı.**

Sinus, kosinus, tangens hám kotangens **sýyir múyeshtiŇ trogonometriyalıq funkciyaları** delinedi.

Joqarıda keltirilgen teŋliklerden tómendegi ámiyetli juwmaqqa keliw múmkin:

eger A hám A_1 sýyir múyeshler ushın trogonometriyalıq funkciyalardan birewi teŋ bolsa, ol jaǵdayda A hám A_1 sýyir múyeshler teŋ ($\angle A = \angle A_1$) boladı.

Basqasha aytqanda, **trigonometriyalıq funkciyanıŇ hár bir mánisine bir sýyir múyesh sáykes keledi.**

2. Tangens hám kotangenstiŇ sinus hám kosinuslar arqalı aŋlatılıwı.

Sinus hám kosinus anıqlamalarınan tómendegi teŋlikler kelip shıǵadı (15-temaǵa.q.):

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{yaǵnıy} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad (1)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha, \text{ ya'niy } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (2)$$

Solay etip, súyir múyesh tangensi hám kotangensi sinus hám kosinus arqalı tómendegishe anıqlama beriledi:

*Súyir múyesh sinustıń kosinusqa qatnası usı múyeshtiń **tangensi** delinedi.
Súyir múyesh kosinustıń sinusqa qatnası usı múyeshtiń **kotangensi** delinedi.*

(1) hám (2) teńliklerdi aǵzama-aǵza kóbeytip, tómendegi teńlikti payda etemiz:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1. \quad (3)$$

Demek, α súyir múyesh tangensi hám kotangensiniń kóbeymesi 1 ge teń.

Bunnan, α súyir múyesh tangensi hám kotangensi óz ara kerı funkciyalar ekeni kelip shıǵadı.

Solay etip, biz α súyir múyesh ushın úsh jańa **teńlikti** keltirip shıǵardıq.

3. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tárepleri menen múyeshleri arasındaǵı qatnaslar.

Trigonometriyalıq funkciyalardıń anıqlamalarınan tómendegi qaǵıydalar kelip shıǵadı.

1-qaǵıyda. α múyesh tuwrısındaǵı katet gipotenuza menen α múyesh sinusınıń kóbeymesine teń:

$$a = c \sin \alpha.$$

2-qaǵıyda. α múyesh tuwrısındaǵı katet ekinshi katet penen α múyesh tangensiniń kóbeymesine teń:

$$a = b \operatorname{tg} \alpha.$$

3-qaǵıyda. α múyeshke jaylasqan katet gipotenuza menen α múyesh kosinusınıń kóbeymesine teń:

$$b = c \cos \alpha.$$

4-qaǵıyda. α múyeshke jaylasqan katet tuwrısındaǵı katettiń α múyesh tangensine qatnasına teń:

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

5-qaǵıyda. Gipotenuza α súyir múyesh tuwrısındaǵı katettiń α múyesh sinusına qatnasına teń:

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

6-qaǵıyda. Gipotenuza α súyir múyeshke jaylasqan katettiń α múyesh kosinusına qatnasına teń:

$$c = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

Másele. ABC úshmúyeshlikte C múyesh 90° ǵa teń. Eger:

1) $AB=18$ cm hám $\sin A = \frac{1}{3}$ bolsa, BC katetti; 2) $AC=15$ cm hám $\cos A = \frac{5}{6}$ bolsa, AB gipotenuzanı; 3) $BC=26$ cm hám $\operatorname{tg} A = \frac{13}{15}$ bolsa, AC katetti esaplañ.

Sheshiliwi. 1) 1-qağıydadan paydalanıp, BC katetti tabamız:

$$BC = AB \sin A = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6 \text{ (cm)}.$$

Juwapı: 6 cm.

2) 6-qağıydadan paydalanıp, AB gipotenuzanı tabamız:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = 15 : \frac{5}{6} = 15 \cdot \frac{6}{5} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ (cm)}.$$

Juwapı: 18 cm.

3) 4-qağıydadan paydalanıp, AC katetti tabamız:

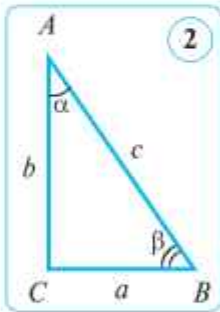
$$AC = \frac{BC}{\operatorname{tg} A} = 26 : \frac{13}{15} = 26 \cdot \frac{15}{13} = 2 \cdot 15 = 30 \text{ (cm)}.$$

Juwapı: 30 cm.

Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Súyir múyeshtiń tironometriyalıq funkciyaları dep nege aytıladı?
- 2) Súyir múyesh sinusi, kosinusi tangensi hám kotangensiniń muǵdarları nege baylanıslı?
2. Tómenдегі берілген теңлікlerden qaysı biri tuwrı ekenin anıqlań (2-súwret). Juwapıńızdı tiykarlań.

a) $c = \frac{a}{\sin \alpha}$; b) $b = c \sin \alpha$; d) $c = a \operatorname{tg} \alpha$; e) $a = \frac{b}{\operatorname{ctg} \alpha}$.


3. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik súyir múyeshtiń tangensi $\sqrt{2}$; 0,001 hám 100 ge teń bolıwı múmkin be? Juwapın dálilleń.
4. ABC úshmúyeshlikte C múyesh 90° ǵa teń. Eger:
 - 1) $BC=10$ cm hám $\operatorname{tg} A = \frac{5}{8}$ bolsa, AC katetti;
 - 2) $BC=8$ cm hám $\sin A = 0,16$ bolsa, AB gipotenuzanı esaplañ.
5. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tárepleri menen múyeshleri arasındaǵı 6 qatnastı β múyesh ushın keltirip shıǵarıń (2-súwret).
6. ABC úshmúyeshlikte C múyesh 90° ǵa teń. Eger $BC=4$ cm hám $\sin A = 0,25$ bolsa, AB gipotenuzanı esaplañ.
7. ABC úshmúyeshlikte C múyesh 90° ǵa teń. Eger $AC=2$ cm hám $\cos A = 0,4$ bolsa, AB gipotenuzanı esaplañ.
8. ABC úshmúyeshlikte C múyesh 90° ǵa teń. Eger $BC=14$ cm hám $\cos B = \frac{7}{25}$ bolsa, AB gipotenuzanı esaplañ.

17. PIFAGOR TEOREMASI HÂM ONIN HÂR QIYLI DÂLILLERI

1. Pifagor teoremasi — geometriyanin ahamiyetli teoremlaridan biri.

Ulli grek matematigi **Pifagor**ning omiri haqqida ma'lumatlar juda az. Pifagor maktabi figuralardi ajratish ham to'g'ri siziqli figuralardi birdey figuralarga almashtirishning geometriyalik usulidan teoremlardi dalillev ham mas'eleler sheshiwde paydalanani grek matematiklarining shigarmalaridan bizga belgili. Asirese, geometriyaning pan sipatinda payda bolivina Pifagor ham onin maktabi ulken ules qosqan. Tomende keltiriletugin teorema Pifagor atı menen jurgiziledi.

Teorema.

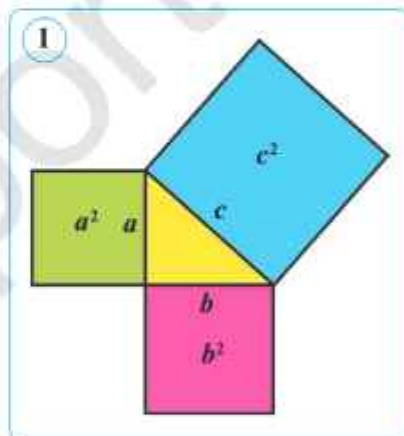
(Pifagor teoremasi.) *Tuwrı müyeshli üshmüyeshlik gipotenuzasının kvadrati onin katetleri kvadratlarinin qosindısına ten.*

Bul teorema tuwrı müyeshli üshmüyeshlikke tiyisli bolip, üshmüyeshlik tareplerine ten kvadratlarinin maydanlari arasindagi qatnasti korsetedi. Pifagor bul teoremaning teoriyalik dalilini keltirgen. Pifagor teoremasi menen aniqlangan geometriyalik qatnasqlarining jeke jagdaylari Pifagordan aldın da har turli xalqlarga belgili bolgan, biraq teoremaning bul uliwma korinisi Pifagor maktabine tiyisli.

Katetleri a ham b , gipotenuzası c bolgan tuwrı müyeshli ABC üshmüyeshlik berilgen bolsin, bunday halda Pifagor teoremasi

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad (1)$$

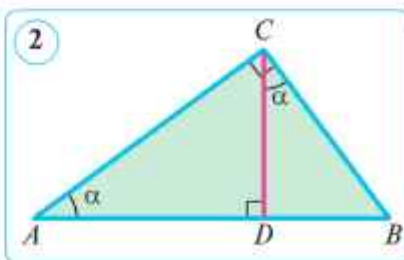
formula menen anlatiladi, bunda a^2 , b^2 , c^2 — tarepleri a , b , c bolgan kvadrlarning maydanlarina ten. Sonin ushin bul tenlik *tarepi gipotenuzining uzunligina ten kvadrattin maydani tarepleri katetlerge ten kvadrlarning maydanlari qosindısına ten* ekenin korsetedi (1-súwret).



2. Pifagor teoremasının süyir müyesh kosinusi arqali dalilleniwi.

Dalil. ABC — berilgen tuwrı müyeshli üshmüyeshlik bolip, onin C müyeshi tuwrı müyesh bolsin. Tuwrı müyeshli üshmüyeshlikning C tobesinen CD biyklikni ot-kizemiz (2-súwret).

Tuwrı müyeshli ACD ham ABC üshmüyeshliklerden müyesh kosinusining aniq-laması boyınsha:



$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Bunnan $AD \cdot AB = AC^2$ (2).

Tuwrı müyeshli BCD hám ABC úshmüyeshliklerden müyesh kosinusınıń anıqlaması boyınsha:

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Bunnan $BD \cdot AB = BC^2$ (3).

Payda bolǵan (2) hám (3) teńliklerdi aǵzama-aǵza qosıp hám $AD + DB = AB$ ekenin esapqa alıp,

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + BD \cdot AB = AB(AD + BD) \cdot AB = AB^2$$

teńlikti payda etemiz. Teorema dálillendi.

Tuwrı müyeshli ABC ($\angle C = 90^\circ$) úshmüyeshliktiń táreplerin sıykes túrde $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ dep belgilep, Pifagor formulasın payda etemiz:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

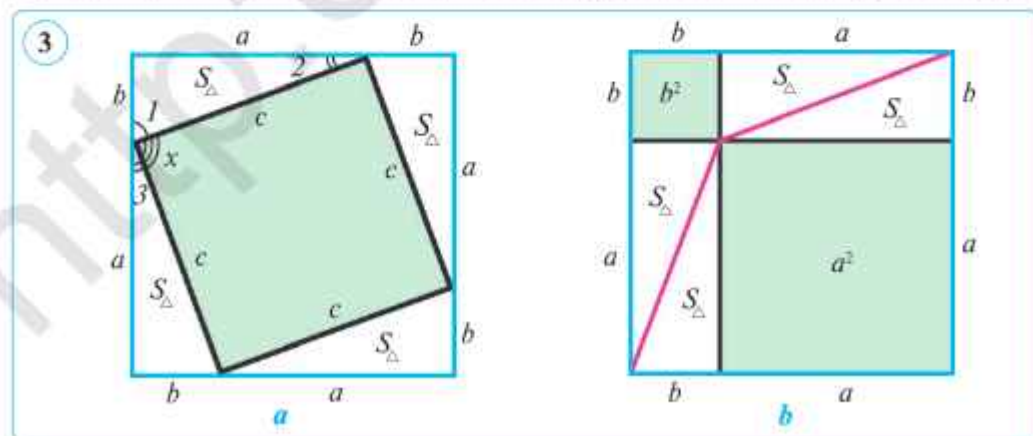
3. Pifagor teoremasınıń maydanlar arqalı dálilleniwi.

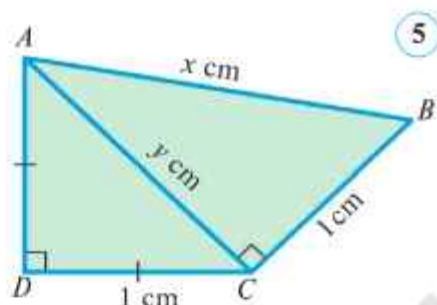
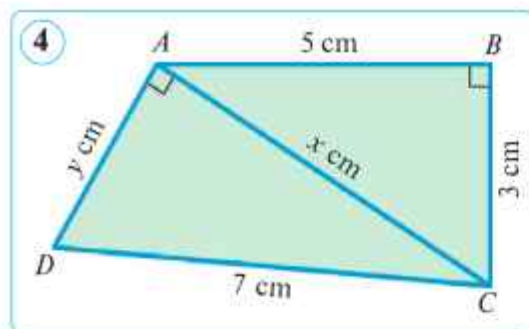
Katetleri a , b hám gipotenuzası c ǵa teń bolǵan tuwrı müyeshli úshmyeshlik berilgen. Bul úshmüyeshlik ushın Pifagor teoreması orınlı ekenin dálilleybiz, yaǵnıy

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ekenin kórsetemiz.

Dánil. Tárepi $(a+b)$ ǵa teń bolǵan eki kvadrat sızamız. Olardı 3-súwrette kórsetilgen usıl menen tuwrı müyeshli úshmüyeshlikler, kvadratlar hám tuwrı tórtmüyeshliklerge ajratıp shıǵamız. 3-*a* súwrettegi tórtmüyeshlik tárepi c bolǵan kvadrat ekenin kórsetemiz. Haqıyqatan da, dáslep, bul tórtmüyeshlik romb, sebebi onıń tárepi katetleri a hám b bolǵan tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń gipotenuzası c ǵa teń. Endi sızılmaǵa x müyesh tuwrı ekenin kórsetemiz. Haqıyqattan, $\angle x + \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 3 = \angle 2$ (sebebi úshmüyeshlikler teń) hám $\angle 1 = 90^\circ - \angle 2$ ekenin itibarǵa alıp tabamız: $\angle x = 90^\circ$. Sonıń ushın bul tórtmüyeshlik müyeshlerinen biri 90° ǵa teń bolǵan





romb, ya'niy kvadrat boladi. Qaralip atirgan eki ulken kvadratta birdey, ya'niy olardn maydanlari ten. Sonday-aq, birinshi kvadrat maydani $4S_{\triangle ABC} + c^2$ qa ten, ekinshi kvadrattn maydani $4S_{\triangle ADC} + a^2 + b^2$ qa ten (3-b suvret). Sonin ushin

$$4S_{\triangle ABC} + c^2 = 4S_{\triangle ADC} + a^2 + b^2.$$

Demek, $c^2 = a^2 + b^2$. Teorema dalillendi

Masele. 4-suvrettegi belgisiz kesindiler uzunligin tabin.

Sheshiliwi. 1) $\triangle ABC$ — tuvri muyeshli, $\angle B = 90^\circ$ (4-suvret). Pifagor teoremasina muvapiq: $x^2 = 5^2 + 3^2$, bunnan $x^2 = 34 \Rightarrow x = \sqrt{34}$ ($x > 0$).

2) $\triangle ACD$ — tuvri muyeshli, $\angle CAD = 90^\circ$ (4-suvret). Pifagor teoremasina muvapiq, $y^2 + (\sqrt{34})^2 = 7^2$, bunnan $y^2 + 34 = 49$, $y^2 = 15$, $y = \sqrt{15}$ ($y > 0$).

Juwab: $x = \sqrt{34}$ cm; $y = \sqrt{15}$ cm.



Soraw, masele ham tapsirmalar

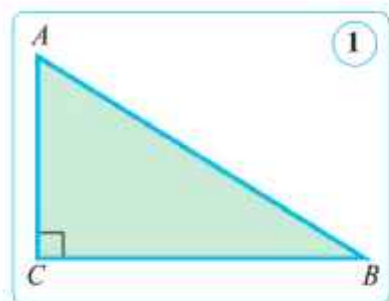
- 1) Pifagor teoremasinin qanday aflatpasin bilesiz?
- 2) «Gipotenuzanin kvadrati», «katettin kvadrati» degen atamalardi qalay tusinesiz?
- 3) Tuvri muyeshli ushmuyeshliknin a ham b katetleri berilgen. Eger: 1) $a=5$, $b=12$; 2) $a=4\sqrt{2}$, $b=7$; 3) $a=0,7$, $b=2,4$; 4) $a=5$, $b=6$; 5) $a=\frac{5}{13}$, $b=\frac{12}{13}$ bolsa, c gipotenuzanı tabin.
- 4) Rombınnıń diagonalı: 1) 12 cm ham 16 cm; 2) 14 cm ham 48 cm. Rombınnıń perimetrin tabin.
- 5) Belgisiz kesindiler uzunligin tabin (5-suvret).
- 6) Tuvri to'rtmuyeshliknin tarepleri: 1) 2,4 dm ham 7 cm; 2) 50 cm ham 12 dm; 3) 8 dm ham 1,5 m. Onıń diagonalın tabin.

18. PIFAGOR TEOREMASINA KERI TEOREMA

1. Pifagor teoremasının bazı natiyeleri.

Pifagor teoremasının natiyeleri ishinen birewiniń dálilin keltirip ótemiz.

Natiyje. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte katetlerden qálegenı gipotenuzadan kishi.



Dálil. $\triangle ABC$ — tuwrımúyeshli, $\angle C = 90^\circ$ (1-súwret). Úshmúyeshliktiń qálegen kateti gipotenuzasınan kishi bolıwın dálilleybiz.

Haqıyqattan da, Pifagor teoreması boyınsha katetler ushın:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \text{ hám } BC^2 = AB^2 - AC^2$$

qatnasıqlar orınlı. Bunnan

$$AC^2 < AB^2 \text{ hám } BC^2 < AB^2$$

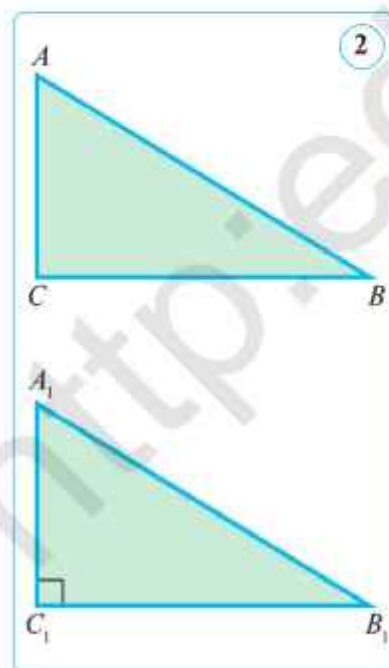
ekenı kelip shıǵadı.

Demek, $AC < AB$ hám $BC < AB$. Natiyje dálillendi.

2. Pifagor teoremasına keri teorema.

Teorema.

Eger úshmúyeshlike táreplerinen biriniń kvadratı onıń qalǵan eki tárepiniń kvadratlarınıń qosındısına teń bolsa, onday halda úshmúyeshlik tuwrı múyeshli boladı.



Dálil. $\triangle ABC$ da $AB^2 = AC^2 + BC^2$ bolsın. $\angle C = 90^\circ$ ekenin dálilleybiz (2-súwret).

C_1 múyeshi tuwrı bolǵan tuwrı múyeshli $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikti kórip shıǵamız, onda $A_1C_1 = AC$ hám $B_1C_1 = BC$. Pifagor teoreması boyınsha, $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$ hám demek,

$$A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2.$$

Teorema shárti boyınsha,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2, \text{ demek, } A_1B_1^2 = AB^2.$$

Bunnan $A_1B_1 = AB$ ekenligin tabamz. Soıay etip, $\triangle ABC$ hám $\triangle A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikler úsh tárepi teń. Sonıń ushın $\angle C = \angle C_1$, yaǵnıy $\triangle ABC$ úshmúyeshliktiń C tóbesindegi múyeshi tuwrı múyesh ekenı kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

1-másele. Eger úshmúyeshliktiń tárepleri: 1) $a=5$, $b=11$, $c=12$; 2) $a=\sqrt{85}$, $b=7$, $c=6$ bolsa, ol tuwrı múyeshli úshmúyeshlik bola ma?

Sheshiliwi. 1) Eki kishi tárepiniń kvadratlarınıń qosındısı esaplaymız:

$$5^2 + 11^2 = 25 + 121 = 146.$$

Endi úlken tárepiniń kvadratın esaplaymız: $12^2 = 144$.

Alınğan nátiyjelerdi salıstırsaq, $a^2 + b^2 \neq c^2$ qatnas kelip shıǵadı. Demek, úshmúyeshlik tuwrı múyeshli emes eken.

Juwabı: $a=5$, $b=11$ hám $c=12$ bolǵanda úshmúyeshlik tuwrı múyeshli bolmaydı.

2) Eki kishi tárepiniń kvadratlarınıń qosındısı esaplaymız:

$$7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85.$$

Endi úlken tárepiniń kvadratın esaplaymız: $(\sqrt{85})^2 = 85$.

Demek, $85 = 85$ — orınlı. Nátiyjede $b^2 + c^2 = a^2$ qa iye bolamız. Bunnan úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshli ekeni kelip shıǵadı.

Juwabı: $a = \sqrt{85}$, $b=7$ hám $c=6$ bolǵanda úshmúyeshlik tuwrı múyeshli boladı.

3. Perpendikulyar hám qıyalıq.

l — tuwrı sıziq hám onda jatpaytuǵın A noqat berilgen bolsın. Anıqlama boyınsha, A dan l tuwrı sıziqqa eń qısqa aralıq A dan l ge túsirilgen AC **perpendikulyardıń** uzınlıǵına teń boladı (3-súwret).

Haqıyqatında da, hárbir $B \in l$ ushın ACB tuwrı múyeshli, bunda AC hám CB — katetler, AB bolsa gipotenuza boladı. CB kesindi AB qıyalıqtıń l tuwrı sıziqtaǵı **proekciyası** delinedi.

Pifagor teoreması AB — qıya, AC — perpendikulyar hám CB — proekciyası uzınlıqlardı tómendegi teńlik penen baylanıstıradı:

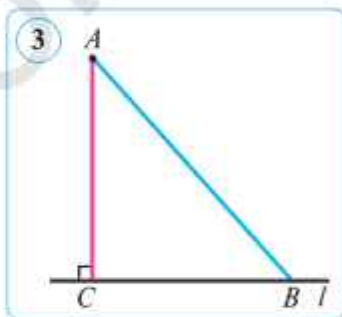
$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

Sonıń ushın, hár dayım $AB > AC$ yaki $AB > BC$, basqasha aytqanda, bir noqattan ótkerilgen perpendikulyar hám qıyalıqtıń proekciyası qıyadan kishi boladı.

Sonday-aq, teń qıyalıqlar teń proekciyalargá iye; eki qıyadan qaysı biriniń proekciyası úlken bolsa, sol qıyalıq úlken boladı.

2-másele. Diagonalları 10 sm hám 24 sm ge teń bolǵan rombınıń tárepiniń tabını.

Sheshiliwi. Rombınıń diagonalları perpendikulyar hám kesilisiw noqtasında teń ekige bóliniwinen paydalanamız. Bunda rombınıń tárepiniń katetleri 5 sm hám 12 sm ge teń bolǵan tuwrı múyeshli gipotenuzası boladı.



$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169, \text{ ya'ni } 169 = 13^2.$$

Demek, rombın tárepi 13 cm ge teń eken.

Juwapı: 13 cm.



Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Pifagor teoremasına keri teoremanı dálilleri.
- 2) Qıyalyqtıń tuwrı sıızıqtaǵı proekciyası degende neni túsinesiz?
- 3) Katet gipotenuzadan kishi ekeni tuwrı ma?
2. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tárepleri tómendegi sanlarga teń bolıwı múmkin be: 1) 11 cm, 7 cm, 17 cm; 2) 3 cm, 1,6 cm, 3,4 cm; 3) 3 cm, 4 cm, 6 cm; 4) 2 cm, $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{11}$ cm? Juwapınızdı tiykarlań.

3. $\triangle ABC$ da $AB=13$ cm, $BC=20$ cm, BD —úshmúyeshliktiń biyikligi hám ol 12 cm ge teń. AB , BC táreplerdiń AC tárepke túsirilgen proekciyaları uzınlıqları hám AC tárepi uzınlıǵın tabıń (4-súwret). Bos jerlerge saykes juwaplardı jazıń.

Sheshiliwi. $\triangle ABD$ hám $\triangle BCD$ —tuwrı múyeshli sebebi $\angle ADB = \angle BDC = 90^\circ$. AB hám BC táreplerdiń AC táreptegi proekciyaları saykes túrde AD hám CD kesindilerden ibarat.

$\triangle ABD$ dan Pifagor teoremasına baylanıslı:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2 \text{ (cm)}.$$

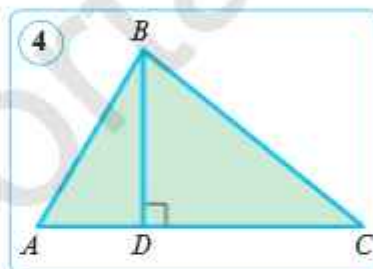
Bunnan $AD = 5$ cm.

$\triangle BCD$ dan Pifagor teoremasına muwapıq:

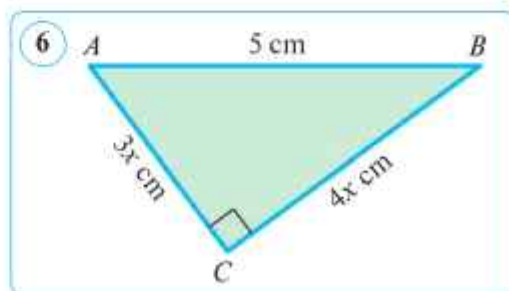
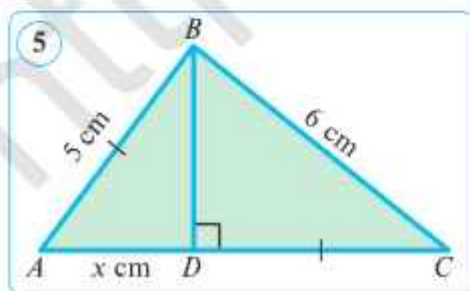
$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 = 16^2 \text{ (cm)}. \text{ Bunnan } CD = 16 \text{ cm}.$$

$$AC = AD + DC = 5 + 16 = 21 \text{ (cm)}.$$

Juwapı: $AD = 5$ cm, $CD = 16$ cm, $AC = 21$ cm.



4. Belgisiz uzınlıqlardı tabıń (5–6-súwretler).
5. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń eki tárepi 6 cm hám 8 cm ge teń. Úshinshi táreptiń uzınlıǵın tabıń. Másele neshe sheshimge iye?
6. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tárepleri tómendegi sanlarga teń: 1) $a=12$, $b=35$, $c=37$; 2) $a=11$, $b=20$, $c=25$; 3) $a=18$, $b=24$, $c=30$; 4) $a=9$, $b=12$, $c=15$?



19. PIFAGOR TEOREMASININ BAZI BIR QOLLANILARl

Üsh tärepine qaray üshmüyeshliktiñ biyikligin tabıw.

Tärepleri a , b hám c bolğan ABC üshmüyeshlikti kórip shıǵamız. Onıñ C tóbesinen AB tärepine túsirilgen $CD=h_c$ biyiklikti tabamız (1- a súwret).

Biyiklik ultanı D noqatınıñ AB kesindige salıstırǵanda qalay jaylasqanına qaray üsh jaǵdayda boladı. Usı jaǵdaylardı kórip shıǵamız.

1-jaǵday. D noqat AB kesindiniñ ishki noqatı bolsın. Eger $AD=x$ dep belgilep alsaq, bunday jaǵdayda $DB=c-x$ boladı (1- a súwret). $\triangle ADC$ hám $\triangle BDC$ lar tuwrı müyeshli, Pifagor teoremasına baylanışlı:

$$h_c^2 = b^2 - x^2 \quad (1) \quad \text{hám} \quad h_c^2 = a^2 - (c-x)^2 \quad (2).$$

Bunnan tómendegi teñlikti payda etemiz: $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$.

Bunnan

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \text{ yaǵnıy } b^2 = a^2 - c^2 + 2cx.$$

Aqırǵı teñlemeden x tı tabamız:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{yamasa} \quad x^2 = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

x^2 diñ bul mánisin (1) teñlikke qoyıp, tómendegige iye bolamız:

$$h_c^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

Bul bólshektiñ alımın kóbeytiwshilerge ajıratıp, tómendegini payda etemiz:

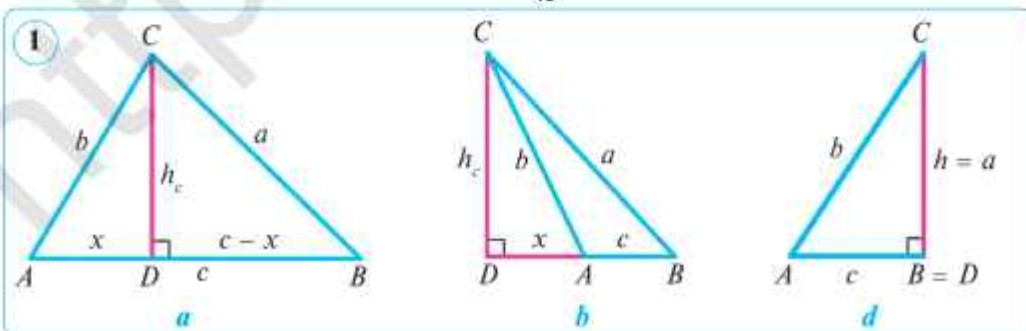
$$h_c^2 = \frac{(2bc - (b^2 + c^2 - a^2))(2bc + (b^2 + c^2 - a^2))}{4c^2} = \frac{(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)}{4c^2}.$$

Payda bolğan ańlatpanıñ alımındaǵı eki kóbeytiwshini tómendegishe figura ózgertemiz:

$$2bc - b^2 - c^2 + a^2 = a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c) \quad \text{hám}$$

$$2bc + b^2 + c^2 - a^2 = (b+c)^2 - a^2 = (b+c-a)(b+c+a).$$

Bul jaǵdayda:
$$h_c^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2}.$$



bunnan

$$h_c = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}$$

Üshmüyeshliktiñ yarım perimetrin p dep belgileymiz, ol jaǵdayda:

$$a+b+c=2p,$$

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b),$$

$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c),$$

$$b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a).$$

Payda bolǵan ańlatpanı koren astındaǵı ańlatpanıñ ornına qoyıp, tómendegi nátiyjeni payda etemiz:

$$\begin{aligned} h_c &= \frac{1}{2c} \sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c} \cdot 4 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

Tap sonday-aq,

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{hám} \quad h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

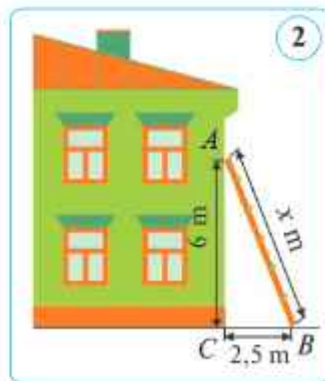
2-jaǵday. D noqat AB kesindiniñ dawamında jatadı, yaǵnıy $DB=c+x$. Bunda belgilengen nátiyje payda boladı (1- b súwret).

3-jaǵday. D noqat B noqat penen, yaǵnıy $h=a$ —biyiklik katet penen betpe-bet túsedi. Bul jaǵdayda üshmüyeshlik tuwrı müyeshli boladı (1- d súwret).



Soraw, müsele hám tapsırmalar

1. Tárepleri: 1) 10 cm, 10 cm, 12 cm; 2) 17 dm, 17 dm, 16 dm; 3) 4 dm, 13 dm, 15 dm bolǵan üshmüyeshliktiñ biyikligin tabıń.
2. Biyikligi h ǵa teń bolǵan teń tárepli üshmüyeshliktiñ tárepin tabıń. Eger: 1) $h=6$ cm; 2) $h=1,5$ dm bolsa, tárepin tabıń.
3. Üshmüyeshliktiñ tárepleri: 1) $a=5$ cm, $b=7$ cm, $c=6$ cm; 2) $a=13$ dm, $b=14$ dm, $c=15$ dm; 3) $a=24$ cm, $b=25$ cm, $c=7$ cm ge teń. Üshmüyeshliktiñ úlken tárepin túsirilgen biyikligin tabıń.
4. Eger teń tárepli üshmüyeshliktiñ tárepi 12 cm ge teń bolsa, onıñ biyikligin tabıń.
5. Üshmüyeshliktiñ tárepleri $a=8$ cm, $b=10$ cm hám $c=12$ cm. Onıñ eń úlken hám eń kishi biyikligin tabıń.
6. Üshmüyeshliktiñ tárepleri: 1) 17, 65, 80; 2) 8, 6, 4; 3) 24, 25, 7; 4) 30, 34, 16; 5) 15, 17, 8 ge teń bolsa, onıñ eń kishi tárepine túsirilgen biyikligin tabıń.
7. Üshmüyeshliktiñ tárepleri $a=16$ cm, $b=12$ cm hám $c=8$ cm. Üshmüyeshliktiñ kishi biyikligin tabıń.
8. Zañgi uzınlıǵın tabıń (2-súwret).



20–21. TIYKARGÍ TRIGONOMETRIYALÍQ BİRDEYLIK HÁM ONÍŇ NÁTIYJELERI

1. Tiykargı trigonometriyalıq birdeylikler.

Bir müyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları arasındaǵı baylanıstı ańlatıwshı teńliklerdi keltirip shıǵaramız.

Teorema.

Hárqanday súyir α müyesh ushın

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

teńlik orınlı.

Dátil. A tóbesindegi müyeshi α ǵa teń bolǵan tuwrı müyeshli qálegen ABC úshmüyeshlikti alamız (1-súwret).

Pifagor teoreması boyınsha: $BC^2 + AC^2 = AB^2$.

Teńliktiń eki bólimin AB^2 qa bólip, tómendegi

teńlikke iye bolamız: $\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1$.

Biraq $\frac{BC}{AB} = \sin \alpha$, $\frac{AC}{AB} = \cos \alpha$. Solay etip,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (1)$$

(1) teńlik **trigonometriyanıń tiykargı birdeyligi** delinedi

Bizge bir müyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları arasındaǵı baylanıstı ańlatıwshı úsh teńlik belgili:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (3), \quad \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad (4).$$

(1) teńliktiń hár eki bólimin $\cos^2 \alpha$ ǵa bólip, (5) teńlikti payda etemiz:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{yamasa} \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \quad (5)$$

(1) teńliktiń hár eki bólimin $\sin^2 \alpha$ ǵa bólip, (6) teńlikti payda etemiz:

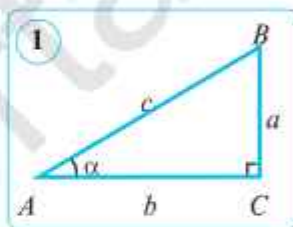
$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{yamasa} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad (6)$$

2. Tiykargı trigonometriyalıq teńlikten kelip shıǵatuǵın nátiyjeler.

Hárqanday α súyir müyesh ushın tómendegi teńlikler orınlı:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}. \quad (7)$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \quad (8)$$



1-másele. Eger $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ bolsa, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ hám $\operatorname{ctg} \alpha$ nıń mánislerin esaplań.

Sheshiliwi. 1) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 3) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Juwabı: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2-másele. Ańlatpanı ápiwayılastırın: 1) $1 + \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$; 2) $1 - \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$.

Sheshiliwi. 1) Qosılwrshılardı ulıwma bóliwshige keltiremiz, soń alıwrshınıń uqsas aǵzalardı iqshtamlap hám (6) birdeylikten paydalanıp tabamız:

$$1 + \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Juwabı: $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

2) Ayırmanı ulıwma bóliwshige keltiremiz, soń bóliniwshidegi uqsas aǵzalardı iqshtamlap hám (5) teńlikten paydalanıp tabamız:

$$1 - \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - 1)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Juwabı: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$.

3-másele. Ańlatpanı ápiwayılastırın: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Sheshiliwi. Eki san qosındısıńıń kvadratı formulası hám tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylikten paydalanıp, ańlatpanı ápiwayılastıramız:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1.$$

Juwabı: 1.

Soraw, másele hám tapstırmalar

1. 1) Qaysı teńlik trigonometriyanıń tiykarǵı áhmiyeti delinedi?

 2) Trigonometriyalıq birdeylikte ańlatırshı teńliklerden qaysılardıń bilesiz?

3) Tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylikten qanday nátiyjeler kelip shıǵadı?

2. Eger: 1) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ bolsa, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ hám $\operatorname{ctg} \alpha$ ni; 2) $\cos \alpha = 0,8$ bolsa, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ hám $\operatorname{ctg} \alpha$ ni; 3) $\cos \alpha = 0,28$ bolsa, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ hám $\operatorname{ctg} \alpha$ ni tabıń.

3. Eger $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{17}$ bolsa, $\sin \alpha$ hám $\cos \alpha$ ni tabıń.

Úlgi. Eger $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ bolsa, $\sin \alpha$ hám $\cos \alpha$ ni tabıń.

Sheshiliwi. $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$. Demek, $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$.

Bunnan $\cos \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Endi $\sin \alpha$ ni esaplaymiz: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$.

Juwbı: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

4. Añlatpanı ápiwayılastırın: 1) $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; 2) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$; 3) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

Úlgi. Añlatpanı ápiwayılastırın: $1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.

Sheshiliwi. Ápiwayılastırıw ushın qosılıwshılardı toparlap, payda etemiz:

$$1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - \underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha.$$

Juwbı: $2 \sin^2 \alpha$.

5. Añlatpanı ápiwayılastırın: 1) $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha}$; 2) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}$; 3) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$.
6. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiñ katetleri 7 cm hám 24 cm ge teñ. Úshmüyeshliktiñ eñ kishi müyeshi trigonometriyalıq funkciyalarınñ mánislerin tabın.
7. Eger: 1) $\operatorname{tg} A = 2$; 2) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ bolsa, A súyir müyesh trigonometriyalıq funkciyalarınñ mánislerin tabın.
8. Añlatpanı ápiwayılastırın: $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

Sheshiliwi.

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha) = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha) = 1 + \operatorname{tg}^6 \alpha.$$

Ápiwayılastırıwda (5) teñlikten hám $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ formula-dan paydalanıladı.

Juwbı: $1 + \operatorname{tg}^6 \alpha$.

9. Eger: 1) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ bolsa, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ hám $\operatorname{ctg} \alpha$ ni; 2) $\cos \alpha = 0,6$ bolsa, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ hám $\operatorname{ctg} \alpha$ ni tabın.
10. Eger müyeshtiñ sinusi hám kosinusi sáykes türde tómendegi sanlarğa teñ bolıwı yaqı bolmaytuğının anıqlań: 1) $\frac{1}{2}$ hám $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$ hám $\frac{3}{4}$.
11. Bir müyeshtiñ tangens hám kotangensi sáykes türde tómendegi sanlarğa teñ bolıwı yaqı bolmaytuğının anıqlań:
- 1) 0,4 hám 2,5; 2) 1,1 hám 0,9; 3) $\sqrt{5} + 2$ hám $\sqrt{5} - 2$.
12. Añlatpanı ápiwayılastırın: 1) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos^2 \alpha$; 2) $\cos \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha$.
13. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiñ katetleri 8 cm hám 15 cm ge teñ. Úshmüyeshliktiñ eñ kishi müyeshi trigonometriyalıq funkciyaları mánislerin tabın.
14. Añlatpanı ápiwayılastırın: 1) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$; 2) $\sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha$.

22. TOLİQTIRIWSHİ MÜYESHTİŇ TRIGONOMETRIYALIQ FUNKCIYALARİ USHIN FORMULALAR

Tolıqtırırwshı müyeshtin trigonometriyalıq funkciyaları ushın formulalar.

Tolıqtırırwshı müyeshtler dep, qosındısı 90° qa teń bolğan eki müyeshtke ayıladı. Tuwrı müyeshtli úshmüyeshtliktiń súyir müyeshtleri tolıqtırırwshı müyeshtlerge mısál boladı, sebebi olardıń qosındısı 90° qa teń.

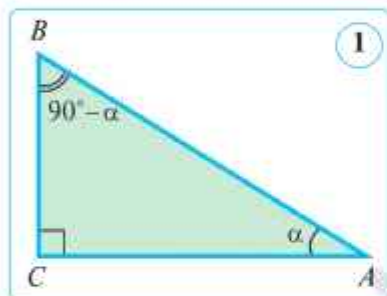
Biz kórip shıqqan trigonometriyalıq birdeylik bir müyeshtin hár qıylı trigonometriyalıq funkciyaları arasındaǵı ózara qatnaslardı ornatarıǵa imkan beredi. Endi tuwrı müyeshtli úshmüyeshtliktiń eki súyir müyeshti arasındaǵı qatnaslardı kórip shıǵamız.

Teorema.

Hárqanday tuwrı müyeshtli úshmüyeshtliktiń súyir müyeshti α ushın

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

teńlikler orınlı.



Dáلیل. Gipotenuzası AB bolğan tuwrı müyeshtli ABC úshmüyeshtlikti qaraymız (1-súwret). Eger, $\angle A = \alpha$ bolsa, ol jaǵdayda $\angle B = 90^\circ - \alpha$ ǵa teń boladı. Úshmüyeshtliktiń súyir müyeshtlerin sinus hám kosinusler arqalı ańlatamız. Ańqlama boyınsha

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \quad \text{hám} \quad \cos A = \frac{AC}{AB},$$

$$\text{yaǵnıy } \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} \quad \text{hám} \quad \cos B = \frac{BC}{AB}, \quad \text{yaǵnıy } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Teorema dálillendi.

Dálillengen teoremadan usı nátiyje kelip shıǵadı

Nátiyje. Hárqanday súyir α müyesht ushın

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

teńlemeler orınlı.

Bul teńliklerdin durıshlıǵın joqarıda keltirilip shıǵarılğan formulalardan paydalanıp dálillewdi ózińizge tapsıramız.

A hám B súyir müyeshtler — bir-birin 90° toltırırwshı müyeshtler. Sonı itibarǵa alıp, joqarıda keltirip shıǵarılğan formulalar tómendegishe oqladı:

- berilgen müyeshtin sinusı toltırırwshı müyeshtin kosinisma teń;
- berilgen müyeshtin kosinusı toltırırwshı müyeshtin sinusına teń;
- müyeshtin tangensi toltırırwshı müyeshtin kotangensine teń;
- müyeshtin tangensi toltırırwshı müyeshtin kotangensine teń.

1-másele. A hám B múyeshler — tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri bolsın. Eger $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ bolsa, $\operatorname{tg} A$ nı tabıń.

Sheshiliwi. $\sin B = \cos A$, demek, $\cos A = \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Endi A múyeshitiń sinusı tiykarǵı trigonometriyalıq teńliktiń nátiyjesinen paydalanıp tabamız:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Múyeshitiń tangensin sinus hám kosinis arqalı tabamız:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = 2.$$

Juwapı: 2.

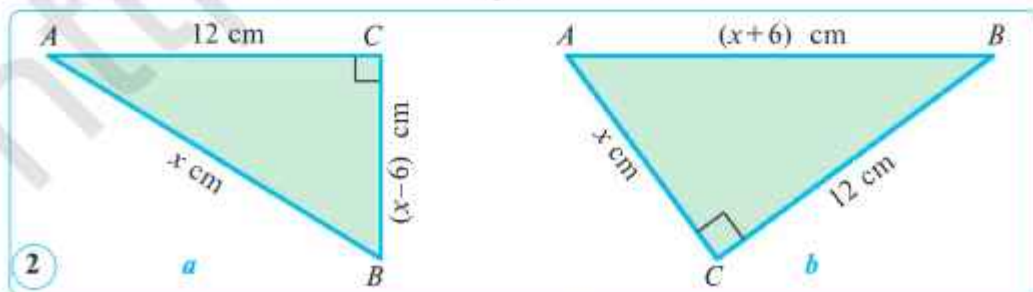
2-másele. Eger $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 20^\circ$ bolsa, súyir x múyeshiti tabıń.

Sheshiliwi $\operatorname{tg} 20^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 20^\circ) = \operatorname{ctg} 70^\circ$, demek, $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 70^\circ$.

Bunnan $x = 70^\circ$. *Juwapı:* $x = 70^\circ$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

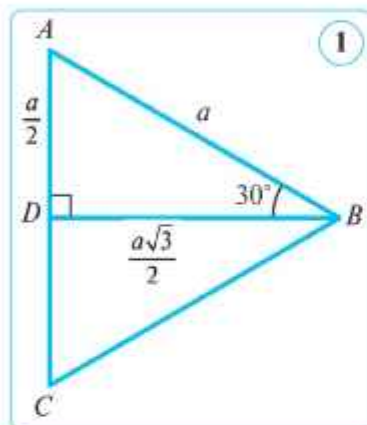
- 1) Toltırıwshı múyeshler dep nege ayıladı?
- 2) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń eki súyir múyeshi arasındǵı qanday qatnaslardı bilesiz? Sáykes formulalardı jazıń.
2. Eger: 1) $\sin x = \cos 40^\circ$; 2) $\cos x = \sin 76^\circ$; 3) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 56^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 16^\circ$ bolsa, súyir x múyeshiti tabıń.
3. A hám B múyeshler — tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri. Eger $\cos A = 0,6$ bolsa, $\sin B$ hám $\cos B$ lerdı tabıń.
4. Bir múyeshitiń sinusı hám kosinusı sáykes túrde tómendegi sanlarga teń bolıwı yaqı bolmaytuǵının anıqlań: 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ hám $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) 0,3 hám 0,4.
5. A hám B múyeshler — tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri. Eger $\sin B = 0,5$ bolsa, $\cos A$ hám $\operatorname{tg} A$ lardı tabıń.
6. Belgisiz uzınlıqlardı tabıń (2-súwret) hám de súyir múyeshler sinusı, kosinusı, tangensin hám kotangensin esaplań.
7. Eger $\sin(90^\circ - \alpha) = 0,8$ bolsa, $\cos \alpha$ hám $\sin \alpha$ lerdı tabıń.
8. Anlatpanı ápiwayılastırıń: 1) $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$; 2) $\operatorname{ctg}^2 \alpha (2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1)$.



23. 30°, 45°, 60° MÜYESHLERDİN SINUSI, KOSINUSI, TANGENSI HÂM KOTANGENSIN ESAPLAW

1. 30° li müyeshlerniñ sinusi, kosinusi, tangensi hâam kotangensin esaplaw.

Teñ tärepli ABC üshmüyeshlikti alamız (1-súwret). Oğan BD biyiklik ótkizsek, ol bissektrisa hâam mediana wazıypasın atqaradı. Sol sebepli ABD üshmüyeshlik B tóbesindegi súyir müyeshi 30° teñ bolğan tuwrı müyeshli ($\angle D=90^\circ$) üshmüyeshlik bolıp tabıladı. Teñ tärepli üshmüyeshliktiñ tärepi a ğa teñ bolsın. Ol jaǵdayda $AD = \frac{a}{2}$. Pifagor teoremasına muwapıq:



$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Anıqlamalar boyınsha:

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

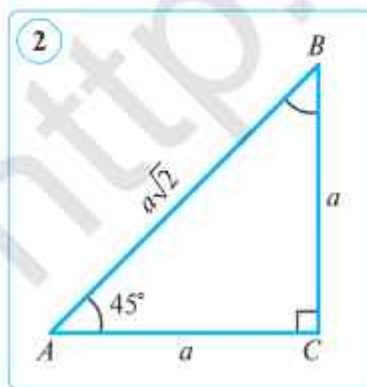
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

Toltırıwshı müyeshtiñ trigonometriyalıq funkciyaları ushın shıǵarılğan formulalar járdeminde **60° li** müyeshtiñ trigonometriyalıq funkciyaları mánislerin tabamız:

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



2. 45° li müyeshlerniñ sinusi, kosinusi, tangensi hâam kotangensin esaplaw.

45° müyeshtiñ trigonometriyalıq funkciyaların esaplaw ushın teñ qaptalı tuwrı müyeshli ABC üshmüyeshlikti qaraymız (2-súwret). Bul üshmüyeshlikte $AC=BC=a$, $\angle A=\angle B=45^\circ$ bolsın. Pifagor teoremasına muwapıq, gipotenuza $AB = a\sqrt{2}$ teñ boladı. Súyir müyeshtiñ trigonometriyalıq funkciyalarınıñ anıqlaması boyınsha:

$$\sin 45^\circ = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1;$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

30° , 45° h m 60° l  m yeshlerdin sinusi, kosinusi, tangensi h m kotangensinin m nislerinin kestesin d zemi.

S yir m yeshli trigonometriyal q funksiylaridin mánisleri, sanlardin kvadrlar  h m olardan sh gar l an arifmetikali  kvadrat koren arnawlı kesterden biliw h m kalkulyatordan paydalan p esaplawlarga boladı.

Másele. Tuwr  m yeshli ABC  shm yeshlikti  AB gipotenuzas  $4\sqrt{3}$ cm h m $\angle A = 60^\circ$ (3-súwret). Us   shm yeshlikti  katetlerin tab n.

Sheshiliwi. m yesh tuwr sında  katet gipotenuza menen α m yesh sinusinin kóbeymesine te  ekenligi bizge belgili. Sol boyınsha:

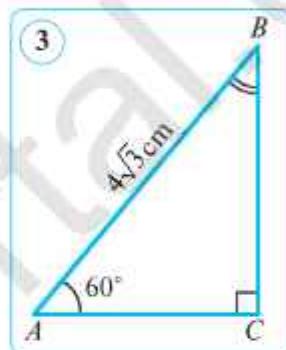
$$BC = AB \sin A = 4\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (cm)}.$$

Bizge belgili, α m yeshke jaylasqan katet gipotenuza menen α m yesh kosinusinin kóbeymesine te . Sol boyınsha:

$$AC = AB \cos A = 4\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Juwr : $BC = 6$ cm, $AC = 2\sqrt{3}$ cm.

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



Soraw, m sele h m taps rmalar

- Esapla : 1) $\sin 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$; 2) $\cos 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ$; 3) $\sqrt{2} \sin 45^\circ - \cos 60^\circ$.
- Te  t repli  shm yeshlik s z n h m on n biyikligin  tkizi . Kerekli  lshewlerdi orınlap, 30° h m 60° l  m yeshlerdin trigonometriyal q funksiyların esapla , n tiyjelerin kesterlerdegi menen salıstı n.
- $ABCD$ parallelogramının BD diagonal  AB t repke perpendikulyar h m 16 cm ge te . Eger BDA m yesh 30°  a te  bolsa, parallelogramının t replerin tab n.
- Tuwr  m yeshli  shm yeshlikti  bir kateti $6\sqrt{3}$ ge, bul katet tuwr sında  m yesh 60° qa te . Gipotenuza h m ekinshi katetti tab n.
- A latpan   piwayılastı n: 1) $\operatorname{tg}^2 \alpha (2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1)$; 2) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha$.
- Tuwr  m yeshli  shm yeshlikti  bir kateti 2 ge, bul katet tuwr sında  m yesh 60° qa te . Gipotenuza h m ekinshi katetti tab n.
- A latpan   piwayılastı n: $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.
- Esapla : 1) $\cos 45^\circ \sin 45^\circ$; 2) $\sin 60^\circ \operatorname{tg} 30^\circ$; 3) $\sqrt{3} \cos 30^\circ - \cos 60^\circ$.

24. TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKSIYALARDÍŇ MÁNISLERI KESTESI

Sabaqlıq aqırında pútkil sanlı graduslar menen 1° dan 89° qa shekem barlıq múyeshler ushın sáykes kelgen trigonometriyalıq funkciyalar (on mınnan birge shekem anıqlıqta) kórsetilgen keste keltirilgen. Bul keste tómendegishe dúzilgen: shep tárepten birinshi baǵanaǵa (joqarısında «graduslar» dep jazılǵanına) graduslardıń sanları $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 45^\circ$ qa shekem jaylastırılǵan; ekinshi baǵanaǵa (joqarısında «sinuslar» jazılǵanına) sinuslardıń birinshi baǵanada kórsetilgen múyeshlerge sáykes keliwshi mánisleri qoyılǵan; 3-baǵanaǵa tangensler, sońına kotangensler hám onnan keyin kosinuslar mánisleri jaylastırılǵan. Sońǵı 6-baǵanaǵa jańa graduslar sanları: yaǵnıy $90^\circ, 89^\circ, 88^\circ, \dots$ hám basqa, 45° qa shekem jaylastırılǵan. Bul (orındı únemlew ushın) tómendegige tiykarlanıp etilgen: toltırıwshı múyeshstıń trigonometriyalıq funkciyaları ushın formalarǵa muwapıq $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ hám basqa, demek, $\sin 1^\circ = \cos 89^\circ$, $\sin 2^\circ = \cos 88^\circ$ hám basqa. Sonıń ushın joqarıdaǵı «sinuslar» jazılǵan baǵanadıń astına «kosinuslar»; joqarıdaǵı «tangensler» jazılǵan (shepten 3-) baǵanadıń astına «kotangensler» jazılǵan hám usıǵan uqsas. Solay etip, 1° dan 45° qa shekem múyeshler ushın graduslar sanların shep táreptegi birinshi baǵanadan hám trigonometriyalıq funkciyalardıń atların joqarıdan oqıw kerek, 45° dan 89° qa shekem bolǵan múyeshler ushın bolsa graduslardıń sanların oń táreptegi sońǵı baǵanadan hám funkciyalardıń atların baǵanalaradıń astınan oqıw kerek kerek. Máselen, kesteden tangenstıń mánisin tabamız: $\operatorname{tg} 35^\circ = 0,7002$.

1. Berilgen múyeshke baylanışlı trigonometriyalıq funkciyaların tabıw.

1-másele. $\sin 20^\circ$ tı tabıń.

Sheshiliwi. $1^\circ \leq 20^\circ \leq 45^\circ$ bolǵanı ushın sheptegi «graduslar» sózi jazılǵan baǵanadan 20 nı alamız hám oǵan sáykes qatardıń ekinshisi (« $\sin\alpha$ ») baǵanasınan 0,3420 mánisti tabamız. Mine usı san $\sin 20^\circ$ dıń mánisi bolıp tabıladı. Demek, $\sin 20^\circ \approx 0,3420$.

2-másele. $\sin 75^\circ$ tı tabıń.

Sheshiliwi. $45^\circ \leq 75^\circ \leq 89^\circ$ bolǵanı ushın ondaǵı «graduslar» sózi jazılǵan baǵanadan 75 ti alamız hám oǵan sáykes qatardıń tórtinshi (tómendegi « $\sin\alpha$ ») baǵanasınan 0,9659 mánisti tabamız. Mine usı san $\sin 75^\circ$ dıń mánisi bolıp tabıladı.

Demek, $\sin 75^\circ \approx 0,9659$.

3-másele. $\cos 33^\circ$ tı tabıń.

Sheshiliwi. $1^\circ \leq 33^\circ \leq 45^\circ$ bolǵanı ushın sheptegi «graduslar» sózi jazılǵan baǵanadan 33 ti alamız hám oǵan sáykes (« $\cos\alpha$ ») baǵanasınan 0,8387 mánisti tabamız. Mine usı san $\cos 33^\circ$ dıń mánisi bolıp tabıladı.

Demek, $\cos 33^\circ \approx 0,8387$.

Tangens hám katangenslerdiń mánisleri sáykes türde sinus hám kosinuslardıń mánisleri kesteden qalay tabılǵan bolsa, solay tabıladı.

2. Múyeshti trigonometriyalıq funkciyaǵa muwapıq tabıw.

4-másele. Eger $\sin x = 0,9848$ bolsa, x súyir múyeshti tabıń.

Sheshiliwi. Sinusi 0,9848 teń bolǵan múyeshti tabıw ushın trigonometriyalıq funkciyalardıń mánisleri jaylasqan birinshi yaki tórtinshi baǵanadan bul mánisti izleybiz. Bul mánis tórtinshi ($\sin \alpha$) baǵanada bar, yaǵnıy izlenip atırǵan múyesh 45° dan úlken hám 89° dan kishi. Bul qatarǵa sáykes ondaǵı «graduslar» baǵanasınan 80 sanın tabamız. Demek, izlenip atırǵan múyesh shama menen 80° qa teń. *Juwabı:* $x \approx 80^\circ$.

5-másele. Eger $\operatorname{tg} x = 0,7002$ bolsa, x súyir múyeshti tabıń.

Sheshiliwi. Tangensi 0,7002 ge teń bolǵan múyeshti tabıq ushın trigonometriyalıq funkciyalardıń mánisleri jaylasqan ekinshi yaki úшінshi baǵanadan bul mánisti izleybiz. Usı mánis ekinshi ($\operatorname{tg} \alpha$) baǵanada bar, yaǵnıy izlenip atırǵan múyesh 45° dan kishi. Bul qatarǵa sáykes sheptegi «graduslar» baǵanasınan 35 sanın tabamız. Demek, izlenip atırǵan múyesh 35° qa teń. *Juwabı:* $x \approx 35^\circ$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Kesteden paydalanıp tabıń:

- | | | | | |
|---------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| a) 1) $\sin 3^\circ$; | 2) $\sin 21^\circ$; | 3) $\sin 50^\circ$; | 4) $\sin 82^\circ$; | 5) $\sin 40^\circ$; |
| b) 1) $\cos 9^\circ$; | 2) $\cos 12^\circ$; | 3) $\cos 41^\circ$; | 4) $\cos 67^\circ$; | 5) $\cos 4^\circ$; |
| d) 1) $\operatorname{tg} 5^\circ$; | 2) $\operatorname{tg} 89^\circ$; | 3) $\operatorname{tg} 15^\circ$; | 4) $\operatorname{tg} 60^\circ$; | 5) $\operatorname{tg} 50^\circ$; |
| e) 1) $\operatorname{ctg} 10^\circ$; | 2) $\operatorname{ctg} 30^\circ$; | 3) $\operatorname{ctg} 75^\circ$; | 4) $\operatorname{ctg} 52^\circ$; | 5) $\operatorname{ctg} 5^\circ$. |

2. Kesteden paydalanıp, x súyir múyeshti tabıń:

- | | | |
|---|---|--|
| a) 1) $\sin x \approx 0,1392$; | 2) $\sin x \approx 0,8590$; | 3) $\sin x \approx 0,5150$; |
| b) 1) $\cos x \approx 0,7431$; | 2) $\cos x \approx 0,6428$; | 3) $\cos x \approx 0,0523$; |
| d) 1) $\operatorname{tg} x \approx 0,4663$; | 2) $\operatorname{tg} x \approx 11,430$; | 3) $\operatorname{tg} x \approx 0,1763$; |
| e) 1) $\operatorname{ctg} x \approx 0,9004$; | 2) $\operatorname{ctg} x \approx 1,192$; | 3) $\operatorname{ctg} x \approx 0,3640$. |

3. (*Ámeliy jumıs.*) Transportir járdeminde súyir múyeshi 40° bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik jasań. Onıń táreplerin ólsheń hám de usı múyeshtiń sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensin esaplań.

4. Ańlatpanıń mánisin tabıń: $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$.

Sheshiliwi. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ hám $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$ formuladan paydalanıp ańlatpanıń mánisin esaplaymız (bas orınlargá sáykes juwaptı jazıń):

$$\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 15^\circ) = \\ = (\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} \dots) (\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} \dots) = \dots \dots = \dots$$

5. Dálilleń: $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \dots \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = 1$.

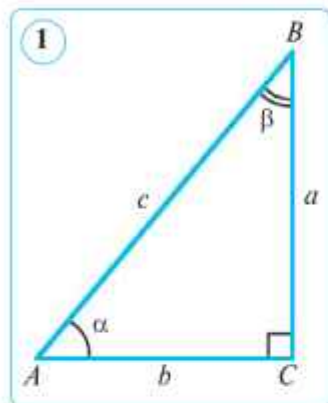
6. Ańlatpanı ápiwaylastırıń: 1) $\cos^2 \alpha + \cos^2(90^\circ - \alpha)$; 2) $\sin^2 \alpha - \cos^2(90^\circ - \alpha)$.

7. Kesteden paydalanıp tabıń: 1) $\sin 70^\circ$; 2) $\cos 55^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 10^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 18^\circ$.

8. Kesteden paydalanıp, x súyir múyeshti tabıń: $\sin x \approx 0,1392$.

25. TUWRÍ MÜYESHLI ÜSHMÜYESHLIKLERDI SHESHIW

Üshmüyeshliklerdi sheshiw üshmüyeshliktiñ belgili müyeshleri hám tárep-leri boyınsha onıñ belgisiz tárep-leri hám müyeshlerin tabıwdan ibarat. Tuwrı müyeshli üshmüyeshlikti tárep-leri hám súyir müyeshi yaki eki tárep-leri boyınsha sheshiwge boladı. Tuwrı müyeshli üshmüyeshliklerdi sheshiwde



1-súwrettegi belgilewlerden paydalanamız. Bunıñ ushın máseleñiñ mazmunınan kelip shıqqan halda, trigonometriyalıq funkciyalardıñ mánislerin on mınnan birler tañbasına shekem (sabaqlıq aqırındağı qosımshağa q.) yaki zárúr bolsa, mınnan birler tañbasına shekem, tárep-ler uzınlıqların júzden birge shekem, müyeshtiñ gradus ólshewin birge shekem pütünlep alıwğa kelisip alamız.

Tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ elementlerin onıñ eki belgili elementine muwapiq esaplawdıñ 4 jaǵdayın kórip shıǵamız.

1-jaǵday. Üshmüyeshlikti gipotenuzası hám súyir müyeshi boyınsha sheshiw.

1-másele. Tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ gipotenuzası $c=10$ cm hám súyir müyeshi $\alpha=50^\circ$ berilgen. a , b katetleri hám β súyir müyeshti tabıñ.

Sheshiliwi. 1) Tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ súyir müyeshleri qosındısı 90° qa teñ. Onday jaǵdayda $\beta=90^\circ-\alpha=90^\circ-50^\circ=40^\circ$.

1-usıl. 2) α müyesh tuwrısındağı katet gipotenuza menen α müyesh sinusınıñ kóbeymesine teñ, yaǵnıy $a=c\sin\alpha$.

Demek, $a=10\sin 50^\circ=10\cdot 0,7660\approx 7,66$ (cm).

3) α müyeshke jaylasqan katet gipotenuza menen α müyesh kosinusınıñ kóbeymesine teñ, yaǵnıy $b=c\cos\alpha$.

Demek, $b=10\cos 50^\circ=10\cdot 0,6428\approx 6,43$ (cm).

2-usıl. 2) β müyeshke jaylasqan katet gipotenuza menen β müyesh kosinusınıñ kóbeymesine teñ, yaǵnıy $a=c\cos\beta$. Demek, $a=10\cos 40^\circ=10\cdot 0,7660\approx 7,66$ (cm).

2-jaǵday. Üshmüyeshliktiñ kateti hám súyir müyeshi boyınsha sheshiw.

2-másele. Tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ kateti $a=6$ cm súyir müyeshi $\beta=22^\circ$ berilgen. b katet, c gipotenuza hám α súyir müyeshti tabıñ.

Sheshiliwi. 1) Tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ súyir müyeshleri qosındısı 90° qa teñ. Ol jaǵdayda $\alpha=90^\circ-\beta=90^\circ-22^\circ=68^\circ$.

1-usıl. 2) Gipotenuza β súyir müyeshke jaylasqan katettiñ β müyesh kosinusına qatnasına teñ, yaǵnıy $c=\frac{a}{\cos\beta}$.

Demek, $c=\frac{a}{\cos\beta}=\frac{6}{\cos 22^\circ}=\frac{6}{0,9272}\approx 6,47$ (cm).

3) Aniqlamağa muwapıq: $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$. Bunnan $b = a \operatorname{tg} \beta$, yağniy

$$b = 6 \operatorname{tg} 22^\circ = 6 \cdot 0,4040 \approx 2,42 \text{ (cm)}.$$

2-usıl. 2) Gipotenuza α süyir müyesh tuwrısındağı katettiñ α müyesh sinusına qatnasına teñ, yağniy $c = \frac{a}{\sin \alpha}$.

$$\text{Demek, } c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{6}{\sin 68^\circ} = \frac{6}{0,9272} \approx 6,47 \text{ (cm)}.$$

3) Aniqlamağa muwapıq: $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$. Bunnan $b = a \operatorname{tg} \beta$, yağniy

$$b = 6 \operatorname{tg} 22^\circ = 6 \cdot 0,4040 \approx 2,42 \text{ (cm)}.$$

Juwapı: $c \approx 6,47 \text{ cm}$, $b \approx 2,42 \text{ cm}$, $\alpha = 68^\circ$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Tuwrı müyeshli úshmüyeshlikte uzınlıǵı 7 cm ge teñ bolǵan katet 60° lı müyeshke jaylasqan. Usı úshmüyeshliktiñ gipotenuzasın tabıñ.
2. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiñ gipotenuzası 12 cm ge, katetlerinen biri bolsa $6\sqrt{2}$ cm ge teñ. Úshmüyeshliktiñ süyir müyeshlerin tabıñ.
3. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiñ gipotenuzası $c = 10$ cm hám süyir müyeshi $\alpha = 42^\circ$ berilgen. a , b katetlar hám β süyir müyeshin i 1-máselege q.) menen sheshiñ.
4. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiñ kateti $b = 4$ cm hám süyir müyeshi $\beta = 18^\circ$ berilgen. b katet, c gipotenuza hám α süyir müyeshin tabıñ. Másele ni eki usıl (teksttegi 2-máselege q.) menen sheshiñ.

5. Anlatpanı ápiwayılastır: $\frac{\cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} - \sin \alpha \cos(90^\circ - \alpha)$.

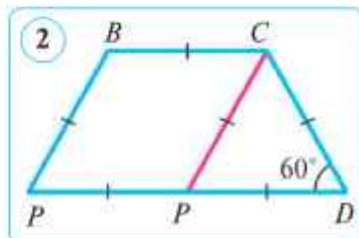
6. Teñ qaptallı trapeciya tiykarındağı müyesh 60° ğa, qaptal tárepi bolsa kishi ultanına teñ bolıp, $2\sqrt{2}$ cm ge teñ. Usı trapeciyanıñ úlken ultanın tabıñ. Bos orınlarǵa sáykes juwapın jazıñ.

Sheshiliwi. $ABCD$ trapeciya — teñ qaptallı, $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $AB = DC = BC = 2\sqrt{2}$ cm.

$CP \parallel BA$ ótkizemiz (2-súwret). Ol jaǵdayda $\angle A = \angle CPD = 60^\circ$ ($CP \parallel BA$ hám de AD kesiwshi kesilisiwinen payda bolǵan ... müyeshler). CPD úshmüyeshlikti müyeshleri ... dan, demek, ol ... tárepli. Sonıñ ushın, $CP = PD = \dots = 2\sqrt{2}$ cm. Ol jaǵdayda $AD = 2 \cdot 2\sqrt{2} = \dots$ (cm).

Juwapı: $4\sqrt{2}$ cm.

7. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiñ gipotenuzası $c = 8$ cm hám süyir müyeshi $\alpha = 30^\circ$ berilgen. Onıñ a , b katetleri hám β süyir müyeshin tabıñ. Másele ni eki usıl (teksttegi 1-máselege q.) menen sheshiñ.



26. TUWRÍ MÚYESHLI ÚSHMÚYESHLIKLERDİ SHESHIW (DAWAMÍ)

3-jagday. Úshmúyeshliktiń gipotenuzası hám kateti boyınsha sheshiw.

1-másele. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası $c=13$ cm hám kateti $a=5$ cm berilgen. Onıń b kateti, α hám β súyir múyeshlerdi tabıń.

Sheshiliw. 1) Pifagor teoremasına muwapıq:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ (cm)}.$$

1-usıl. 2) α súyir múyesh sinusınıń anıqlaması boyınsha:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \approx 0,3846.$$

Bunnan $\alpha \approx 23^\circ$.

3) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri qosındısı 90° qa teń. Ol jagdayda $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$.

Juwapı: $b=12$ cm, $\alpha \approx 23^\circ$, $\beta \approx 67^\circ$.

2-usıl. 2) β súyir múyesh sinusınıń anıqlaması boyınsha:

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \approx 0,9231.$$

Bunnan $\beta \approx 67^\circ$.

3) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri qosındısı 90° qa teń. Ol jagdayda.

$$\alpha = 90^\circ - \beta \approx 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ.$$

Juwapı: $b=12$ cm, $\alpha \approx 23^\circ$, $\beta \approx 67^\circ$.

4-jagday. Úshmúyeshliktiń eki kateti boyınsha sheshiw.

2-másele. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleri $a=8$ cm hám $b=15$ cm berilgen. c gipotenuzası, α hám β súyir múyeshlerin tabıń.

Sheshiliw. 1) Pifagor teoreması boyınsha:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (cm)}.$$

1-usıl. 2) α súyir múyesh tangensiniń anıqlaması boyınsha:

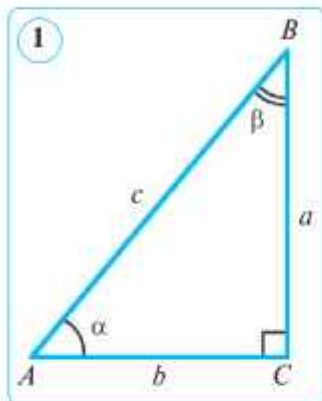
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{8}{15} \approx 0,5333.$$

Bunnan $\alpha \approx 28^\circ$.

3) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri qosındısı 90° qa teń. Ol jagdayda.

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ.$$

Juwapı: $c=17$ cm, $\alpha \approx 28^\circ$, $\beta \approx 62^\circ$.



2-usul. 2) β süyir müyesh tangensiniñ anıqlaması boyınsha:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Bunnan $\beta \approx 62^\circ$.

3) Tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ süyir müyeshleri qosındısı 90° qa teñ. Ol jaǵdayda

$$\alpha = 90^\circ - \beta \approx 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ.$$

Juwapı: $c=17$ cm, $\alpha \approx 28^\circ$, $\beta \approx 62^\circ$.

3-usul. 1) α süyir müyesh kotangensiniñ anıqlaması boyınsha:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Bunnan $\alpha \approx 28^\circ$.

2) Tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ müyeshleri qosındısı 90° qa teñ. Ol jaǵdayda

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ.$$

3) Pifagor teoreması boyınsha:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (cm)}.$$

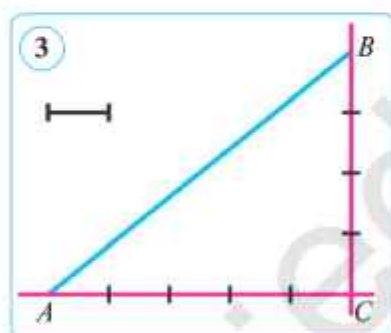
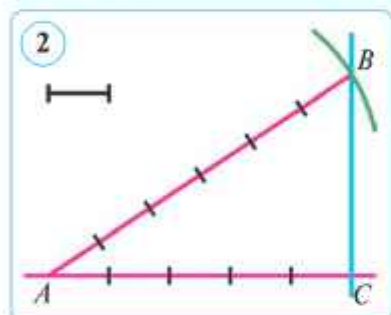
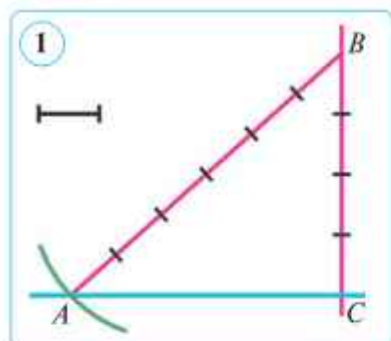
Juwapı: $c=17$ cm, $\alpha \approx 28^\circ$, $\beta \approx 62^\circ$.



Soraw, müsele hám tapsırmalar

1. Tuwrı müyeshli ABC üshmüyeshlikte $\angle C=90^\circ$, gipotenuza $c=9\sqrt{2}$ cm, katet $a=9$ cm. Usı üshmüyeshliktiñ b kateti, α hám β süyir müyeshlerin tabıñ. Eki usıl menen sheshiñ.
2. Tuwrı müyeshli ABC üshmüyeshlikte $\angle C=90^\circ$, katetleri $a=6\sqrt{3}$ cm hám $b=6$ cm. Usı üshmüyeshliktiñ c gipotenuzası, α hám β süyir müyeshlerin tabıñ. Eki usıl menen sheshiñ.
3. Tuwrı müyeshli ABC üshmüyeshlikte $\angle C=90^\circ$, katetleri $a=\sqrt{11}$ cm hám $b=5$ cm. Usı üshmüyeshliktiñ c gipotenuzası, α hám β süyir müyeshlerin tabıñ. Eki usıl menen sheshiñ.
4. CD kesindi – tuwrı müyeshli ABC ($\angle C=90^\circ$) üshmüyeshliktiñ gipotenuzasına túsirilgen biyikligin. Dálilleñ:
1) $\frac{CD}{\sin A} = AB \cos A$; 2) $AD \operatorname{tg} A = BD \operatorname{tg} B$.
5. Esaplañ: $2\sin 60^\circ + 4\cos 60^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ$.
6. Tuwrı müyeshli ABC üshmüyeshlikte $\angle C=90^\circ$, gipotenuza $c=25$ cm, katet $b=24$ cm. Usı üshmüyeshliktiñ a kateti, α hám β süyir müyeshlerin tabıñ. Eki usıl menen sheshiñ.
7. Tuwrı müyeshli ABC üshmüyeshlikte $\angle C=90^\circ$, katetleri $a=10$ cm hám $b=24$ cm. Usı üshmüyeshliktiñ c gipotenuzası, α hám β süyir müyeshlerin tabıñ. Eki usıl menen sheshiñ.

27. TUWRÍ MÜYESHLI ÜSHMÜYESHLIKLERDI JASAW



1-másele. Sinusi $\frac{4}{5}$ ge teń bolǵan müyeshti jasaw.

Bunıń ushın C tuwrı müyesh sıamız hám onıń táreplerinen birinde müyesh tóbesinen baslap qálegen masshtab birligine teń CB kesindini qoyamız (1-súwret). Orayı B noqatta hám radiusı 5 masshtab birligine teń radiusı kósherın müyeshtiń ekinshi tárepi menen kesiskenshe sıamız. Olardıń kesisiw noqatın A mene belgileymiz. A hám B noqatların birlestirip, tuwrı müyeshli ABC üshmüyeshlikti payda etemiz. A — izlenip atırǵan müyesh, onıń sinusi $\frac{4}{5}$ ge teń boladı, yaǵnıy $\sin A = \frac{4}{5}$.

2-másele. Kosinusi $\frac{5}{6}$ ǵa teń bolǵan müyeshti jasaw.

Bunıń ushın C tuwrı müyesh jasaymız hám onıń táreplerinen birinde müyesh ishinen baslap 5 qálegen masshtab birligine teń AC kesindini qoyamız (2-súwret). Orayı A noqatta hám radiusı 6 masshtab birligine teń radiusli kósherdi müyeshtiń ekinshi tárepi menen kesiskenshe sıamız. Olardıń kesisiw noqatın B menen belgileymiz. A hám B noqatların birlestirip, tuwrı müyeshli ABC üshmüyeshlikti payda etemiz. A — izlenip atırǵan müyesh, onıń kosinusi $\frac{5}{6}$ ǵa teń boladı,

yaǵnıy $\cos A = \frac{5}{6}$.

3-másele. Tangensi $\frac{4}{5}$ ge teń bolǵan müyeshti jasaw.

Bunıń ushın C tuwrı müyesh jasaymız hám onıń táreplerinen birinde müyesh tóbesinen baslap 5 qálegen masshtab birligine teń CA kesindini, ekinshisinde bolsa 4 masshtab birligine teń CB kesindini qoyamız (3-súwret). A hám B noqatların birlestirip, tuwrı müyeshli ABC üshmüyeshligin payda etemiz. A — izlenip atırǵan müyesh, onıń tangensi $\frac{4}{5}$ ge teń boladı, yaǵnıy $\operatorname{tg} A = \frac{4}{5}$.

Berilgen kotangenske baylanıslı müyesh sızw talap etilgende de tap sonday islewge tuwra keledi, tek bul jaǵdayda izlengen müyesh ushın AC ǵa jaylasqan katetti alıw kerek boladı.

Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń kateti báhama gepatenuzadan kishi. Sonıń ushın súyir müyeshtiń sinusi hám kosinusi báhama 1 den kishi.

Katetlerdiń uzınlıqların salıstırıw sonı kórsetedi, olar óz ara teń, biri ekinshisinen úlken yaqı kishi bolıwı múmkin. Sonıń ushın súyir müyesh tangensi hám kotangensleri qálegen oń san bolıwı múmkin. Demek, olardıń hár biri katetlerge baylanıslı jaǵdayda 1 den kishi, 1 den úlken hám 1 ge teń boladı.

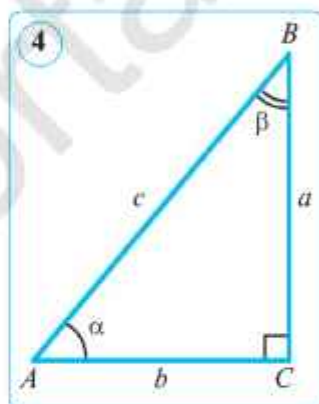
Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) $\operatorname{tg} A = \frac{3}{5}$; 2) $\sin A = \frac{2}{3}$ ge teń bolǵan, tuwrı müyeshli ABC ($\angle C = 90^\circ$) úshmüyeshligin sızıń.

2. 1) $\sin A = \frac{5}{8}$; 2) $\cos A = \frac{3}{4}$ teń bolǵan, tuwrı müyeshli ABC ($\angle C = 90^\circ$) úshmüyeshligin sızıń.

3. Tuwrı müyeshli ABC úshmüyeshlikte $\angle C = 90^\circ$, gipotenuza $c = 7\sqrt{2}$ cm, katet $b = 7$ cm. Úshmüyeshliktiń a kateti, α hám β súyir müyeshlerin (4-súwret) tabıń.

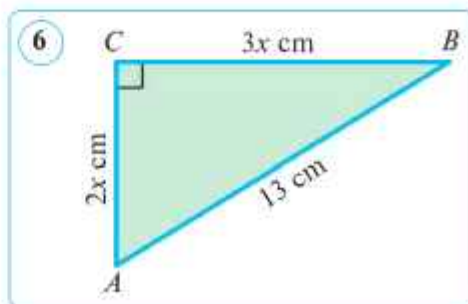
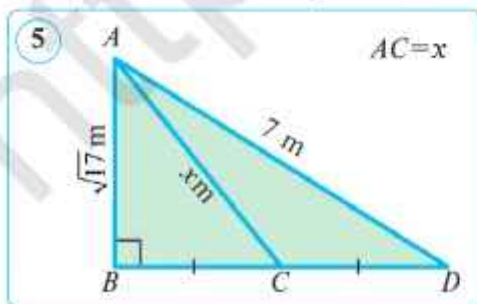
4. Tuwrı müyeshli ABC úshmüyeshlikte $\angle C = 90^\circ$, gipotenuza $c = 12$ cm, $\alpha = 60^\circ$. Úshmüyeshliktiń a , b katetleri, β súyir müyeshlerin (4-súwret) tabıń. Máseleni eki usıl menen sheshiń.



5. Belgisiz uzınlıqtı tabıń (5-6-súwretler).

6. Tuwrı müyeshli ABC úshmüyeshlikte $\angle C = 90^\circ$, gipotenuza $c = 74$ cm, $\sin \alpha = \frac{12}{37}$. Usı úshmüyeshliktiń perimetrin (4-súwret) tabıń.

7. 1) $\sin A = \frac{4}{7}$; 2) $\cos A = \frac{3}{5}$; 3) $\operatorname{tg} A = \frac{2}{5}$ ǵa teń bolǵan, tuwrı müyeshli ABC ($\angle C = 90^\circ$) úshmüyeshlikti sızıń.



28. ÁMELİY JUMÍS HÁM QOLLANIŪ

1. Pifagor teoremasının ámeliy qollanılıwına baylanışlı máseleler.

1-másele. Suw nilufar güliniń kól qáddinen kórinetuǵın bólimi 10 cm. Eger gúldi baslanǵış halatınan bir tárepine 1 m tartılsa, suw qáddine tiyedi. Kóldiń sol jerdegi tereńligin tabıń.

Sheshiliw. Kóldiń izlengen CD tereńligin x penen belgileymiz (1-súwret). Ol jaǵdayda $BD=AD=AC+CD=0,1+CD=0,1+x$ (m) ge teń boladı. Onda tuwrı múyeshli BCD úshmúyeshlikten Pifagor teoremasına baylanışlı tómendegilerge iye bolamız:

$BD^2 - CD^2 = BC^2$, $(0,1+x)^2 - x^2 = 1$,
bunnan:

$$\begin{aligned} 0,01 + 0,2x + x^2 - x^2 &= 1; \\ 0,2x &= 0,99; \quad x = 0,99 : 0,2; \\ x &= 9,9 : 2; \quad x = 4,95 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

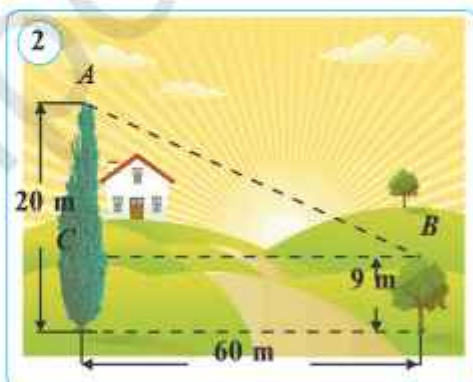
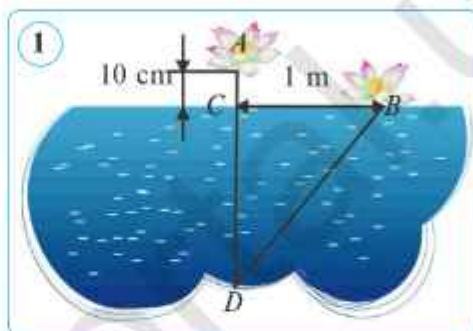
Juwap: kóldiń tereńligi 4,95 m.

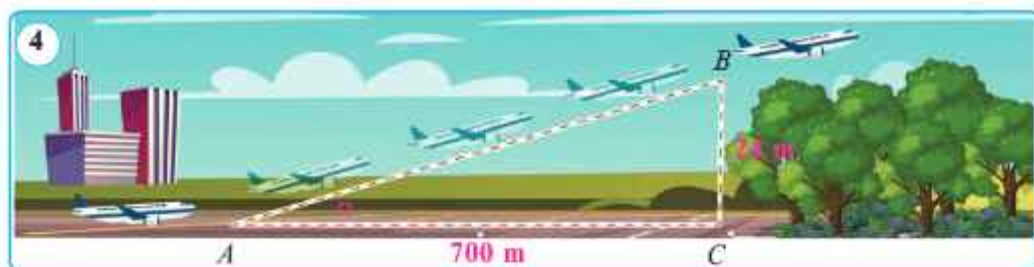
2-másele. Bir terektiń biyikligi 20 m, ekinshisiniki bolsa 9 m. Bul terekler arasındaqı aralıq 60 m dı quraydı. Usı eki terek ushları arasındaqı aralıqtı tabıń (2-súwret). Óz betińizshe sheshiń.

3-másele. Eki qaraǵay tereginin biyiklikleri sáykes túrde 21 m hám 28 m, bul terekler arasındaqı aralıq bolsa 24 m dı quraydı. Eki terek ushları arasındaqı aralıqtı tabıń (2-súwretke qarań). Óz betińizshe sheshiń.

2. Súyir múyesh sinusınıń ámeliy qollanılıwına baylanışlı másele.

Qıya tegis jol kóteriletuǵın jerdiń tikligin gorizontqa salıstırmalı kóteriliw múyeshi arqalı beriwge boladı (3-súwret). Kóbinese kóteriletuǵın jeriniń tikligin kóteriń múyeshinen göre basıp ótilgen jol uzınlıǵınıń kóteriliw biyikligi arqalı beriw qolay. Máselen, mashına 100 m aralıqtı basıp ótkende 2m biyiklikke kóterilgen bolsın. Bul jaǵdayda kóteriliw óziniń tikligi biyikliktiń basıp ótilgen jolǵa qatnası menen beriledi. Kóteriliw biyikligi $\frac{2 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 0,02$ ge teń. Bul qatnas basıp





ótilgen jolǵa baylanıslı emes. Qıya tegis joldan túsıwde de tap usıǵan uqsas pikir júrgiziw múmkin. Qıya tegis joldan túsıwde de tap usıǵan uqsas pikir júrgiziw múmkin.

4-másele. Jeńil mashina qıyalıǵı 15° bolǵan qıya jol boylap kóterilmekte (3-súwretke q.). Ol qıyalıqqa kóteriliw ornınan 300 m jol basıp ótkennen keyin gorizontqa salıstırmalı neshe metr biyiklikte boladı?

Kórsetpe. Súyir múyesh sinusınıń anıqlamasın qollanıp, kóteriliw biyikligin tabıń.

2. Súyir múyesh tangensiniń ámeliy qollanıwǵa baylanısh máseleler.

5-másele. Samolyot ushıw jolınan hawaǵa kóteriletuǵın noqattan 700 m aralıqta toǵaylıq jaylasqan bolıp, tereklerdiń maksimal biyikligi 24 m ge teń. Samolyot bul tereklerge tiymewi ushın qanday múyesh astında kóteriliwi kerek?

Sheshiliwi. Tuvrı múyeshli ABC ($\angle C = 90^\circ$) úshmúyeshlikte $AC = 700$ m, $BC = 24$ m (4-súwret). Súyir múyesh tangensiniń anıqlamasınan tabamız:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{700} \approx 0,0343 \Rightarrow \alpha \approx 2^\circ.$$

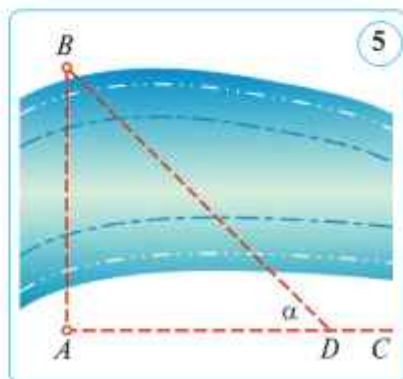
Juwapı: samolyot tereklerge tiymesten ushıwı ushın ushıw noqatınan 2° dan az bolmaǵan múyesh astında kóteriliwi kerek.

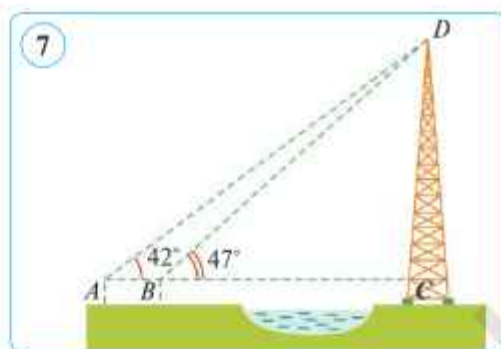
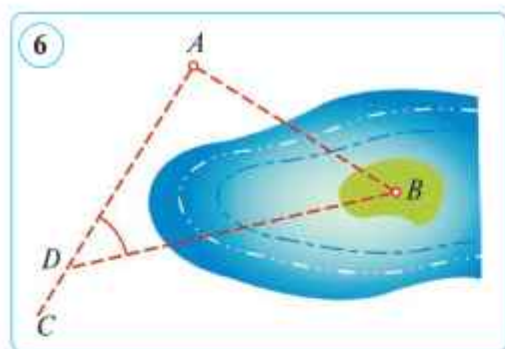
6-másele. A punktten dárya artındaǵı barıp bolmaytuǵın B punktke shekem bolǵan aralıqtı tabıń (5-súwret).

Sheshiliwi. Usturlob (astrolyabiya, gorizont tegislikte jaylasqan múyeshlerdi ólshew ushın qollanılatuǵın ásbap, yaǵnıy múyesh ólshegish) yaki ekker járdeminde A noqatda tuwrı BAC múyeshti jasaymız. AC tuwrı sıziqta qálegen D noqatı alıp, usturlob járdeminde ADB múyeshti ólsheymiz. Demek, ol 44° ǵa teń bolsın. Sońǵı AD aralıqtı ólsheymiz, ol 120 m bolsın. AB aralıqtı súyir múyeshtiń tangensinen paydalanıp tabamız:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{120} &= \operatorname{tg} 44^\circ \Rightarrow AB = 120 \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \approx \\ &\approx 120 \cdot 0,9657 \approx 116 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

Juwapı: ≈ 116 m.





7-másele. A punktten barıp bolmaytuǵın atawdaǵı B punktke shekem bolǵan aralıqtı tabıń (6-súwret).

Kórsetpe. 5-máselege uqsas dodalanadı. $\angle ADB = 48^\circ$ hám $AD = 200$ m dep, máseleńi sheshiń.

8-másele. Ultanıńa barıp bolmaytuǵın obyekt, máseleń, elektr jetkerip beriw biyikligin ólshew talap etilgen bolsın (7-súwret).

Sheshiliwi. Tuwrı múyeshli ACD úshmúyeshlikti qaraymız. Bul úshmúyeshliktiń A múyeshin usturlob járdeminde ólshewimiz múmkin, deyik, ol 42° qa teń bolsın.

Tuwrı múyeshli BCD úshmúyeshlikte DBC múyeshiti ólsheymiz, ol 47° qa teń bolsın.

Súyir múyesh tangensi anıqlamasına tiykarlanıp ACD dan tabamız:

$$\frac{CD}{AC} = \operatorname{tg} 42^\circ \Rightarrow AC = \frac{CD}{\operatorname{tg} 42^\circ}. \quad (1)$$

Súyir múyesh tangensi anıqlamasına tiykarlanıp BCD dan tabamız:

$$\frac{CD}{BC} = \operatorname{tg} 47^\circ \Rightarrow BC = \frac{CD}{\operatorname{tg} 47^\circ}. \quad (2)$$

A , B hám C noqatlar bir tuwrı sıziqta jatadı. (1) den (2) ni ayıramız:

$$\begin{aligned} AC - BC &= \frac{CD}{\operatorname{tg} 42^\circ} - \frac{CD}{\operatorname{tg} 47^\circ} \Rightarrow AC - BC = CD \left(\frac{1}{\operatorname{tg} 42^\circ} - \frac{1}{\operatorname{tg} 47^\circ} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow AC - BC &= CD \left(\frac{1}{0,9004} - \frac{1}{1,0724} \right) \Rightarrow AC - BC = CD(1,1106 - 0,9325) \Rightarrow \\ \Rightarrow AC - BC &= CD \cdot 0,1781 \Rightarrow CD = \frac{AC - BC}{0,1781}. \end{aligned}$$

$AC - BC$, yaǵnıy AB aralıqtı tikkeley ólshewimiz múmkin, deyik, ol 12 m ge teń bolsın. Ol jaǵdayda

$$CD = \frac{AC - BC}{0,1781} = \frac{AB}{0,1781} = \frac{12}{0,1781} \approx 67,4 \text{ (m)}.$$

Juwapı: $\approx 67,4$ m.

Átirapınıńdan kórilgen máselelerge uqsas máseleler jeterli dárejede tabıladı. Óz betinińshe máseleler dúziń hám sheshiń.

29–30. 2-BAQLAW JUMÍSÍ. QÁTELER ÚSTINDE ISLEW

1. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń gipotenuzası 20 cm ge, súyir müyeshleriniń biriniń sinusı 0,5 ge teń. Úshmüyeshliktiń katetlerin tabıń.
2. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń gipotenuzası 13 cm ge, súyir müyeshlerinen biriniń kosinusı $\frac{5}{13}$ ge teń. Úshmüyeshliktiń katetlerin tabıń.
3. Ańlatpanı ápiwayılastırın: $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2 \sin\alpha \cos\alpha$.
4. Tárepleri: 1) $a=c=17$ cm, $b=16$ cm; 2) $a=30$ cm, $b=34$ cm, $c=16$ cm bolǵan úshmüyeshliktiń biyikligin tabıń.

2-TEST

Ózińizdi sınap kórin!

1. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń katetlerinen biri 12 cm, gipotenuzası bolsa ekinshi katetten 6 cm uzın. Gipotenuzanıń uzınlıǵın tabıń.
A) 15 cm; B) 25 cm; D) 26 cm; E) 18 cm.
2. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń katetlerinen biri 12 cm, ekinshisi bolsa gipotenuzadan 8 cm qısqa. Usı úshmüyeshliktiń gipotenuzasın tabıń.
A) 15 cm; B) 16 cm; D) 13 cm; E) 25 cm.
3. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń gipotenuzası 25 cm, katetleri óz ara 3:4 qatnasta. Usı úshmüyeshliktiń kishi katetin tabıń.
A) 10 cm; B) 15 cm; D) 9 cm; E) 20 cm.
4. Tárepleri 13 cm, 14 cm hám 15 cm bolǵan úshmüyeshliktiń eń kishi biyikligi neshe santimetr?
A) 11,5 cm; B) 11,1 cm; D) 11 cm; E) 11,2 cm.
5. Rombınıń diagonalı 14 cm hám 48 cm ge teń. Usı rombınıń perimetrin tabıń.
A) 60 cm; B) 100 cm; D) 80 cm; E) 120 cm.
6. Rombınıń perimetri 68 cm, diagonalarınan biri 30 cm ge teń. Onıń ekinshi diagonalın tabıń.
A) 12 cm; B) 8 cm; D) 16 cm; E) 20 cm.
7. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń katetlerinen biri $5\sqrt{3}$ cm ge, onıń tuwrısındaǵı müyesh bolsa 60° ǵa teń. Úshmüyeshliktiń gipotenuzasın tabıń.
A) $5\sqrt{3}$ cm; B) $2\sqrt{15}$ cm; D) 5 cm; E) 10 cm.
8. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń katetlerinen biri $5\sqrt{3}$ cm, oǵan jaylasqan müyesh bolsa 30° ǵa teń. Usı úshmüyeshliktiń ekinshi katetin tabıń.
A) $5\sqrt{3}$ cm; B) $2\sqrt{15}$ cm; D) 5 cm; E) 10 cm.
9. Tuwrı müyeshli ABC ($\angle C=90^\circ$) úshmüyeshliktiń gipotenuzası 17 cm ge, katetleri bolsa 15 cm hám 8 cm ge teń. A müyeshtiń sinusın tabıń.
A) $\frac{8}{15}$; B) $\frac{8}{17}$; D) $\frac{17}{15}$; E) $\frac{15}{17}$.

10. Tuwrı müyeshli ABC ($\angle C=90^\circ$) üshmüeshliktiñ gipotenuzası 37 cm ge, katetleri bolsa 12 cm hám 35 cm ge teñ. B müyeshitiñ kosinusın tabıñ.

- A) $\frac{12}{37}$; B) $\frac{35}{37}$; D) $\frac{12}{35}$; E) $\frac{35}{12}$.



İnglis tilin üyrenemiz!

Pifagor teoreması – Pythagorean theorem

Keri teorema – inverse function theorem

Trigonometriya – trigonometry

Gipotenuza – hypotenuse

Sinus – sine

Kosinus – cosine

Tangens – tangent

Kotangens – cotangent

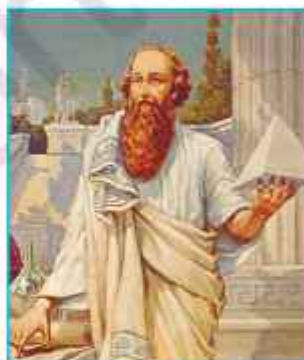


Tariyxiy maǵlıwmatlar

Áyyemgi grek filosofi hám matematigi **Pifagor** biziñ eramızǵa shekemgi VI ásirdiñ ekinshi yarımında (biziñ eramızǵa shekemgi 570–500-jıllar) Egey teñiziniñ Samos atawında tuwılǵan hám Tarentda qaytı bolǵan dep shamalanadı. Pifagor Qubla Italiyanıñ greklerdiñ koloniyası bolǵan Kroton qalasına (shama menen biziñ eramızǵa shekemgi 530-j) kóship kelip, usı jerde óziniñ mektebine tiykar salǵan. Biz bul mektep alıp barǵan geometriyalıq tekseriw jumıslarınıñ nátiyjeleri haqqında keyinirek ótken grek materikleriniñ shıǵarmalarından ǵana bilemiz. Pifagor alıp barǵan geometriyalıq jumıslarınıñ ózi bizlerge shekem jetip kelmegen.

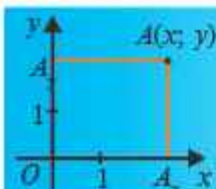
Pifagor birinshi bolıp sanlardı jup hám taq, tiykarǵı hám quramalı sanlarǵa ajratqan. Onıñ mektebinde «Pifagor sanları» delinetuǵın natural sanlar úshlikleri tolıq kórip shıǵarılǵan. Pifagor teoreması júdá kóp geometriyalıq esaplawlardı tiykarın quraydı.

Házirgi künde Pifagor teoremasıñ jüzden artıq dálilleri bar. Olardan ayırımları kvadratlar bóleklerge ajratıwǵa tiykarlanǵan, bunda katetlerge islengen kvadratlar bóleklerinen gipotenuzaǵa islengen kvadrat dúzilgen; basqaları — teñ figuralarǵa toltırıwǵa tiykarlanǵan; úshinshileri bolsa tuwrı müyeshitiñ tóbesinen gipotenuzaǵa túsirilgen biyiklik tuwrı müyeshli üshmüeshliklerdi eki uqsas üshmüeshlikke ajratıwǵa tiykarlanǵan. Áyyemgi Bobilde teñ qaptalı üshmüeshliktiñ qaptal tárepi hám ultanı uzınlıǵına baylanış onıñ biyikligin tapqan. Ayırım bir dereklerge qaraǵanda, Pifagor mektebinde tuwrı sıızıqlı figuralardı teñdey ajratıwdıñ geometriyalıq usıllarınan teoremalardı dálillew hám máseleler sheshiwde paydalanılǵan. Sebebi tuwrı sıızıqlı figuralardı geometriyalıq almasıwıw máselesi ámeliy jumıslardan kelip shıqqan.

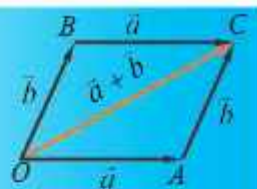


Pifagor

(biziñ eramızǵa shekemgi 570–500-j.)



III BAP KOORDINATALAR USULI. VEKTORLAR



7-§.

TEGISLIKTE KOORDINATALAR SISTEMASI

31. TEGISLIKTE NOQATTIN KOORDINATALARI. KESINDI ORTASININ KOORDINATALARI

1. Tegislikte noqattin koordinatalari. Tegislikte oz ara perpendikulyar x ham y koshlerin otkeremiz. Olardn kesisiw noqtan O haribi menen belgileyik. Bul noqatti harbir kosh ushn *esap basi* dep, harbir kosherde ozara teñ birlik kesindini alamız. Ox koshesindegi bagıt «shepten onğa», Oy koshesindegi bagıt bolsa «tömennen joqarığa» boladı (I-súwret). Bul jaǵdayda tegislikte xOy tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasi anıqlanǵan, delinedi. Bul sistemani pänge francuz ilimpazı **Rene Dekart** kirgizgeni ushn **Dekart koordinatalar sistemasi** da delinedi Ox **abscissalar kosheri** (yaki x kosheri), Oy kosheri bolsa **ordinatalar kosheri** (yaki y kosheri) delinedi. Abscissalar kosheri gorizonttal, ordinatalar kosheri vertikal jaylasqan.

Dekart koordinatalar sistemasi jatqan tegislik **koordinatalar tegisligi** delinedi.

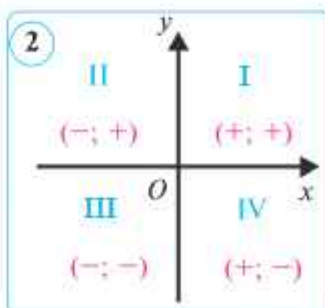
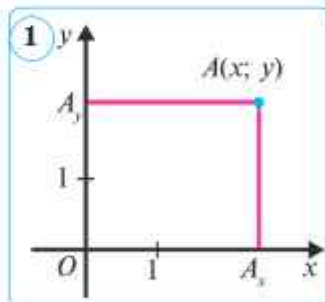
A — koordinata tegisliginde alınǵan qálegen noqt bolsın. A noqattan Ox ham Oy koshleri parallel tuwrı sıziqlar otkeremiz. Olar Ox ham Oy koshleri menen, saykes türde, A_x ham A_y noqatlarda kesisedi, deyik (I-súwretke q.).

AA_x kesindi uzınlıǵı x , AA_y kesindi uzınlıǵı y bolsın. x san A noqattın **abscissası** y san bolsa A noqattın **ordinatası** delinedi.

x ham y sanlar jubı A noqattın **koordinataları** $A(x; y)$ sıyaqlı belgilenedi. Koordinataların ańlatırda birinshi abscissa, keyin ordinata jazıladı.

Solay etip: 1) koordinata tegisliginde harbir A noqtqa sanlar jubı $(x; y)$ saykes keledi; 2) qálegen sanlar jubın $(x; y)$ koordinata tegisligindegi qanday da bir A noqattın koordinataları; 3) eger $x \neq y$ bolsa, ol jaǵdayda $(x; y)$ ham $(y; x)$ juplıqlar koordinata tegisliginde har türli noqatların ańlatadı.

Koordinata basi — O noqattın koordinataları $O(0; 0)$ dan ibarat. Ox kó-sherindegi qálegen B noqattın koodinatası $B(x; 0)$, Oy koshesindegi qálegen C noqattın koordinatası $C(0; y)$ kórinisinde boladı.



Ox hám Oy nurları tegislikti tórt tuwrı múyeshke bóledi, olar *koordinata sherekleri* yaqı *koordinata múyeshleri* delinedi. Koordinata sherekleri rim cıfrları menen belgilenedi hám de olar saat tillerine qarsı bağıt boyınsha nomerlenedi. Noqat koordinatalarınıń shereklerdegi belgileri belgileniwi 2-súwrette kórsetip ótilgen.

Geometriyalıq figuralar hám olardıń qásiyetlerin koordinatalarda qollanıp úyreniwdi kórip shıǵamız.

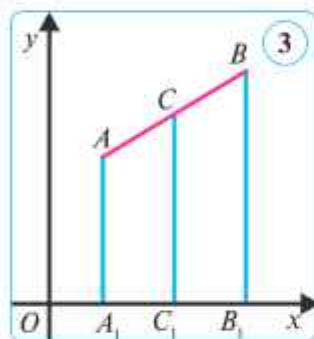
2. Kesindi ortasınıń koordinataları.

Teorema.

Kesindi ortasınıń koordinataları tóemdegi formulalar boyınsha esaplanadı:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

bunda $A(x_1; y_1)$ hám $B(x_2; y_2)$ – kesindiniń tóbeleri, $C(x; y)$ – kesindiniń ortası.



Dálil. C noqatınıń x hám y koordinataların tabamız. AB kesindi Ox kósherine kespegen bolsın, yaǵnıy $x_1 < x_2$ jaǵdaydı kórip shıǵamız (3-súwret). Ox kósherine AA_1 , BB_1 hám CC_1 perpendikulyar tuwrı sızıqlardı ótkeremiz. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ hám de perpendikulyardıń ultanları $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$ hám $C_1(x; 0)$ koordinatalarǵa iye ekeni anıq. C noqat AB kesindiniń ortası bolǵanı ushın, Fales teoremasına muwapıq, C_1 noqat A_1B_1 kesindiniń ortası boladı hám demek, $A_1C_1 = C_1B_1$, yaǵnıy $x_2 - x = x - x_1$. Bunnan usı formulanı tabamız:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$x_1 > x_2$, yaǵnıy AB kesindi Oy kósherine parallel bolsa, úsh noqat $-A_1$, B_1 hám C_1 birdey abscissaǵa iye boladı. Demek, formula bul jaǵdayda da orınlı bola beredi.

$x_1 > x_2$ bolǵan halda da joqarıdaǵı nátiyjege kelemiz (bunı óz betinshe tekseriwdi ózinińiz qaldıramız).

C noqatınıń ordinatası da usıǵan uqsas tabıladı. A , B hám C noqatlar arqalı Oy kósherine perpendikulyar tuwrı sızıqlar ótkeriledi. Usı formula payda boladı:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Másele. Tóbeleri $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$, $C(4; 1)$ hám $D(2; -2)$ noqatlarda bolǵan $ABCD$ tórtmúyeshliktiń parallelogramm ekenin dálilleń.

Sheshiliwi. Parallelogrammınıń belgisi boyınsha tórtmúyeshliktiń diagonalı kesisiw noqatında teń ekige bólinse, bul tórtmúyeshlik parallelogramm bolıwı belgili. Berilgen $ABCD$ tórtmúyeshliktiń AC hám BD

diagonalları ortasının koordinatların tabamız. AC kesindinin ortası tömendeği koordinatağa iye:

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad y = \frac{1+1}{2} = 1.$$

BD kesindinin ortası tömendeği koordinatağa iye:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, \quad y = \frac{4+(-2)}{2} = 1.$$

Solay etip, AC hám BD diagonallardıń kesisiw noqatı ulıwma $(1;1)$ koordinatağa iye eken. Demek, parallelogramm belgisine baylanıslı, $ABCD$ törtmüyeshlik parallelogramm. Usını dálillew talap etilgen edi.



Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Koordinata kósherleri hám olardıń kesiliskeń noqatı qalay ataladı?
- 2) Koordinatalar tegisligi dep nege aytıladı? Tegisliktegi noqatıń koordinataları gende neni túsinesiz?
2. $A(4; -5)$ noqattan koordinatalar kósherlerine perpendikulyar ótkizilgen. Usı perpendikulyarlar ultannıń koordinataların jazıń.
3. Eger: 1) $x = -4, y = -6$; 2) $x = -3, y = 5$; 3) $x > 0, y < 0$; 4) $x > 0, y > 0$ bolsa, $A(x; y)$ noqatıń qaysı sherekte jatıwın anıqlań.
4. Eger: 1) $A(-12; -3), B(-8; 1)$; 2) $A(4; -11), B(-4; 0)$ bolsa, AB kesindi ortasının koordinataların tabıń.
5. C noqat — AB kesindinin ortası. Eger $A(2; -3), C(0,5; 1)$ bolsa, B noqatıń koordinataların tabıń.
6. $A(-4; 0), B(-2; -2), C(0; -6)$ hám $D(-2; -4)$ noqatlar berilgen. $ABCD$ törtmüyeshliktiń parallelogramm ekenin dálilleń.
7. Eger: 1) $A(-6; 2), B(4; 4)$; 2) $A(-8; -4), B(-1; 3)$ bolsa, AB kesindi ortasının koordinataların tabıń.
8. C noqat — AB kesindinin ortası, D noqat bolsa BC kesindinin ortası. Eger: 1) 1) $A(-3; 3), B(5; -1)$; 2) $A(-2; -1), C(2; 3)$ bolsa, D noqatıń koordinataların tabıń.

Bilip qoyǵan paydalı!

Jer sırtındaǵı noqatıń geografiyalıq uzınlıǵı hám keńligi usı noqatıń **geografiyalıq koordinataları** delinedi. Jer sırtındaǵı hár bir noqatqa eki muǵdar — onıń geografiyalıq uzınlıǵı hám keńligi sáykes qoyıladı hám kerisinshe, eki muǵdar — geografiyalıq uzınlıq hám keńlik boyınsha jer sırtındaǵı anıq bir noqat tabıladı. Bunda parallel hám meridianalar tuwrı müyeshli koordinatalar sistemadaǵı abscessa hám ordinata kósherleri wazıypasın atqaradı.

Máselen, Tashkent qalası $069,20$ shıǵıs uzınlıqta $\approx 69^\circ$ hám $041,26$ arqa keńlikte $\approx 41^\circ$. Samarqand qalası bolsa $066,93$ shıǵıs uzınlıqta $\approx 67^\circ$ hám $039,65$ arqa keńlikte $\approx 40^\circ$ jaylasqan.



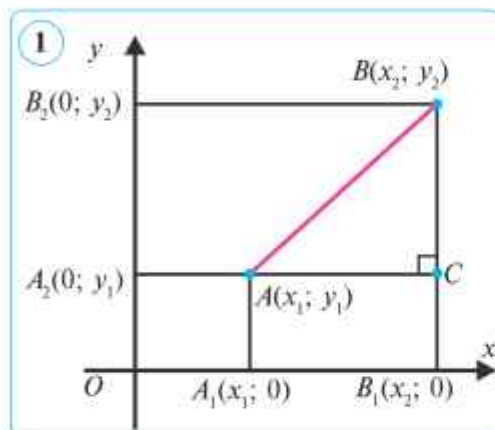
32 — 33. EKI NOQAT ARASINDAĞI ARALIQ. SHENBER TENLEMESI

1. Eki noqat arasındagi aralıq.

Teorema.

$A(x_1; y_1)$ hám $B(x_2; y_2)$ noqatlar arasındagi aralıq tómendegi formulalar boyınsha esaplanadı:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Dálil. Dáslep $x_1 \neq x_2$ hám $y_1 \neq y_2$ jaǵdaydı kórip shıǵamız. Berilgen A hám B noqatlar arqalı koordinatalar kósherlerine perpendikulyar ótkizemiz hám olardıń kesisiw noqatın C menen belgileymiz (1-súwret). A hám C noqatlar atasındagi aralıq $|x_2 - x_1|$ ǵa, B hám C noqatlar arasındagi aralıq bolsa $|y_2 - y_1|$ ǵa teń. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikke Pifagor teoremasın qollanıp tabamız:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ yamasa } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Noqatlar arasındagi aralıq formulası $x_1 \neq x_2$ hám $y_1 \neq y_2$ hám jaǵday ushın kórip shıǵılǵan bolsa-da, ol basqa jaǵdaylar ushın da óz kúshin saqlaydı. Haqıyqattan da, $x_1 = x_2$ hám $y_1 \neq y_2$ bolsa, $AB = |y_2 - y_1|$ (1) formula hám usı nátiyjeni beredi. $x_1 \neq x_2$ hám $y_1 = y_2$ hám jaǵday da usıǵan uqsas qaraladı. $x_1 = x_2$ hám $y_1 = y_2$ jaǵdayda A hám B noqatlar ústi-ústine túsedi hám (1) formula $AB = 0$ noqattı beredi.

1-másele. Tóbeleri $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$, $C(4; 1)$ hám $D(2; -2)$ noqatlarında bolǵan $ABCD$ tórtmúyeshliktiń parallelogramm ekenin dálilleń.

Sheshiliwi. Parallelogrammniń 2-belgisine baylanıslı, tórtmúyeshliktiń qarama-qarsı tárepleri óz ara teń bolsa, bul tórtmúyeshlik parallelogramm bolıwı belgili. Berilgen $ABCD$ tórtmúyeshliktiń tárepleri uzınlıqların tabamız:

$$AB = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{13}; \quad BC = \sqrt{(4 - 0)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$CD = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{13}; \quad AD = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Solay etip, $AB = CD$ hám $BC = AD$, yaǵnıy parallelogramm belgisine muwapıq $ABCD$ tórtmúyeshlik — parallelogramm.

2. Tegislikte figuranın teñlemesi. Tegislikte *figuranın* Dekart koordinatalar sistemasındaǵı *teñlemesi* dep, figuraǵa tiyisli hárqanday noqattıń koordinataları qanaatlandıratuǵın eki x, y belgisiz teñlemege aytıladı. Kerisinshe, bul teñlemeni qanaatlandırıwshı hárqanday eki san figuranın qanday da bir noqatı koordinataları boladı.

3. Sheńber teñlemesi.

Teorema.

Tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasında orayı $C(a; b)$ noqatta, radiusı bolsa R ge teń sheńber *teñlemesi* tómendegi kóriniske iye:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Dánil. Tuwrı múyeshli kóordinatalar sistemasında orayı $C(a; b)$ noqatta bolǵan $R (R > 0)$ radiusli sheńber berilgen bolsın (2-súwret). Sheńberde qálegen $A(x; y)$ no-qattı alamız. Sheńber anıqlama boyınsha, sheńber orayınan sheńberdiń qálegen noqa-tına shekem bolǵan aralıq R ǵa, yaǵnıy $CA = R$ ǵa hám demek, $CA^2 = R^2$ ǵa teń. Bul teñlemni koordinatalar kórinisinde jazıp, tómendegini tabamız:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (2)$$

A — sheńberdiń qálegen noqatı. Sonıń ushın (2) teñlemeni sheńberdegi qálegen noqattıń kóordinataları qanaatlandıradı.

Kerisinshe, koordinataları (2) teñlemeni qanaatlandırıwshı hárqanday A noqat sheńberge tiyisli, sebebi onnan C noqatqa shekem aralıq R ge teń. Bunnan (2) teñleme haqıyqattan da orayı C noqatta da radiusı R den ibarat sheńberdiń teñlemesi ekenligi kelip shıǵadı. Solay etip, figuranın teñlemesi anıqlamaǵı hár eki talap orınlanadı. Teorema dálillendi.

Nátiyje. Orayı koordinatalar basında, radiusı R bolǵan sheńber teñlemesi usı kóriniske iye:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

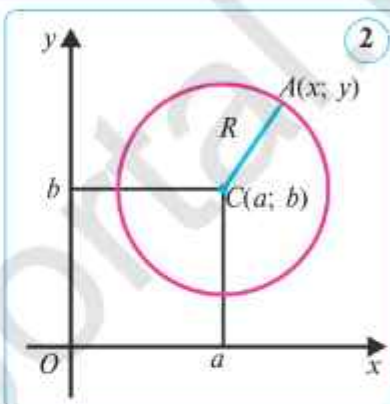
2-másele. $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 11 = 0$ teñleme menen berilgen sheńber orayınıń koordinataları hám radiusın anıqlań.

Sheshiliwi. Berilgen teñlemeni $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ kóriniske keltiremiz. $x^2 - 4x$ ni $(x-2)^2 - 4$ kóriniste, $y^2 + 2y$ ti bolsa $(y+1)^2 - 1$ kóriniste jazıp alamız. Bul anılatpalardı berilgen teñlemege qoyıp, payda etemiz:

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 11 = 0 \text{ yamasa } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4^2.$$

Bul teñleme orayı $C(2; -1)$ noqattahám radiusı 4 bolǵan sheńber teñlemesin beredi.

Juwabı: $(2; 1), R=4$.





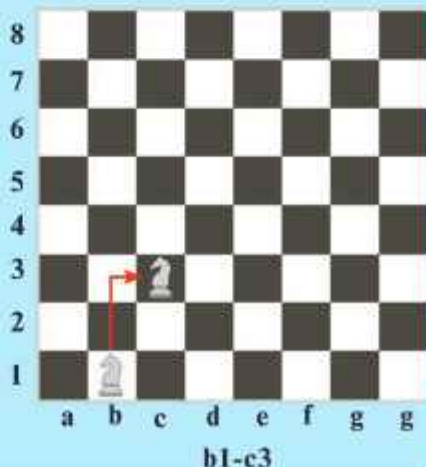
Soraw, мәsele hám tapsırmalar

- 1) Noqatlar arasındagi aralıq olardıń koordinataları arqalı qalay ańlatıladı?
- 2) Figuranıń Dekart koordinatalar sistemasındaǵı teńlemesi degen ne? Koordinatalar tegisliginde sheńber teńlemesi qanday kóriniste beriledi?
2. Eger: 1) $A(-3; 8)$, $B(5; 2)$; 2) $A(8; -1)$, $B(-7; 7)$; 3) $A(5; 0)$, $B(0; -12)$ bolsa, AB kesindi uzınlıǵın tabıń.
3. Eger: 1) $A(2; 1)$ hám $B(x; -2)$ noqatlar arasındagi aralıq 5 ke; 2) $A(x; 0)$ hám $B(2; -1)$ noqatlar arasındagi aralıq 1 ge teń bolsa, x tı tabıń.
4. Eger $A(-1; 2)$, $B(2; 6)$ hám $C(5; 2)$ bolsa, ABC úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.
5. Eger: 1) $C(7; 11)$, $R=5$; 2) $C(-2; 3)$, $R=1$ bolsa, orayı C noqatta, radiusı R bolǵan sheńber teńlemesin dúziń.
6. Tómendegi teńleme menen berilgen sheńber orayınıń koordinataları hám radiusın anıqlań: 1) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 7^2$; 2) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 4$.
7. 1) $x^2 - 6x + y^2 + 2y - 6 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 10y + 24 = 0$ teńleme menen berilgen sheńber orayınıń koordinataları hám radiusın anıqlań.
8. Eger úshmúyeshliktiń tóbeleri: 1) $A(0; 0)$, $B(0; 2)$ hám $C(2; 0)$; 2) $(1; 0)$, $B(2; \sqrt{3})$ hám $C(8; 0)$ bolsa, ABC úshmúyeshliktiń túrin anıqlań.
9. Eger: 1) $C(9; 4)$, $R=7$; 2) $C(-3; -4)$, $R=2$ bolsa, orayı C noqatta, radiusı R bolǵan sheńber teńlemesin dúziń.
10. Tómendegi teńleme menen berilgen sheńber orayınıń koordinataları hám radiusın anıqlań:
 - 1) $(x-7)^2 + (y+2)^2 = 25$; 2) $(x-4)^2 + y^2 = 1$.
11. $x^2 + y^2 = 100$ teńleme menen berilgen sheńberde: 1) abscissası 8 ge teń; 2) ordinatası -6 ǵa teń noqatların tabıń.

Bilip qoyǵan paydah!

Shaxmat (parıssha *shohmat* — shah jeńildi) sport túri bolıp, oyınınıń maqseti qarsılas shahtı mat etiwden ibarat. Eki túrli reńdegi (aq hám qara) 64 ketekli taxtada eki túrli reńdegi 16 dan dana (birewden shah hár forzin; 2 ewden ruwx, pil hám at; 8 den piyada) menen oynaladı.

Shaxmat partiyasınıń jazıwında Siz shaxmatshılardıń oyın dawamında taslar menen etken barlıq júrislerin oqıy alıwıńız múmkin. Máselen, at b1-c3 degen jazıw attıń b1 ketekten c3 ketekke etken háreketin bildiredi. Bulardıń barlıǵı shxmat taxtasındaǵı koordinatalar sisteması bolıp tabıladı.



34. TUWRÍ SIZÍQ TEŇLEMESI. GEOMETRIYALÍQ MÁSELELER SHESHIWDÍŇ KOORDINATALAR USÍLÍ

1. Tuwrı sızıq teñlemesi.

Teorema.

Tuwrı sızıqtıń tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasındaǵı teñlemesi tómendegi kóriniske iye:

$$ax + by + c = 0, \quad (1)$$

bunda a, b, c — qálegen sanlar, a hám b sanlardan biri nolge teń emes.

Dánil. l tuwrı sızıq tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasındaǵı qálegen tuwrı sızıq bolsın. l ge perpendikulyar qandayda bir tuwrı sızıqtı ótkizemiz hám oǵan l tuwrı sızıq penen kesiskeń noqatı C dan baslap teń CA hám CB kesindilerdi qoyamız (1-súwret). x_1, y_1 — A noqatıń koordinataları, x_2, y_2 — B noqatıń koordinataları bolsın. Orta perpendikulyar l tuwrı sızıqqa jatqan qálegen $D(x; y)$ noqat A hám B noqatlardan teń uzaqlasqan boladı, yaǵnıy $DA = DB$, bunnan $DA^2 = DB^2$. Bul teńlikti koor-dinatalarda jazıp, tómendegini payda etemiz:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2. \quad (2)$$

Qawsırma ishindegi ańlatpalardı kvadratqa asırıp hám teñlemeдегі uqsas aǵzalardı jıynaǵan soń, (2) teñleme tómendegi kóriniske keledi:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0. \quad (3)$$

x_1, y_1, x_2, y_2 — qálegen sanlar, sol sebepli $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$ hám $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = c$ dep belgilep, olardı (3) teñlemege qoyıp:

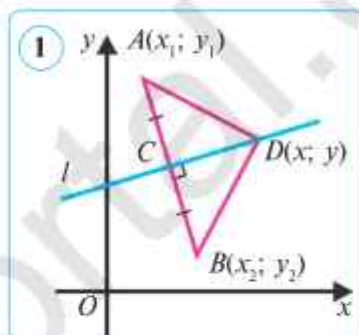
$$ax + by + c = 0$$

teñlemeni payda etemiz, bunda a, b hám c — qanday da bir sanlar.

D — l tuwrı sızıqtaǵı qálegen noqat, sonıń ushın (1) teñlemeni berilgen tuwrı sızıqtaǵı qálegen noqatıń koordinatası qanaatlandıradı.

Qandayda bir D_0 noqatıń x_0 hám y_0 koordinataları (1) teñlemeni qanaatlандırsın. Ol jaǵdayda $D_0A = D_0B$, yaǵnıy D_0 noqat A hám B noqatlardan teńdey uzaqlasqan boladı, demek, AB kesindiniń orta perpendikulyar l tuwrı sızıqqa tiyisli boladı. A hám B — hár túrli eki noqat bolǵanı ushın $(x_2 - x_1)$ yaki $(y_2 - y_1)$ ayırmalardan biri, yaǵnıy a hám b sanlardan biri nolge teń emesligin aytıp ótemiz.

1-másele. $A(1; -1)$ hám $B(-3; 2)$ noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq teñlemesin dúziń.



Sheshiliwi. AB tuwrı sızıqtıń teńlemesi $ax + by + c = 0$ kóriniste ańlatıwın bilemiz. A hám B noqatlar AB tuwrı sızıqta jatadı, demek, olardıń koordinataların tuwrı sızıq teńlemesine qoyıp, usı teńlemelerdi payda etemiz:

$$a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c = 0, \quad a \cdot (-3) + b \cdot 2 + c = 0 \quad \text{yamasa}$$

$$a - b + c = 0, \quad -3a + 2b + c = 0.$$

Bul teńlemelerden a hám b koefficientlerin c arqalı ańlatamız: $a = 3c$, $b = 4c$. a hám b nıń bul mánislerin tuwrı sızıq teńlemesine qoyıp tabamız: $3cx + 4cy + c = 0$, bunda $c \neq 0$.

Bul teńleme AB tuwrı sızıqtıń teńlemesi boladı. Joqarıdağı teńlemeni c ğa qısqartıp, tómendegi kóriniske keltiremiz: $3x + 4y + 1 = 0$.

Bul teńleme izlenip atırğan tuwrı sızıq teńlemesi bolıp tabıladı.

2. Tuwrı sızıqtıń koordinatalar sistemasına salıstırmalı jaylasıwı.

Endi $ax + by + c = 0$ tuwrı sızıq teńlemesiniń úsh jeke jaǵdayın kórip sıǵamız. Hárбір jaǵday ushın tuwrı sızıqtıń koordinatalar kósherlerine salıstırmalı qalay jaylasqanın anıqlaymız.

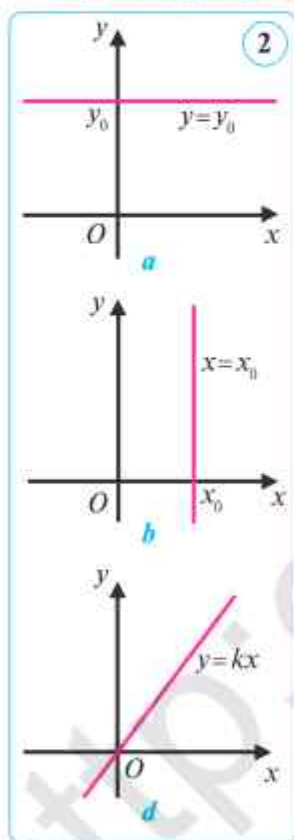
1-jaǵday. $a = 0$, $b \neq 0$. Bul jaǵdayda tuwrı sızıq teńlemesin $by + c = 0$ yaqı $y = y_0$ kóriniste jazıw múmkin, bunda $y_0 = -\frac{c}{b}$ — qandayda bir san. $y = y_0$ tuwrı sızıqtıń barlıq noqatları birdey ordinataǵa iye, demek, ol abscissalar kósherine parallel (2-a súwret). Eger $c = 0$ bolsa, onıń menen ústi-üstine túsedi. $y = 0$ — abscissalar kósheriniń teńlemesi.

2-jaǵday. $a \neq 0$, $b = 0$. Bul jaǵdayda tuwrı sızıq teńlemesin $ax + c = 0$ yaqı $x = x_0$ kóriniste jazıw múmkin, bunda $x_0 = -\frac{c}{a}$ — qandayda bir san. $x = x_0$ tuwrı sızıqtıń barlıq noqatları birdey abscissaǵa iye, demek, ol ordinatalar kósherine parallel (2-b súwret). Eger $c = 0$ bolsa, onıń menen ústi-üstine túsedi. $x = 0$ — abscissalar kósheriniń teńlemesi.

3-jaǵday. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Bul jaǵdayda tuwrı sızıq teńlemesin $ax + by = 0$ yaqı $y = kx$ kóriniste jazıwǵa boladı, bunda $k = -\frac{a}{b}$ — qandayda bir san.

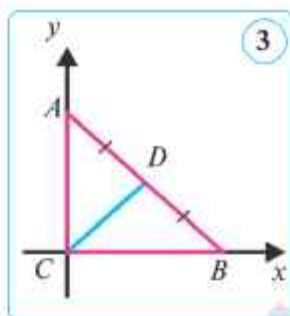
$y = kx$ tuwrı sızıq koordinatalar basınan ótedi (2-d súwret).

3. Geometriyalıq máselelerdi sheshiwdiń koordinatalar usılı. Kóplegen geometriyalıq máselelerdi kesindi ortasınıń koordinataları hám eki noqat arasındaqı aralıqtı esaplaw formalarınan paydalanıp sheshiw múmkin. Usı maqsette tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasın kirgiziw hám másele niń shártin koordinatalarda jazıp alıw kerek. Sonnan soń másele algebralıq esaplawlar járdeminde sheshiledi.



2-másele. Tuvrı múyeshli úshmúyeshlikte gipotenuzanın ortası barlıq tóbelerinen teń uzaqlasqan. Sonı dálilleń.

Sheshiliwi. Tuvrı múyeshli ABC ($\angle C = 90^\circ$) úshmúyeshlikti kórip shıǵamız. AB kesindiniń ortasını D háribi menen belgileybiz. 3-súwrette kórsetilgende, tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasın kirgizemiz. Eger $BC = a$, $AC = b$ bolsa, ol jaǵdayda úshmúyeshliktiń tóbeleri $C(0; 0)$, $B(a; 0)$ hám $A(0; b)$ koordinatalarǵa iye boladı. Kesindi ortasınıń koordinataları formulasına muwapıq D noqat koordinataların tabamız: $D(0,5a; 0,5b)$.



Noqatlar arasındaqı aralıqtı tabıw formulasınan paydalanıp, DC hám DA kesindileriniń uzınlıqların tabamız:

$$DC = \sqrt{(0,5a)^2 + (0,5b)^2} = \sqrt{0,25(a^2 + b^2)} = 0,5\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$DA = \sqrt{(0,5a)^2 + (0,5b - b)^2} = \sqrt{0,25a^2 + 0,25b^2} = \sqrt{0,25(a^2 + b^2)} = 0,5\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Solay etip, $DA = DB = DC$ eken. Usını dálillew talap etilgen edi.

Soraw, másele hám tapırmalar

- 1) Tuvrı sıziqtıń tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasında $ax + by + c = 0$ kórinisindegi teńlemege iye bolıwın dálilleń.
- 2) Tuvrı sıziqtıń $ax + by + c = 0$ teńlemesinde $a = 0$ ($b = 0$; $c = 0$) bolsa, tuwrı sıziq qalay jaylasadı?
2. $A(3; -1)$, $B(-3; 0)$, $C(12; 5)$, $D(3; 0)$ hám $E(-9; -2)$ noqatlardıń qaysıları $x - 3y + 3 = 0$ teńleme menen berilgen tuwrı sıziqqa tiyisli, qaysıları tiyisli emes?
3. 1) $A(1; 7)$ hám $B(-3; -1)$; 2) $A(2; 5)$ hám $B(5; 2)$; 3) $A(0; 1)$ hám $B(-4; -5)$ noqatlardan ótiwshi tuwrı sıziq teńlemesin dúziń.
4. $x + y + c = 0$ tuwrı sıziq $(1; 2)$ noqattan ótse, onıń teńlemesindegi c coefficient nege teń?
5. Eger $ax + by - 1 = 0$ tuwrı sıziqtıń $(1; 2)$ hám $(2; 1)$ noqatlardan ótiwi belgili bolsa, onıń teńlemesindegi a hám b coefficientler nege teń?
6. 1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $3x + 4y = 12$; 3) $4x - 2y - 10 = 0$ teńleme menen berilgen tuwrı sıziqtıń koordinatalar kósherleri menen kesisiw noqatların tabıń.
7. Eger: 1) $A(3; -1)$, $B(5; 5)$; 2) $A(3; 6)$, $B(-5; -2)$ bolsa, $C(4; 2)$ noqat AB kesindiniń ortası bolıw-bolmaslıǵın tekseriń.
8. $A(0; -2)$, $B(4; 2)$, $C(-4; -5)$ noqatlardıń qaysıları $8x - 4y - 8 = 0$ teńleme menen berilgen tuwrı sıziqqa tiyisli, qaysıları tiyisli emes?
9. Eger $A(-1; -1)$, $B(-1; 3)$ hám $C(2; 2)$ bolsa, ABC úshmúyeshlik táreplerin óz ishine alǵan tuwrı sıziqlar teńlemesin dúziń.

35. VEKTOR TÚSINIĞI. VEKTORDIŇ UZINLIĞI HÁM BAĞITI

1. Vektor shamalar. Vektor. Sizge málim bolğan shamalar eki kóriniste bolıwı múmkin. Sonday shamalar bar, olar ózleriniń san mánisleri menen (berilgen ólshem birliginde) tolıq ańlatıladı. Mısalı, uzınlıq, maydan, awırılıq usılar qatarınan.

1-anıqlama. *Tek san mánisi menen ańıqlanatuǵın shamalar **skalyar shamalar** delinedi.*

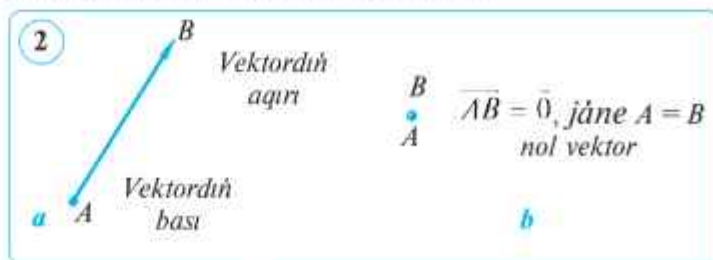
Jáne sonday shamalar bar, olardı tolıq biliw ushın bul shamalardı ańlatıwshı san mánislerinen tısqarı, olardıń baǵıtların da biliw zárúr boladı. Mısalı, tezlik, kúsh hám basım usılar qatarınan.

Vektor — geometriyanıń tiykarǵı túsiniklerinen biri bolıp, ol san (uzınlıq) hám baǵıtı menen tolıq ańıqlanadı. Kórgizbeli bolıwı ushın onı baǵıtlangan kesindi kórinisinde kóz aldımızǵa keltiriwmiz múmkin. Negizinde vektorlar haqqında ayılǵanda, hámmesi óz-ara parallel bir túrdegi uzınlıq hám bir túrdegi baǵıtqa iye bolğan baǵıtlangan kesindilerdiń pütün bir klasın názerde tutıw durıs boladı.

2-anıqlama. *San mánisi hám baǵıtı menen ańıqlanatuǵın (sıpatlanatuǵın) shamalar **vektor shamalar** yamasa **vektorlar** dep ataladı.*

Fizika, mexanika hám matematikanıń san menen ǵana emes, al baǵıtı menen xarakterlenetuǵın muǵdarlardı tekseriwshı túrli máselelerdi vektor túsinigine alıp keledi. Máselen, kúsh, tezlik — bular vektorlar.

Vektorlıq shamalardı biz júdá kóp jaǵdaylarda ushıratamız. Mısalı: transportta ketip baratırǵanıńızda háreket tezligi, burılıw yamasa toqtawı menen baylanıslı vektorlıq shamalardı kóriwińiz múmkin. Tábiyattı úyreniwshı pánlerde olar tezleniw, inerciya kúshi, oraydan qospa kúsh hám soǵan uqsas atamalar menen ataladı. Biz vektorlıq shamalardı tábiyiy mánisin esapqa almaǵan halda onıń matematikalıq tábiyatın úyrenemiz. Álbette, vektorlıq shamalardıń matematikalıq qásiyetleri óziniń tábiyiy mánisine iye boladı.



Vektorlıq shamaların san kölemin kesindi arqalı ańlatamız. Bizge málim, hárqanday kesindiniń eki tóbesi bar. Olardan birewin vektordıń **bası** dep, ekinshi tóbesin vektorlıq shama baǵıtına sáykes baǵıtlaymız hám strelka (baǵıt) penen belgileybiz. Bunı vektordıń **tóbesi** deymiz.

3-anıqlama. ***Vektor** (vektorlıq shamalar) dep, baǵıtqa iye bolǵan kesindige aytladı.*

Vektorlıq shamanıń baǵıtı kórsetilgen kesindi sıpatında súwretlenedi. Vektordı ańlatıwshı kesindi tóbesi A hám B noqatta bolsa, A noqattan B noqatqa baǵıtlangan vektor $\overrightarrow{AB}$ túrinde belgilenedi. Sonday-aq, vektorlar $\vec{a}$, $\vec{b}$ (latin álipbesiniń kishi háripleri) túrinde de belgileniwı múmkin (1-súwret).

Oqılwr: $\overrightarrow{AB}$ vektor yamasa $\vec{a}$ vektor.

1) Vektordıń baǵıtı onıń bası hám aqırın kórsetiw menen anıqlanadı. Bunda vektor bası birinshi orınǵa qoyıladı (2-a súwret).

AB nurın anıqlap bergen baǵıtın $\overrightarrow{AB}$ vektordıń *baǵıtı* delinedi. Bası hám aqırı betpe-bet túsken vektor *nol vektor* dep ataladı. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ teńlik A hám B noqatlardıń betpe-bet túskenin bildiredi (2-b, súwret).

2) Vektordı ańlatıwshı kesindiniń uzınlıǵı vektordıń *moduli* yamasa *absolyut* mánisi dep ataladı.

Vektordıń moduli $|\overrightarrow{AB}|$ yamasa $|\vec{a}|$ túrinde belgilenedi (3-súwret).

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorınıń moduli AB kesindiniń uzınlıǵı bolıp esaplanadı: $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Sonıń ushın geometriyada vektordıń moduli yamasa absolyut mánisi onıń *uzınlıǵı* dep ataladı.

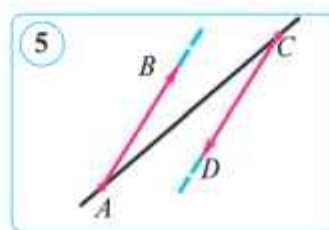
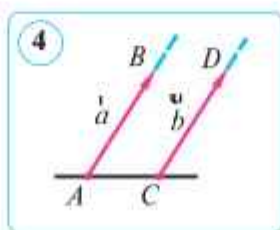
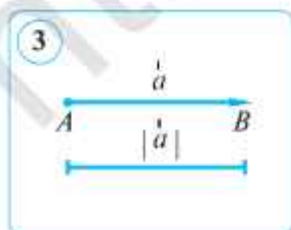
Nol vektordıń uzınlıǵı (moduli) nolge teń dep esaplanadı: $|\vec{0}| = 0$.

2. Vektorlardıń teńligi.

4-anıqlama. *Bir tuwrı sızıqta yamasa parallel tuwrı sızılarda jatıwshı vektorlar **kollinear vektorlar** dep ataladı.*

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń kollinearlıǵı $\vec{a} \parallel \vec{b}$ túrinde jazıladı..

Eger parallel tuwrı sızılarda jatıwshı eki vektor olardıń bası arqalı ótken tuwrı sızıqtan bir tárepte jatsa, *baǵıtlas vektorlar* (4-súwret); 2) tuwrı sızıqqa qarata hár tárepte jatsa, *qarama-qarsı baǵıtlangan vektorlar* delinedi (5-súwret).



- $\overline{AB}$ hám $\overline{CD}$ vektorlar: 1) *bağıtlas* bolsa, olar $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ sıyaqlı
2) *qarama-qarsı bağıtlangan* bolsa, $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ türinde belgilenedi.
Nol vektor qálegen vektorga kollinear dep esaplanadı

5-anıqlama. Eger $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń uzınlıqları teń hám bağıtları birdey bolsa, bul vektorlar **teń vektorlar** dep ataladı.

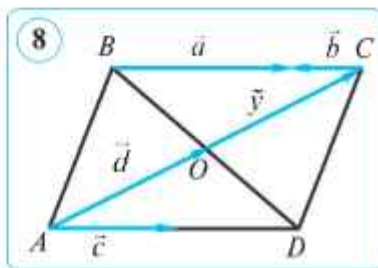
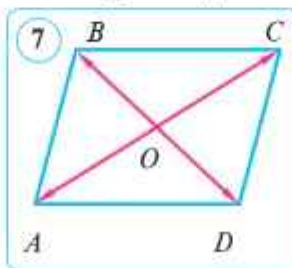
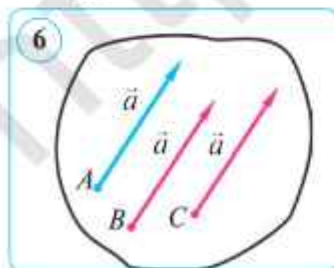
Solay etip, eger $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ hám $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ bolsa, $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar teń boladı. Vektorlardıń teńligi $\vec{a} = \vec{b}$ türinde jazıladı.

Vektorlardıń teńligi onıń bası tegisliktiń qálegen noqatında bolıwın kórsetedi (6-súwret), yaǵnıy vektordıń modulin ózgerterpey, bağıtın saqlaǵan halda onıń basın tegisliktiń qálegen noqatına kóshiriw múmkin eken. Bul *vektordıń parallel kóshiriw qásiyeti* dep ataladı.



Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Vektor degen ne? Vektorlar qalay belgilenedi?
- 2) Qanday eki vektor teń vektorlar delinedi? Qanday vektorlar birdey (qarama-qarsı) bağıtlangan vektorlar delinedi? Vektordıń moduli deren ne?
3. $ABCD$ parallelogrammda (7-súwret): 1) $\overline{DC}$ vektor menen bağıtlas; 2) $\overline{AO}$ vektor menen bağıtlas; 3) $\overline{AD}$ vektorga qarama-qarsı bağıtlangan; 4) $\overline{BD}$ vektorga qarama-qarsı bağıtlangan; 5) $\overline{AB}$ vektorga teń; 6) $\overline{OC}$ vektorga teń; 7) $\overline{OB}$ vektorga teń vektorlardı jazıń.
4. $ABCD$ parallelogrammnıń diagonalları O noqatta kesilisedi. Onıń tóbe-leri hám diagonallarınıń kesilisiw noqatı menen belgilengen vektorlardı jazıń. Olardıń ishinen qaysıları: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ hám $\overline{BO}$ vektorlarga kollinear?
5. Eger: 1) $\overline{AD} = \overline{BC}$ hám $|\overline{AD}| = |\overline{DC}|$; 2) $\overline{AD} \uparrow\uparrow \overline{BC}$, $\overline{AB}$ hám $\overline{DC}$ vektorlar kolleniir emes bolsa, $ABCD$ tórtmüyeshliktiń türin anıqlań.
6. $\overline{AB} = \overline{CD}$ ekenligi málim. Usı tastıyıqlawlar durıs pa:
1) $AB \parallel CD$; 2) $|AB| = |CD|$?
7. $ABCD$ — parallelogramm. 8-súwrette berilgen: vektorlar ishinen: 1) kollinear; 2) bağıtlas; 3) qarama-qarsı bağıtlangan; 4) teń uzınlıqlarǵa iye bolǵan vektorlar juplıǵın kórsetiń.
8. $\overline{AB}$ hám $\overline{BA}$ vektorlardıń bağıtı haqqında ne dew múmkin?



36 — 37. VEKTORLARDI QOSIW HÁM ALIW

1. Vektorlardi qosiw. Bizge $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar berilgen bolsin (1-a súwret). Qálegen A noqattı belgileymiz hám bul noqatdan $\vec{a}$ vektorga teń $\overrightarrow{AB}$ vektordı qoyamız. Bunnan soń B noqatdan $\vec{b}$ vektorga teń $\overrightarrow{BC}$ vektorın qoyamız. Endi $\vec{a}$ vektordıń bası A noqattan $\vec{b}$ vektor tóbesi C ğa bağıtlangan vektor ótkizemiz (1-b súwret). $\overrightarrow{AC}$ vektor $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń qosındısı delinedi. Vektorlardı qosıwdıń bul qağıydasin «úshmúyesh (úsh noqat) qağıydası» delinedi.

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlarınıń qosındısı $\vec{a} + \vec{b}$ túrinde belgilenedi

Ushmúyeshlik qağıydasin tómendegishe dálillesekde boladı:

eger A, B hám C — qálegen noqatlar bolsa, onda tómendegi teńlik orınlı:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Úshmúyeshlik qağıydası qálegen A, B hám C noqatlar ushın, sonıń menen bir qatarda olardan ekewi yamasa úshewi betpe-bet tússe de orınlı boladı (1-d súwret).

2. Vektorlardı qosiw nızamları. Bizge málim, parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri óz ara teń hám parallel. Eger bağıtları birdey bolsa, parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri teń vektorlardı ańlatadı.

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ — kollinear emes vektorlar bolsin. Qálegen A noqattan $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ hám $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektorlardı qoyamız hám tárepleri usı vektordan dúzilgen $ABCD$ parallelogramm sızamız (2-súwret). Úshmúyeshlik qağıydası boyınsha:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{hám} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}.$$

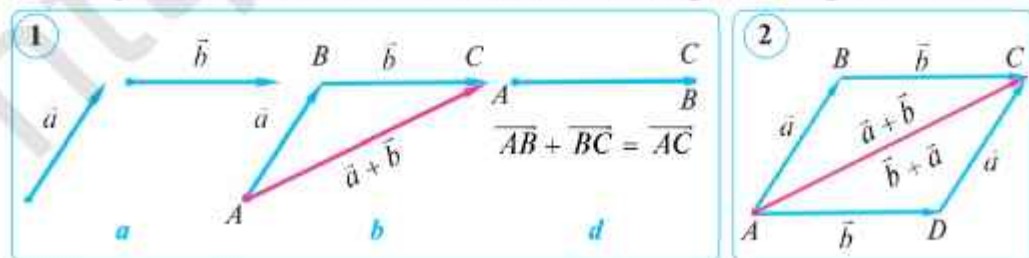
Bunnan $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ kelip shıǵadı.

Demek, vektorlar qosındısı olardıń qanday tártipte izbe-iz jaylasıwına baylanıslı emes, yaǵnıy qálegen $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar ushın tómendegi teńlik orınlı:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Buǵan vektorlardı qosıwdıń *orın almasıw nızamı* dep ataladı.

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardan dúzilgen $ABCD$ parallelogrammda qosındı $\overrightarrow{AC}$ vektor qosılıwshı vektorlardıń ulıwma basınan shıǵıwshı diagonaldan ibarat.



Ádette, vektorlardı bunday qosıw, vektorlardı qosıwdıń «*paralelogramm qaǵıydası (usılı)*» dep ataladı. (2-súwret).

Endi úsh $\vec{a}$, $\vec{b}$ hám $\vec{c}$ vektor qosındısıń kóreyik (3-súwret). Qálegen A noqattan $\vec{AB} = \vec{a}$ vektordı, B noqattan $\vec{BC} = \vec{b}$ vektordı, C noqattan bolsa $\vec{CD} = \vec{c}$ vektordı qoyamız. Úshmúyeshlik qaǵıydasın qollanıp, tómendegige iye bolamız:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD};$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}.$$

Bunda, qálegen $\vec{a}$, $\vec{b}$ hám $\vec{c}$ vektorlar ushın

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

teńlik orınlı ekenligi kelip shıǵadı. Bul vektorlardı qosıwdıń *gruppalaw nızamı (qásiyeti)*.

Vektorlardıń hár biri nolden parqlı bolǵanda olardıń qosındısı nol vektor bolıwı múmkin.

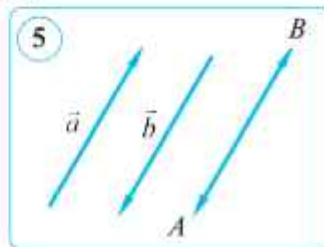
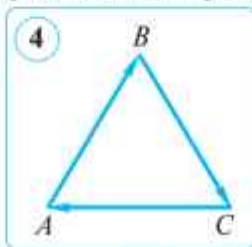
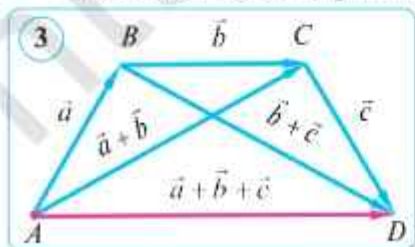
Mısalı, ABC úshmúyeshlikti alıp qarayıq (4-súwret). Bunda $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ hám $\vec{CA}$ vektorlar qosındısı nol vektor boladı, yaǵnıy: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$, sebebi birinshi vektordıń bası menen úshinshi vektordıń tóbesi betpe-bet túsedi. Demek, qosındı vektor nol vektor — noqat boldı.

1-anıqlama. Eki vektordıń qosındısı nol vektor bolsa, olar **qarama-qarsı vektorlar** dep ataladı.

Demek, eger $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ bolsa, onda $\vec{b} = \vec{BA}$ vektor $\vec{a} = \vec{AB}$ vektorǵa (keri) **qarama-qarsı vektor** dep ataladı hám $\vec{b} = -\vec{a}$, $\vec{a} = -\vec{b}$ sıyaqlı jazıladı (5-súwret). Eger qarama-qarsı vektorlardı (úshmúyeshlik qaǵıydası boyınsha) qossaq, onda nol vektor kelip shıǵadı. Bunda $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar parallel bolıp, túrli tárepke baǵıtlangan boladı. Demek, *hár bir $\vec{a}$ vektor ushın oǵan qarama-qarsı $-\vec{a}$ vektor bar* (yaǵnıy $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$) boladı. Joqarıdaǵı pikirlerden tómendegı juwmaqqa kelemiz.

Eger nol bolmagan eki vektordıń uzınlıqları teń hám olar **qarama-qarsı baǵıtlangan** bolsa, olar **qarama-qarsı vektorlar** dep ataladı.

Nol vektor öz-ózine qarama-qarsı vektor esaplanadı.



3. Vektorlardı alıw. Vektorlardı ayırıw sanlardı ayırıw sıyaqlı qosıwǵa kerı ámel.

2-anıqlama. $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń ayırması dep, sonday $\vec{c}$ vektorǵa aytıladı, $\vec{b}$ vektor menen qosındısı $\vec{a}$ vektordı beredi: $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń ayırması tap usı sanlardıń ayırması sıyaqlı belgilenedi: $\vec{a} - \vec{b}$. Eki vektordıń ayırması birinshi vektorǵa ekinshi vektorǵa qarama-qarsı vektrodi qosıw sıpatında anıqlanadı hám ol $\vec{a} + (-\vec{b})$ vektorǵa teń (6-b súwret).

Bizge $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ berilgen bolsın (6-a súwret). $\vec{a}$ vektor menen $\vec{b}$ vektorǵa qarama-qarsı bolǵan $-\vec{b}$ vektordıń qosındısın kóreyik.

Qálegen $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar ushın $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ teńlik orınlı.

Haqıyqattan da, $(\vec{a} + (-\vec{b})) + \vec{b} = \vec{a} + ((-\vec{b}) + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Eger $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar bir O noqattan qoyılǵan bolsa, ol jaǵdayda $\vec{a} - \vec{b}$ ayırmanı tabıw ushın tómendegi qaǵıyadan paydalanıw qolaylı (6-d súwret):

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

Joqarıda kórsetilgenindey, ayırılıwshı vektordıń *aqırı ayırma vektordıń bası, kemeyiwshı vektordıń aqırı bolsa ayırma vektordıń aqırı* wazıypasın atqaradı eken. Qaǵıydanı este saqlap qalıw qolay bolıwın támiyinlew maqsetinde, ol sxemalıq tárizde kórsetildi.

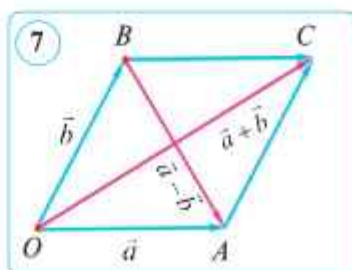
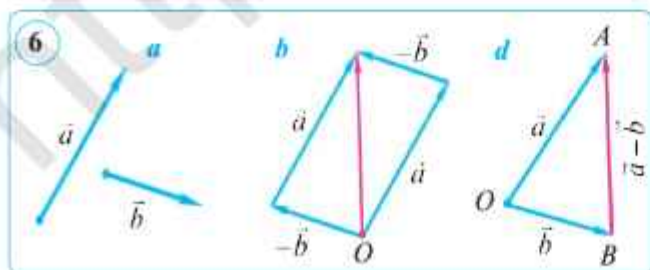
Vektordı qosıwda parallelogramm usılınan paydalansaq (7-súwret), ayırma vektor parallelogrammnnıń ekinshi diagonalınan ibarat boladı.

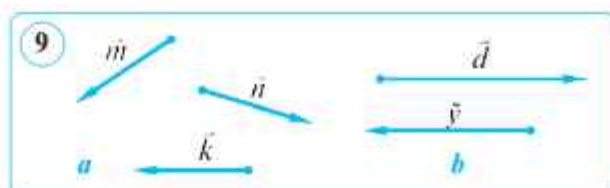
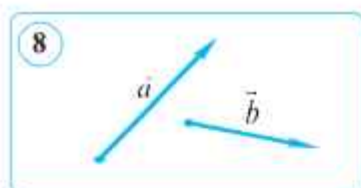
Másele. ABC úshmúyeshlik berilgen. Tómendegi. 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ vektorlardı $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ hám $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ vektorları arqalı ańlatıń.

Sheshiliwi. 1) $\overrightarrow{BA}$ hám $\overrightarrow{AB}$ — qarama-qarsı vektorlar, sonıń ushın $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ yamasa $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.

2) Úshmúyeshlik qaǵıydası boyınsha: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$. Biraq $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, sonıń úshin

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}.$$





Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Ushmúyeshlik hám parallelogramm qağıydası boyınsha vektorlar qosındısı qalay tabıladı? Eki vektor ayırması dep nege ayıladı?

2) Berilgen vektorğa qarama-qarsı vektor dep nege ayıladı?

2. 8-súwrette $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar súwretlengen. $\vec{a} + \vec{b}$ vektordı eki usıl menen sızıń.

3. 9-súwrette $\vec{m}$, $\vec{n}$ hám $\vec{k}$ hám de $\vec{d}$ hám $\vec{e}$ vektorlar súwretlengen. Vektorlardı sızıń: 1) $\vec{m} + \vec{n} + \vec{k}$; 2) $\vec{d} + \vec{e}$.

4. 10-súwrette $\vec{a}$, $\vec{b}$ hám $\vec{c}$ hám de $\vec{d}$ hám $\vec{e}$ vektorlar súwretlengen. Vektorlardı sızıń: 1) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; 2) $\vec{e} - \vec{d}$.

5. $ABCD$ parallelogramm berilgen. $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ teńlik orınlanadı ma? Tekserip kóriń.

6. $ABCD$ rombıda: $AD = 20$ cm, $BD = 24$ cm, O — diagonallarınıń kesilişiw noqatı. $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OB}|$ nı tabıń.

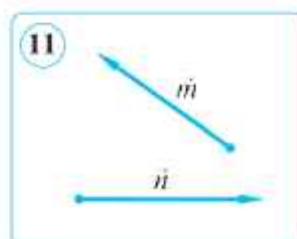
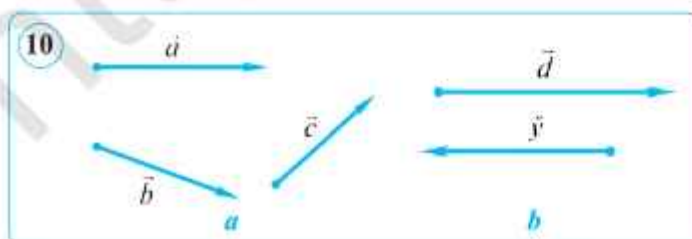
7. $ABCD$ — qálegen tórtmúyeshlik. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ ekenligin dálilleń.

8. $ABCD$ — parallelogramm. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ vektor teńlikti dálilleń (vektorlardı qosıwdıń «parallelogramm qağıydası»).

9. $ABCD$ parallelogrammda: $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ vektorlardı $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar arqalı ańlatıń.

10. E hám F — ABC úshmúyeshliktiń AB hám AC tárepleriniń ortaları. $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EF}$ hám $\overrightarrow{BC}$ vektorlardı $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ hám $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$ vektorlar arqalı ańlatıń.

11. 11-súwrette $\vec{m}$ hám $\vec{n}$ vektorlar súwretlengen. $\vec{m} + \vec{n}$ vektordı eki usıl menen jasań.



38 — 39. VEKTORDI SANGA KÓBEYTIW. VEKTORDIŇ KOORDINATALARI

1. Vektorlardı sanga kóbeytiw. Qanday da bir $\vec{a}$ vektordı alamız hám $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ qosındısıñ tabamız (1-súwret). Bunday qosındısını $3 \cdot \vec{a}$ dep belgiley-miz hám bul ańlatpanı $\vec{a}$ vektordıñ 3 sanına kóbeymesi dep atawımız tábiyiy.

Anıqlama. *Nol bolmağan $\vec{a}$ vektordıñ k sanga kóbeymesi dep sonday $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ vektorğa ayıladı, bunda onıñ uzınlığı $|k| \cdot |\vec{a}|$ sanga teń bolıp, bağıtı $k > 0$ bolğanda $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektor bağıtı menen birdey, $k < 0$ bolğanda bolsa bağıtları qarama-qarsı boladı.*

Nol vektordıñ qálegen sanga kóbeymesi nol vektor dep esaplanadı.

$\vec{a}$ vektordıñ k sanga kóbeymesi $k\vec{a}$ túrinde belgilenedi (san kóbeytiwshi shep tárepke jazıladı). Anıqlama boyınsha:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|.$$

Vektordıñ sanga kóbeymesi anıqlamadan anıq tómendegiler kelip shıǵadı:

1) qálegen vektordıñ nolge kóbeymesi nol vektor boladı; 2) qálegen san hám qálegen $\vec{a}$ vektor ushın $\vec{a}$ hám $k\vec{a}$ vektorlar kollinear.

Endi vektordı sanga kóbeytiwdiñ tiykarǵı qásiyetlerin sanap ótemiz.

Qalegen $\vec{a}$, $\vec{b}$ ektorlar hám qálegen k , l sanlar ushın teńlikler orınlı:

1°. $(k \cdot l)\vec{a} = k \cdot (l\vec{a})$ — gruppalaş nızamı.

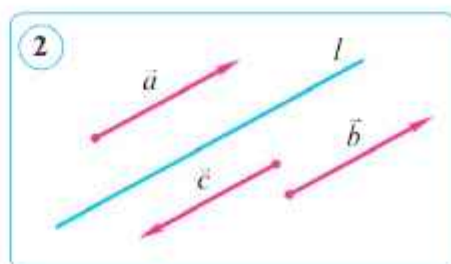
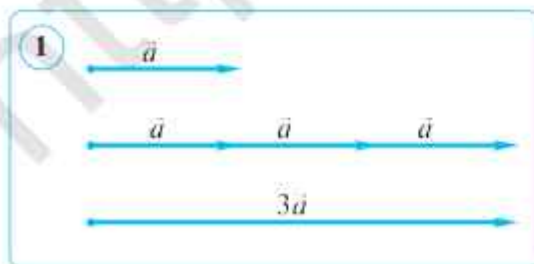
2°. $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ — birinshi bólistiriw nızamı.

3°. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — ekinshi bólistiriw nızamı.

4°. $k \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Parallel tuwrı sızıqlarǵa yamasa bir tuwrı sızıqta jatıwshı eki vektordı kollinear vektorlar dep atalıwın jáne bir esletip ótemiz.

1 tuwrı sızıq hám oǵan parallel bolǵan $\vec{a}$, $\vec{b}$ hám $\vec{c}$ vektorlar berilgen bolsın (2-súwret). Anıqlama boyınsha, $\vec{a}$, $\vec{b}$ hám $\vec{c}$ vektorlar kollinear vektorlar boladı. Bul jerde $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar birdey baǵıtlanǵan, $\vec{c}$ vektor bolsa $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlarǵa qarata qarama-qarsı baǵıtlanǵan.



Bizge málim, vektordı sánga kóbeytkende kóbeyme vektordıń bağıtı berilgen vektorga parallel boladı. Bunnan tómendegi juwmaqtı payda etemiz:

vektordıń sánga kóbeymesi sol vektorga kollinear vektor boladı.

Teorema.

Vektor óziniń moduline teń sánga bólinse, sol vektorga kollinear birlik vektor payda boladı.

Dáلیل. $\vec{a}$ vektordıń moduli $|\vec{a}|$ bolsın. $\vec{a}$ vektordıń $k = \frac{1}{|\vec{a}|}$ sánga kóbeymesin qarayıq:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Demek, kóbeyme vektor moduli bir birlikke teń.

Moduli birge teń vektordı *birlik vektor* dep ataymız. Eger $\vec{a}$ vektor boyınsha bağıtlangan birlik vektordı $\vec{e}$ dep belgilesek, teorema boyınsha: $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ yamasa bul teńlikti $|\vec{a}|$ sánga kóbeyttirsek: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Nátiyjede, biz vektorlardı úyreniwde úlken áhmiyetke iye bolǵan teńlikti payda ettik, yaǵnıy *hárqanday vektor sol vektor moduli menen ózine kollinear birlik vektordıń kóbeymesine teń eken.*

1-másele. k nıń qanday mánisinde tómendegi ańlatpalar orınlı boladı:

$$1) |k\vec{a}| < |\vec{a}|; \quad 2) |k\vec{a}| > |\vec{a}|; \quad 3) |k\vec{a}| = |\vec{a}|, \text{ bul jerde } \vec{a} \neq \vec{0}?$$

Sheshiliwi. 1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ da $|k\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| < 1 \Leftrightarrow -1 < k < 1$;

$$2) \vec{a} \neq \vec{0} \text{ da } |k\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| > 1 \Leftrightarrow k < -1 \text{ yaqı } k > 1;$$

$$3) \vec{a} \neq \vec{0} \text{ da } |k\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow k = -1 \text{ yaqı } k = 1.$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$ da $|\vec{a}| > 0$. Bizge belgili teńsizlik yaqı teńlemenin hár eki bólimi oń sánga bólssek, qatnas ózgermeydi.

Juwabı: 1) $-1 < k < 1$; 2) $k < -1$ yaqı $k > 1$; 3) $k = -1$ yaqı $k = 1$ da ańlatpalar orınlı boladı.

2. Vektorlardıń koordinataları. Tegislikte xOy Dekart koordinatalar sisteması berilgen, yaǵnıy koordinatalar bası O noqat, koordinata kósherleriniń bağıtı hám masshtab birligi – birlik kesindi berilgen bolsın. Bunda tegisliktegi qálegen A noqat óziniń abscissası x hám ordinatası y ge iye boladı: $A(x; y)$. Moduli bir birlikke iye bolǵan hám de bağıtı Ox kósheri boyınsha bağıtlangan vektordı $\vec{i}$ menen, tap sonday, Oy kósheri boyınsha bağıtlangan birlik vektordı $\vec{j}$ menen belgileymiz (3-a súwret).

Tegislikte koordinataları $(x; y)$ bolğan A noqatı berilgen bolsın. OA_xA úshmüyeshligin qarayıq. Bul úshmüyeshlikte $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{A_xA}$. Biraq $OA_x = x$, $A_xA = OA_y = y$ bolğanı ushın $\overrightarrow{OA_x} = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{A_xA} = y \cdot \vec{j}$ boladı. Bunnan

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \quad (1)$$

teńlikti payda etemiz. Bul (1) teńlik vektordıń *koordinata ańlatpası* dep ataladı.

Demek, bası koordinatalar basında, tóbesi $A(x; y)$ noqatında bolğan vektordı koordinata kósherleri boyınsha berilgen $\vec{i}$ hám $\vec{j}$ vektorlar arqalı kóriniste jazıw múmkin.

Bunda $(\vec{i}; \vec{j})$ vektorlar juplıǵı *bazis vektorlar*, x hám y sanlar bolsa $\vec{a}$ vektordıń *koordinataları* dep ataladı.

Eger vektordıń (1) koordinata ańlatpası belgili bolsa, vektor koordinataları menen berilgen delinedi hám qısqasha $\vec{a}(x; y)$ kórinisinde jazıladı:

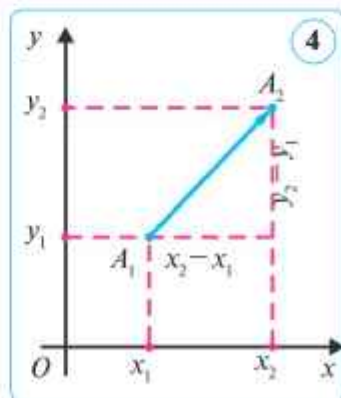
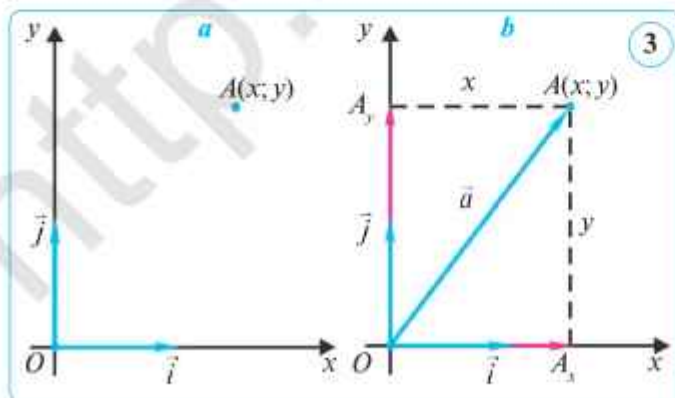
$$\vec{a}(x; y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}. \quad (2)$$

Ánıqlama. Eger $A_1(x_1; y_1)$ hám $A_2(x_2; y_2)$ bolsa, $x_2 - x_1$ hám $y_2 - y_1$ sanlar $\overrightarrow{A_1A_2}$ vektordıń *koordinataları* boladı (4-súwret).

Vektordıń koordinataları hárip penen belgileniwinen keyin qawsırma ishinde jazıladı: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Ayırım jaǵdaylarda koordinataları berilgen vektorlardı belgilewde $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ jazıwın da paydalanıladı. Nól vektordıń koordinataları nolge teń ekeni anıq: $\vec{0}(0; 0)$. Noqatlar arasındaqı aralıqtı tabıw formulası boyınsha:

$\vec{a}(a_1; a_2)$ vektordıń uzınlıǵı $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ formula boyınsha esaplanadı.

Qaǵıyda. Vektordıń koordinataların tabıw ushın onıń aqırınıń (tóbesiniń) koordinatalarınan basınıń sáykes koordinataların ayırıw kerek.



Misalı, $\overrightarrow{OA}$ vektordın koordinataları vektor aqırı (töbesi) A nıń koordinataları menen tolıq anıqlanadı, yaǵnıy vektor aqırınıń koordinatalarına teń boladı.

Eger $A(x; y)$ bolsa, $\overrightarrow{OA}(x; y) = \overline{(x; y)}$ boladı.

Koordinataları teń bolǵan vektorlardıń *qásiyeti* hám *belgisin* dálilsiz keltiremiz.

Teorema.

Teń vektorlar sáykes túrde teń koordinatalarǵa iye. Hám kerisinshe, eger vektorlardıń sáykes koordinataları teń bolsa, vektorlar teń boladı.

1-nátiyje. Eger vektor aqırınıń koordinataları vektordın koordinataları menen teń bolsa, bul jaǵdayda berilgen vektordın bası koordinatalar basında boladı (3-b súwret).

2-nátiyje. Eger $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektor menen onıń aqırı bolǵan $B(x_2; y_2)$ noqatı koordinataları berilgen bolsa bul jaǵdayda vektor bası $A(x_1; y_1)$ noqatınıń koordinataların tabıw ushın B noqatınıń koordinatalarınan $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektordın koordinataların ayırıw jeterli:

$$x_1 = x_2 - a_1; \quad y_1 = y_2 - a_2. \quad (1)$$

3-nátiyje. Eger $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektor menen onıń bası bolǵan $A(x_1; y_1)$ noqatı koordinataları berilgen bolsa, bul jaǵdayda vektor aqırı $B(x_2; y_2)$ noqatınıń koordinataların tabıw ushın A noqatınıń koordinatalarına $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektordın sáykes koordinataların qosıw jeterli:

$$x_2 = x_1 + a_1; \quad y_2 = y_1 + a_2. \quad (2)$$

2-másele. Eger $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$ hám $C(4; 1)$ bolsa, $ABCD$ parallelogramnıń tórtinshi töbesi koordinatasın tabıń.

Sheshiliwi. Eger $ABCD$ tórmúyeshlik parallelogramm bolsa, ol jaǵdayda $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ boladı. $(x; y)$ — izlenip atırǵan D töbesiniń koordinatası bolsın. $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{DC}$ vektorınıń koordinataların tabamız:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{(0 - (-2); 4 - 1)} = \overline{(2; 3)}, \quad \overrightarrow{DC} = \overline{(4 - x; 1 - y)}.$$

Solay etip, $4 - x = 2$ hám $1 - y = 3$, bunnan $x = 2$ hám $y = -2$.

Juwabı: $D(2; -2)$.

3-másele. $A(-1; 5)$ noqatı $\vec{a}(2; -3)$ vektordın bası bolsa, bul vektor aqırı B nıń koordinataların tabıń.

Sheshiw. Berilgen maǵlıwmatlardı sońǵı (2) qatnaslarǵa qoyıp, izlenip atırǵan koordinatlardı tabamız:

$$x_2 = -1 + 2 = 1, \quad y_2 = 5 + (-3) = 2.$$

Juwabı: $B(1; 2)$.

4-másele. $A(-3; 0)$ hám $B(5; -4)$ noqatlar berilgen. $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{BA}$ vektorlarınń koordinataların tabıń.

Shehiliwi. 1) $\overline{AB} = \overline{AB}(5 - (-3); -4 - 0) = \overline{AB}(8; -4) = \overline{(8; -4)}$;

2) $\overline{BA} = -\overline{AB} = -\overline{(8; -4)} = \overline{(-8; -(-4))} = \overline{(-8; 4)}$. Juwabi: $(8; -4)$; $(-8; 4)$.

Eskertiw! Qälegen vektordın koordinataları belgili bolsa, ol jaǵdayda oǵan qarama-qarsı bektordın koordinataları jáne qaytadan esaplanbastan, berilgen vektordın koordinataları belgisin qarama-qarsıǵa ózǵerttiriw jetkilikli.



Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Berilgen vektordın sanǵa kóbeymesi dep nege ayıladı?
- 2) Vektordı sanǵa kóbeytiwdiń qásiyetlerin aytn.
- 3) Koordinatalar kósherindegi birlik vektorlar qalay belgilenedi?
2. Uzunlıǵı 2 cm ge teń bolǵan $\vec{a}$ vektordı sıziń. $4\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $1,5\vec{a}$, $-1,5\vec{a}$ vektordı sıziń.
3. k nıń qanday mánislerinde $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) hám $k\vec{a}$ vektorlar:
1) baǵıtlas; 2) qarama-qarsı baǵıtlangan; 3) teń boladı?
4. $ABCD$ parallelogrammda O — diagonallardıń kesisiw noqatı, K noqat — CD táreptiń ortası. $\overline{OA}$ hám $\overline{AK}$ vektorlardı $\overline{AB} = \vec{a}$ hám $\overline{AD} = \vec{b}$ vektorlar arqalı ańlatıń.
5. C noqat AB táreptiń ortası. 1) $\overline{AC}$ vektordı $\overline{CB}$ vektor arqalı; 2) $\overline{AB}$ vektordı $\overline{CB}$ vektor arqalı; 3) $\overline{AC}$ vektordı $\overline{BA}$ vektor arqalı ańlatıń.
6. Ańlatpalardı ápiwayılastırıń:
1) $(\overline{AB} + \overline{AC}) + (\overline{BA} + \overline{CB})$; 2) $\overline{AB} - \overline{DB} - \overline{CA} + \overline{DA}$.
7. 1) $A(-1; 4)$ hám $B(3; 9)$; 2) $A(2; -5)$ hám $B(1; -1)$; 3) $A(3; 2)$ hám $B(3; 2)$ noqatlar berilgen. $\overline{AB}$ vektordın koordinataların tabıń.
8. Eger: 1) $\overline{AB}(7; 24)$; 2) $A(0; -1)$ hám $B(3; -5)$; 3) $A(2; -4)$ hám $B(2; -1)$ bolsa, $\overline{AB}$ vektordın uzunlıǵın tabıń.
9. Eger: 1) $A(-2; -3)$, $B(-3; -1)$; 2) $A(m; n)$, $B(-m; -n)$ bolsa, $\overline{BA}$ vektordın koordinataları nege teń boladı?
10. $A(-1; -3)$, $B(2; -4)$, $C(-3; -1)$ hám $D(5; 2)$ noqatlar berilgen. $\overline{AC}$ hám $\overline{DB}$ vektorlar teń be?
11. $\vec{a}(m; 24)$ vektordın uzunlıǵı 25 ge teń. m di tabıń.
12. $A(5; -3)$ noqat $\vec{a}(-7; -8)$ vektorınıń bası bolsa, bul vektor aqırı (B) nıń koordinataların tabıń.
13. Eger: 1) $A(-3; 1)$ hám $B(5; -5)$; 2) $A(12; 0)$ hám $B(0; -5)$ bolsa, $\overline{AB}$ vektordın uzunlıǵın tabıń.

40. KOORDINATALARI MENEN BERILGEN VEKTORLAR ÜSTİNDE ÁMELLER

Koordinataları menen berilgen vektorlardı qosıw, alıw hám sangá kóbeytiw usılları menen tanısamız.

1. Koordinataları menen berilgen vektorlardı qosıw.

Ánıqlama. $\vec{a}(a_1; a_2)$ hám $\vec{b}(b_1; b_2)$ vektorlardıń qosındısı dep, koordinataları $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$ bolǵan $\vec{c}(c_1; c_2)$ vektorǵa aytıladı.

Solay etip,

$$\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2) \quad \text{yaki} \quad \overline{(a_1; a_2)} + \overline{(b_1; b_2)} = \overline{(a_1 + b_1; a_2 + b_2)}.$$

Hárqanday $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$ hám $\vec{c}(c_1; c_2)$ vektorlar ushın tómendegi teńlikler orınlı:

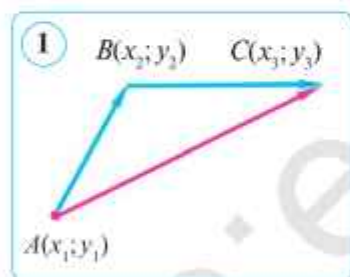
$$1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; \quad 2) (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}); \quad 3) \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Dálillew ushın teńliktiń oń hám shep bólimlerinde turǵan vektorlar koordinatalardıń saykes koordinataların salıstırıw jetkilikli.

Teorema.

A, B, C noqatlar qanday bolmasın, tómendegi vektor teńlik orınlı:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$



Dálil. $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ — berilgen noqatlar (1-súwret). Qosılıwshı vektorlardı koordinatalar arqalı ańlatıp, tabamız:

$$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1), \quad \overline{BC}(x_3 - x_2; y_3 - y_2).$$

Ánıqlama boyınsha, qosındı vektordıń koordinataların anıqlaw ushın $\overline{AB}$ hám $\overline{BC}$ vektorlardıń saykes koordinataların qosamız:

$$x_2 - x_1 + x_3 - x_2 = x_3 - x_1, \quad y_2 - y_1 + y_3 - y_2 = y_3 - y_1.$$

Bul bolsa $\overline{AC}$ vektordıń koordinataları: $\overline{AC}(x_3 - x_1; y_3 - y_1)$.

Teń vektorlar haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Teorema dálillendi.

2-súwretten paydalanıp, joqarıdaǵı teńliktiń durılıǵın dálillewdi ózlerińizge qaldıramız.

Solay etip, vektorlardı qosıw ushın olardıń saykes koordinataların qosıw jeterli.

2. Koordinataları menen berilgen vektorlardı ayırıw.

Anıqlama $\vec{a}(a_1; a_2)$ hám $\vec{b}(b_1; b_2)$ vektordıń ayırması dep, sonday $\vec{c}(c_1; c_2)$ vektorǵa ayıladı, onıń $\vec{b}$ vektor vektor menen $\vec{a}$ vektordı beredi: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Bunnan $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ vektordıń koordinataların tabamız:

$$c_1 = a_1 - b_1, c_2 = a_2 - b_2.$$

Koordinataları menen berilgen vektorlardı ayırıw ushın olardıń sáykes koordinataların ayırıw kerek, yaǵnıy:

$$\vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2) \text{ yaki}$$

$$\overline{(a_1; a_2)} - \overline{(b_1; b_2)} = \overline{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}.$$

3. Koordinataları menen berilgen vektordı sanǵa kóbeytiw.

Anıqlama. $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektordıń k sanǵa kóbeymesi dep, $\overline{(ka_1; ka_2)}$ vektorǵa ayıladı, yaǵnıy:

$$k\vec{a} = \overline{(ka_1; ka_2)}.$$

Anıqlamaǵa muwapıq, $\overline{(a_1; a_2)} \cdot k = \overline{k(a_1; a_2)}$.

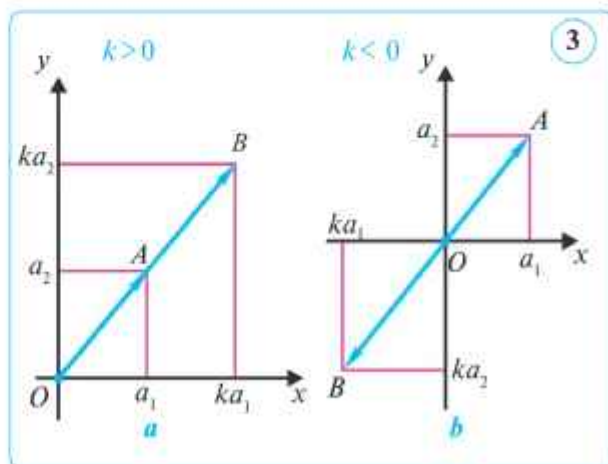
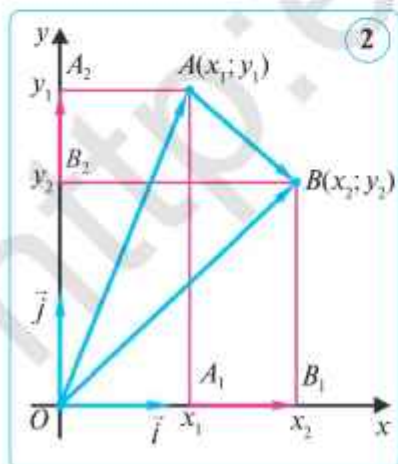
Demek, vektordı sanǵa (yaki k sanı $\vec{a}$ vektorǵa kóbeytiw ushın) onıń koordinataların usı sanǵa kóbeytiw kerek.

Vektordı sanǵa kóbeytiwdiń dáslep keltirilgen anıqlamasın 3-súwretten paydalanıp tekserip kórin. Onıń qásiyetleri koordinatalarda da orınlı boladı Sol sebepli olardı keltirip ótpedik.

1-másele. $\vec{a}(3; 5)$ hám $\vec{b}(2; 7)$ vektorlar qosındısıń tabıń.

Sheshiliwi. $\vec{a}(3; 5) + \vec{b}(2; 7) = \overline{(3; 5)} + \overline{(2; 7)} = \overline{(3+2; 5+7)} = \overline{(5; 12)}$.

Demek, $\vec{a} + \vec{b}$ vektordıń koordinataları $(5; 12)$ ge teń.



2-másele. $\vec{a}(-3; 5)$ hám $\vec{b}(3; -3)$ vektorlar ayırmasın tabın.

Sheshiliwi: $\vec{a}(-3; 5) - \vec{b}(3; -3) = \overline{(-3; 5)} - \overline{(3; -3)} = \overline{(-3-3; 5-(-3))} = \overline{(-6; 8)}$

Juwabı: $\overline{(-6; 8)}$.

3-másele. $\vec{a}(3; 5)$ vektorğa qarama-qarsı $\vec{b}$ vektordı tabın.

Sheshiw. $\vec{a}$ vektorğa qarama-qarsı $\vec{b}$ vektor tómendegige teń:

$$\vec{b} = -\vec{a} = -1 \cdot \vec{a} = -1 \cdot \overline{(3; 5)} = \overline{(-3; -5)}.$$

Juwabı: $\vec{b}(-3; -5)$ yaki $\overline{(-3; -5)}$.

4-másele. Eger $\vec{a}(-3; 4)$ bolsa, $\vec{b} = 4\vec{a}$ vektordın koordinataların tabın.

Sheshiliwi. $\vec{b} = 4\vec{a} = 4 \cdot \overline{(-3; 4)} = \overline{(4 \cdot (-3); 4 \cdot 4)} = \overline{(-12; 16)}$.

Juwabı: $\vec{b}(-12; 16)$ yaki $\overline{(-12; 16)}$.



Soraw, másele hám tapırmalar

- 1) Koordinataları berilgen eki vektor qalay qosıladı?
- 2) Koordinataları berilgen eki vektor qalay ayırıladı?
- 3) Koordinataları berilgen vektor sanğa qalay kóbeytiledi?
2. Eger $\vec{a}(-4; 8)$ hám $\vec{b}(1; -4)$ bolsa, usı vektorlar: 1) qosındısınn; 2) ayırmasınnn koordinataların tabın.
3. $\vec{a}(-2; 6)$ hám $\vec{b}(-2; 4)$ vektorlar berilgen. 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$ vektorlarınnn koordinataların tabın.
4. $\vec{a}(2; 3)$ hám $\vec{b}(-1; 0)$ vektorlar berilgen. Vektorlarınnn koordinataların tabın: 1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - 3\vec{b}$; 3) $2\vec{b} - \vec{a}$.
5. $\vec{a}(2; -3)$ hám $\vec{b}(-2; -3)$ vektorlar berilgen. Vektorlarınnn koordinataların tabın: 1) $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$; 3) $\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$.
6. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ hám $\vec{b} = -2\vec{j}$ vektorlar berilgen. Vektorlardın koordinataların tabın:
1) $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$; 2) $\vec{c} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$; 3) $\vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$.
7. $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ hám $\vec{b} = 3\vec{i}$ vektorlar berilgen. 1) $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = 4\vec{a} - \vec{b}$ vektorlarınnn koordinataların tabın.
8. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ hám $\vec{b} = 2\vec{j}$ vektorlar berilgen. 1) $\vec{c} = -\vec{a} - 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = \vec{a} - 5\vec{b}$ vektorlarınnn koordinataların tabın.
9. $\vec{a} = -3\vec{i}$ hám $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ vektorlar berilgen. 1) $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$ vektorlarınnn koordinataların tabın.

41. VEKTORDİN FIZIKALÍQ HÁM GEOMETRIYALÍQ TALQÍLANÍWÍ. GEOMETRIYALÍQ MÁSELELER SHESHIWDİN VEKTORLÍQ USÍLÍ

1. Vektordın fizikalıq hám geometriyalıq talqılanıwı.

1. Denege tásir etiwshi kúsh baǵıtı tásir etiwı baǵıtı menen birdey, absolyut mánisi bolsa kúsh muǵdarına proporcional vektor menen túsindiriw qolaylı. Ámel sonı kórsetedi, kúshlerdi bunday túsindiriw usılı denege bir noqattan tásir etiwshi eki yamasa birneshe kúshniń teń tásir etiwshisi usı kúshlerge sáykes vektorlardıń qosındısı menen súwretlenedi. 1-súwrette denege A noqatda $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorları menen súwretlengen eki kúsh tásir etedi. Bul kúshlerdiń teń tásir etiwshisi

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

vektori menen belgilenedi.

Kúshni berilgen eki baǵıtı tásir etiwshi kúshlerdiń qosındısı formasında túsindiriw *kúshni baǵıtlar boyınsha ajratıw* delinedi.

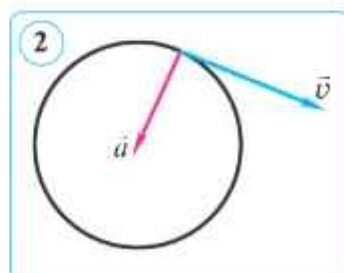
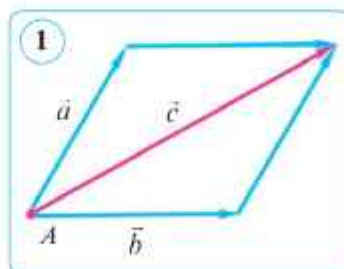
2. Fizikada deneniń *ilgerileme hâreketi* dep sonday hâreketke aytıladı, bunda deneniń barlıq noqatları birdey waqıt aralıǵında, bir qıylı baǵdarda birdey aralıqqa jılıyadı. Solay etip, fizikadaǵı *jılıw vektori* sabaqlıǵımızda qabıl etilgen vektor eken. Parqı sonda, geometriya sabaqlıǵında tek ǵana tekisliktegi vektorlar haqqında ǵáp júrgiziledi, fizikada bolsa basınan baslap keńisliktegi vektorlar olardıń qásiyetleri haqqında da pikir júrgizedi.

3. Fizikada «vektor» sózi birqansha keń mánide qullanıladı. Mısalı, tezlik vektor dep júrgiziledi. Biraq, geometriyalıq vektordıń uzınlıǵı metrlerde, tezlikniń absolyut mánisi bolsa sekundına metrlerde (m/s) da ólsheniwinin ózinde-aq tezlikniń geometriyada qabıl etilgen mánidegi vektor emesligi kórinip turıptı. Biz geometriyada tezlikti vektor emes, al *vektorlıq shamalar* deymiz.

Ulıwma, vektorlıq shamalar, ózleriniń modulinen tısqarı, baǵdarı menen anıqlanadı. Málim masshtab tańlap alıńanda vektor shamaları geometriyalıq vektorlar menen súwretlenedi.

Bunda vektorlıq shamalardı qosıwǵa olardı súwretlewshi geometriyalıq vektorlardı qosıw, vektor shamaların sanlarǵa kóbeytiwde bolsa olardı súwretlewshi geometriyalıq vektorlardı sol sanlarǵa kóbeytiw sáykes keledi.

Bir misal kóreyik. 2-súwrette $\vec{v}$ vektor sheriber hâreketiniń tezligin, $\vec{a}$ vektor bolsa tezleniwdi añlatıw múmkin. Biraq, bul vektorlardı fizikalıq kóz qarastan qosıw mániske iye emes.



Sonday bolsa da, fizikada tezlik yamasa tezleniwler vektorlar dep aytiladı.

Gáp ne tuwralı ekenligi anıq kóz aldınıızǵa keltirilse, bunday sóz erkinligi ulıwma hesh zıyan keltirmeydi. Biz óz waqtında usıǵan uqsas úshmúyeshlik tárepiniń uzınlıǵın, qısqalıq ushın, ápiwayılastırıp onıń tárepi dep aytıwǵa kelisip alǵan edik h. t. b.

2. Geometriyalıq máselelerdi sheshiwdiń vektor uslı.

Geometriyalıq máselelerdi sheshiwde hám teoremalardı dálillewde vektorlardan keń paydalanıladı.

1-másele. C noqat AB kesindisiniń ortası, O noqat bolsa tegisliktiń qálegen noqatı. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ ekenligin dálilleń (3-a súwret).

Sheshimi. 1-usıl. Úshmúyeshlik qaǵıydası boyınsha:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \quad \text{hám} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}.$$

Bul eki teńlikti qosıp, tómendegige iye bolamız:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}).$$

C noqat AB kesindisiniń ortası bolǵanlıqtan, bunday jaǵdayda $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, sebebi qarama-qarsı vektorlardıń qosındısı nolge teń.

Solay etip, tomendegige iye bolamız:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \text{yaki} \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2-usıl. OAB úshmúyeshlikti parallelogrammǵa toltıramız (3-b súwret).

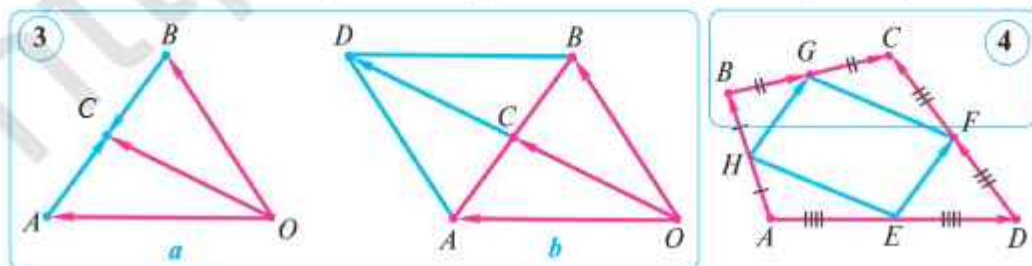
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ (parallelogramm qaǵıydası boyınsha). Parallelogrammnıń diagonalları kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi, sonıń ushın $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$ hám $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC}$.

Demek, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$. Bunnan:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2-másele. Qálegen $ABCD$ tórtmúyeshlik tárepleriniń ortaları parallelogrammnıń tóbeleri bolıwın dálilleń.

Sheshiliwi. E, F, G, H — sáykes túrde AB, BC, CD hám DA táreplerdiń ortaları bolsın (4-súwret). Parallelogrammnıń 3-belgisine baylanısı, máselen,



EF hám HG kesindileriniń uzınlıǵı teńligi hám parallelligin dálillew jetkilikli. Vektor tilinde, bul $\overrightarrow{EF}$ hám $\overrightarrow{HG}$ vektorlardıń teńligin dálillewden ibarat.

Haqıyqattan,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}), \quad \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$

Bunnan basqa, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ ekeni anıq. Sonıń ushın, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ Bunnan, EF hám HG kesindilerdiń uzınlıq boyınsha teńligi de parallel ekeni kelip shıǵadı. Demek, qálegen $ABCD$ tórtmüyeshlik tárepleriniń ortaları parallelogrammnıń tóbeleri boladı. Usını dálillew talap etilgen edi.

Keltirilgen dálillerden kórinip turıptı, másele hám teoremalardı vektor usılı menen sheshiw algebralıq máseleledi sheshiwge uqsaydı. Bul másele sheshiwdiń bir tárepi hám ol úsh basqısttan ibarat.

Birinshi basqısh. Másele (teorema) shártin vektor kórinisinde jazıw hám qolaylı vektorlardı kirgiziw (uqsashlıq — belgisizlerdi kirgiziw hám algebralıq teńlemenı dúziw).

Ekinshi basqısh. Vektor algebrasınıń járdemi arqalı másele shártin solay etip almasırladı, másele vektor kórinisinde sheshiw imkaniyatı bolsın (uqsashlıq — algebralıq teńlemenı sheshiw).

Úshinshi basqısh. Alınǵan vektor qatnasıq dáslepki atamalarda talqılanadı (uqsashlıq — teńlemenı algebralıq sheshkennı soń juwabın jazıw).



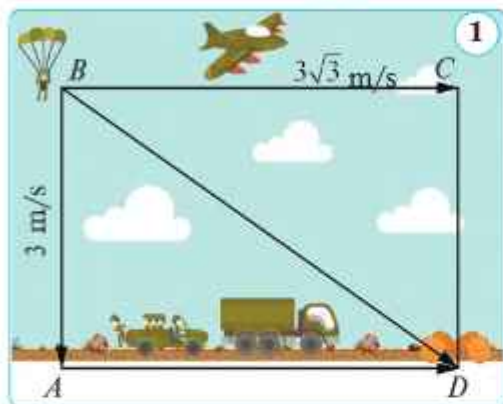
Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Tóbeleri $A(3; 1)$, $B(1; 3)$ hám $C(0; 2)$ bolǵan úshmüyeshlik CC_1 medianasınıń uzınlıǵın tabıń.
2. K noqat $ABCD$ parallelogramm AD tárepiniń ortası. $\overrightarrow{KC}$ vektordı $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{AD}$ vektorları arqalı ańlatıń.
3. $A(2; 4)$, $B(3; 6)$ hám $C(6; 14)$ noqatları berilgen. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektorınıń koordinataların tabıń.
4. $ABCD$ kvadrat eki qarama-qarsı tóbesiniń koordinataları berilgen: $A(0; 4)$ hám $C(6; 0)$. Qalǵan eki tóbesiniń koordinataların tabıń.
5. $A(-2; 3)$ noqat $\vec{a}(-3; 8)$ vektorınıń bası bolsa, bul vektor aqırı $(B(x; y))$ niń koordinataların tabıń.
6. Trapeciyaniń orta sızıǵı ultanına parallel hám onıń uzınlıǵınıń yarımına teń ekenligin vektor járdeminde dálilleń.
7. $\vec{a}(1; 3)$, $\vec{b}(-2; 4)$, $\vec{c}(-1; -3)$, $\vec{d}(-4; 4)$, $\vec{p}(3; 9)$, $\vec{q}(-1; 2)$ vektorlar berilgen. Usılar ishinen: 1) baǵıtlas vektorlardı; 2) bir jup qarama-qarsı baǵıtlangan vektorlardı tabıń.
8. $ABCD$ rombda N noqat CD táreptiń ortası $\overrightarrow{AN}$ vektordı $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{AD}$ vektorlar arqalı ańlatıń.
9. $ABCD$ — parallelogramm hám usı parallelogrammnan sırtında jatrıwshı qálegen O noqat berilgen. $\overrightarrow{OD}$ vektordı $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ hám $\overrightarrow{OC}$ vektorlar arqalı ańlatıń.

42. ÁMELİY JUMIS HÂM QOLLANIW

ÁMELİY KOMPETENCIYANÍ RAWAJLANDIRIWSHÍ QOSÍMSHA MATERIALLAR

1. Vektordín ámeliy qollanılıwına baylanış máseleler.



1-masala. Parashyutshı jerge 3 m/s tezlik penen túspekte, samal bolsa onı $3\sqrt{3}$ m/s tezlik penen jılistırıp ketedi. Bul jaǵdayda parashyutshı jerge qanday múyesh astında túsedi (1-súwret)?

Sheshiliwi. Parashyutshı B noqatta bolsın. Awırılıq kúshi $\overline{BA}$ hám samal kúshi $\overline{BC}$ nıń teń tásir etiwshi $\overline{BD}$ boladı hám $ABCD$ — tuwrı tórtmúyeshlik, AB — vertikal. Demek, $\angle ADB$ múyesh mánisin tabıw.

$\overline{BC} = \overline{AD}$ hám $BC = AD$ ($ABCD$ — tuwrı tórtmúyeshlik, $\angle A = 90^\circ$). Pifaqor teoreması boyınsha: $BD^2 = AD^2 + AB^2$, demek:

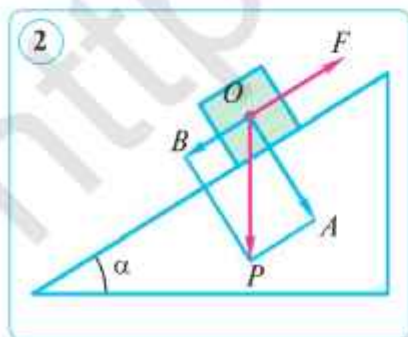
$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}.$$

Solay etip, ABD úshmúyeshlikte 3 cm li AB katet 6 cm li BD gipotenuzaǵa qaraǵanda eki ese kishi eken. Demek, $AB = 0,5BD$ bolǵanı ushın tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte 30° li múyesh tuwrısındaǵı katettin qásiyeti boyınsha, $\angle ADB = 30^\circ$ yaqı $\sin \angle ADB = \frac{AB}{BD} = 0,5$, bunnan $\angle ADB = 30^\circ$ kelip shıǵadı.

Juwap: $\angle ADB = 30^\circ$.

2-másele. Parashyutshı jerge 4 m/s tezlik penen túspekte, samal bolsa onı $4\sqrt{3}$ m/s tezlik penen jılistırıp ketpekte. Bunday jaǵdayda parashyutshı jerge qanday múyesh astında túsedi (1-súwret q.)? Máseleni óz betińizshe sheshiń.

3-másele. Awırılıǵı P bolǵan júk qıya tegislikte sırganap tómenge túsip ketpewi ushın onı qanday F kúsh penen uslap turıw kerek (2-súwret)?



Sheshiliwi. Júktiń awırılıq orayı O ǵa $\overline{P}$ kúsh qoyılǵan bolsın. $\overline{P}$ vektordı óz ara perpendikulyar eki baǵdar boyınsha 2-súwrette kórsetilgendey qoyamız. Qıya tegislikke perpendikulyar bolǵan $\overline{OA}$ kúsh júktiń jılısıwına jol qoymaydı. Júkti uslap turıwshı $\overline{F}$ kúsh oǵan qarama-qarsı baǵdarlangan $\overline{OB}$ kúshke muǵdar jaǵınan teń bolıwı kerek. Bunnan tómendegi juwmaqqa kelemiz:

$$F = P \sin \alpha - P \cos \alpha.$$

4-másele. $P = 50$ N júk qıya tegislikte jatır. Eger tegisliktiń gorizontqa salıstırmalı qıyalıq múyeshi 30° ǵa teń bolsa, sırǵanaw kúshi hám basım kúshin tabıń.

Berilgen: $P = 50$ N, $\angle A = 30^\circ$.

Tabıw kerek: $F_{qıya}$, $F_{basım}$.

Sheshiliwi. 1) $\vec{P}$ kúshiti eki sırǵanaw kúshi baǵdarına parallel hám de basım kúshi qıya tegislikke perpendikulyar kúshler boyınsha jayamız.

2) Parallelogrammdı sızamız; $\vec{OP}$ vektor onıń diagonalı; $OM \parallel AB$, $OK \perp AB$, $PK \parallel AB$, $PM \perp AB$, $\vec{OM} = \vec{F}_{qıya}$, $\vec{OK} = \vec{F}_{basım}$ ótkizemiz (3-súwret).

3) $\angle OPM = \angle A = 30^\circ$ ($OP \perp AC$, $PM \perp AB$).

4) Tuwrı múyeshli OPM úshmúyeshlikten:

$$OM = 0,5OP = 0,5 \cdot 50 = 25; \quad F_{qıya} = 25 \text{ N.}$$

5) Tuwrı múyeshli OPK úshmúyeshlikten Pifagor teoreması boyınsha:

$$OK = \sqrt{OP^2 - PK^2} = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{50^2 - 25^2} = \sqrt{25^2 \cdot (4 - 1)} = 25\sqrt{3} \approx 43,$$

yaǵnıy $F_{basım} \approx 43$ N.

Juwap: $F_{qıya} = 25$ N, $F_{basım} \approx 43$ N.

5-másele. Tájiyibe sonı kórsetedi, eger A denege eki a hám b kúsh tásir etken bolsa, ol jaǵdayda olardıń táhiri bir c kúsh tásirine teń bolıp c kúsh a hám b kesindilerden jasalǵan parallelogramnıń diagonalı menen súwretlenedi. Teń tásir etiwshi kúsh «parallelogramm qaǵıydası» boyınsha tabıladı.

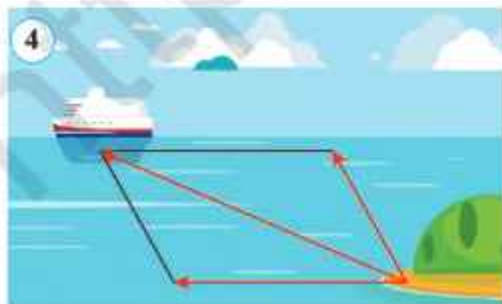
Máselen, júzip baratırǵan kemedede (4-súwret) bolǵan yaki dáryanı qayıqta kesip ótip atırǵan (5-súwret) adamǵa kese kesim hám aǵım boylap baǵıtlanǵan eki kúsh tásir kórsetedi. Usı kúshlerdi súwrette belgileń.

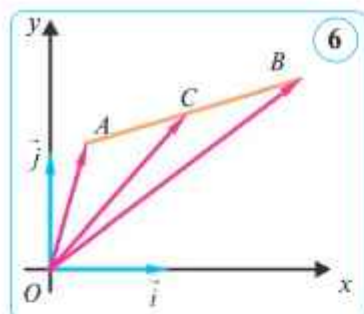
Usı máselege uqsasǵan másele dúziń hám sáykes súwretlerde kórsetiń.

2. Sistema awırılıq orayınıń koordinataların tabıw.

6-másele. Kesindini berilgen qatnasta bolıw (koordinata kórinisinde).

Eger $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$ bolsa, C noqat AB kesindini λ qatnasta boladı (6-súwret). Eger kesindi aqırlarınıń koordinataları $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ belgili bolsa, C noqattıń x, y koordinataların tabıń.





Sheshiliwi. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ hám $\overrightarrow{OB}$ vektorlardı sızamız. $\overrightarrow{OA}(x_1; y_1)$, $\overrightarrow{OC}(x; y)$, $\overrightarrow{OB}(x_2; y_2)$, $\overrightarrow{AC}(x - x_1; y - y_1)$, $\overrightarrow{CB}(x_2 - x; y_2 - y)$ hám vektordı λ sanğa kóbeytkende onıń koordinataları λ sanğa kóbeytiliwin esapqa alıp, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(x - x_1; y - y_1) = \\ &= \lambda \overrightarrow{CB}(x_2 - x; y_2 - y) \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Demek, } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

7-másele. $M_1(x_1; y_1)$ hám $M_2(x_2; y_2)$ noqatlardıń saykes túrde m_1 hám m_2 ge teń júkler qoyılǵan. Bul máseleler sistemasınıń awırlıq orayı (C noqat) koordinataların tabıń.

Sheshiliwi. Awırlıq orayı $C = M_1M_2$ kesindide hám de M_1 hám M_2 noqatlardıń qoyılǵan

m_1 hám m_2 massalardan keri proporcional aralıqta jatadı, yaǵnıy eki zatlıq materiallıq noqatlar sistemasınıń awırlıq orayı bolǵan C noqat M_1M_2 kesindini $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$ qatnasta boladı. λ nıń mánisin 5-máseledegi formulalardı qoyıp, figura almasırwırlardan soń C noqatnıń koordinataların tabamız:

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}; \quad y_C = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

3. Vektorlıq qatnastı dálillewge baylanışlı másele.

8-másele. $ABCD$ — parallelogramm hám onıń diagonalı kesken O

no-qat berilgen. Dálilleń: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Berilgen: $ABCD$ — parallelogramm, O — AC hám BD diagonalarınıń kesisiw noqatı, $AO = OC$, $BO = OD$ (7-súwret).

Dálillew kerek: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Dálil. Bul vektor teńlikti dálillewdiń birneshe usılın keltiremiz.

Ayırmalıń nol vektorga teńligin kórsetemiz:

$$1) (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

Figura almasırwılda qosındıdan qosındını alıw qaǵıydası, toparlaw nızamı, úshmüyeshlik qaǵıydası, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri hám baǵıtlas vektorlar), nol vektor anıqlamalarınan paydalanıladı.

$$2) (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}.$$

Figura almasırwılda qosındıdan qosındını alıw hám úshmüyeshlik qaǵıydaları, toparlaw nızamı, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ekeni hám nol vektor anıqlamalarınan paydalanıladı.

43 – 44. 3-BAQLAW JUMISI. QÄTELER ÜSTİNDE ISLEW

1. $A(-2; 3)$ hám $B(4; 0)$ noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq teńlemesin dúziń.
2. Eger $C(4; 9)$ hám $R = 5$ bolsa, orayı C noqatta, radiusı R bolǵan sheńber teńlemesin dúziń.
3. $\vec{a}(1; 0)$, $\vec{b}(1; 2)$ hám $\vec{c}(1; 3)$ vektorlar berilgen. $\vec{a} - \vec{b}$ hám $\vec{b} + \vec{c}$ vektorlardıń koordinataların tabıń.
4. $\vec{c}(-1; 0)$ hám $\vec{d}(1; 2)$ vektorlar berilgen. $2\vec{c} + 3\vec{d}$ vektordıń koordinataların tabıń.

3-TEST

Ózińizdi sınap kóriń!

1. $A(0; -1)$, $B(1; 0)$ noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq qaysı shereklerde jaylasqan?
A) III, IV, I; B) I, II, III; D) II, III, IV; E) II, IV.
2. $A(-2; 0)$, $B(-2; 2)$ noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq qaysı shereklerde jatadı?
A) I, II, III; B) II, III; D) II, IV; E) III, IV, I.
3. Tóbeleri $A(-4; 0)$, $B(-4; 4)$ noqatlarda bolǵan AB kesindi ortasınıń koordinataların tabıń.
A) $(-2; 0)$; B) $(0; 2)$; D) $(2; -4)$; E) $(-4; 2)$.
4. Tóbeleri $A(-2; 0)$, $B(0; 2)$, $C(2; 0)$ noqatlarda bolǵan úshmúyeshliktiń AC tárepi ortasınıń koordinataların tabıń.
A) $(-1; 1)$; B) $(1; 0)$; D) $(0; 0)$; E) $(0; 1)$.
5. $\vec{a}(-3; 1)$ hám $\vec{b}(5; -6)$ vektorlar berilgen. $\vec{c} = \vec{b} - 3\vec{a}$ vektorınıń koordinataların tabıń.
A) $(14; -9)$; B) $(4; -3)$; D) $(14; -3)$; E) $(9; 3)$.
6. $A(-3; 0)$ hám $B(-5; 4)$ noqatlarda berilgen. $\vec{BA}$ vektorınıń koordinataların tabıń.
A) $(-8; -4)$; B) $(-8; 4)$; D) $(2; -4)$; E) $(8; -4)$.

Inglis tilin úyrenemiz!



Sheńber teńlemesi — circle equation

Tuwrı sızıq teńlemesi — straight-line equation

Kollinear vektorlar — collinear vectors

Vektor uzınlıǵı — vector length

Teń vektorlar — equal vectors

Skalyar — scalar

Qarama-qarsı vektorlar — opposite vectors

Birlik vektor — unit vector

Baǵıtlar — equivalent



1. Tuwrı müyeshli koordinatar sistemasın francuz alımı Rene Dekart pänge kirgizgen. Tuwrı müyeshli koordinatar sisteması geyde Dekart koordinatar sisteması da delinedi.



Rene Dekart
(1596 — 1650)

Rene Dekart (1596 — 1650) — fransuz filosofi, matematigi, fizigi, fiziologi. La-Flesh iezuit kolledjında bilim alǵan, grek hám latin tilleri, matematika hám filosofyanı úyrengen. Dekart filosofiyası onıń matematikası, kosmogoniyası, fizikası menen baylanıslı. Matematikada analitikalıq geometriya tiykarlarınan biri (tuwrı müyeshli koordinatar sisteması onıń atı menen ataladı). Dekart XVII — XVIII ásirler filosofiyası hám pániniń rawajlanıwına salmaqlı úles qosqan.

XVII ásirde Dekarttıń jumısları sebepli pútkil matematika, ásirese, geometriyanı revolyuciyalıq qayta qurǵan koordinatar metodı júzege keldi. Algebralıq teńlemelerdi geometriyalıq grafika arqalı talqılaw hám kerisinshe, geometriyalıq máselelerdiń sheshimin analitikalıq formulalar, teńlemeler sistemaları járdeminde izlew imkaniyatı payda boldı.

Bizniń kúnlerimizge shekem saqlanıp kelgen qolay belgilerdiń kirgizilwinde, yaǵnıy belgisizlerdi belgilew ushın x , y , z ; koefficientlerdi belgilew ushın a , b , c latin háriplerin kirgiziwde, dárejelerdi x^2 , y^2 , z^2 kórinisinde belgilewde de Dekarttıń xızmetleri úlken.

2. Vektor túsiniǵi XIX ásirdeń ortalarında bir waqıtta birneshe matematiktin jumıslarında ushırasadı. Tegislikte vektorlar menen jumıs orınlawdı birinshi márte 1835-jılı italyalı alım **Bellivitis** (1803 — 1880) baslap berdi. Bunnan basqa **K. Gauss** (1777 — 1855) tıń 1831-jılı «Bikvadratık salıstırmalı teoriyası» atlı shıǵarmasında hám **Y. Argan** (1768 — 1822) hám **K. Vessel** (1745 — 1818) kompleks sanlardı geometriyalıq túsindiriwge baylanıslı jumlarında vektor túsiniǵi ayıp ótilgen. Nátiyjede, **V. Gamilton** (1805 — 1865) hám **R. Grassman** (1854 — 1901) nıń vektor üstinde ámeller orınlawǵa baylanıslı jumısları júzege keldi. Gamilton 1845-jılı birinshi bolıp vektor hám skalyar shamalardıń parqın túsindirdi. Gamiltonnıń sol jumısında «skalyar», «vektor» atamaları payda boldı. Gamilton «vektor» terminin latinsha *vehere* — «tasıw», «súyrew» sózinen payda etken, *vektor* — «tasıwshı», «jetkeriwshı» degen. 1806-jılı Argan júrgizilgen kesindilerdi hárıp üstine sıziq qoyıw menen belgilegen. Vektorlardıń bası hám aqırın kórsetiw ushın **A. Myobius** (1790 — 1868) *om* AB kórinisinde belgilegen. Grassman vektorlardı «kesindiler»dep ataǵan, ol koordinata kósheri boyınsha baǵdarlangan e_1 , e_2 birlik vektorlardı hám vektorlardı $x_1e_1 + x_2e_2$ kórinisinde súwretlewdi usınǵan. Gamilton hám **J. Gibss** (1839 — 1903) vektorlardı grekshe háripler menen belgilegen. Vektorlardı qara háripler menen belgilewdi 1891-jılı **A. Xeysayd** (1850 — 1925) usınıs etken. Vektordıń uzınlıǵın $|AB|$ kórinisinde belgilewdi bolsa 1905-jılı **R. Gans** (1880 — 1954) kirgizgen.



IV BAP MAYDAN



9-§.

KÓPMÜYESHLIKTİŇ MAYDANI

45. MAYDAN HAQQINDA TÚSINIK

1. Maydan haqqında túsiniik.

Figuralardıń maydanların anıqlaw máselesi júdá áyyem zamanlarga barıp taqaladı. Bul máseleniń júzege keliwin adamlardıń ámeliy jumısı talap etken. Hárbirimiz kúndelikli turmısımızda maydan haqqında birqansha túsiniikke iyemiz. Máselen, Siz tuwrı tórtmüyeshlik (aytayıq, ózińiz turatuǵın úy) hám kvadrattıń maydanın tabıwdı bilesiz. Biz endi figuralardıń maydanı haqqındaǵı tushiniklerdi anıqlaw hám onı ólshew usılların anıqlaw menen shuǵıllanamız.

Eger geometriyalıq figuranı shekli sandaǵı úshmüyeshliklerge bóliw múmkin bolsa, bul figura *ápiwayı figura* dep ataladı.

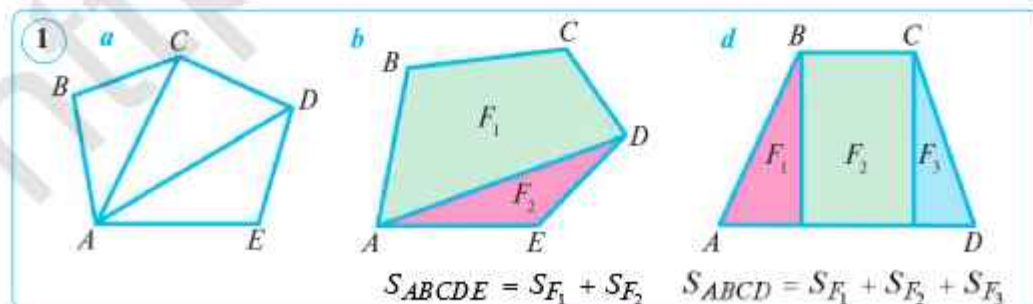
Biz úshmüyeshlik dep, tegisliktiń úshmüyeshlik penen shegaralangan shekli bólegine aytamız. Dońes kópmüyeshlik óziniń bir tóbesinen shıqqan diagonalları menen úshmüyeshliklerge bólinedi (1-a súwret).

Maydan óń muǵdar (shama) bolıp, onıń san mánisi tómendegi tiykarǵı qásiyetlerge (aksiomalarǵa) iye.

1-qásiyet. *Teń figuralar teń maydanlarǵa iye.*

2-qásiyet. *Eger kópmüyeshlik bir-birin qaplamaytuǵın kópmüyeshliklerden quralǵan bolsa, bunday halda onıń maydanı bul kópmüyeshliklerdiń maydanınıń qosındısına teń boladı.*

F kópmüyeshlik bir-birin qaplamaytuǵın kópmüyeshliklerden quralǵan degeni: 1) F bul kópmüyeshlikler qosındısına ibaratlıǵı hám 2) kópmüyeshliklerden hesh qaysı ekewi ulıwma ishki noqatlarga iye emesligin ańlatadı.



Mısalı, 1-*b*, hám *d* súwretlerde bir-birin qaplamaytuǵın kópmúyeshliklerden dúzilgen kópmúyeshlikler súwretlengen

1- hám 2-qásiyetler maydanlarınǵın *tiykarǵı qásiyetleri* delinedi.

2. Maydandı ólshew. Maydandı ólshew kesindilerdi ólshew sıyaqlı ólshew birligi ushın qabıl etilgen figura maydanı menen berilgen figuranı salıstırwǵa tiykarlangan. Nátiyjede berilgen figura *maydanınıń sanlı mánisin* alamız.

Maydan — tegis figuraları xarakterlewshi tiykarǵı matematikalıq muǵdardan biri. Ápiwayı jaǵdayda maydan tegis figuranı toltırıwshı birlik kvadratlar — tárepi uzınlıq birligine teń bolǵan kvadratlar sanı menen ólshenedi.

3-qásiyet. *Tárepi bir uzınlıq ólshem birligine teń bolǵan kvadrattıń maydanı birge teń.*

Solay etip tómendegi teorema orınlı boladı.

Teorema.

Tárepiniń uzınlıǵı a ǵa teń bolǵan kvadrattıń maydanı a^2 qa teń.

Ádette, maydandı latınsha bas hárip *S* penen belgilenedi. Demek, kvadrat ushın

$$S = a^2$$

formula orınlı bolıp, uzınlıq ólshem birligi kvadrat penen birge ayıladı.

3. Teńdey figuralar.

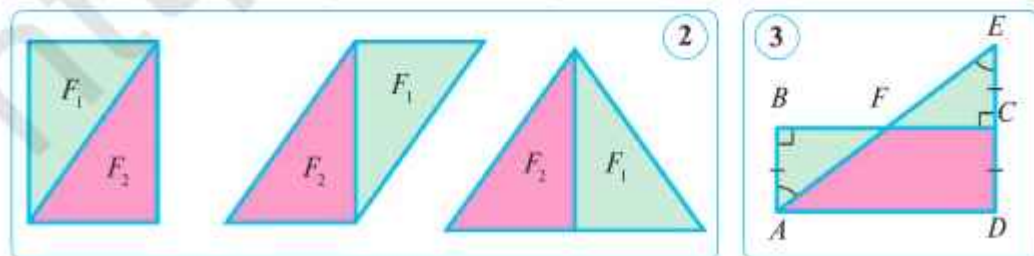
Añqlama. *Eger eki kópmúyeshlikten birin-biri birneshe bólekke bölip, bul bóleklerdi basqasha jaylastırǵanda ekinshi kópmúyeshlik payda bolsa, bul kópmúyeshlikler **teń dúzilgenler** delinedi.*

Eger eki kópmúyeshliktiń maydanları teń bolsa, olar **teń kópmúyeshlikler** dep ataladı. 2-súwrettegi kópmúyeshlikler teń.

Teń kópmúyeshlikler teńles (1-qásiyet), biraq kerisinshe dálil, ulıwma aytqanda, tuwrı bolmaydı: eger eki figura teń bolsa, bunnan olardıń teńligi kelip shıqpaydı.

Másele. *ABCD tuwrı tórtmúyeshlik DC tárepiniń dawamında C tóbesine salıstırmalı D noqatqa simmetriyalıq E noqat belgilengen (3-súwret). ADE úshmúyeshlik maydanınıń ABCD tuwrı tórtmúyeshlik maydanına teń ekenin dálilleń*

Dálil. *AE hám BC tárepler F noqatta kesilissin. ABF hám ECF úshmúyeshlikler teń (kateti hám súyir múyeshi boyınsha: $AB = EC$,*



$\angle BAF = \angle E$). Nátıyjede ADE úshmúyeshlik $AFCD$ trapeciya menen ECF úshmúyeshlikten, $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik bolsa sol $AFCD$ trapeciya menen ECF ge teń bolǵan ABF úshmúyeshlikten dúzilgen, demek, ADE úshmúyeshlik penen $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik teń dúzilgen (yaǵnıy teńdey). Usını dálillew talap etilgen edi.

Maydan shama bolǵanı ushın shamalardıń barlıq qásiyetlerine iye boladı. Olardı bir túrdegi shamalıqlardaǵı sıyaqlı qosıw hám oń sanǵa kóbeytiw múmkin. Eki maydandı qosıwda hám sanǵa kóbeytiwde maydan payda boladı.

Ámeliyatta maydan bolǵan hárqanday figuranıń maydanın ólshew yaqı esaplaw múmkin. Kóbinese hár túrli maydanlardı anıqlawda formulalardan paydalanıladı. Ayırım figuralardıń maydanların esaplaw formulaların shıǵarıw menen kelesi temalarda shuǵıllanamız.

Soraw, másele hám tapsırmalar

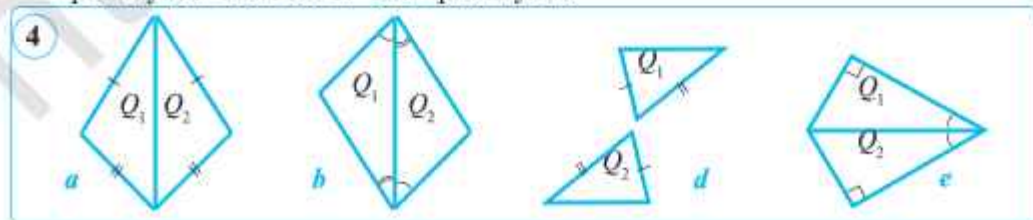
- 1) Apiwayı figura dep nege ayıladı?
- 2) Figuranıń maydanı degende neni túsinesiz?
- 3) Maydannıń tiykarǵı qásiyetlerin túsindirip berin.
- 4) Qanday eki kópmúyeshlikti teń dúzilgen delinedi?
- 5) Teńdey figuralar degen ne? Teńdey figuralar teń be?
2. Kvadrattıń tárepi: 1) 1,3 cm; 2) 0,15 dm; 3) 2,5 cm; 4) 18 dm; 5) 2,5 m. Kvadrattıń maydanın tabın.
3. Kvadrattıń maydanı: 1) 16 dm²; 2) 144 cm²; 3) 121 cm²; 4) 49 mm²; 5) 196 cm²; 6) 0,64 dm²; 7) 6,25 m². Kvadrattıń tárepin tabın.
4. Perimetri tárepleri 54 sm hám 42 sm ge teń bolǵan tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrine teń bolǵan kvadrattıń maydanın tabın.
5. 4-súwrettegi Q_1 hám Q_2 úshmúyeshlikler teńdey. Usını dálilleń.
6. Kvadrattıń maydanı 36 sm². Eger onıń hámme tárepin:
 - 1) eki ese uzaytırsız;
 - 2) úsh ese qısqarttırsız;
 - 3) 2 cm ge uzaytırsız, onıń maydanı qalay ózgeredi?

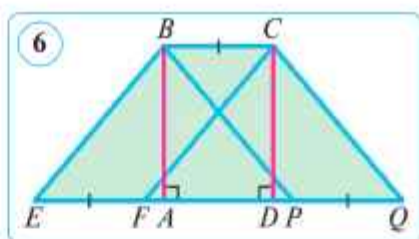
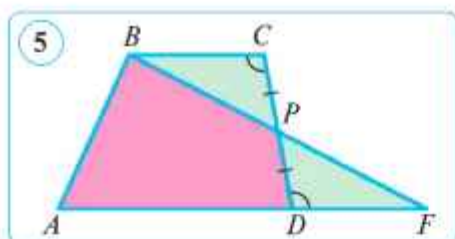
Úlgi. Maydanı 81 cm² ge teń bolǵan kvadrattıń barlıq tárepleri 1 cm ge qısqartılса, onıń maydanı qalay ózgeredi?

Sheshiliwi. Berilgen kvadrattıń tárepi $a=9$ cm. Jańa kvadrattıń tárepi $a_1=a-1=9-1=8$ (cm). Ol jaǵdayda $S_{ya}=8^2=64$ (cm²). Berilgen kvadrat tárepleri 1 cm ge kemeytilse, onıń maydanı

$$S - S_{ya} = 81 - 64 = 17 \text{ (cm}^2\text{)}$$

qa azayadı. **Juwapı:** 17 cm² qa azayadı.





7. Teñ düzilgen eki tuwrı tórtmüyeshlikten: 1) bul tuwrı tórtmüyeshlikniñ teñligi; 2) olardıñ teñligi kelip shıǵama?
8. Eger kvadrattıñ hámme tárepin: 1) n ese uzaytırsaq; 2) k ese qısqartsaq, onıñ maydanı qalay ózgeredi?
9. (Ámeliy jumıs.) Bir kvadrat sızıñ. Tárepı usı kvadrattıñ tárepinen 2 ese úlken bolǵan ekinshi kvadrattı sızıñ. Ekinshi kvadrattıñ maydanı birinshi kvadrattıñ maydanınan neshe ese úlken?
10. AD – $ABCD$ trapeciyanıñ úlken ultanı bolsın. CD tárepiniñ ortası P noqat hám B tóbesi arqalı AD nurın F noqatta kesiwshi tuwrı sızıq ótkerilgen (5-súwret). $S_{ABCD} = S_{ABF}$ ekenin dálilleñ.
- Dálil. 1) $\triangle BCP = \triangle FDP$ – tárepı hám oǵan jaylasqan eki müyeshi boyınsha ($CP = \dots$, $\angle BCP = \angle \dots$ hám $\dots$ parallel tuwrı sızıqlardı $\dots$ kesiwshi keskende payda bolǵan $\dots$ müyeshler, $\angle BPC = \angle \dots$ bolǵanı ushın) teñ, yaǵnıy $S_{BCP} = \dots$
- 2) $S_{ABCD} = S_{ABPD} + \dots$, $S_{ADP} = S_{ABPD} + \dots$, sonıñ ushın $S_{ABCD} = \dots$
- Noqatlar ornına saykes juwaplardı jazıñ.
11. Maydanı: 1) $2,25 \text{ cm}^2$; 2) $0,81 \text{ dm}^2$; 3) 289 mm^2 ; 4) $5,76 \text{ m}^2$; 5) 400 dm^2 ǵa teñ bolǵan kvadrattıñ perimetrin tabıñ.
12. 6-súwrette súwretlengen kópmüyeshlikler ishinen teñdeylerin tabıñ.
13. Ózbekstannıñ maydanı $448,9$ mıñ km^2 . Bul maydannıñ 80% in tegislik quraydı. Maydannıñ tegislik bólimi neshe mıñ kvadrat kilometrden ibarat?

Bilp qoyǵan paydah!



- S – latınsha «*superficies*» sózi-nen alınǵan bolıp, bul söz «*shet*» mánisin bildiredi.
- Materikler, mámleketlerdiñ ay-maqları kvadrat kilometrlerde, úlken egin maydanlarınıñ may-danları gektarlarda, onsha úlken emes jer maydanları ar (sotix) larda ólshenedi.

Ózbekstan Respublikası
maydanı – 448900 km^2



46–47. TUWRÍ TÓRTMÜYESHLIK HÁM PARALLELOGRAMNÍŇ MAYDANÍ

1. Tuwrı tórtmüyeshliktiń maydanı.

Siz tuwrı tórtmüyeshlik maydanı qońsı tárepleri uzınlıqlarınıń kóbey-mesine teńligin bilesiz hám buǵan tiyisli máselelerdi sheshkensiz.

Házir bul orınlangan ámeldiń teoriyalıq jaqtan durıs ekenligin kórsetemiz.

Teorema.

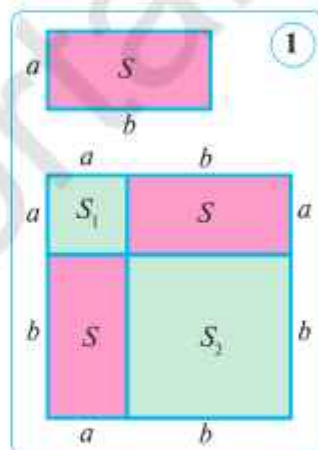
Tárepleri a hám b bolǵan tuwrı tórtmüyeshliktiń maydanı

$$S = a \cdot b$$

formula boyınsha esaplanadı.

Dáلیل. Tárepleri a hám b bolǵan tuwrı tórtmüyeshlikti alamız, bunda a hám b — qálegen oń sanlar. $S = a \cdot b$ ekenin dálilleymiz.

Teoremanı dálillew ushın tárepi $(a+b)$ bolǵan kvadrat sızamız. Bul kvadrattı 1-súwrette kórsetilgen formadaǵıday bóleklerge ajıratamız. Bunda kvadrattıń maydan tárepi a hám b ǵa teń eki kvadrat hám tárepleri a hám b bolǵan eki tuwrı tórtmüyeshlikten dúzilgenligin kóriw múmkin. Solay etip, tárepi $(a+b)$ bolǵan kvadrat maydanı $S_1 + 2S + S_2$ ge teń. Ekinshi tárepten maydannıń qásiyeti boyınsha, bul maydan $(a+b)^2$ qa teń, yaǵnıy



$$S_1 + 2S + S_2 = (a+b)^2, \text{ yamasa}$$

$$S_1 + 2S + S_2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Bul teńlikten $S_1 = a^2$, $S_2 = b^2$ ekenligin esapqa alsaq,

$$S = a \cdot b$$

ekeni kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

1-másele. Tuwrı tórtmüyeshliktiń maydanı 150 cm^2 qa teń, tárepleriniń qatnası 3:2 sıyaqlı Usı tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetrin tabıń.

Sheshiliwi. Tuwrı tórtmüyeshliktiń kishi tárepi $b=2x$ cm bolsın. Ondaı jaǵdayda úlken tárepińiń uzınlıǵı $a=3x$ cm ekenliginen paydalanıp, teńleme dúzemiz hám onı sheshemiz:

$$S = 3x \cdot 2x, \text{ yaǵnıy } S = 6x^2.$$

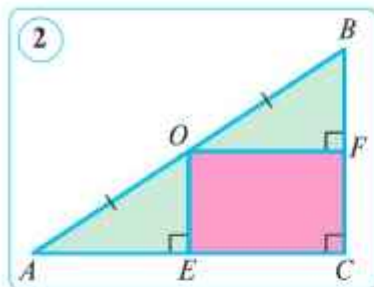
$$\text{Bunnan } x^2 = S:6, \quad x^2 = 150:6, \quad x^2 = 25, \quad x = 5 \text{ (cm).}$$

Demek, tuwrı tórtmüyeshliktiń kishi tárepi: $b = 2 \cdot 5 = 10$ (cm) ge, úlken tárepi $a = 3 \cdot 5 = 15$ (cm) ge teń.

Endi onıń perimetirini esaplaymız:

$$P = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (15 + 10) = 2 \cdot 25 = 50 \text{ (cm)}.$$

Juwap: $P = 50 \text{ cm}$.



2-másele. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleri 12 cm hám 24 cm ge teń. Gipotenuzanıń ortasınan úshmúyeshliktiń katetlerine perpendikulyar ótkizilgen. Payda bolǵan tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanın tabıń.

Berilgen: tuwrı múyeshli $\triangle ABC$ da: $AO = OB$, $OE \perp AC$, $OF \perp CB$, $AC = 24 \text{ cm}$, $BC = 12 \text{ cm}$ (2-súwret).

Tabıw kerek: S_{CEOF} .

Sheshiliwi. Bizge málim, bir tuwrı sızıqqa ótkizilgen eki perpendikulyar óz ara parallel boladı. Fales teoreması boyınsha:

$$AE = EC = 0,5AC = 0,5 \cdot 24 = 12 \text{ (cm)},$$

$$CF = FB = 0,5BC = 0,5 \cdot 12 = 6 \text{ (cm)}.$$

Demek, $S_{CEOF} = CE \cdot CF = 12 \cdot 6 = 72 \text{ (cm}^2\text{)}$. *Juwap:* 72 cm^2 .

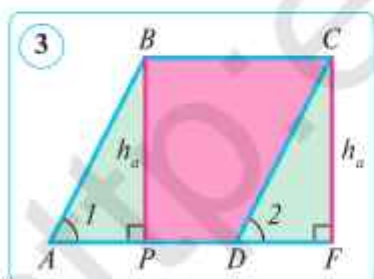
2. Parallelogrammıń maydanı.

Parallelogrammıń qálegen tárepini onıń *ultanı* dep alıw múmkin, bunday halda qarama-qarsı táreptiń qálegen noqatınan ultandı óz ishine alǵan tuwrı sızıqqa túsirilgen perpendikulyar parallelogrammıń *biyikligi* delinedi. Biyiklik tárepke yaki táreptiń dawamına túsıwi múmkin. 3-súwrette BP hám CF — $ABCD$ parallelogrammıń biyiklikleri.

Teorema.

Parallelogrammıń maydanı ultanı menen biyikliginiń kóbeymesine teń:

$$S = a \cdot h_a.$$

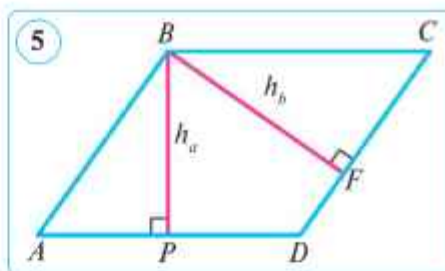
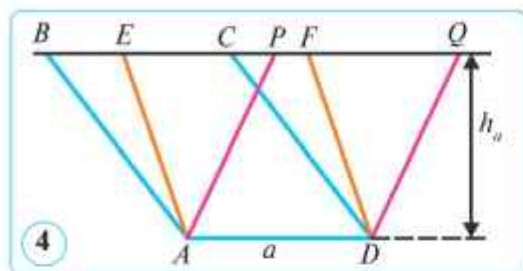


$ABCD$ parallelogrammıń ultanı ushın $AD = a$ tárepini alıǵan, biyikligi bolsa h_a ǵa teń bolsın (3-súwret).

$S = a \cdot h_a$ ekenligin dálillew talap etiledi.

Dánil. Ultanı parallelogrammıń BC tárepine teń, biyikligi bolsa h_a ibarat bolǵan $PBCF$ tuwrı tórtmúyeshlik sızamız. ABP hám DCF úshmúyeshlikler teń (gipotenuzası hám súyir múyeshi boyınsha: $AB = DC$ —

gipotenuzalar, $\angle 1 = \angle 2$ — sáykes múyeshler). $ABCD$ parallelogramm $PBCD$ trapeciya menen ABP úshmúyeshlikten, $PBCF$ tuwrı tórtmúyeshlik bolsa sol $PBCD$ trapeciya menen ABP ǵa teń bolǵan DCF úshmúyeshlikten dúzilgen. Demek, $ABCD$ parallelogramm menen sızılǵan $PBCF$ tuwrı tórtmúyeshlik teń dúzilgen (yaǵnıy, teńdey). Bunnan, $ABCD$ parallelogrammıń maydanı



$PBCF$ tuwrı tórtmüyeshliktiń maydanına, yaǵnıy ah_a teń, degen nátiyje shıǵadı.

Solay etip, ultanı a hám óǵan túsirilgen biyikligi h_a bolǵan parallelogramnıń S maydanı tómendegi formula boyınsha esaplanadı:

$$S = a \cdot h_a.$$

Usı formulanı dálillew talap etilgen edi.

1-nátiyje. Eger eki parallelogram bir ultańǵa iye hám biyiklikleri teń bolsa, olar teń dúzilgen boladı.

Berilgen: $ABCD$, $AEFD$ hám $APQD$ parallelogrammlar bir $AD = a$ ultańǵa iye hám biyiklikleri teń (h_a) (4-súwret).

Dálillew kerek: $ABCD$, $AEFD$ hám $APQD$ parallelogrammlar teń dúzilgen.

Dánil. Máselen, $ABCD$ hám $AEFD$ parallelogrammlardıń teń dúzilgenin dálilleybiz. BAE hám CDF úshmüyeshlikler teń (úshmüyeshlikler teńliginiń birinshi belgisi boyınsha), sebebi $BA = CD$ hám $AE = DF$ hám de $\angle BAE = \angle CDF$ (sáykes tárepleri parallel müyeshler bolǵanı ushın). Demek, $ABCD$ parallelogramm $AECD$ trapeciya menen BAE úshmüyeshlikten, $AEFD$ parallelogramm bolsa $AECD$ trapeciya menen BAE úshmüyeshlikke teń bolǵan CDF úshmüyeshlikten dúzilgen. Demek, $ABCD$ hám $AEFD$ parallelogrammlar teń dúzilgen.

Usıǵan uqsas, qalǵan parallelogrammlardıń eń dúzilgeni dálillendi.

3-másele. Parallelogramnıń tárepleri 25 cm hám 20 cm, birinshi tárepine túsirilgen biyiklik 8 cm. Usı parallelogramnıń ekinshi tárepine túsirilgen biyikligin tabıń.

Berilgen: $ABCD$ parallelogrammda:

$$AD = a = 25 \text{ cm}, DC = b = 20 \text{ cm}, h_a = 8 \text{ cm (5-súwret)}.$$

Tabıw kerek: h_b .

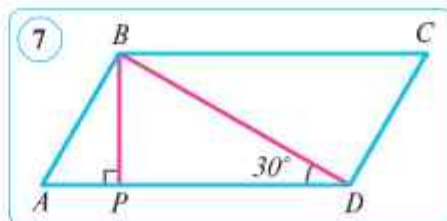
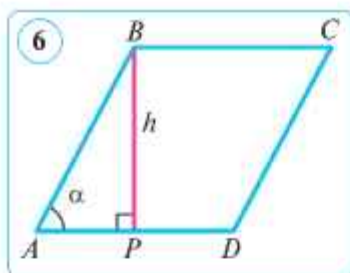
Sheshiliwi. 1) $S = ah_a = 25 \cdot 8 = 200 \text{ (cm}^2\text{)}.$

2) $S = bh_b$, yaǵnıy $200 = 20 \cdot h_b$. Bunnan $h_b = 200 : 20 = 10 \text{ (cm)}.$

Jawabı: 10 cm.

2-nátiyje. Parallelogramnıń maydanı onıń eki tárepi menen olar arasındǵı müyesh sinusı kóbeymesine teń. Usını dálilleń.

Sheshiliwi. $ABCD$ parallelogrammda $AD = a$, $AB = b$ hám $\angle BAD = \alpha$ bolsın. Ol jaǵdayda parallelogramnıń maydanı $S = absin\alpha$ formula boyınsha esaplanadı. Usını dálilleybiz.



$ABCD$ parallelloramnnın BP biyikligin ötkizemiz hám onı $BP = h_a = h$ penen belgileymiz (6-súwret). Ol jaǵdayda h biyiklik tuwrı múyeshli $\triangle ABP$ úshmúyeshliktiń α súyir múyeshi tuwrısında jatqan katet boladı. h tı b tárepke hám α múyeshitiń sinusi kóbeymesi menen ańlatamız:

$$h = b \sin \alpha.$$

Parallelogramnnıń maydanın esaplaw $S = ah$ formulasına h tuń bul ańlatpasın qoyıp, usı formulanı payda etemiz:

$$S = ab \sin \alpha.$$

4-másele. Berilgen: $ABCD$ – parallelogramm, $AD = 20$ cm, $BD = 16$ cm, $\angle BDA = 30^\circ$.

Tabıw kerek: S_{ABCD} .

Sheshiliwi. 1-usıl. 1) Berilgen parallelogramnnıń BP biyikligin ötkizemiz hám BDP úshmúyeshlikti kórip shıǵamız (7-súwret). Ol tuwrı múyeshli, sebebi $BP \perp AD$. BP biyiklikti tabamız. 30° li múyesh qarsısındaǵı katet gipotenuzanıń yarımına teń, sonıń ushın

$$BP = 0,5BD = 0,5 \cdot 16 = 8 \text{ (cm)}.$$

2) Solay etip, $ABCD$ parallelogramnnıń maydanı tómendegige teń boladı:

$$S = AD \cdot BP = 20 \cdot 8 = 160 \text{ (cm}^2\text{)}$$

2-usıl. Tuwrı múyeshli BDP úshmúyeshlikten BP nı BD tárepke (gipotenuzu) hám $\angle BDP = 30^\circ$ múyeshitiń sinusi menen ańlatamız hám parallelogramnnıń maydanın formulasına qoyıp, izlenip atırǵan maydandı tabamız:

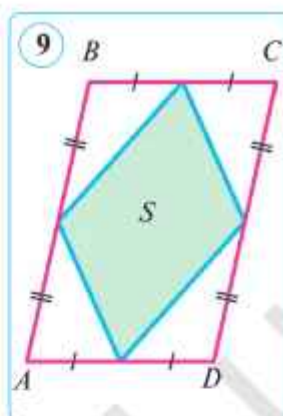
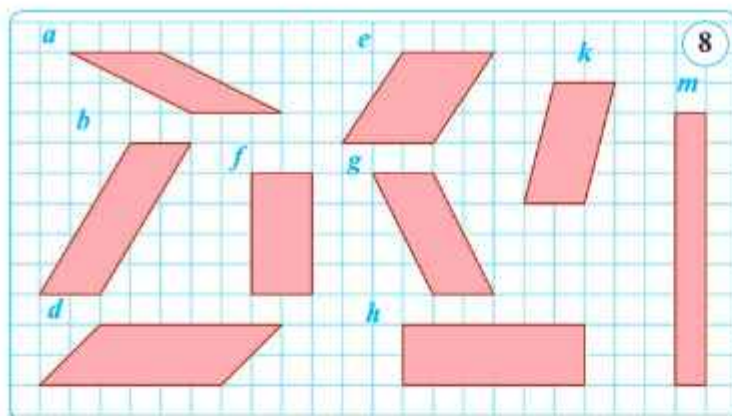
$$S = AD \cdot BP = AD \cdot BD \sin \angle BDP = 20 \cdot 16 \sin 30^\circ = 20 \cdot 16 \cdot 0,5 = 160 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Juwap: $S = 160 \text{ cm}^2$.



Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı nege teń?
- 2) Parallelogramnnıń ultanı hám biyikligi degende neni túsinesiz?
- 3) Parallelogramnnıń maydanı onıń eki qońsı tárepı hám olar arasındaǵı múyesh boyınsha qalay tabıladı?
2. Tuwrı tórtmúyeshliktiń eki tárepı : 1) 30 cm hám 2,9 cm; 2) 34 dm hám 0,6 dm; 3) 2,5 dm hám 12 cm. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri hám maydanın tabıń.
3. Tuwrı tórtmúyeshliktiń bir tárepı 15 dm, ekinshi tárepı bolsa onnan 5 ese artıq. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri hám maydanın tabıń.



4. Maydanı 240 m^2 bolgan basketbol maydanı sport maydanının 15% in quraydı. Sport maydanı pütkil mektep maydanının 32% in quraydı. Mektep maydanın tabiñ.
5. Tuwrı tórtmüyeshliktiñ bir tárepi 23 cm , ekinshi tárepi bolsa onnan 17 cm uzın. Tuwrı tórtmüyeshliktiñ perimetri hám uzınlıgıñ tabıñ.
6. Eger tuwrı tórtmüyeshliktiñ maydanı 20 cm^2 hám 1) uzınlıgı 5 cm ge; 2) uzınlıgı eniniñ 125% ine; 3) táreplerinen biri x qa teñ bolsa, perimetri nege teñ boladı?
7. Eger $ABCD$ tuwrı tórtmüyeshlikte: 1) $AB=9 \text{ cm}$, $BC=4 \text{ cm}$; 2) $AB:BC=5:7$, $P_{ABCD}=48 \text{ cm}$ bolsa, onıñ maydanın tabıñ.
8. Parallelogrammnıñ tárepi 16 cm ge, oğan túsirilgen biyiklik bolsa 9 cm ge teñ. Usı parallelogrammğa teñdey kvadrattıñ tárepın tabıñ.
9. a – parallelogrammnıñ ultanı, h – biyikligi, S – maydanı. Eger:
 - 1) $a=10 \text{ cm}$, $h_a=0,5 \text{ m}$ bolsa, S nı;
 - 2) $h_a=4 \text{ cm}$, $S=48 \text{ cm}^2$ bolsa, a nı;
 - 3) $a=24 \text{ cm}$, $S=120 \text{ cm}^2$ bolsa, h_a nı tabıñ.
10. 8-súwrettegi teñdey parallelogrammlardı tabıñ.
11. Eger tuwrı tórtmüyeshliktiñ: 1) tiykırı 5 ese kemeyttirilip, biyikligi 8 ese uzaytırılса; 2) ultanı da, biyikligi de 2,5 ese kemeyttirilse, onıñ maydanı qalay ózgeredi?
12. 9-súwrettegi S figuranıñ maydanı parallelogramm maydanınıñ qanday bólimin payda etedi?
13. Tuwrı tórtmüyeshliktiñ eki tárepi: 1) 24 cm hám 20 cm ; 2) $3,5 \text{ dm}$ va 8 cm ; 3) 8 m hám $4,5 \text{ m}$; 4) $3,2 \text{ dm}$ hám $1,5 \text{ dm}$. Onıñ maydanın tabıñ.
14. Parallelogrammnıñ maydanı 36 cm^2 , biyiklikleri 3 cm hám 4 cm . Usı parallelogrammnıñ perimetrin tabıñ.
15. Parallelogrammnıñ tárepleri 20 cm hám 28 cm , olardıñ arasındagı müyeshi 30° qa teñ. Usı parallelogrammnıñ maydanın eki usıl menen tabıñ.

48. ÜŞMÜYESHLİKTİN MAYDANI

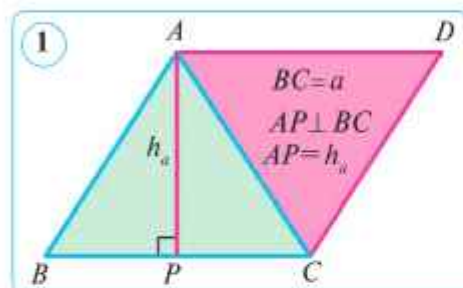
Üşmüyeshliktiñ maydanın esaplaw formulasın tabıw ushın parallelogramm kórinisine keltiriw usılınan paydalanamız.

Teorema.

Üşmüyeshliktiñ maydanı onıñ ultanı menen biyikliginiñ kóbeymesiniñ yarımına teń:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

bunda a – üşmüyeshliktiñ ultanı, h_a – ultańa túsirilgen biyiklik.



Dálil. ABC – berilgen üşmüyeshlik bolsın (1-súwret). $\triangle ABC$ nı üşmüyeshlikti súwrette kórsetilgenindey $ABCD$ (ultanı BC) parallelogramm etip sızamız $\triangle BAC$ hám $\triangle DCA$ üşmüyeshlikler teń, sebebi parallelogrammniñ diagonalı onı eki teń üşmüyeshlikke ajratadı. Sonıñ ushın bul üşmüyeshliklerdiñ maydanları teń. Demek, $ABCD$ parallelogrammniñ maydanı $\triangle ABC$ üş-

müyeshliktiñ maydanınıñ ekileniwine teń, yaǵnıy: $2S = a \cdot h_a$.

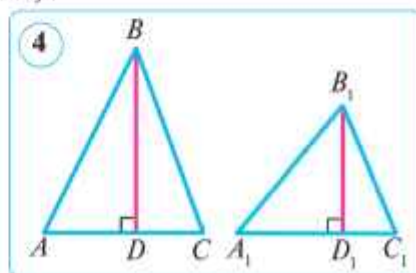
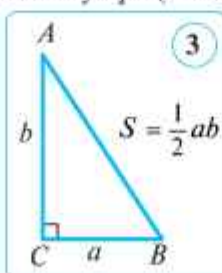
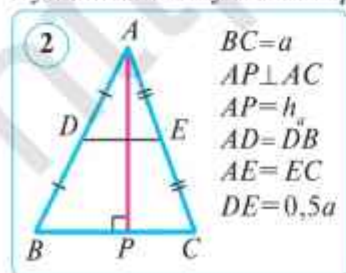
Bunnan, $S = \frac{ah_a}{2}$. Teorema dálillendi.

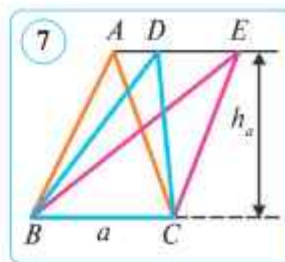
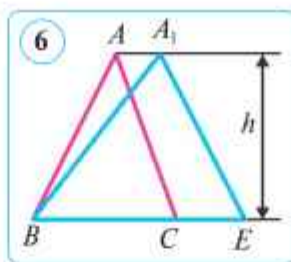
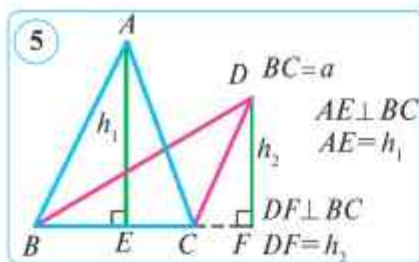
Üşmüyeshliktiñ maydanın esaplaw formulasın basqasha da oqıw mümkin: **üşmüyeshliktiñ maydanı onıñ orta sızığı menen biyikliginiñ kóbeymesine teń** (2-súwret):

$$S = \frac{a}{2} \cdot h_a$$

1-nátiye. Tıwrı müyeshli üşmüyeshliktiñ maydanı katetleriniñ kóbeymesiniñ yarımına teń, sebebi bir katetti ultan, ekinshisin biyiklik etip alıw mümkin (3-súwret).

2-nátiye. Eki üşmüyeshlik maydanlarınıñ qatnası ultanları menen biyiklikleri kóbeymesiniñ qatnası sıyaqlı (4-súwret).





$$\text{Dálil. } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{0,5 AC \cdot BD}{0,5 A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1}.$$

3-nátiye. Ultanları teń bolǵan eki úshmúyeshlik maydanlarınıń qatnası biyikliginiń qatnası sıyaqlı (5-súwret).

$$\text{Dálil. } \frac{S_{ABC}}{S_{BDC}} = \frac{0,5a \cdot h_1}{0,5a \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

4-nátiye. Biyiklikleri teń bolǵan eki úshmúyeshlik maydanlarınıń qatnası ultanlarınıń qatnası sıyaqlı (6-súwret).

$$\text{Dálil. } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1BE}} = \frac{0,5 \cdot BC \cdot h}{0,5 \cdot BE \cdot h} = \frac{BC}{BE} = \frac{a}{a_1}, \text{ bunda } BC = a, BE = a_1.$$

5-nátiye. Ultanları hám biyiklikleri teń bolǵan úshmúyeshlikler teńdey (7-súwret).

$$\text{Dálil. } S_{BAC} = S_{BDC} = S_{BEC} = 0,5ah_u.$$

6-nátiye. Úshmúyeshliktiń maydanı onıń eki tárepi hám olar arasındaǵı múyesh sinusi kóbeymesiniń yarımına teń (8-súwret).

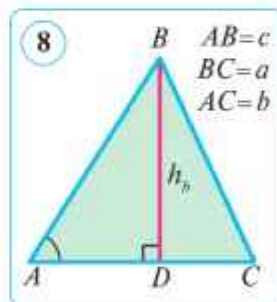
Dálil. ABC úshmúyeshliktiń tárepleri $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ bolsın. Ol jaǵdayda $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ eke-
nin dálilleyміз. Bunıń ushın ABC úshmúyeshliktiń $BD = h_b$ biyikligin ótkizemiz (8-súwret). h_b nı c tárepke hám A múyeshitiń sinusi menen ańlatamız: $h_b = c \sin A$. Úshmúyeshliktiń maydanın esaplaw for-
mulası $S = \frac{1}{2}bh_b$ ǵa h_b nıń usı ańlatpasın qoyıp, usı formulanı payda etemiz:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

Úshmúyeshliktiń maydanın a , b tárepleri hám C múyesh sinusi a , c tárepleri hám B múyesh sinusi arqalı esaplaw formulaları usıǵan uqsas keltirip shıǵarıladı.

Solay etip, úshmúyeshliktiń maydanı eki tárepi hám olar arasındaǵı múyesh sinusına muwapiq usı formulalar boyınsha esaplanadı:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A.$$



Üshmüyeshlik maydanınıñ tárepleri arqalı esaplaw formulası I ásirde jasağan áyyemgi grek ilimpazı **Geron** tárepinen tabılğan bolıp, ol *Geron formulası* dep ataladı. Geron formulası üshmüyeshliktiñ üsh tárepi uzınlıǵı belgili bolǵanda onıñ maydanın esaplaw ushın qollanıladı.

Geron formulasınıñ dálilin keltirip shıǵaramız.

Bizge belgili, üshmüyeshliktiñ maydanı onıñ tiykırı menen biyikligi kóbeymesiniñ yarımına teń:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

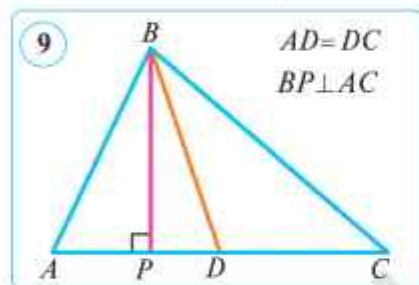
Biyiklik ornına onıñ üshmüyeshlik tárepleri arqalı ańlatpası

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \beta = 90^\circ, \quad h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{hám}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ların qoyıp, onı ápiyawılastırıp usı Geron formulasın payda etemiz:

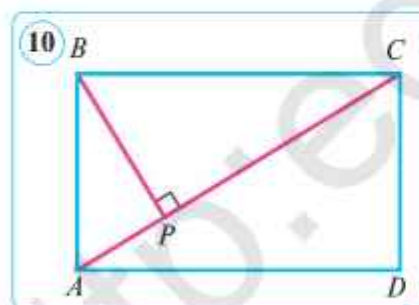
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{bunda } p = \frac{a+b+c}{2}.$$



1-másele. Üshmüyeshliktiñ medianası onı teńdey eki üshmüyeshlikke bóliwin dálilleń.

Dálil. BD — ABC üshmüyeshliktiñ medianası bolsın (9-súwret). ABD hám CDB üshmüyeshlikler teń AD hám DC táreplerge hám ulıwma BP biyiklikke iye, yaǵnıy üshmüyeshlikler 5-nátiyje boyınsha teń:

$$S_{ABD} = S_{CBD}$$



2-másele. Berilgen: $ABCD$ — tuwrı tórtmüyeshlik, $AC = 20$ cm, $BP = 12$ cm, $BP \perp AC$ (10-súwret).

Tabıw kerek: S_{ABCD} .

Sheshiliwi. 1) $S_{ABC} = 0,5 AC \cdot BP =$
 $= 0,5 \cdot 20 \cdot 12 = 120 \text{ (cm}^2\text{)}.$

2) $S_{ABCD} = 2 S_{ABC} = 2 \cdot 120 = 240 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Juwap: $S_{ABCD} = 240 \text{ cm}^2.$

Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Üshmüyeshliktiñ maydanı nege teń?
- 2) Tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ maydanı qalay esaplanadı?
- 3) Tárepleri boyınsha üshmüyeshliktiñ maydanı qalay esaplanadı?
2. Tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ katetleri: 1) 4 cm hám 7 cm; 2) 1,2 dm hám 25 cm. Usı tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ maydanın tabıń.

3. Bır úshmúyeshliktiń ultanı 20 cm, biyikligi 8 cm. Ekinshi úshmúyeshliktiń ultanı 40 cm. Úshmúyeshlikler birdey bolıw ushın ekinshi úshmúyeshliktiń biyikligi qanday bolıwı kerek?
4. ABC úshmúyeshlikte $AB=5AC$. Úshmúyeshliktiń B hám C tóbelerinen ótkizilgen biyikliklerdiń qatnası qanshaǵa teń?
5. Belgisiz muǵdarlardı tabıń. a – úshmúyeshliktiń ultanı, h – ultanına ótkizilgen biyiklik, S – úshmúyeshliktiń maydanı.

	1	2	3	4	5	6
a	69 cm	0,8 dm	?	0,25 m	?	0,9 m
h	0,5 m	?	20 dm	100 cm	4,8 cm	?
S	?	4 cm ²	2000 cm ²	?	9,6 mm ²	36 dm ²

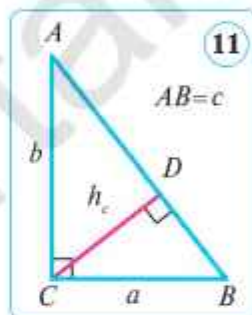
6. Katetlerdiń (a hám b) kóbeymesi gipotenuza (c) menen tuwrı múyesh tóbesinen gipotenuzaǵa túsirilgen biyikliktiń (h_c) kóbeymesine teń (11-súwret).

Sheshiliwi. Eger katetlerden birin ultan ushın qabıl etsek, ol jaǵdayda ekinshisi biyiklik boladı. Sonıń ushın, tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanı katetler kóbeymesiniń yarımına teń boladı:

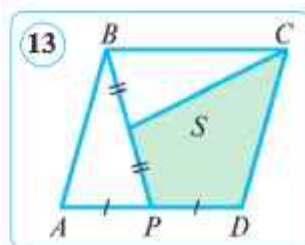
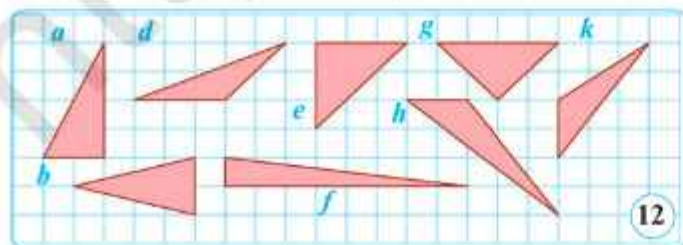
$$S = \frac{1}{2}ab, \text{ bunnan } ab=2S; \quad S = \frac{1}{2}ch_c, \text{ bunnan } ch_c=2S.$$

Demek, $ab=ch_c$ eken. Usını dálillew talap etilgen edi.

Úshmúyeshliktiń katetleri: 1) 12 cm hám 16 cm; 2) 5 cm hám 12 cm ge teń. c (Pifagor teoreması) hám h_c ($ab=ch_c$) ların tabıń.



7. 12-súwrettegi teńdey úshmúyeshliklerdi kórsetiń. Juwabıńızdı dálilleń.
8. Tärepleri: 1) 39 cm, 42 cm, 45 cm; 2) 35 cm, 29 cm, 8 cm; 3) 20 cm, 20 cm, 32 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.
9. 13-súwrettegi S figuranıń maydanı parallelogramm maydanınıń qanday bólimin payda etedi?
10. Úshmúyeshliktiń maydanı 150 cm² qa teń. Úshmúyeshliktiń biyiklikleri 15 cm, 12 cm hám 20 cm ge teń bolsa, onıń perimetrin tabıń.
11. Úshmúyeshliktiń eki tärepi 5 dm hám 6 dm, olardıń arasındadı múyesh 30°. Úshmúyeshliktiń maydanın tabıń. Máseleni eki usıl menen sheshiń.



49–50. ROMB HÁM TRAPECIYANÍN MAYDANI

1. Rombınnıń maydanı. Romb — tárepleri teń bolǵan parallelogramm. Tárepi a hám biyikligi h_a bolǵan rombınnıń maydanı

$$S = ah_a$$

formula boyınsha esaplanadı.

Bizge málim, rombınnıń barlıq biyiklikleri óz ara teń.

Bunnan tısqarı, rombınnıń maydanın diagonalı arqalı da esaplaw mümkün.

Teorema.

Rombınnıń maydanı diagonalarınıń kóbeymesiniń yarımına teń:

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2,$$

bunda d_1 hám d_2 — rombınnıń diagonalı.

Dáلیل. Rombınnıń AC diagonalı onı eki óz ara teń qaptalı úshmüyeshlikke ajıratadı (1-súwret). Ekinshi diagonal birinshisine perpendikulyar bolıp, payda bolǵan úshmüyeshlikler biyiklikleriniń qosındısına teń boladı. Sonıń ushın rombınnıń maydanı:

$$\begin{aligned} S = S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot DO = \frac{1}{2} AC \cdot (BO + DO) = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2. \end{aligned}$$

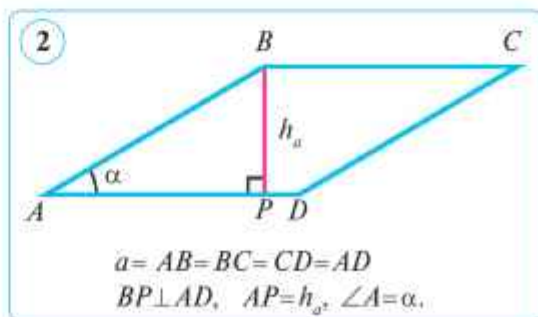
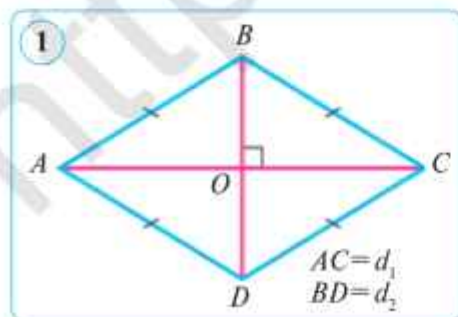
Demek, $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$. Teorema dálillendi.

1-másele. $ABCD$ rombınnıń tárepi a ǵa, súyir múyeshi α ǵa teń. Usı rombınnıń maydanın tabıń $\alpha = 30^\circ$ da onıń maydanın eki usıl menen tabıń.

Sheshiliwi. 1) $ABCD$ rombda $AB=BC=CD=AD=a$, $\angle A=\alpha$ bolsın. $BP \perp AD$ nı ótkizemiz (2-súwret). Bunday jaǵdayda h_a biyiklik tuwrı múyeshli ABP úshmüyeshliktiń α súyir múyeshi tuwrısında jatqan katet boladı. h_a nı α múyeshitiń sinusı menen ańlatamız: $h_a = a \sin \alpha$. Rombınnıń maydanın esaplaw formulası $S = ah_a$ ǵa h_a nıń bul ańlatpasın qoyıp, usı formulanı payda etemiz:

$$S = a^2 \sin \alpha.$$

2) Rombınnıń maydanın $S = a^2 \sin \alpha$ formuladan paydalanıp tabamız:



$$S = a^2 \sin 30^\circ = a^2 \cdot 0,5 = 0,5a^2 \text{ (kv. birl.)}$$

Juwap: $S = 0,5a^2$ kv. birl.

2-másele. Rombınıń diagonallarınan biri ekinshisinen 1,5 ese úlken maydanı bolsa 27 cm^2 qa teń. Usı rombınıń diagonalların tabıń.

Berilgen: $ABCD$ – romb; $S_{ABCD} = 27 \text{ cm}^2$; $AC = 1,5BD$ (1-súwretke q.)

Tabıw kerek: AC , BD .

Sheshiliwi. $BD = x \text{ cm}$ bolsın, onda $AC = 1,5x \text{ cm}$ boladı.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, buǵan belgilewlerdi qoyamız: $27 = \frac{1}{2} \cdot 1,5x \cdot x$. Onda $x^2 = 36$ boladı, bunnan $x = 6 \text{ (cm)}$. Solay etip,

$$BD = 6 \text{ cm}, \quad AC = 1,5 \cdot 6 = 9 \text{ (cm)}.$$

Juwap: 9 cm, 6 cm.

2. Trapeciyanıń maydanı. Hárqanday kópmúyeshlikti diagonallar ótkeriw jolı menen úshmúyeshliklerge ajratıw múmkin. Qálegen kópmúyeshliktiń maydanın esaplaw ushın ol dáslep úshmúyeshliklerge ajratıladı, soń úshmúyeshlikler maydanı esaplanadı. Kópmúyeshlik maydanı bolsa onı payda etken bir-birin qaplamaytuǵın úshmúyeshlikler maydanları qosındısına teń boladı. Trapeciya maydanların esaplawda usı usıldan paydalanamız.

Teorema.

Trapeciyanıń maydanı onıń ultanları qosındısınań yarımı menen biyikliginiń kóbeymesine teń:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

bunda a hám b – trapeciyanıń ultanları, h – trapeciyanıń biyikligi.

Dánil. Ultanları $AD = a$, $BC = b$ hám biyikligi $CE = h$ ($CE \perp AD$) bolǵan $ABCD$ trapeciyanı qarap óteyik (3-súwret).

Trapeciya AC diagonalların ótkeremiz. Bunda $ABCD$ trapeciya ABC hám ACD úshmúyeshliklerge ajraladı. Trapeciya maydanı bolsa bul úshmúyeshlikler maydanlarınıń qosındısına teń boladı.

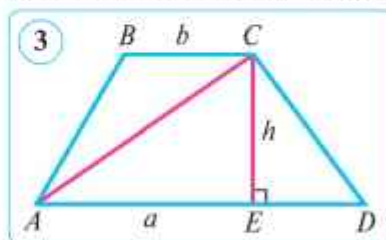
Parallel tuwrı sızıqlar arasındadı aralıq turaqlı bolǵanı ushın ABC hám ACD úshmúyeshliklerdiń biyiklikleri óz ara teń.

$$\text{Bunnan, } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CE = \frac{1}{2} b \cdot h \text{ hám } S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Trapeciyanıń maydanı $S = S_{ABC} + S_{ACD}$, yaǵnıy:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h \text{ yamasa } S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Teorema dálillendi.



Nátiyje. Trapeciyanıń maydanı orta sıızǵı menen biyikliginiń kóbeymesine teń.

Usı nátiyje, trapeciyanıń orta sıızǵı ultanları qosındısınıń yarımına teńliginen kelip shıǵadı.

3-másele. Trapeciyanıń ultanları 15 cm hám 30 cm ge, maydanı bolsa 225 cm^2 qa teń. Usı trapeciyanıń biyikligin tabıń.

Sheshiliwi. Trapeciyanıń orta sıızǵı:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{15+30}{2} = \frac{45}{2} = 22,5 \text{ (cm)}.$$

Demek, trapeciyanıń biyikligi:

$$h = S_{\alpha} : \frac{a+b}{2} = 225 : 22,5 = 10 \text{ (cm)}.$$

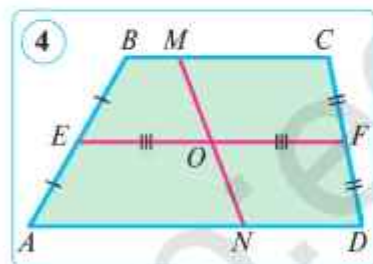
Juwap: $h = 10 \text{ cm}$.

4-másele. Trapeciyanıń orta sıızǵının ortasınan ótip, ultanların kesiwshi tuwrı sıızıq bul trapeciyanı teńdey eki bólekke bóliwin dálilleń.

Sheshiliwi. $ABCD$ — berilgen trapeciya ($AD \parallel BC$), EF — onıń orta sıızǵı, MN bolsa orta sıızıqtıń ortası O arqalı ótiwshi hám ultanların M hám N noqatlarda kesiwshi tuwrı sıızıq bolsın (4-súwret). $ABMN$ hám $MNDC$ trapeciylar sáykes túrde teń EO hám OF orta sıızıq berilgen trapeciyanıń biyikligine teń biyiklikke iye. Demek, bul trapeciylardıń maydanları teń, yaǵnıy olar teń:

$$S_{ABMN} = S_{MNDC}$$

Usını dálillew talap etilgen edi.



5-másele. Teń qaptalı trapeciyanıń diagonalı óz ara perpendikulyar bolsa, bunday halda trapeciyanıń biyikligi onıń orta sıızǵına, maydanı bolsa biyikliginiń kvadratına teń boladı. Sonı dálilleń.

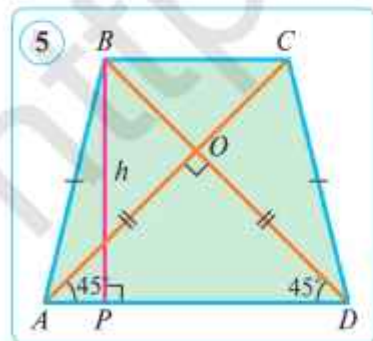
Berilgen: $ABCD$ trapeciya — teń qaptalı ($AB = DC$), $AC \perp BD$, $AD = a$, $BC = b$ bolsın (5-súwret).

Dálillew kerek:

$$1) h = \frac{a+b}{2}; \quad 2) S_{\alpha} = h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Sheshiliwi. 1) $\triangle AOD$ — teń qaptalı, tuwrı müyeshli, sonıń ushın $\angle ADO = 45^\circ$.

2) B tóbesinen $BP \perp AD$ nı ótkizemiz. Payda bolǵan BPD úshmüyeshlikte teń qaptalı hám tuwrı müyeshli, sebebi $\angle ADO = 45^\circ$ hám demek, $\angle PBD = 45^\circ$. Bunnan: $DP = BP$. Bizge



belgili teň qaptallı trapecıyanıń kishi ultanı tóbesinen ótkerilgen biyikliginiń qásiyeti boyınsha:

$$BP = DP = \frac{a+b}{2}.$$

$$3) S_{\text{tr}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2 \text{ yamasa } S_{\text{tr}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Solay etip, teň qaptallı trapecıyanıń diagonalları óz ara perpendikulyar bolǵanda onıń biyikligi orta sızıǵına, maydanı bolsa biyikliginiń kvadratına teńligi tolıq dálillendi.



Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Rombınıń maydanı tárepi hám biyikligi boyınsha qalay tabıladı?
- 2) Rombınıń maydanı diagonalları arqalı qalay tabıladı? Onı ańlatıń.
- 3) Trapecıyanıń maydanı nege teň?
2. Rombınıń maydanı 40 cm^2 , biyikligi 5 cm ge teň. Usı rombınıń perimetrin tabıń.
3. Eger rombınıń: 1) biyikligi 16 cm , súyir múyeshi 30° qa; 2) tárepi $1,8 \text{ dm}$, súyir múyeshi 30° qa teň bolsa, onıń maydanın tabıń.
4. Rombınıń maydanı 60 cm^2 , diagonallarınan biri 10 cm ge teň. Usı rombınıń ekinshi diagonalın tabıń.
5. Rombınıń maydanı 30 cm^2 , perimetri 24 cm ge teň. Usı rombınıń biyikligin tabıń.
6. Berilgen: $ABCD$ — romb. $\angle BAD = 60^\circ$, $BP \perp AD$, $BP = 12 \text{ cm}$ (6-súwret).

Tabıw kerek: S .

Sheshiliwi. Tuwrı múyeshli BPA úsh-múyeshlikti kórip shıǵamız. Súyir múyeshiniń sinusı anıq teoreması boyınsha:

$$\sin A = \frac{BP}{AB}. \text{ Buǵan berilgenlerdi qoyıp,}$$

AB nı tabamız:

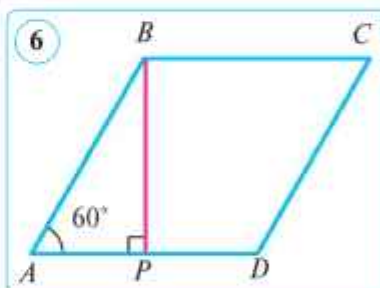
$$\sin A = \frac{BP}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BP}{\sin A} = \frac{12}{\sin 60^\circ} = 12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} (\text{cm}).$$

Tárepi hám súyir múyeshi boyınsha rombınıń maydanın tabıw formulası

$$AB = a = \frac{24}{\sqrt{3}}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

mánislerin qoyıp, tómendegini tabamız:

$$S = a^2 \cdot \sin 60^\circ = \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{576}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} (\text{cm}^2).$$



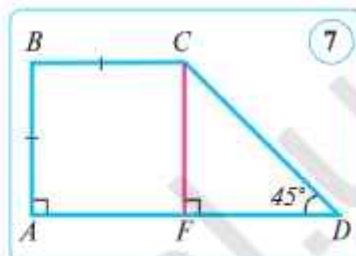
Juwbı: $96\sqrt{3}$ cm².

7. Diagonalları: 1) 1,5 dm hám 1,8 dm; 2) 24 cm hám 15 cm; 3) 3,2 cm hám 0,5 dm bolǵan rombınıń maydanın tabıń.

8. 1) Trapeciyanıń ultanları 11 cm hám 18 cm ge, biyikligi bolsa 6 cm ge teń. Usı trapeciyanıń maydanın tabıń.

2) Trapeciyanıń ultanı 26 cm, biyikligi 10 cm, maydanı bolsa 200 cm². Usı trapeciyanıń ekinshi ultanın tabıń.

9. $ABCD$ tuwrı múyeshli trapeciyaда $AB=BC=18$ cm, $\angle D=45^\circ$ (7-súwret). Trapeciyanıń maydanın tabıń. Bos jerlerge sáykes juwapların jazıń.



Sheshiliwi. $CF \perp AD$ ni ótkeremiz.

1) $ABCF$ — kvadrat, sebebi $ABCF$ tórt-múyeshliktiń qońsı tárepleri AB hám ..., sonıń ushın $AF=CF=...$ (cm).

2) $\triangle CFD$ — tuwrı múyeshli, jasalıwına qaraǵanda $\angle F=90^\circ$ hám shárt boyınsha $\angle D=45^\circ$, sonıń ushın $\angle DCF=...$ hám demek, $\triangle CFD$ — ... hám $DF=...=...$ (cm).

3) $AD=AF+...=...+...=...$ (cm) hám $S_{ABCD}=...=...=...$ (cm²).

Juwbı: ... cm².

10. Romb múyeshleriniń qatnası 1:5 ge, tárepi bolsa a ǵa teń. Usı rombınıń maydanın tabıń.

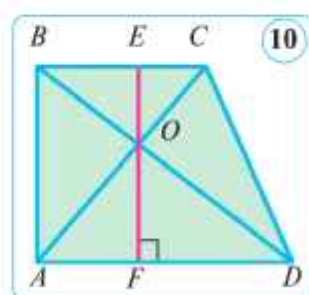
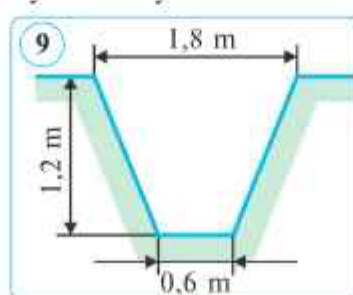
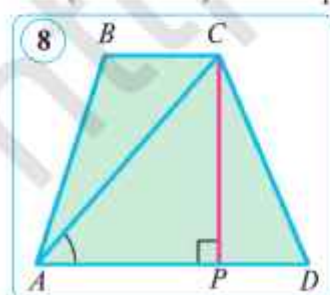
11. $ABCD$ trapeciyaда: $AD=20\sqrt{2}$ cm, $BC=10\sqrt{2}$ cm, $AC=24$ cm, $\angle CAD=45^\circ$ (8-súwret). Trapeciyanıń maydanın tabıń.

12. Diagonalları: 1) 3,5 dm hám 1,4 dm; 2) 28 cm hám 17 cm; 3) 4,2 cm hám 1,5 dm bolǵan rombınıń maydanın tabıń.

13. Teń qaptalı trapeciyanıń diagonalları óz ara perpendikulyar hám biyikligi 5 cm ge teń. Usı trapeciyanıń maydanın tabıń.

14. Teń qaptalı trapeciya formasındaǵı tereńlik kese kesiminiń maydanın tabıń (9-súwret).

15. Trapeciyanıń ultanları 16 cm hám 12 cm. Diagonallarınıń kesilisiw noqatınan ultanlarına shekem bolǵan aralıqlar 6 cm hám 4 cm ge teń (10-súwret). Usı trapeciyanıń maydanın tabıń.



51. KÓPMÜYESHLİKTİN MAYDANI

Kópmüeshliktiñ maydanın esaplaw ushın onı óz ara kesilispeytuǵın, yaǵnıy ulıwma ishki noqatları bolmaǵan úshmüeshliklerge ajratıw hám olardıñ maydanlarınıñ qosındısıñ tabıw múmkin. Dóñes kópmüeshlikti úshmüeshliklerge ajratıw ushın, máselen, onıñ bir tóbesinen diagonallar ótkeriw jetkilikli (1- *a* súwret). Geyde basqasha ajratıwlardan paydalangan qolaylı (1- *b* súwret).

1-másele. $ABCDE$ kópmüeshlikte $BD \parallel AE$, $CP \perp AE$ ekeni málim (2-súwret)

$S_{ABCDE} = 0,5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$ ekenin dálilleñ.

Sheshiliwi. Berilgen figuranıñ trapeciya hám úshmüeshlikten ibarat ekenin kóriw qıyın emes. Sol sebepli maydannıñ qásiyeti boyınsha:

$$\begin{aligned} S_{ABCDE} &= S_{BCD} + S_{ABDE} = 0,5BD \cdot CO + 0,5(AE + BD) \cdot OP = \\ &= 0,5(BD \cdot CO + AE \cdot OP + BD \cdot OP) = 0,5(BD(CO + OP) + \\ &\quad + AE \cdot OP) = 0,5(BD \cdot CP + AE \cdot OP). \end{aligned}$$

Demek, $S_{ABCDE} = 0,5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$.

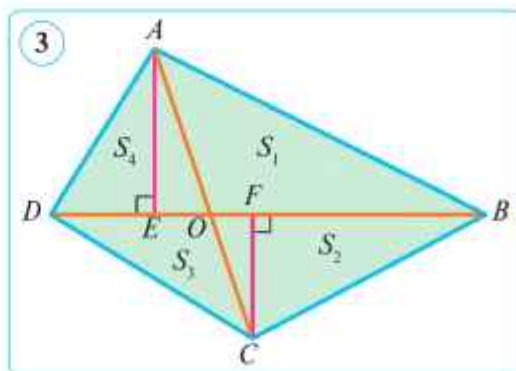
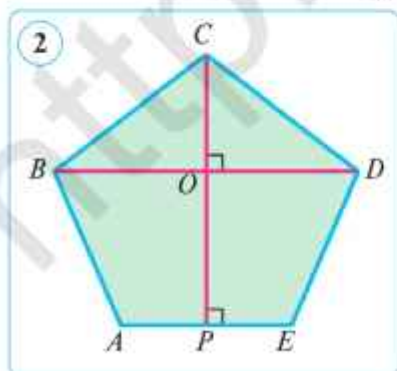
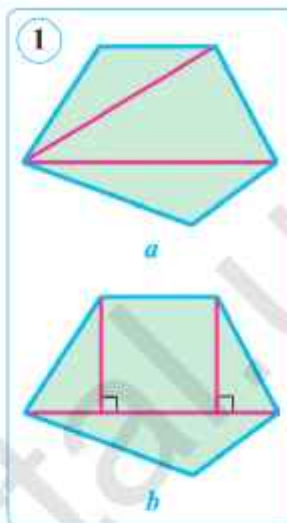
2-másele. AC hám BD — $ABCD$ tórtmüeshliktiñ diagonalları, O — diagonallarınıñ kesilisiw noqatı (3-súwret). Eger $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ hám $S_{AOD} = S_4$ bolsa, $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ ekenin dálilleñ.

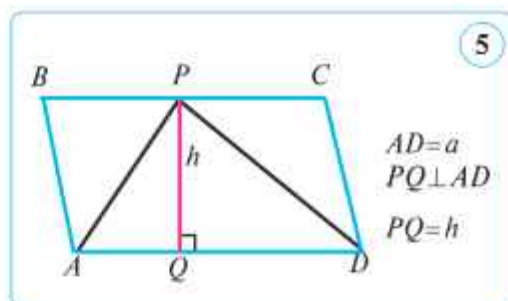
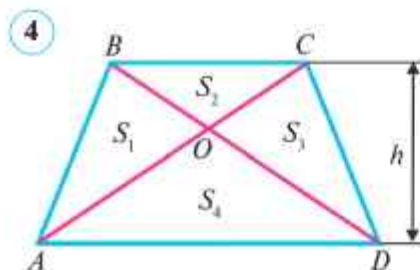
Dálil. 1) $AE \perp BD$ hám $CF \perp BD$ lardı ótkizemiz.

$$2) \frac{S_1}{S_4} = \frac{0,5OB \cdot AE}{0,5OD \cdot AE} = \frac{OB}{OD} \quad (1) \quad \text{hám} \quad \frac{S_2}{S_3} = \frac{0,5OB \cdot CF}{0,5OD \cdot CF} = \frac{OB}{OD} \quad (2).$$

3) (1) hám (2) dan tabamız:

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4.$$





3-másele. BC hám AD — $ABCD$ trapeciyanıń ultanları, O — AC hám BD diagonallarınıń kesilisiw noqatı (4-súwret). $AD = a$, $BC = b$.

$S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ hám $S_{AOD} = S_4$ bolsa, tómendegini dálilleń:

1) $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$; 2) $S_{\Sigma} = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2$.

Dálil. 1) $S_{ABC} = S_{DBC} = \frac{1}{2}bh \Rightarrow S_1 + S_2 = S_3 + S_2 \Rightarrow S_1 = S_3$.

2) Bizge $S_1, S_3 = S_2, S_4$ ekeni málim. $S_1 = S_3$ ti názerge alsaq, $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ kelip shıǵadı. Máseleniń birinshi bólimi dálillendi.

3) Trapecianıń maydanı tórt úshmüyeshlik maydanlarınıń qosındısına teń ekenin joqarıdaǵı nátiyjelerdi esapqa alıp, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned} S_{\Sigma} &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 = \\ &= (\sqrt{S_2})^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} + (\sqrt{S_4})^2 = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2. \end{aligned}$$

Demek, $S_{\Sigma} = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2$. Máseleniń ekinshi bólimi dálillendi.

4-másele. Parallelogramm menen ulıwma ultanǵa hám ulıwma biyiklikke iye bolǵan úshmüyeshliktiń maydanı parallelogram maydanınıń yarımına teń.

Dálil. AD ultan hám h biyiklik — $ABCD$ parallelogram hám APD úshmüyeshlikler ushın ulıwma (5-súwret). $S_{APD} = 0,5S_{ABCD}$ ekenin dálilleymiz.

$S_{ABCD} = ah$ (1) hám $S_{APD} = 0,5ah$ (2) ekeni málim. (2) teńliktegi ah ornına S_{ABCD} nı qoyıp tabamız:

$$S_{APD} = 0,5ah = 0,5S_{ABCD}$$

Eskertiw! Joqarıda keltirilgen máseleni tómendegishe de oqıw múmkin: *úshmüyeshlik penen ulıwma ultanǵa hám ulıwma biyiklikke iye bolǵan parallelogrammıń maydanı úshmüyeshliktiń maydanınan eki ese úlken.*

5-másele. Dónes tórtmüyeshliktiń tóbeleri arqalı onıń diagonallarına parallel tuwrı sızıqlar ótkizilse, bunday jaǵdayda payda bolǵan parallelogrammıń maydanı berilgen tórtmüyeshlik maydanınan eki ese úlken bolıwın dálilleń.

Dálil. $ABCD$ — berilgen dónes tórtmüyeshlik, O — AC hám BD diagonallarınıń kesilisiw noqatı, h_1 hám h_2 — tórtmüyeshliktiń B hám D tó-

belerinen AC diagonalğa túsirilgen biyiklikler; $EFPO$ — tórtmüyeshliktiń tóbeleri arqalı onıń diagonalına parallel ótkizilgen tuwrı sızıqlar kesilisiwinen payda bolǵan parallelogramm (6-súwret).

$$S_{EFPO} = 2S_{ABCD} \text{ ekenin dálilleybiz.}$$

Parallelogrammnıń EF hám QP tárepleri AC diagonalğa parallel hám teń. Sonıń ushın AC diagonal payda bolǵan $EFPO$ parallelogrammı eki — $AEFC$ hám $ACPQ$ parallelogramlarǵa ajratadı.

Joqarıda keltirilgen eskertiwdegi juwmaqtı qollanıp, $S_{EFPO} = 2S_{ABCD}$ teńlikti dálilleybiz: $S_{EFPO} = S_{AEFC} + S_{ACPQ} = 2S_{ABC} + 2S_{ADC} = 2(S_{ABC} + S_{ADC}) = 2S_{ABCD}$.

$$\text{Demek, } S_{EFPO} = 2S_{ABCD}.$$



Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 7-súwrettegi figuranıń maydanın tabıń.

Sheshiliwi. Súwrette kórsetilgen figuranıń maydanın A hám B noqatların tutastırıp, onı kvadratqa toltırıw arqalı tabıw qolay. Berilgen figuranıń maydanı payda bolǵan kvadrat maydanı menen ABC úshmüyeshlik maydanınıń ayırmasına teń:

$$S = S_{kv} - S_{ABC} = \dots^2 - 0,5(50 - 2 \cdot 10) \dots = \dots - 375 = \dots \text{ (kv. birl.)}$$

Noqatlar ornına sáykes sanlardı qoyıń.

Juwap: ... kv. birl.

2. 8-súwrettegi figura maydanın esaplaw ushın formula keltirip shıǵarıń. Bunda $AE \parallel BC \parallel PD$, $AE = BC$, $AP = PB$, $PD \perp AB$.
3. Berilgen: $ABCD$ — tuwrı tórtmüyeshlik, $AB = 12$ cm, $AD = 16$ cm; E , F , P hám Q noqatlari — sáykes tárepleriniń ortaları.

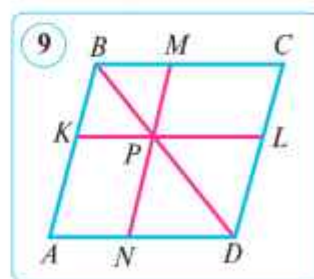
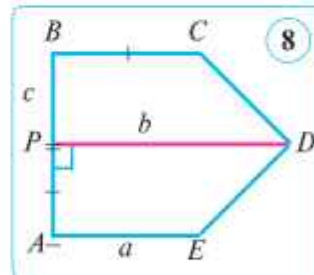
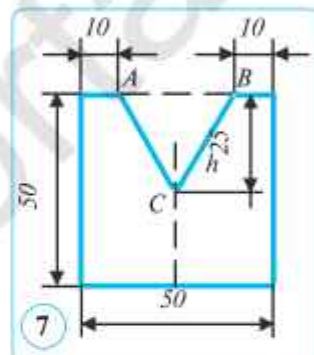
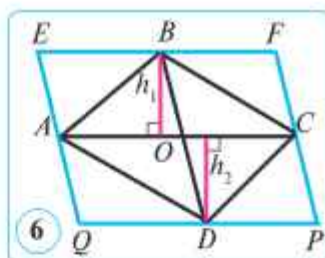
Tabıw kerek: S_{EFCPQA} .

4. Berilgen: $ABCD$ — parallelogramm, $P \in BD$, $KL \parallel BC$, $MN \parallel AB$ (9-súwret).

Dálillew kerek: $S_{AKPN} = S_{PMCL}$.

5. AC hám BD — $ABCD$ tórtmüyeshliktiń diagonalı, O — olardıń kesilisiw noqatı. $S_{AOD} = 12$, $S_{BOC} = 8$, $S_{AOB} = 6$. S_{COD} nı tabıń.

6. Tuwrı tórtmüyeshlik kórinisindegi jerdiń maydanı 400 ha. Eger: 1) maydanniń boyı 10 km bolsa; 2) maydan kvadrat kórinisinde bolsa, onıń perimetri qansha?



52. ÁMELİY JUMÍS HÁM QOLLANÍW

1. Izertlew ushın máseleler.

1-másele. Tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepleri natural san hám perimetri 4 ge eseli bolǵan máseleńi kórip shıǵamız.

Perimetri 72 cm ge teń hám tárepleri natural san bolǵan barlıq tuwrı tórtmúyeshlikler ishinen eń úlken maydangá iye bolǵanın tabıń. Ol qanday figura boladı? Juwmaq shıǵarıń.

Sheshiliwi. Tuwrı tórtmúyeshlikte: $P=2 \cdot (a+b)=72$ cm — perimetr, $p=a+b=36$ cm — yarım perimetr, yaǵnıy qońsı tárepler qosındısı. a hám b nıń mánisleri belgili bolǵanda ǵana $S=a \cdot b$ esaplay alamız. Máselede qoyılǵan sorawǵa juwap beriw ushın tuwrı tórtmúyeshliktiń qońsı táreplerin tabıwǵa háreket etemiz.

Bunıń ushın 36 nı eki natural sannıń qosındısı kórinisinde ańlatamız:

$$a+b=36=1+35=2+34=3+33=\dots=33+3=34+2=35+1.$$

Bunnan kórinedi, qońsı tárepleri qosındısı 36 cm ge teń bolǵan 35 hár túrli tuwrı tórtmúyeshlik bar. Maǵlıwmatlardı kestege kirgizip, olardı talqılaymız hám juwmaq shıǵaramız:

a cm	1	2	...	17	18	19	20	...	34	35
b cm	35	34	...	19	18	17	16	...	2	1
$(a+b)$ cm	36	36		36	36	36	36	...	36	36
$S=a \cdot b$ cm ²	35	68	...	323	324	323	320	...	68	35

Kesteden kórinedi, eń kishi maydangá $a=1$ cm hám $b=35$ cm yaki $a=35$ cm hám $b=1$ cm bolǵanda, eń úlken maydangá bolsa $a=b=18$ cm — tárepi 18 cm ge teń kvadrat bolǵanda ǵana, erisiledi. Qalǵan tuwrı tórtmúyeshliklerdiń perimetri 72 cm bolsa da, biraq maydanları

$$18 \cdot 18 = 324 \text{ (cm}^2\text{)}$$

dan kishi boladı.

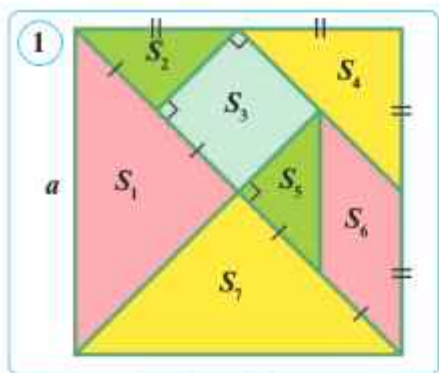
Kesteni talqılaw nátiyjesinde tómendegi juwmaqqá kelemiz.

1-juwmaq. Eger tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepleri natural san hám perimetri 4 ge kóbeytilse, eń úlken maydan tómendegi formula boyınsha tabıladı:

$$S_{\max} = \left(\frac{P}{4}\right)^2 \text{ kv. birl.}$$

2-juwmaq. Eger tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepleri natural san hám perimetri 2 ge eselense, ol jaǵdayda perimetrleri teń bolǵan barlıq tuwrı tórtmúyeshlikler ishinen táreplerinen biri 1 ge hám ekinshi tárepi bolsa 1 di yarım perimetrge toltırıwshı san bolǵanda ǵana eń kishi maydangá iye boladı.

3-juwmaq. Tuwrı tórtmúyeshliktiń qońsı tárepleri uzınlıqları bir-birine jaqınlasqan sayın maydan artıp baradı.



2-másele. Qıtaysha «tangram» oynında kvadrat 1-súwrette kórsetilgendeý úshmúyeshlikleri hám tórtmúyeshliklerge ajratılǵan. Bulardan hár túrli figuralar sızıwǵa boladı. Eger kvadrattıń tárepi 8 cm ge teń bolsa, bólingen figuralardıń maydanların tabıń.

Sheshiliwi. $a = 8$ cm — kvadrattıń tárepi. $S = a^2 = 8^2 = 64$ (cm²) — berilgen kvadrattıń maydanı. Endi figuradaǵı bólsheklerdiń maydanların tabamız.

1) S_1 hám S_7 — kvadrat maydanınıń tórtten birine teń. Demek,

$$S_1 = S_7 = S : 4 = 64 : 4 = 16 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2) Teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanı gipotenuza kvadrattıń tórtten birine teń. Demek,

$$S_2 = S_5 = 0,25 \cdot (a : 2)^2 = 0,25 \cdot 4^2 = 0,25 \cdot 16 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

3) S_3 kvadrattıń maydanı eki S_2 úshmúyeshlik maydanları qosındısına teń. Demek, $S_3 = 2S_2 = 2 \cdot 4 = 8$ (cm²).

4) S_4 úshmúyeshliktiń katetleri berilgen kvadrat tárepiniń yarımına teń, yaǵnıy $a : 2 = 8 : 2 = 4$ (cm). Teń qaptallı úshmúyeshliktiń maydanı kateti kvadrattıń yarımına teń, yaǵnıy $S_4 = 0,5 \cdot 4^2 = 0,5 \cdot 16 = 8$ (cm²).

5) Ultanları hám biyiklikleri teń bolǵan kvadrat penen parallelogramm teńles, sonıń ushın $S_6 = S_3 = 2 \cdot 4 = 8$ (cm²) bólegi.

$$\text{Juwap: } S_1 = S_7 = 16 \text{ cm}^2; S_2 = S_5 = 4 \text{ cm}^2; S_3 = S_4 = S_6 = 8 \text{ cm}^2.$$

3-másele. Usta uzınlıǵı 2,25 m hám eni 1,8 m bolǵan tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı diywal bólimin kafel menen qaplamaqshı. Bunıń ushın oǵan tárepi 15 cm li kvadrat formasındaǵı kafelden neshewi kerek boladı (2-súwret)?

Sheshiliwi. 1) Qaplamaqshı bolǵan diywaldıń maydanın tabamız hám onı kvadrat santimetrde ańlatamız:

$$2,25 \cdot 1,8 = 4,05 \text{ (m}^2\text{)} = 4,05 \cdot 10000 \text{ cm}^2 = 40500 \text{ cm}^2.$$

2) Bir dana kafeldiń maydanın tabamız: $a^2 = 15^2 = 225$ (cm²).

3) Tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı diywaldı qaplaw ushın neshe kafel kerek bolıwın tabamız:

$$40500 : 225 = 180.$$

Juwap: 180 kafel.

Tómendegi másele sheshiwdi ózińizge qaldıramız.

4-másele. Tárepi 4 m ge teń bolǵan kvadrat formasındaǵı joldı qaplaw ushın tárepi 20 cm li kafelden neshewi kerek boladı?

ÁMELİY KOMPETENCIYANÍ RAWAJLANDÍRÍWSHÍ QOSÍMSHA MATERIALLAR

KETEKSHELI QAĞAZDA MAYDANLARDÍ ESAPLAW

Keteksheli qağazda berilgen dóñes hám dóñes emes kópmúyeshliklerdiń maydanın esaplaw ushın «**Pik formulası**» dep atalıwshı formulanı keltiremiz. Hár bir ketekshe tárepi uzınlığı 1 cm bolsın. Ketekli qağazdağı tuwrı sızıqlar kesiliw noqatların — birlik kvadrat tóbelerin **túyin noqatlar** dep ataymız. Bunday jaǵdayda kópmúyeshliktiń maydanı tómendegi formula boyınsha esaplanadı:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1$$

Bul formulada M — kópmúyeshlik shegarasında jatqan túyin noqatlar sanı, N — kópmúyeshlik ishinde jatqan túyin noqatlar sanı.

Bul formulanı kópmúyeshliktiń tóbeleri túyin noqatlarda bolǵan hárqan-day kópmúyeshlik ushın qollansa boladı.

1-másele. 1-súwrettegi figura maydanın esaplań.

Sheshiliwi. 1-usıl. 1) Barlıq tolıq kvadratlar sanı 59 bolıp, olardıń maydanı 59 cm^2 ; kvadrattıń yarımına teń bolǵan úshmúyeshlikler sanı 16 bolıp, olardıń maydanı $16 : 2 = 8 \text{ (cm}^2\text{)}$; bir ultanı 2 cm, biyikligi 3 cm maydanı 3 cm^2 ge teń.

Solay etip, berilgen kópmúyeshliktiń maydanı:

$$S = 59 + 8 + 3 = 71 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2-usıl. Usı juwaptıń Pik formulası járdeminde qalay tabılıwın kirip shıǵamız. Túyin noqatların belgilep alamız.

1) Figura ishinde jatqan túyin noqatların (qara reńde belgilengen) sanaymız olar 50, yaǵnıy $N=50$.

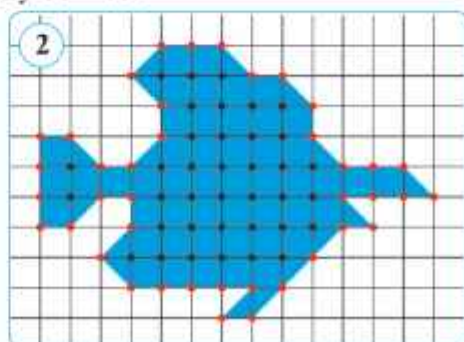
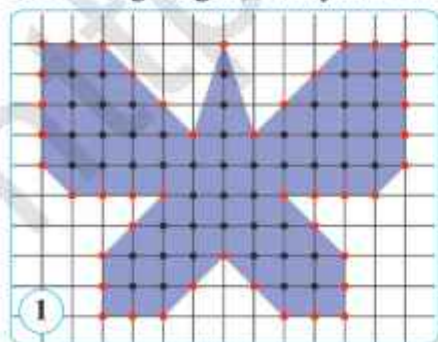
2) Figura táreplerinde jatqan túyin noqatların (qızıl reńde belgilengen) sanaymız: olar 44, yaǵnıy $M=44$. Pik formulasın qollanamız:

$$S = \frac{44}{2} + 50 - 1 = 22 + 49 = 71 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Demek, eki usılda da hár qıylı nátiye kelip shıǵadı. *Juwap:* 71 cm^2 .

2-másele. 2-súwrettegi kópmúyeshlik maydanın esaplań.

Sheshiliwi. 1) Kópmúyeshlik táreplerinde jatqan túyin noqatların (qızıl reńde belgilengen) sanaymız: olar 40, yaǵnıy $M=40$.



2) Kópmúyeshlik ishinde jatqan túyin noqatların (qara reñde belgilengen) sanaymız: olar 37, yaǵnıy $N=37$.

Pik formulası boyınsha:

$$S = \frac{40}{2} + 37 - 1 = 20 + 36 = 56 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Juwap: 56 cm².

3-másele. 3-súwrettegi kópmúyeshlik maydanın esaplañ.

Sheshiliwi. 1-usıl. 1) Kópmúyeshlik táreplerinde jatqan túyin noqatların (qızıl reñde belgilengen) sanaymız: olar 39, yaǵnıy $M=39$.

2) Kópmúyeshlik ishindegi túyin noqatları (qara reñde belgilengen) sanaymız: olar 17, yaǵnıy $N=17$.

Pik formulası boyınsha:

$$S = \frac{39}{2} + 17 - 1 = 19,5 + 16 = 35,5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

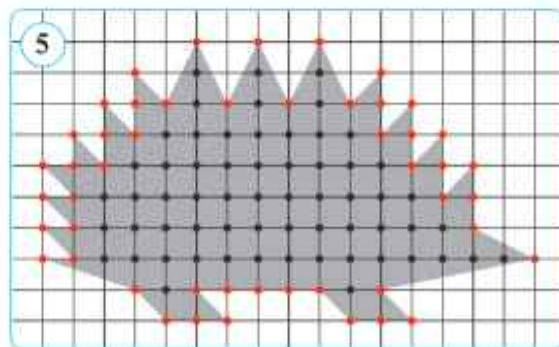
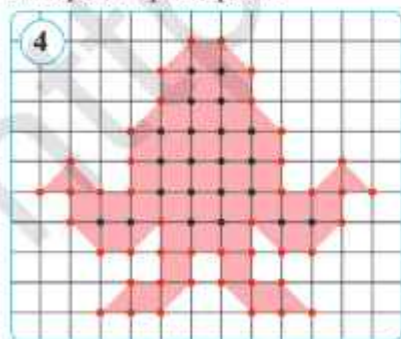
2-usıl. Alınğan juwaptıñ durıs ekenine jáne bir ret isenim payda etpekshi bolsañız, dáslep berilgen kópmúyeshlikti hár túrli usıllar menen úyrenilgen dóñes kópmúyeshliklerge ajratıñ. Keyin payda bolğan figuralar maydanların tiyisli formulalar járdeminde esaplañ. Alınğan nátiyjelerdi qosıp, 1-usılda shıqqan nátiyje menen salıstırıñ. Eger esaplawlardı durıs orınlasañız, álbette, hár eki nátiyje birdey boladı. Berilgen kópmúyeshlik sızılmağa hár túrli figuralarğa ajratıp kórsetilmese de boladı. Esaplaw usılın tañlaw óziñizge baylanıslı. Esaplawlardı awızeki orınlasa da boladı.

Barlıq tolıq kvadratlar sanı 26, olardıñ maydanı 26 cm²; kvadrattıñ yarımına teñ bolğan úshmúyeshlikler sanı 17, olardıñ maydanı $17:2=8,5$ (cm²); bir ultanı 2 cm, biyikligi 1 cm ge teñ úshmúyeshlik bar, onıñ maydanı 1 cm² qa teñ. Solay etip, berilgen kópmúyeshliktiñ maydanı: $26 + 8,5 + 1 = 35,5$ (cm²).

Demek, hár eki nátiyje birdey.

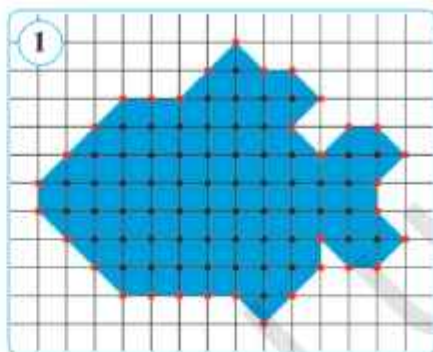
Juwap: 35,5 cm².

4-másele. 4-hám 5-súwrettegi kópmúyeshlikler maydanın Pik formula-sın qollanıp esaplañ.



53–54. 4-BAQLAW JUMÍSÍ. QÁTELER ÚSTINDE ISLEW

1. Tárepleri 27 cm hám 21 cm ge teń tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetrine teń bolǵan kvadrattıń maydanın tabıń.
2. Tuwrı tórtmüyeshliktiń maydanı 540 cm^2 , eki tárepiniń qatnası 3 : 5 sıyaqlı. Usı tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetrin tabıń.
3. Parallelogramnıń maydanı 24 cm^2 . Eger onıń biyiklikleri 3 cm hám 4 cm ge teń bolsa, obıń perimetrin tabıń.
4. 1-súwrette súwretlengen figuranıń maydanın bóleklerge bólip hám de Pik formulasın qollanıp tabıń.



4-TEST

Ózińizdi sınap kóriń!

1. Eger tuwrı tórtmüyeshliktiń tárepleri 4 ese arttırılса, onıń maydanı neshe ese artadı?
A) 4; B) 8; D) 16; E) 32.
2. Tuwrı tórtmüyeshliktiń maydanı 400 ge, tárepleriniń qatnası 4:1 ge teń. Usı tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetrin tabıń.
A) 10 km; B) 5 km; D) 2 km; E) 8 km.
3. Tuwrı tórtmüyeshliktiń uzınlıǵı 25 % ke arttırıldı. Onıń maydanı ózgermesligi ushın enin neshe procentke kemeyttiriw kerek?
A) 20 %; B) 16 %; D) 25 %; E) 18 %.
4. Kvadrattıń tárepin neshe márte kemeyttirgende maydanı 4 márte kishireydi?
A) 1,5 ese; B) 2 ese; D) 3 ese; E) 3,5 ese.
5. Maydanı 144 sm^2 , biyiklikleri 8 sm hám 12 sm bolǵan parallelogramnıń perimetrin tabıń.
A) 40 cm; B) 30 cm; D) 80 cm; E) 60 cm.
6. $ABCD$ parallelogramnıń AC diagonalına BO perpendikulyar túsirilgen. $AO=8$, $OC=6$ hám $BO=4$ bolsa, parallelogramnıń maydanın tabıń.
A) 50 cm^2 ; B) 28 cm^2 ; D) 52 cm^2 ; E) 56 cm^2 .
7. Rombınıń maydanı 40 sm^2 qa, perimetri 20 sm ge teń. Usı rombınıń biyikligin tabıń.
A) 2 cm; B) 8 cm; D) 4 cm; E) 16 cm.
8. Ultanları 5 sm hám 9 sm ge teń bolǵan trapeciyanıń maydanı 35 sm^2 qa teń. Usı trapeciyanıń biyikligin tabıń.
A) 9 cm; B) 8 cm; D) 5 cm; E) 10 cm.

9. Ultanları 8 hám 12 ge teń bolǵan teń qaptalı trapeciyanıń diagonalları óz ara perpendikulyar. Trapeciyanıń maydanın tabıń.
A) 100; B) 64; D) 144; E) 76.
10. Trapeciyanıń maydanı 30 cm ge biyikligi 6 cm ge teń bolsa, onıń orta sızıǵı qanshaǵa teń boladı?
A) 2,5 cm; B) 5 cm; D) 7,5 cm; E) 4,5 cm.

İnglis tilin úyrenemiz!



Kvadrat koreni – square root

Úshmúyeshlik – triangle

Orta sızıq – midline

Geron formulası – formula of

Heron

Maydan – area



Tariyxıy maǵlıwmatlar

Ibn-Sino «Donishnoma» shıǵarmasınıń besinshi babı «Tórtmúyeshlikler, olarda jaylasqan úshmúyeshlikler hám olardıń qatnaslarına tiyisli tiykargı geometriyalıq máseleler» temasına baǵıshlangan. Shıǵarmada parallel sızıqlar haqqında tómendegishe pikirler ayıp ótilgen.

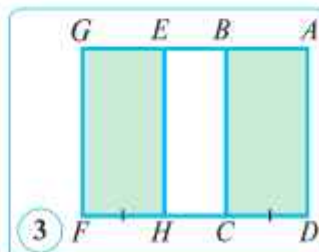
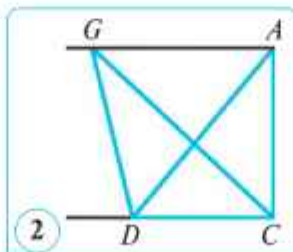
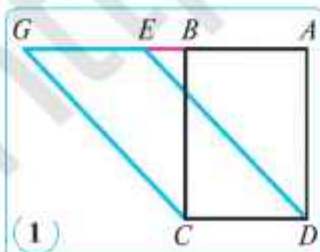
1-teorema. Óz ara parallel eki sızıq arasına jaylasqan, ulıwma ultanǵa iye hám qarama-qarsı tárepleri parallel figuralar birdey boladı (yaǵnıy olardıń maydanları teń). Mısalı, ultanları CD bolǵan $ABCD$ hám $EGCD$ tegis figuralar óz ara teń boladı (1-súwret).

2-teorema. Óz ara parallel sızıqlar arasına jaylasqan hám ulıwma ultanǵa iye bolǵan úshmúyeshlikler teń boladı. Mısalı, CD ultanǵa iye bolǵan ACD hám GCD úshmúyeshlikler teńdey boladı (2-súwret).

3-teorema. Óz ara parallel sızıqlar arasına jaylasqan hám ultanları teń bolǵan tórtmúyeshlikler teń boladı. Mısalı, $ABCD$ hám de $GEHF$ tórtmúyeshlikler birdey (3-súwret).



Abu Ali ibn Sino
(980–1037)





V BAP SHENBER



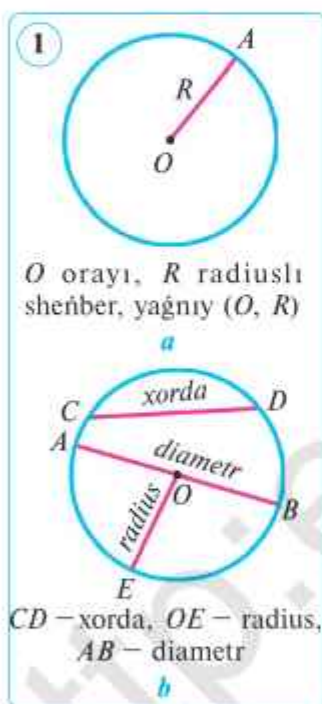
10-§.

SHENBERDEGI MÜYESHLER

55. TUWRÍ SÍZÍQ HÁM SHENBERDİN ÖZ ARA JAYLASIWÍ. SHENBERGE URINBA HÁM ONÍN QÁSIYETLERI

1. Shenber hqqında baslangış mağlıwmatlar.

Аңқлама. *Tegisliktiñ berilgen noqattan birdey aralıqta uzaqlasqan noqatlardan ibarat figura **shenber** dep ataladı.*



Berilgen O noqat **shenberdiñ orayı** delinedi. Shenberdiñ qálegen noqatlarınan onıñ orayına shekemgi aralıq **shenberdiñ radiusı** dep ataladı. Sonday-aq, shenber noqatın onıñ orayı menen tutastırıwshı hárqanday kesindi de **radius** boladı. Solay etip, orayı O noqat hám radiusı R bolǵan shenber — berilgen. O noqattan R ge teñ aralıqta jaylasqan tegisliktiñ barlıq noqatlarınan dúzilgen geometriyalıq figura.

Ádette, O oraylı hám R radiuslı shenber tómendegishe belgilenedi: (O, R) (1- a súwret).

Shenberdiñ qálegen eki noqatın tutastırıwshı sızıq **xorda** dep ataladı. Shenberdiñ orayınan ótiwshı xorda onıñ **diametri** delinedi.

1- b súwrette shenberdiñ radiusı hám eki xordası súwretlengen bolıp, xordadan biri shenberdiñ diametri.: OE — radius, CD — xorda AB — diametr.

Ádette, diametr d háribi menen belgilenedi. Bizge belgili, diametr radiusdan eki márte úlken, yaǵnıy $d = 2R$ ge teñ.

2. Tuwrı sızıq hám shenberdiñ öz ara jaylasıwı.

Bul temada tegislikte tuwrı sızıq penen shenberdiñ öz ara jaylasıwın kórip shıǵamız. Eger tuwrı, sızıq shenber orayınan ótse bul jaǵdayda ol shenberdi eki noqatta, yaǵnıy bul tuwrı sızıqta jatıwshı diametr tóbelerinde kesip ótiwshı kórinip turadı.

Berilgen l tuwrı sızıq penen (O, R) shenber neshe ulıwma noqatqa iye, degen sorawǵa juwap beriw ushın shenberdiñ orayı O dan l tuwrı sızıqqa deyın bolǵan d aralıq usı shenberdiñ R radiusı menen salıstırıw kerek.

Sheñberdiñ orayınan tuwrı sızıqqa túsirigen perpendikulyar sheñber orayınan tuwrı sızıqqa shekemgi aralıq dep ataladı.

Úsh jaǵday bolıwı múmkin: 1) $d > R$; 2) $d = R$; 3) $d < R$. Endi bul jaǵdaydı kórip shıǵamız.

1-jaǵday. Eger sheñberdiñ orayınan tuwrı sızıqqa shekem bolǵan aralıq sheñberdiñ radiusınan úlken bolsa, tuwrı sızıq penen sheñber ulıwma noqatqa iye bolmaydı, yaǵnıy kesilispeydi.

Haqıyqatında da, eger $d > R$ bolsa (2-a súwret), l tuwrı sızıqtıñ O orayına eñ jaqın noqatı (bul tuwrı sızıqtıñ qálegen noqatı da) (O, R) sheñberge tiyisli bolmaydı, sebebi oraydan sheñber radiusınan úlken aralıqta boladı.

2-jaǵday. Eger sheñberdiñ orayınan tuwrı sızıqqa shekemgi aralıq sheñberdiñ radiusına teń bolsa, bunday jaǵdayda tuwrı sızıq penen sheñber bir hám tek ǵana bir ulıwma noqatqa iye boladı.

Haqıyqatında da, eger $d = R$ bolsa (2-b súwret), l tuwrı sızıqtıñ O orayına eñ jaqın noqatı bul tuwrı sızıqtıñ qálegen noqatı da sheñberdiñ radiusına teń aralıqta boladı hám demek, ol noqat sheñberge tiyisli boladı. l tuwrı sızıqtıñ qalǵan barlıq noqatları O oraydan sheñberdiñ radiusınan úlken aralıqta boladı demek, sheñberge tiyisli bolmaydı.

3-jaǵday. Sheñberdiñ orayınan tuwrı sızıqqa shekemgi bolǵan aralıq sheñberdiñ radiusınan kishi bolsa ($d < R$), ol jaǵdayda tuwrı sızıq penen sheñber eki ulıwma noqatqa iye boladı.

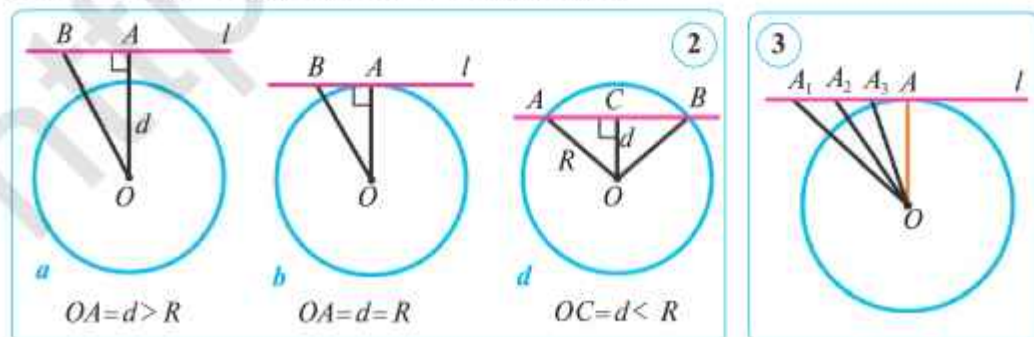
Tuwrı sızıqtıñ sheñber ishindegi bólimi xorda boladı (2-d súwret). Bul jaǵdayda tuwrı sızıq sheñberge salıstırmalı *kesiwshi* dep ataladı.

Xorda uzınlıǵı AB sheñberdiñ radiusı hám orayınan tuwrı sızıqqa shekemgi aralıq d arqalı ańlatıw múmkin:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}.$$

Bul teńlikti óziñiz dálilleñ.

Juwmaq. Tuwrı sızıq penen sheñber ulıwma noqatlarga iye bolmawı bir yamasa eki ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin.



2. Sheñberge urınba.

Anıqlama. Sheñber benen tek ulıwma noqatqa iye bolğan tuwrı sızıq usı sheñberge **urınba** dep ataladı. Olardıń ulıwma noqatı bolsa **urınba noqatı** dep ataladı.

2-b súwrette l tuwrı sızıq O oraylı sheñberge urınba, A — urınıw noqatı. Sheñber l tuwrı sızıqqa urınadı dep aytıw mümkin.

Urınbanıń qásiyetleri haqqındaǵı teoremanı dálilleybiz.

1- teorema.

Sheñberge urınba usı sheñberdiń urınıw noqatına ótkerilgen radiusqa perpendikulyar.

Dálil. l tuwrı sızıq sheñberge A noqatta ótkizilgen urınba bolsın (3-súwret). $R=OA$ nıń l ge perpendikulyar bolıwın dálilleybiz. Shárt boyınsha l tuwrı sızıqtıń, A noqatınan basqa barlıq noqatlar sheñberden sırtta jatadı. Sonıń ushın bul tuwrı sızıqtıń A dan basqa hárqanday A_1 noqatı ushın $OA_1 > OA$. Demek, OA aralıq O noqattan l tuwrı sızıqtıń noqatlarına shekemgi bolğan aralıqtıń eń qısqaşı. Noqattan tuwrı sızıqqa eń qısqa aralıq bolsa usı tuwrı sızıqqa túsirilgen perpendikulyar boladı. Bunnan, $OA \perp l$ ekenligi kelip shıǵadı.

Teorema dálillendi.

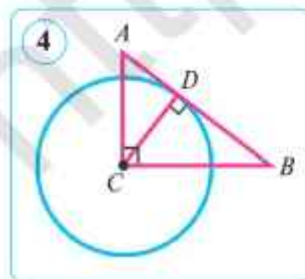
Endi urınbanıń qásiyetine keri teoremanı dálilleybiz.

2- teorema.

Radiusqa perpendikulyar hám usı sheñberde jatqan tóbesinen ótiwshi tuwrı sızıq usı sheñberge urınba.

Dálil. Eger sheñber orayınan tuwrı sızıqqa shekemgi bolğan aralıq sheñber radiusına teń ($d=R$) bolsa (2-b súwretke q.), l tuwrı sızıqtıń O orayǵa eń jaqın noqatı sheñberdiń radiusına teń boladı, demek, ol noqat sheñberge de tiyisli boladı. l tuwrı sızıqtıń qalǵan barlıq noqatları O oraydan sheñberdiń radiusınan úlken aralıqta boladı, demek sheñberge tiyisli bolmaydı. Anıqlama boyınsha, l tuwrı sızıq usı sheñberge urınba boladı. Teorema dálillendi.

Másele. Tuwrı müyeshli ACB ($\angle C=90^\circ$) úshmüyeshliktiń katetleri $AC=3$ cm hám $BC=4$ cm. Orayı C noqatta bolğan radiusı 2,4 cm ge teń sheñber ótkizilgen. Bul sheñber menen AB ttuwrı sızıq óz ara qanday jaǵdayda boladı?



Sheshiliwi. $\triangle ACB$ ($\angle C=90^\circ$) da: $AC=3$ cm, $BC=4$ cm. Pifagor teoreması boyınsha:

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}.$$

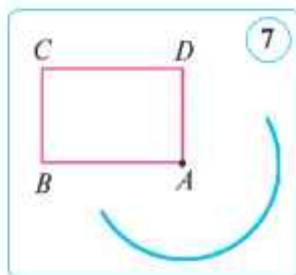
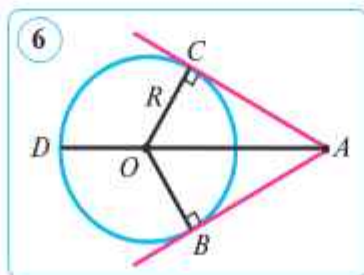
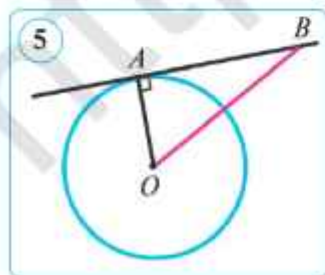
$CD \perp AB$ nı ótkizemiz (4-súwret). Úshmüyeshliktiń maydanın eki túrli esaplaw mümkin, yaǵnıy

$CA \cdot CB = AB \cdot CD$ teñlik orınlı. Bunnan $CD = CACB : AB = 3 \cdot 4 : 5 = 2,4$ (cm). Demek, C noqattan AB tuwrı sızıqqa radius uzınlığına teñ bolǵanı ushın AB tuwrı sızıq sheńberge urınadı.

Juwap: AB — urınba.

Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Sheńber degenimiz ne? Sheńber: orayı, radiusı, xordası hám diametri dep nege ayıladı? Qanday tuwrı sızıq sheńberge urınba delinedi?
- 2) Urınbanıń qanday qásiyet hám belgisin bilesiz?
2. $d - R$ radiuslı sheńberdiń orayınan l tuwrı sızıqqa shekemgi bolǵan aralıq. Eger: 1) $R=8$ cm, $d=6$ cm; 2) $R=10$ cm, $d=8,4$ cm; 3) $R=14,4$ dm, $d=7,4$ dm; 4) $R=1,6$ dm, $d=24$ cm; 5) $R=4$ cm, $d=40$ mm bolsa, l tuwrı sızıq penen sheńber óz ara qanday jaylasqan boladı?
3. $ABCD$ kvadrattıń tárepi 8 sm ge hám orayı A noqatta bolǵan sheńberdiń radiusı 7 sm ge teñ. AB , BC , CD hám BD tuwrı sızıqlardan qaysı biri usı sheńberge qarata kesiwshi boladı?
4. AB tuwrı sızıq O oraylı sheńberdiń A noqatına ótkizilgen urınba. Eger $AB=24$ cm, sheńberdiń radiusı 7 cm ge teñ bolsa, OB kesindiniń uzınlıǵın tabıń (5-súwret).
5. Tuwrı múyeshli ACB ($\angle C=90^\circ$) úshmúyeshlikte $AB=10$ cm, $\angle ABC=30^\circ$. Orayı A noqatta bolǵan sheńber ótkerilgen. Bul sheńberdiń radiusı qanday bolǵanda: 1) sheńber BC tuwrı sızıqqa urınadı; 2) BC tuwrı sızıq penenuliwma noqatqa iye bolmaydı; 3) BC tuwrı sızıq penen eki ulıwma noqatqa iye boladı?
6. Sheńber sırtındaǵı bir noqattan oǵan eki urınba ótkizilse, olardıń sol noqattan urınıw noqatlarına shekemgi bolǵan aralıqlar teñ boladı. Usını dalilleń. (6-súwret).
7. Eger sheńber radiusı 5 cm ge teñ, sheńber orayınan tuwrı sızıqqa shekem bolǵan aralıq: 1) 6 cm; 2) 5 cm; 3) 4 cm bolsa, tuwrı sızıq penen sheńber óz ara qanday jaylasqan boladı?
8. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik berilgen, onda $AB=16$ cm, $AD=12$ cm (7-súwret). AC , BC , CD hám BD tuwrı sızıqlardan qaysı biri radiusı 12 cm li A orayı sheńberge urınba boladı?



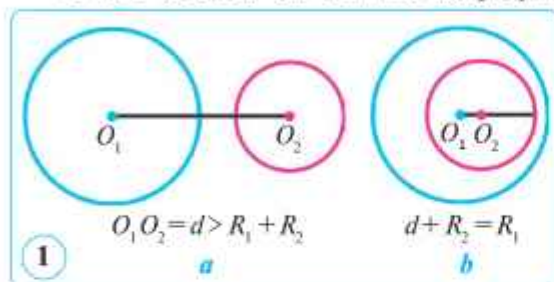
56. EKI SHEŇBERDİN ÖZ ARA JAYLASIWİ ORAYLIQ MÜYESH HÂM DOĞANIN GRADUS ÖLSHEWİ

1. Eki sheŇberdİN öz ara jaylasıwı.

Eki sheŇber öz ara jaylasatugın jaǵdayların kórip shıǵamız.

1) Eki sheŇber ulıwma noqatqa iye bolmaydı. Bul jaǵdayda olar sheŇberden sırtta (1-a súwret) yaqı biri ekishisiniń ishinde boladı (1-b súwret).

2) Eki sheŇber bir ulıwma noqatqa iye boladı (2-súwret). Bul jaǵdayda,

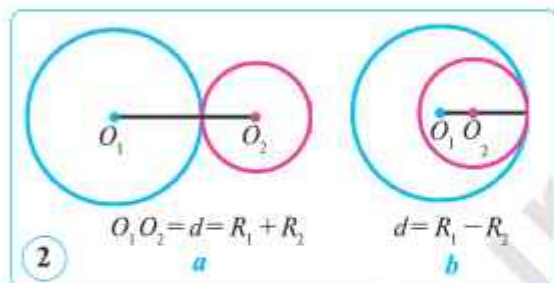


sheŇberler bir-birine urmadı, delinedi. Biraq, bul jaǵdayda sheŇberler sırtqı tárepten (2-a súwret) yaqı ishki tárepten urınıwı múmkin (2-b súwret).

3) Eki sheŇber eki ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin (3-súwret). Bul jaǵdayda sheŇberler bir-biri menen kesisedi, delinedi.

Ulıwma orayǵa iye bolǵan sheŇberler koncentraciyalıq sheŇberler delinedi (4-súwret).

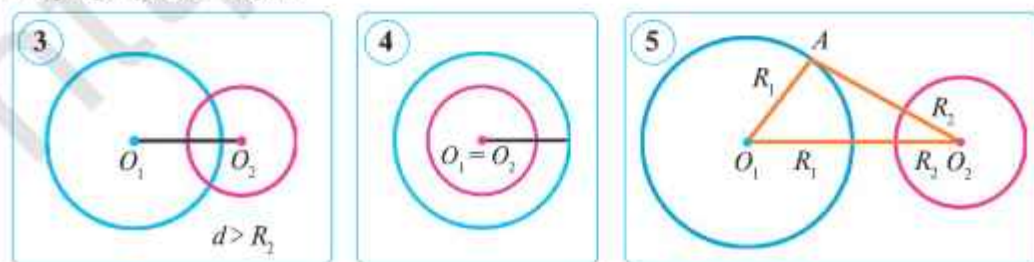
Eki sheŇberdİN öz ara jaylasıwı olardıń radiusı hâm oraylar arasındaqı araqlıqqa baylanıslı boladı.



Teorema.

Eger eki sheŇberdİN orayları arasındaqı aralıq olardıń radiusları qosındısan úlken yaqı ayırmasınan kishi bolsa, bul sheŇberler ulıwma noqatqa iye bolmaydı.

Dánil. O_1, O_2 oraylı hâm radiusları sáykes türde R_1, R_2 ($d = R_1 + R_2 < O_1 O_2$) bolǵan ekishenber berilgen bolsın (5-súwret). SheŇberdegi A noqattı kórip shıǵıń: $O_1 A = R_1$. Ol jaǵdayda $O_2 A \geq O_1 O_2 - O_1 A > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$ hâm demek, A noqat ekinshi sheŇberge tiyisli emes. Demek, bul sheŇberler ulıwma noqatqa iye bolmaydı.

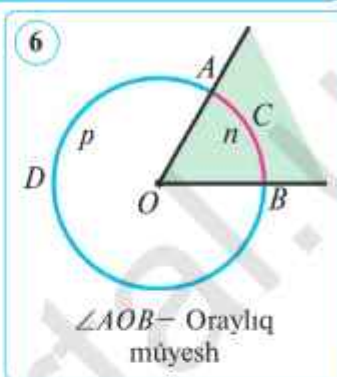


Eki sheñber bir ulıwma noqatqa iye bolǵan jaǵdaydı, sonday-aq, eki sheñber eki ulıwma noqatqa iye bolǵan jaǵdaylardı óz betińizshe kórip shıǵıń.

2. Oraylıq múyesh.

Anıqlama. Tóbesi sheñberdiń orayında bolǵan múyesh **oraylıq múyesh** dep ataladı.

Ulıwma tóbesi sheñberdiń O orayında bolǵan eki nur OA ham OB eki oray múyeshin belgileydi olardan biri dóńes bólim menen shegaralangan boladı. Sheñberdiń eki A hám B noqatı onı eki doǵaǵa ajırtadı. Bul doǵalardı bir-birinen ajıratıw ushın hárbirinde birewden aralıq noqat (doǵanıń tóbesinen basqa) yamasa latinsha kishi hárip benen belgilenedi hám de ACB (yamasa AnB) hám ADB (yamasa ApB) *doǵalar* delinedi (6-súwret). Bul doǵalardı tómendegishe belgilew qabıl etilgen: $\cup ACB$ (yaki $\cup AnB$) hám $\cup ADB$ (yaki $\cup ApB$). Ayırım hallarda doǵa: aralıq noqatsız belgilenedi: $\cup AB$ (doǵanıń qaysı biri haqqında sóz etiletuǵını túsinikli bolǵanda). Eger doǵanıń tóbelerin tutastırıwshı kesindi sheñber diametri bolsa, *doǵa yarım sheñber* delinedi. 7-b súwrette eki yarım sheñber súwretlengen, olardıń biri bólek ajıratılıp kórsetilgen.

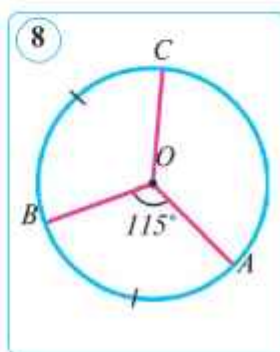
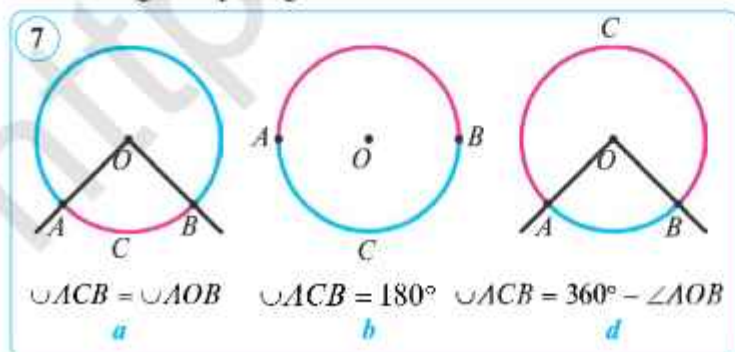


3. Doǵanıń gradus ólshewi.

Anıqlama. *Sheñber doǵanıń múyesh úlkenligi* dep sheñberdiń usı doǵaǵa sáykes oraylıq múyeshiniń úlkenligine aytiladı.

Sheñber doǵanı graduslarda ólshew múmkin. Eger O oraylı sheñberdiń ACB — yarım sheñberden kishi yamasa yarım sheñberge teń bolsa, bunday jaǵdayda onıń gradus ólshemi AOB oraylıq múyesh gradus ólshemine teń esaplanadı. (7-a súwret). Eger ACB doǵa yarım sheñberinen úlken bolsa, onda onıń gradus ólshemi $360^\circ - \angle AOB$ ǵa teń esaplanadı (7-b súwret).

Bunnan, aqırları ulıwma bolǵan sheñber eki gradus ólshemleri qosındısı 360° teńligi kelip shıǵadı.



Sheñber eki doğanın müyesh úlkenlikleri (yaǵnıy olarǵa sáykes oraylıq müyeshler) teñ bolǵanda hám tek sonda ǵana usı doǵalar teñ boladı.

Másele. *O noqat—sheñberdiń orayı $\angle AOB = 115^\circ$, $\cup BC = \cup AB$ (8-súwret). AOC müyeshti tabıń.*

Sheshiliwi. AOB müyesh sheñberdiń oraylıq müyeshi, AB doǵa bolsa yarım sheñberden kishi, sonıń ushın $\cup AB = \angle AOB = 115^\circ$. Másele shárti boyınsha, $\cup BC = \cup AB$ demek, BC doǵa 115° qa teñ. $\cup ABC = \cup AB + \cup BC = 230^\circ > 180^\circ$, yaǵnıy ABC doǵa yarım sheñberden úlken, sonıń ushın $\angle AOC = 360^\circ - \angle ABC = 360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$. *Juwap: $\angle AOC = 130^\circ$.*



Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Sheñber berilgen noqatta urınadı degende, neni túsinesiz?
- 2) Koncentraciyalıq sheñberler dep nege aytıladı?
- 3) Oraylıq müyesh úlkenligi degen ne? Sheñber doǵası qalay belgilenedi?
- 4) Sheñber doǵasınıń müyesh úlkenligi degen ne?
2. Eger eki sheñberdiń orayları arasındaqı aralıq 2 cm, radiusları sáykes türde: 1) 3 cm hám 5 cm; 2) 2 cm hám 5 cm bolsa, olar bir-birine salıstırǵanda óz ara qanday jaylasqan boladı?
3. Eger radiusları 4 cm hám 6 cm ge teñ sheñberler: 1) sırtqı tárepten urınsa; 2) ishki tárepten urınsa, olardıń orayları arasındaqı aralıq nege teñ?
4. Sheñber orayınan ótiwshi eki tuwrı sızıq bul sheñberde neshe doǵa hám neshe oraylıq müyeshti anıqlaydı?
5. Berilgen sheñberdiń noqatınan radiusına teñ eki xorda ótkizilgen. Olar neshe oraylıq müyeshti anıqlaydı.
6. Oraylıq müyeshke sáykes doǵa sheñberdiń: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{13}{18}$; 6) $\frac{17}{20}$; 7) $\frac{23}{30}$ bólsheğine teñ. Usı oraylıq müyeshti tabıń.
7. Sheñber eki noqat penen eki doǵaǵa bólinedi. Eger: 1) olardıń birewiniń müyesh úlkenligi ekinshisiniń müyesh úlkenliginen 40° artıq bolsa; 2) bul doǵalardıń müyesh úlkenligi 2:7 qatnasta bolsa, hárbir qaysı müyeshtiń úlkenligin tabıń.
8. A, B, C noqatlar orayı O noqatta bolǵan sheñberde jatadı. Eger $\cup ABC = 70^\circ$ bolsa, AOC müyeshin tabıń.
9. Sheñberdiń: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{12}$ bólegin payda etiwshi AB doǵaǵa sáykes keliwshi oraylıq müyeshlerdi tabıń. Bul jaǵdaylardıń hárbirinde AB doğanıń müyesh úlkenligin belgiler járdeminde jazıń.
10. Sheñberdiń radiusı: 1) 7,8 cm; 2) 10,5 cm; 3) 0,8 dm. Sheñberdiń diametrin tabıń.

57. SHEÑBERGE ISHLEY SIZILĞAN MÜYESH

Anıqlama. Töbesi sheñberde jattıwshı, tärepleri bolsa sol sheñberdi kesip öttıwshı müyesh **sheñberge ishley sızılğan müyesh** delinedi.

1-súwrette ABC müyesh sheñberge ishley sızılğan, AnC doğa sol müyeshiñ ishine jaylasqan. Bunday jaǵdayda, **ishley sızılğan ABC müyesh AnC doğaǵa tirelgen** dep te aytıladı.

Teorema.

Sheñberge ishley sızılğan müyesh ózi tirelgen doğanıñ yarımı menen ólshenedi:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Dáلیل. $\angle ABC$ – O oraylı sheñberdiñ AC doğaǵa tirelgen ishley sızılğan müyeshi bolsın (2-súwret). Sheñber orayınıñ sol ishley sızılğan müyeshke salıstırǵanda jaylasıwınıñ úsh jaǵdayın kórip shıǵamız.

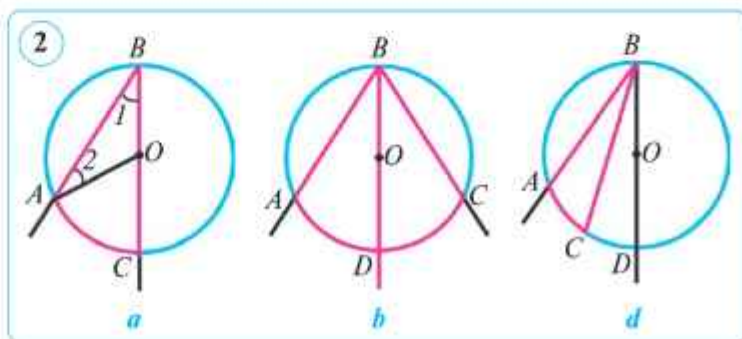
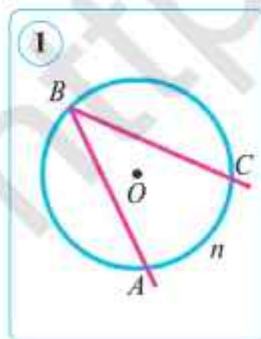
1-jaǵday. Sheñber orayı ishley sızılğan müyeshiñ täreplerinen biri mısah, BC tärepte jatadı (2-a súwret). OA radiustı ótkizemiz hám AOC oraylıq müyeshi qaraymız. Ol BOA úshmüyeshliktiñ sırtqı müyeshi. Úshmüyeshliktiñ sırtqı müyeshiniñ qásiyeti boyınsha: $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$. Biraq $\angle OBA = \angle OAB$, sebebi AOB úshmüyeshlik teñ qaptallı ($OA = OB = R$). OBA hám OAB müyeshler bolsa teñ qaptallı úshmüyeshliktiñ ultanındaǵı müyeshler. Demek, $\angle AOC = 2\angle ABC$ (1). Oraylıq müyeshiñ úlkenligi usı müyeshke sáykes doğanıñ müyesh úlkenligine teñ bolıwın bilemiz (56-tema). Bul waqıtta AC doğa yarım sheñberden kishi, sonıñ ushın oraylıq müyesh qásiyeti boyınsha:

$$\angle AOC = \cup AC. \quad (2).$$

(1) hám (2) teñliklerinen: $2\angle ABC = \cup AC$, yaǵnıy $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Teorema 1-jaǵday ushın dálillendi.

2-jaǵday. Sheñberdiñ orayı O ishley sızılğan müyesh tärepleri arasında jatadı. BO nurdı ótkeremiz, ol AC doğanı qanday da bir D noqatta kesedi (2-



b sùwret). D noqat AC doğanı eki $\cup AD$ hám $\cup DC$ doğağa bo'ledi. Demek, dálillegende (1-jagday): $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$ hám $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$. Bul teńliklerdi aǵzama-aǵza qosıp tómendegilerdi payda etemiz:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

3-jagday. Sheńberdiń orayı O ishley sızılǵan múyeshten sırtta jatadı. Bul jagdaydıń dálilin 2-d sùwretten paydalanıp, ózińiz óz betńizshe orınlañ.

1-nátiye. Bir doğağa tirelgen barlıq ishley sızılǵan múyeshter óz ara teń (3-a sùwret):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \dots = \frac{1}{2} \cup AC.$$

2-nátiye. Diametrge (yarım sheńberge) tirelgen hám de ishley sızılǵan múyeshter tuwrı múyeshter esaplanadı (3-b sùwret):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \dots = 90^\circ.$$

Másele. Sheńberdiń radiusına teń xorda ókizilgen. Usı xorda: 1) sheńber orayınan; 2) berilgen xorda tóbesinen parıqlı sheńberdiń qálegen noqatınan qaysı múyeshter kórinedi?

Sheshiliwi. AB — O oraylı sheńberdiń radiusına teń xorda bolsın (4-sùwret). Bunda AOB úshmúyeshtik — teń tárepli, demek, oraylıq múyeshter (sheńber orayınan AB xorda kórinetuǵın múyeshter) 60° qa teń. A hám B noqatlardan basqa sheńberdiń qálegen C noqatınan ishley sızılǵan ACB múyeshter (C noqattan AB xorda kórinetuǵın múyeshter) oraylıq múyeshtin yarımına teń, yaǵnıy 30° qa teń.

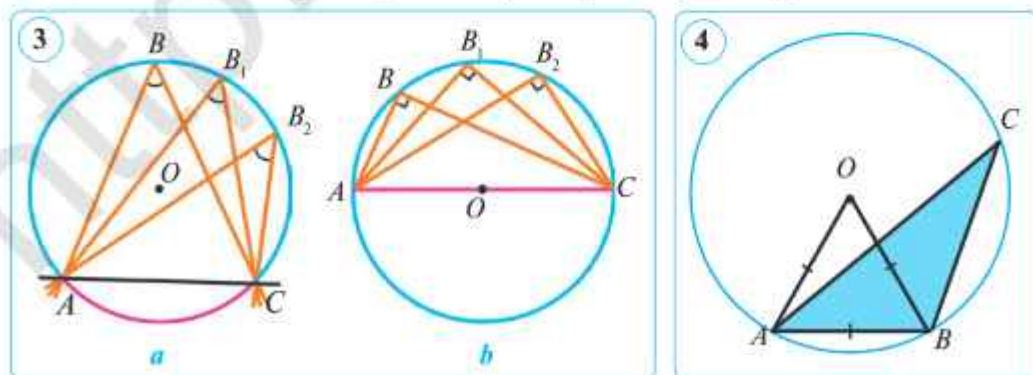
Juwap: 1) 60° ; 2) 30° .

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Qanday múyeshter sheńberge ishley sızılǵan múyeshter delinedi?

 2) Ishley sızılǵan múyeshter qalay ólshenedi?

3) Yarım sheńberge tirelgen ishley sızılǵan múyeshter nege teń?



2. (Awızeki.) Ishley sızılğan müyesh 25° qa teñ. Usı ishley müyeshke tirelgen doğanıñ muğdarın tabıñ.

3. AB hám BC – orayı O noqatta bolğan sheñberdiñ xordaları, $\angle ABC = 30^\circ$. Eger sheñber radiusı 10 sm ge teñ bolsa, AC xordanıñ uzınlıgın tabıñ.

4. 1) 5-súwrette O noqat – sheñber orayı, $\angle AOB = 88^\circ$. $\angle ACB$ nı tabıñ. *Sheshiliwi.* AOB müyesh berilgen sheñberdiñ ... müyeshi boladı ... $^\circ$ ge teñ. Demek, $\angle ADB = \dots^\circ$. ACB müyesh ... sızılğan müyesh boladı hám ...

doğaga tireledi, sonıñ ushın $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \dots^\circ$.

Juwap: $\angle ACB = \dots^\circ$.

2) 6-súwrette $\angle CAB = 130^\circ$. $\angle CAB$ nı tabıñ.

Sheshiliwi. CAB müyesh sheñberge ishki sızılğan müyesh boladı hám $\angle CDB$ doğaga tirelgen. Bunnan:

$$\angle CDB = 360^\circ - \angle CAB = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ,$$

$$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle CDB = \frac{1}{2} 230^\circ = 115^\circ.$$

Juwap: $\angle CAB = 115^\circ$.

3) 7-súwrette $\angle APE = 46^\circ$, $\angle BCE = 34^\circ$. $\angle AEP$ nı tabıñ

Sheshiliwi. PAB hám BCP ishley sızılğan müyeshler BP ..., demek, $\angle PAB = \angle \dots = \dots$. AEP úshmüyeshlikten iye bolamız:

$$\angle AEP = 180^\circ - (\angle \dots + \angle \dots) = 180^\circ - (\dots + \dots) = \dots$$

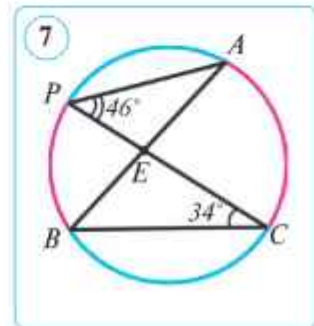
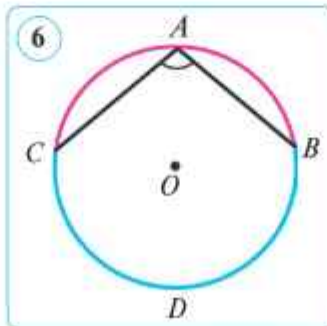
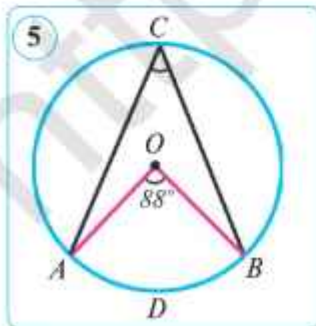
Juwap: $\angle AEP = \dots$.

5. Sheñberde jatıwshı A , B , C noqatlar bul sheñberdi úsh doğaga bólip, olardıñ gradus ólshemler qatnası 3:5:7 sıyaqlı. ABC úshmüyeshliktiñ müyeshlerin tabıñ.

6. Xorda sheñberdi eki doğaga bóledi. Eger bul doğalar müyesh shamarlarınıñ qatnası: 1) 5:4; 2) 7:3 sıyaqlı bolsa, xorda sheñber noqatınan qanday müyesh astında kórinedi?

7. Sheñberge AB diametr hám AC xorda ótkizilgen. Eger AC hám CB doğaların gradus ólshemi 7:2 qatnasta bolsa, BAC müyeshti tabıñ.

8. AB hám AC – sheñber xordaları, $\angle BAC = 70^\circ$, $\angle ADB = 120^\circ$. AC doğanıñ gradus muğdarın tabıñ.



58. SHEŇBERDİN KESİWSHILERI PAYDA ETKEN MÜYESHLER

1. Urınba menen xordadan dúzilgen müyesh.

1- teorema.

Urınba menen xordadan dúzilgen müyesh óz ishine alğan doğanıń yarım menen ólshenedi.

Dálil. AB urınba hám BC xordası bolsın. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC$ ekenligin dálilleybiz (1-súwret). Bunıń ushın C tóbesinen $CD \parallel AB$ nı ótkizsek, $\angle ABC = \angle BCD$, sebebi olar ishley almasıwshı müyeshler.

Biraq $\angle C = \frac{1}{2} \cup BnD$ hám $CD \parallel AB$ bolğanı ushın $\cup BnD = \cup BmC$ va $\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \cup BnD = \frac{1}{2} \cup BmC$.

Teorema dálillendi.

1-másele. AB xorda 56° li doğanı tartıp turadı. Usı xordanıń tóbelerinen sheńberge ótkizilgen urınbalar menen xordadan payda bolğan müyeshlerdi tabıń.

Berilgen: (O, R) , AB — xorda, $\angle AOB = 56^\circ$ — AB xordanı tartıp turğan oraylıq müyesh, $AC \perp OA$, $BC \perp OB$ (2-súwret).

Tabıw kerek: $\angle CAB$, $\angle CBA$, $\angle BAD$, $\angle ABE$.

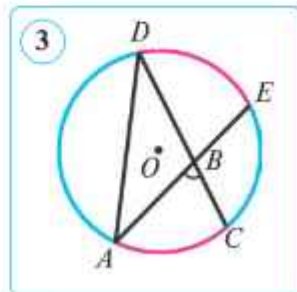
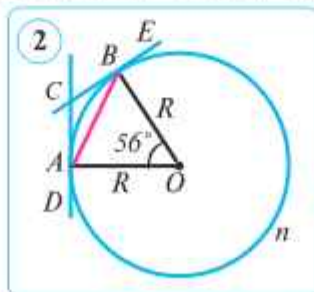
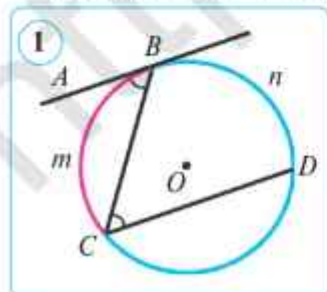
Sheshiliwi. Urınba menen xorda arasındagı doğa $\cup AB = 56^\circ$ qa (1-jagday) yaki $\cup AnB = 360^\circ - 56^\circ = 304^\circ$ qa (2-jagday) boladı.

Solay etip, 1-jagdayda $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot 56^\circ = 28^\circ$, 2-jagdayda $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup AnB = \frac{1}{2} \cdot 304^\circ = 152^\circ$ qa iye bolamız.

Bizge belgili, sheńber sırtındagı bir noqattan sheńberge ótkizilgen urınbalardıń urınıw noqatlarına shekem bolğan kesindileri teń boladı. Sonıń ushın $\triangle ACB$ — teń qaptalı.

Demek, $\angle CAB = \angle CBA = 28^\circ$ va $\angle BAD = \angle ABE = 152^\circ$.

Juwap: $\angle CAB = \angle CBA = 28^\circ$, $\angle BAD = \angle ABE = 152^\circ$.



2. Eki xordanın kesilisiwinen payda bolǵan múyeshler.

2- teorema.

Qálegen eki xordanın kesilisiwinen payda bolǵan hárqaysı vertikal múyesh, olardıń tárepleri tirelgen doǵalar qosındısıwınǵa yarımına teń.

Dáلیل. $\angle ABC - CD$ hám AE xordaların kesilisiwinen payda bolǵan múyeshlerden birewi bolsın (3-súwret).

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$ ekenin dálilleymiz. Bunıń ushın A hám D noqatların birlestiremiz, bul halda $\angle ABC \triangle ABD$ ǵa qarata sırtqı múyesh boladı. Demek, $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. Lekin $\angle ADC = \frac{1}{2} \cup AC$ hám $\angle DAE = \frac{1}{2} \cup DE$. Sonıń ushın

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC + \frac{1}{2} \cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE).$$

$\angle ABD = \angle CBE = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup EC)$ ekenligin tap joqarıdaǵıday dálillenedi. Bunı óz betińizshe dálillen.

2-másele. AB hám CD —bir sheńberdiń xordaları, P —olardıń kesilisiw noqatı. Eger BPD múyesh BPC múyeshlerden 4 márte úlken, CDA múyesh bolsa BPC dan 26° qa úlken bolsa, CBP múyeshi tabıń.

Berilgen: $\angle BPD = 4\angle BPC$, $\angle CDA = \angle BPC + 26^\circ$ (4-súwret).

Tabıw kerek: $\angle CBP$.

Sheshiliwi. $\angle BPD + \angle BPC = 180^\circ$,

$4\angle BPC + \angle BPC = 180^\circ$, bunnan $5\angle BPC = 180^\circ$ hám nihoyat, $\angle BPC = 36^\circ$.
 $\angle CDA = \angle BPC + 26^\circ = 36^\circ + 26^\circ = 62^\circ$. $\angle CBA = \angle CDA = 62^\circ$, sebebi olar bir $\cup AC$ ge tirelgen ishki sızilǵan múyeshler. Bunnan $\angle CBP = \angle CBA = 62^\circ$.

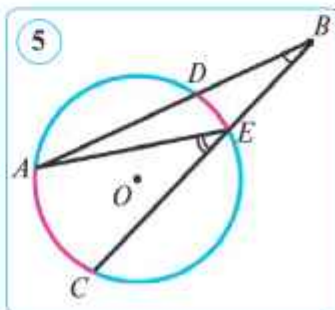
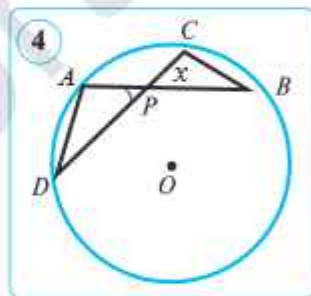
Juwap: $\angle CBP = 62^\circ$.

3. Sheńberdiń sırtındaǵı bir noqattan oǵan ótkizilgen eki kesiliwshi arasındaǵı múyesh.

3- teorema.

Sheńberdiń sırtındaǵı bir noqattan oǵan ótkizilgen eki kesiwshi arasındaǵı múyesh ($\angle ABC$) kesiwshiler arasındaǵı doǵalar (AC hám DE) ayırmasınǵa yarımına teń.

Dáلیل. B — sheńber sırtındaǵı noqat, BA hám BC kesiwshler bolsın. $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$ bolǵanın dálilleymiz. Bunıń ushın A hám E noqatların birlestiremiz (5-súwret).



$\angle AEC \triangle AEB$ ға sırtқы мүyesh boladı. Demek, $\angle AEC = \angle B + \angle DAE$, bunnan $\angle B = \angle AEC - \angle DAE$. Biraq $\angle AEC = 0,5 \cup AC$ hám $\angle DAE = 0,5 \cup DE$. Bulardı óz orınlarına qoysaq:

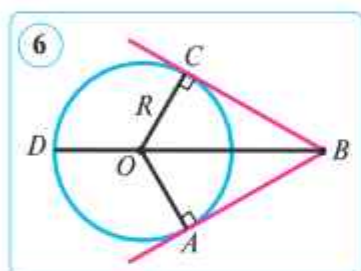
$$\angle B = \frac{1}{2} \cup AC - \frac{1}{2} \cup DE = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup DE).$$

Demek, $\angle B = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup DE)$. Teorema dálillendi.

4. Shenberdiń sırtındaǵı bir noqattan oǵan ótkizilgen eki urınbaniń qásiyeti.

4-teorema.

Shenberdiń sırtındaǵı bir noqattan oǵan eki urınba ótkizilse, olardıń sol noqattan urınıw noqatlarına shekem bolǵan kesindileri teń hám shenberdiń orayı olar arasındaǵı múyesh bissektrisasında jatadı, bul múyesh 180° penen urınbalar tirelgen doǵa ayırmasına teń.



Dálil. BC hám BA tuwrı sızıqlar shenberge C hám A noqatlardan ótiwshi urınbalar, BD bolsa ABC múyesh bissektrisası bolsın. $AB = CB$ hám O oraydıń BD da jatıwın hám de $\angle B = 180^\circ - \cup AC$ ekenin kórsetemiz (6-súwret).

OA hám OC radiuslar ótkizilse, $OA \perp BA$ hám $OC \perp BC$ bolǵanı ushın: $\triangle AOB$ hám $\triangle COB$ – tuwrı múyeshli. $\triangle AOB = \triangle COB$, sebebi BO gipotenuza ulıwma, $OA = OC = R$. Úsh-múyeshliklerdiń teńliginen: $AB = BC$. Endi $OC = OA = R$ hám $OA \perp BA$, $AB = BC$ hám $OC \perp BC$ bolǵanı ushın O oray turaqlı BD bissektrisada jatadı. Shenber sırtındaǵı bir noqattan ótkizilgen eki kesiwshi arasındaǵı múyesh ti ólshew haqqındaǵı teoremaǵa tiykarlanıp:

$$\angle B = 0,5(\cup ADC - \cup AC) =$$

$$= 0,5(360^\circ - \cup AC - \cup CA) = 180^\circ - \cup AC.$$

Demek, $\angle B = 180^\circ - \cup AC$ boladı. Teorema dálillendi.

3-másele. Shenberdiń A, B hám C noqatları onı 11:3:4 qatnastaǵı doǵalardıń bóledi. A, B hám C noqatlardan urınbalar ótkerilip, bir-biri menen kesiksenshe dawam ettirilgen. Payda bolǵan úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

Sheshiliwi. 1) $\cup BnC : \cup CD : \cup DB = 11 : 3 : 4$, urınıw noqatlarına urınbalar ótkeriwden payda bolǵan úshmúyeshlik AKL bolsın (7-súwret). A, AKL hám ALK múyeshlerdi tabamız:

$$\cup BnC = \frac{360^\circ}{11+3+4} \cdot 11 = 220^\circ; \quad \cup CD = \frac{360^\circ}{11+3+4} \cdot 3 = 60^\circ;$$

$$\cup DB = \frac{360^\circ}{11+3+4} \cdot 4 = 80^\circ;$$

$$\cup CDB = \cup CD + \cup DB = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ;$$

$$\angle A = 180^\circ - \cup CDB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ;$$

$$\angle BKD = 180^\circ - \cup DB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ;$$

$$\angle AKL = 180^\circ - \angle BKD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ;$$

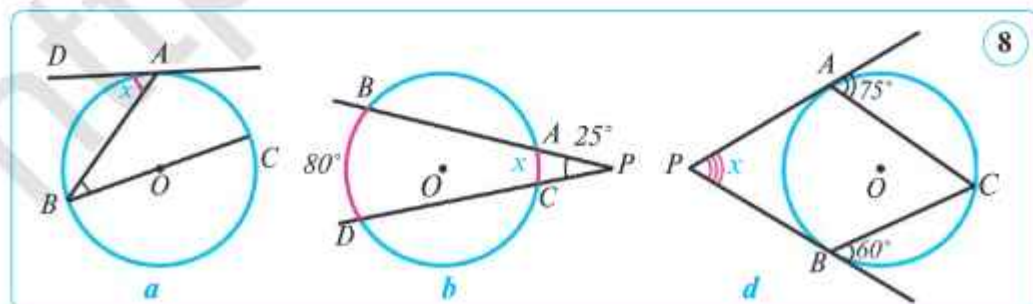
$$\angle ALK = 180^\circ - (\angle A + \angle AKL) = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Juwbati: $\angle A = 40^\circ$, $\angle AKL = 80^\circ$, $\angle ALK = 60^\circ$.



Soraw, mäsle häm tapsırmalar

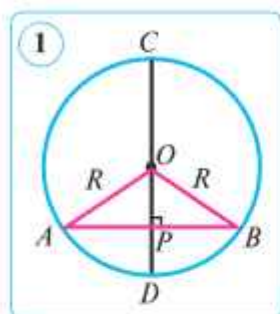
- 1) Urınba menen xordadan düzilgen; eki xordanın kesisiwinen payda bolğan; eki kesisiwshi xorda arasındaqı müyesh qalay ólshenedi?
- 2) Bir noqattan ótkerilgen eki urınba qanday qásiyetke iye?
2. Sheńberdiń radiusına teń AB xorda A noqatta ótkizilgen urınba menen qanday müyeshler payda etedi?
3. Sheńberdi kesiwshi eki xorda arasındaqı müyeshlerden biri 70° qa teń. Usı müyeshke qońsılás bolğan müyeshlerdiń qosındısıń tabıń.
4. 8-súwrette súwretlengen x belgisiz muǵdardı tabıń.
5. Eki radius arasındaqı müyesh 150° qa teń. Bul radiuslardıń aqırlarınan sheńberge ótkizilgen urınbalar arasındaqı müyeshiti tabıń.
6. B noqattan sheńberge ótkizilgen BA häm BC urınbalar sheńberdi urınıw noqatlarında: 1) 5:4; 2) 12:6; 3) 9:6; 4) 13:7; 5) 2:3 qatnasta eki doǵaǵa bóledi. ABC müyeshiniń ólshemin tabıń.
7. Sheńberdi 1) 2 : 7; 2) 4 : 5 qatnasta bóliwshi xordanın tóbelerinen eki urınba ótkizilgen. Payda bolğan úshmüyeshliktiń müyeshlerin tabıń.
8. Sheńberdiń sırtındaǵı noqattan ótkerilgen eki urınbaniń urınıw noqatları sheńberdi: 1) 1:9; 2) 3:15; 3) 7:11; 4) 3: 7 qatnastaǵı eki doǵaǵa ajıratadı. Urınbalar arasındaqı müyeshiti tabıń.
9. 1) 52° ; 2) 74° ; 3) 104° lı oraylıq müyesh payda etken eki radiustıń tóbesine ótkizilgen urınbalar arasındaqı müyeshiti tabıń.
10. Sheńberdiń radiusı diametrinen 40 mm qısqa. Sheńberdiń diametrin tabıń.



59. SHEŇBER XORDASI HÂM DIAMETRINIŇ QÂSIYETLERI

1-teorema.

Xordağa perpendikulyar diametr usı xordanı hâm oğan tirelgen doğanı teñ ekige bóledi.



Dälil. Orayı O noqatta hâm radiusı R bolğan sheñber, AB xordağa perpendikulyar CD diametr, CD hâm AB lardıñ kesisiw noqatı P berilgen bolsın (1-súwret). $AP=PB$ hâm $\sphericalangle AD=\sphericalangle DB$ ekenligin dälilleymiz. Eger AB xorda diametr bolsa, P noqat O noqat penen betpe-bet tüsedi hâm usı noqatta AB xorda hâmdе onı tartıp turğan yarım sheñberdiñ ADB doğası teñ ekige bólinedi, yaǵnıy tastıyıqlaw orınlı boladı. AB xorda diametr bolmasın. OA hâm OB radiuslardı ótkizemiz. Payda bolğan AOB úshmúyeshlik — teñ qaptallı úshmúyeshlik, sebebi

$OA=OB=R$. OP — teñ qaptallı úshmúyeshlik AB tárepine túsirilgen biyiklik teñ qaptallı úshmúyeshliktiñ qásiyeti boyınsha ol ultańǵa ótkizilgen mediana hâm O tóbesindegi múyeshtiñ bissektrisasi boladı. Xordanıñ ortası arqalı ótken diametr bolsa AB xordanı teñ ekige bóledi, yaǵnıy $AP=PB$. OP — AOB múyeshtiñ bissektrisasi ekenliginen $\sphericalangle AOP=\sphericalangle BOP$ nı payda etemiz. Bul múyeshler tirelgen doğalar bolǵanı ushın $\sphericalangle AD=\sphericalangle DB$. Teorema dälillendi.

2-teorema.

Sheñber xordası onıñ diametrinen úlken bolmaydı.

Dälil. OPB úshmúyeshliktiñ — tuwrı múyeshli (1-súwretke q.). Ol jaǵdayda, bul úshmúyeshlikte OB — gipotenuza, PB — katet. Bizge málim, katet gipotenuzadan úlken, yaǵnıy $PB \leq OB$. Bunnan, $2PB \leq 2OB$ hâm de $2PB=AB$ hâm $2OB=2R=d$. Demek, $AB \leq d$ eken.

1-nátiyje. Xordanıñ ortasınan ótiwshi diametr sol xordağa perpendikulyar.

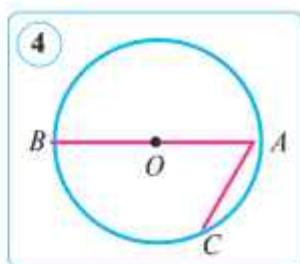
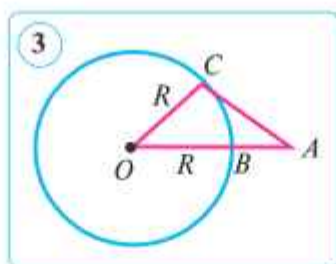
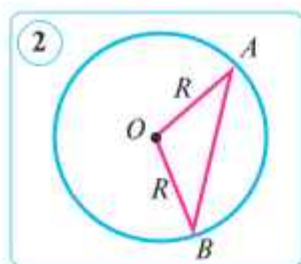
2-nátiyje. Xordanıñ orta perpendikulyarlari sheñberdiñ diametri boladı.

Bul nátiyjelardi dälillew óziñizge tapsırıladı.

1-másele. Diametr eñ úlken xorda ekenin dälilleñ.

Sheshiliwi. O oraylı hâm R radiuslı sheñber hâm de diametrden pariqlı qálegen AB xorda berilgen bolsın (2-súwret). OA hâm OB kesindilerin ótkizemiz. AOB úshmúyeshlikte AB tárep qalǵan eki tárep qosındısınan kishi, yaǵnıy $AB < OA + OB = R + R = 2R$. Demek, AB xorda diametrden kishi boladı.

2-másele. A noqat R radiuslı sheñberden sırtta hâm bul sheñberdiñ O orayınan d aralıqta jaylasqan. A noqattan usı sheñberdegi noqatqa shekem bolǵan eñ qısqa aralıq qanshaǵa teñ?



Sheshiliwi. B — sheńberdiń OA kesindi menen kesilisiwinen noqatı bolsın (3-súwret). AB aralıq A noqattan sheńberdegi noqatlarǵa shekem múmkin bolǵan aralıqlar ishinde eń kishisi ekenin kórsetemiz. Haqıyqattan da, sheńberdiń qálegen C noqatı ushın $AB + BO < AC + CO$ teńsizlik orınlanadı. $BO = CO = R$ di itibarǵa alıp, aqırı teńsizlikten $AB < AC$ teńsizlikti payda etemiz. $AO = d$ hám $BO = R$ di esapqa alsaq, izlenip atırǵan eń qısqa aralıq AB kesindiniń uzınlıǵına, yaǵnıy $d - R$ ǵa teń ekeni kelip shıǵadı.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Xordaǵa perpendikulyar diametr qanday qásiyetke iye?
2. 2) Sheńber xorda onıń diametrinen úlken bolıwı múmkin be?
- 3) Xordanıń orta perpendikulyar diametr bolmawı múmkin be?
2. Sheńber sızıń hám onıń bir-birine perpendikulyar eki AB hám CD diametrlerin ótkiziń. A, B, C hám D noqatlar ajratqan sheńber doǵalarınıń gradus ólshemin tabıń.
3. 8 cm li xorda sheńberden 90° li doǵa ajratadı. Sheńber orayınan xordaǵa shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.
4. Berilgen sheńberdiń noqatınan radiusına teń eki xorda ótkerilgen. Olar arasındǵı múyeshti tabıń.
5. Sheńberdiń berilgen noqatınan diametr hám radiusqa teń xorda ótkizilgen. Diametr menen xorda arasındǵı múyeshti tabıń (4-súwret).
6. Sheńberde onnan 90° li doǵa ajratıwshı eki parallel xorda ótkerilgen. Olardan biriniń uzınlıǵı 8 cm. Xordalar arasındǵı aralıqtı tabıń.
7. Sheńberdiń orayınan basqa noqatta kesisiwshı eki xorda kesilisiw noqatında teń ekige bólinbeytuǵının dalilleń.
8. Sheńberdegi A noqattan sheńberdiń radiusına teń eki xorda AB hám AC ótkerilgen. B hám C noqatlar tuwrı sızıq penen tutastırılǵan. Sheńberdiń radiusı 12 cm. Sheńberdiń orayınan BC xordaǵa shekemgi aralıqtı tabıń.
9. Sheńberde onnan 90° li doǵa ajratıwshı eki parallel xorda ótkerilgen. Olardan biriniń uzınlıǵı 10 cm. Xordalar arasındǵı aralıqtı tabıń.
10. Sheńberdiń radiusı 13 cm ge teń. Usı sheńberde 10 cm ge teń xorda ótkizilgen. Sheńberdiń orayınan xordaǵa shekemgi aralıqtı tabıń.
11. AB kesindi — orayı O noqatta bolǵan sheńberdiń diametri, AC hám CB — usı sheńberdiń teń xordaları. COB múyeshti tabıń.

ÁMELİY KOMPETENCIYANÍ RAWAJLANDIRIWSHÍ QOSÍMSHA MATERIALLAR GORIZONTTÍN UZAQLÍGÍ

1-másele. (*Tayanış másele.*) Kesiwshi menen onıń sırtqı bólimi kóbey-mesi urınba kvadratına teń. Sonı dálilleń.

Sheshiliwi O oraylı sheńber sırtındaǵı alınǵan B noqattan BE kesiwshi BC hám BD urınbalar ótkizilgen bolsın (1-súwret).

$BC^2 = BE \cdot BA$ ekenin dálilleymiz. Bunıń ushın tuwrı múyeshli BOC ($\angle C = 90^\circ$) úshmúyeshlikti kórip shıǵamız. Pifagor teoreması boyınsha:

$$BC^2 = BO^2 - OC^2$$

Bul teńlikke $BO = BA + AO = BA + R$ hám $OC = R$ belgilewlerdi qoyıp, payda bolǵan teńlikti figura al-mastıramız:

$$\begin{aligned} BC^2 &= (BA + R)^2 - R^2 \Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R + R^2 - R^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R \Rightarrow BC^2 = BA \cdot (BA + 2R) \Rightarrow \\ &\Rightarrow BC^2 = BA \cdot BE \end{aligned}$$

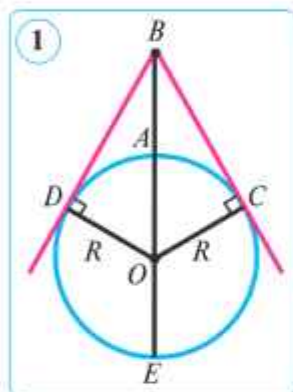
Usını dálillew talap etilgen edi.

1. Gorizont haqqında túsiniń.

Uzaqtı kóriw ushın hesh nársе kesent etpeytuǵın ashıq jerde turıp alısqa qaraǵanıńızda siz ózińizdi jer beti (teńiz beti) aspan menen tutasıp ketkendey hám onnan keyin hesh zat joqtay kórinetuǵın (sheńber) dóńgelek orayında turǵanday sezesiz. Bul—gorizont. Gorizont sızıǵına jetip bolmaydı: siz oǵan jaqınlasqan sayın, ol sizden uzaqlasa beredi. Oǵan barıp bolmaydı, biraq, soǵan qaramastan ol haqıyqattan bar. Hár bir baqlaw noqatı ushın usı jerden turıp qaraǵanda jer betin kóriw múmkin bolǵan belgili shegarası boladı, hám de shegaranın uzaqlılıǵın esaplaw qıyın emes. Gorizontqa baylanıslı bolǵan geometriyalıq qatnaslardı túsiniw ushın jer sharının belgili bólimin súwretleytuǵın 1-súwretke (yaki 2-súwretke) mırájaát etemiz. Jerden BA biyikliktegi B noqatta baqlawshınıń kózi jaylasadı. Sol baqlawshı bul jerde óziniń qorshaǵan ortalıqtı qanday uzaqlıqqa shekem kóre aladı? Qaraw nurı Jer betine urınatuǵın C hám D (1-súwret) yaki C (2-súwret) noqatlardı shekem ekeni anıq: bunnan arıda Jer qaraw nurınan tómende boladı. Bul noqatlar (hám DAC dóǵada jatqan basqa noqatlar da) jer beti kórinetuǵın bóliminiń shegarasın súwretleydi, yaǵnıy gorizont sızıǵın payda etedi. Baqlawshıǵa mine usı jerde aspan jerge túskenдей bolıp kórinedi, sebebi baqlawshı bul noqatlarda bir waqıttıń ózinde hám aspandı, hám jerdegi zatları kóredi.

2. Gorizonttıń uzaqlıǵı.

Gorizont sızıǵı baqlawshıdan qanday uzaqlıqta boladı? Basqasha aytqanda, tegiz jerde biz orayında ózimizdi kórgen sheńber radiusınıń



shaması qansha? Baqlawshınıñ jer betinen kóterilgen biyikligi belgili bolsa, gorizonttıñ uzaqlığı qalay esaplanadı?

Másele baqlawshınıñ kózinen jer betine ótkerilgen urınba (2-súwret) BC kesindiniñ uzınlıgın esaplawğa keltiriledi. 1-máseleden belgili, urınbanıñ kvadratı kesiwshiniñ sırtqı kesindisi $BA=h$ penen kesiwshiniñ barlıq uzınlığı, yaǵnıy $BE=h+2R$ diñ kóbeymesine teń: $d^2 = (h+2R) \cdot h$, bunda R — Jerdiñ radiusı, $BC=d$ — baqlawshıdan kórinetuǵın eñ uzaq aralıq. Baqlawshı kóziniñ jerden kóteriliwi Jer sharınıñ diametrine ($2R$ ge) salıstırmalı júdá kishi, máselen, samolyottıñ eñ biyik kóteriliwi Jer sharı diametriniñ shama menen 0,001 úlesin ǵana quraydı, ol jaǵdayda $2R+h \approx 2R$ dep alıwǵa boladı, onda formula jáne de ápiwayılasadı:

$$d^2 \approx 2Rh.$$

Demek, gorizonttıñ uzaqlıgın júdá ápiwayı formula boyınsha esaplawǵa boladı:

$$d \approx \sqrt{2Rh},$$

bunda: R — Jer sharınıñ radiusı (shama menen 6400 km vaki anıǵıraǵı 6371 km), h — jer betinen baqlawshı kóterilgen biyiklik, $\sqrt{6400} = 80$, onda formula tómendegishe kórinisti aladı:

$$d \approx 80\sqrt{2h} \approx 113\sqrt{h},$$

bunda h álbette kilometrdiñ bóleklerinde anlatılıwı kerek.

2-másele. Jerden 10 km biyiklikte ushıp baratırǵan samolyottan qansha uzaqlıqtaǵı aralıqtı kóriw múmkin? (Jerdiñ radiusı shama menen 6370 km.)

Sheshiliw. $OA=R \approx 6370$ km, $AB=h=10$ km. $BC=d$ ni tabamız (2-súwret). Kesiwshi menen onıñ sırtqı bólimi kóbeymesi urınbanıñ kvadratına teń ekenin bilersiz, yaǵnıy

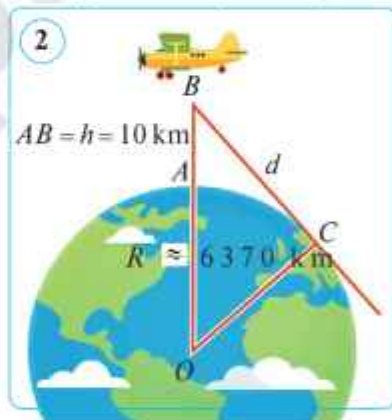
$$\begin{aligned} d^2 &= (h+2R) \cdot h \text{ yaqı } \\ d^2 &= (10+2 \cdot 6370) \cdot 10 = 127500, \text{ bunnan: } \\ d &= \sqrt{127500} = \sqrt{51 \cdot 2500} = 50\sqrt{51} \approx \\ &\approx 50 \cdot 7,141 = 357,05 \approx 360 \text{ (km)}. \end{aligned}$$

Juwabı: ≈ 360 km.

3-másele. Jerden 4 km biyiklikke kóterilgen hawa sharınan qansha uzaqlıqtaǵı aralıq kórinedi? Jerdiñ radiusı shama menen 6370 km. *Juwabı:* $\approx 225,8$ km.

4-másele. Kavkazdaǵı Elburs shoqqısı teńiz betinen ≈ 5600 m (anıǵı 5642 m) bálentlikte jaylasqan. Usı shıqqıdan qanday uzaqlıqtaǵı kóriw múmkin? Jerdiñ radiusı shama menen 6370 km. *Juwabı:* ≈ 270 km.

Eskertiw! Joqarıda sheshilgen máselelerde gorizonttıñ uzaqlıǵına tásir etetuǵın fizikalıq faktorlardı esapqa almadıq. Gorizonttıñ uzaqlıǵı kóplegen faktorlarǵa baylanıslı jaǵdayda bir qansha artıwı yaqı kemeyiwı múmkin.



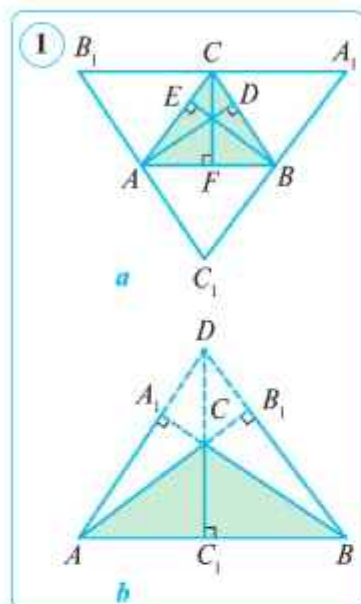
ÚSHMÚYESHLIKTİŇ ÁJAYIP NOQATLARI

ÚshmúyeshliktiŇ tórt ájayıp noqatın kórip shıǵamız.

1. Úshmúyeshlik biyiklikleriniŇ kesilisiw noqatı.

1-teorema.

ÚshmúyeshliktiŇ biyiklikleri (yaki olardıń dawamı) bir noqatta kesisedi.



Dáلیل. AD , BF hám CE — ABC úshmúyeshliktiŇ biyiklikleri (1-a súwret). ÚshmúyeshliktiŇ tóbeleri arqalı qarama-qarsı jatqan táreplerge parallel etip tuwrı sızıqlar ótkerip, nátiyjede tárepleri ABC úshmúyeshliktiŇ biyikliklerine perpendikulýar bolǵan jańa $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikti payda etemiz. Sızıw boyınsha, C_1BCA hám B_1ABC tórtmúyeshlikler — parallelogramm, bunnan $C_1A = BC$ hám $BC = AB_1$ ekeni kelip shıǵadı. Demek, A noqat — B_1C_1 kesindiniŇ ortası. Tap sonday, B noqat — A_1C_1 nıń ortası, C bolsa A_1B_1 dıń ortası ekeni dálillenedi.

Solay etip, AD , BF hám CE biyiklikler $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliktiŇ orta perpendikulyarında jatadı. Demek, olar bir noqatta kesisedi. ÚshmúyeshliktiŇ biyiklikleri kesispewi de múmkınligin belgilep ótemiz. Súyir múyeshli úshmúyeshlik biyiklikleri olardıń dawamında bir noqatta kesisedi, biraq biyikliklerdiŇ ózi kesispeydi (1-b súwret).

Úshmúyeshlik biyiklikleri (yaki olardıń dawamı) nıń kesisiw noqatı onıń orta orayı da delinedi.

Másele. Úshmúyeshlik táreplerinen qaysı biri orta orayǵa jaqın jaylasqan?

Sheshiliwi. ABC úshmúyeshlikte $AC > BC$ bolsın (2-súwret). ÚshmúyeshliktiŇ CD biyikligi ushın $AD > BD$ teńsizlik hám demek, $\angle ACD > \angle BCD$ teńsizlik orınlanıwınan paydalanamız.

Bul biyiklik noqatları usı tóbeden shıǵıwshı táreplerden eń kishisine jaqın jaylasqanlıǵın bildiredi. Demek, úshmúyeshliktiŇ orta orayı kishi tárepke jaqın jaylasadı.

2. Úshmúyeshlik medianaların kesisiw noqatı.

2-teorema.

Úshmúyeshlik medianaları bir noqatta kesisedi hám bul noqatta tóbeseinen baslap esaplaǵanda 2:1 qatnasta boladı.

Dəlil. ABC üşmüyeshlikte AA_1 , BB_1 hám CC_1 medianalar ótkerilgen bolsın (3-súwret). Olar qandayda bir O noqatta kesilsiwin hám de $AO:OA_1=BO:OB_1=CO:OC_1=2:1$ bolıwın dálilleymiz.

$O-AA_1$ hám CC_1 medianaların kesisiw noqatı, D hám E saykes türde AO hám CO kesindilerdiń ortası bolsın. C_1A_1 kesindi ABC üşmüyeshliktiń orta sızıǵı hám üşmüyeshlik orta sızıǵınıń qásiyeti boyınsha: $C_1A_1 \parallel AC$, $C_1A_1=0,5AC$. Bunnan basqa, $DE-AOC$ üşmüyeshliktiń orta sızıǵı hám sol qásiyet boyınsha: $DE \parallel AC$, $DE=0,5AC$. Demek, DC_1A_1E tórtmüyeshliktiń eki tárepi parallel hám teń. Solay etip, DC_1A_1E – parallelogramm, onıń DA_1 hám C_1E diagonalı kesisiw noqatında teń ekige bólinedi. Demek, $AD=DO=OA_1$, $CE=EO=OC_1$, yaǵnıy AA_1 hám CC_1 medianalar O noqatta 2:1 qatnasta bólinedi.

Tap sonda-aq, úshinshi BB_1 mediana – AA_1 hám CC_1 medianaların hár biri menen kesisiw noqatında 2:1 qatnasta bóliniwi dálillendi. Hár bir mediana ushın bunday bóliniwi birden-bir demek, üş mediana bir noqatta kesiser eken.

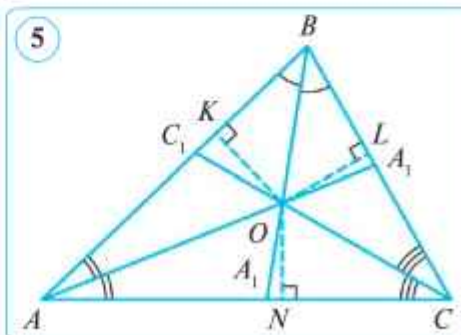
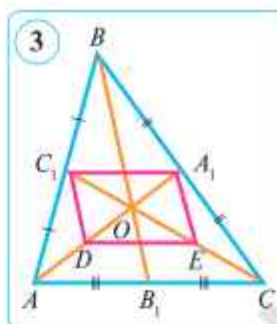
Üşmüyeshlik medianaların kesisiw noqatı *sentroid* yaqı *awırlıq orayı* da delinedi. Bunday atalıwshı tómendegi tájiriye tekserip kórin: karton qaǵazdan qálegen üşmüyeshlik qırqıp alıń hám onıń medianaların ótkerini, keyin iyne yaqı ushı ushqır etip shıǵarılgan qálem ushın medianaların kesisiw noqatına qoyıp, teń salmaqlıqta uslawǵa háreket etiń (4-súwret).

3. Üşmüyeshlik bissektrisaların kesisiw noqatı.

3-teorema.

Üşmüyeshliktiń üş bissektrisasi bir noqatta kesisedi.

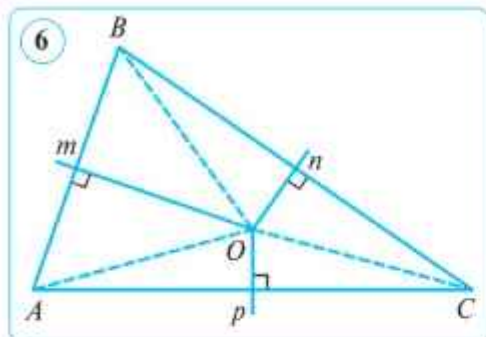
Dəlil. ABC üşmüyeshliktiń AA_1 hám BB_1 bissektrisaları kesisken noqatın O menen belgileybiz. Ol noqattan saykes türde AB , BC hám CA tuwrı sızıqlarǵa OK , OL hám OM perpendikulyarın ótkizemiz (5-súwret). Bizge belgili müyesh bissektrisasiń qálegen noqatınan müyesh táreplerine shekem bolǵan aralıqlar teń. Usıǵan tiykarlanıp, $OK=OL$ hám $OK=OM$. Sonıń ushın $ON=OL$, yaǵnıy O noqat ACB müyeshitiń táreplerinen teń uzaqlasqan boladı hám demek, usı müyeshitiń CC_1 bissektrisasiında jatadı. Bunnan, ABC üşmüyeshliktiń üş bissektrisasi O noqatta kesisiwi kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.



4. Üshmüyeshlik orta perpendikulyardıń kesisiw noqatı.

4-teorema.

Üshmüyeshlik tárepleriniń orta perpendikulyarlı bir noqatta kesisedi.



Dáilil. $\triangle ABC$ berilgen (6-súwret). Onıń AB hám BC táreplerine m hám n orta perpendikulyarlar ótkizemiz. Olar qandayda bir O noqatta kesisedi (kesisiwshi tuwrı sızıqlarǵa perpendikulyar tuwrı sızıqlar kesisedi). Bizge belgili, kesindi orta perpendikulyardıń qálegen noqatınan kesindi ultanlarına shekem bolǵan aralıqlar teń. Usıǵan baylanıslı, $OA=OB$ (1) hám $OB=OC$ (2) boladı. (1) hám (2) teńliklerden

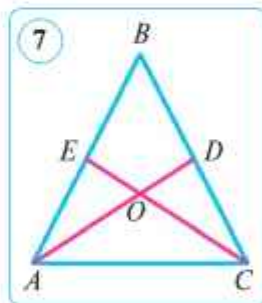
tabamız: $OA=OC$. Demek, AC táreptiń orta perpendikulyarı p hám O noqattan ótedi. Solay etip, O noqat $\triangle ABC$ üshmüyeshliktiń úsh tóbesinen teń uzaqlasqan boladı: $OA=OB=OC$. Bunnan, $\triangle ABC$ üshmüyeshliktiń táreplerine ótkirilgen úsh m , n hám p orta perpendikulyarı O noqatta kesiliwi kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

Soraw, másele hám tapsırmalar

- 1) Bähráma üshmüyeshliktiń biyiklikleri kesisedi me?
- 2) Üshmüyeshliktiń neshe ájayıp noqatın bilesiz? Olardı aytıń.
2. Teń qaptallı üshmüyeshliktiń ájayıp noqatları qalay jaylasqan boladı?
3. Eger üshmüyeshlikte eki mediana teń bolsa, ol jaǵdayda ol teń qaptallı boladı. Sonı dálilleń.

Sheshiliwi. ABC üshmüyeshlikte AD hám CE medianalar teń hám de O noqatta kesissin (7-súwret). AOE hám COD üshmüyeshliklerdi kórip shıǵamız. O noqat teń AD hám CE medianalardıń há birin 2:1 qatnasta boladı. Sonıń ushın, $AO=CO$, $EO=DO$ boladı. Bunnan basqa, vertikal müyeshler bolǵanı ushın: $\angle AOE=\angle COD$. Demek, üshmüyeshlikler teńliginiń birinshi belgisi boyınsha: $\triangle AOE=\triangle COD$. Bunnan, $AE=CD$ ekeni kelip shıǵadı.

Bul kesindiler mediananıń anıqlaması boyınsha, AB hám CB tárepleriniń yarımına teń. Demek, $AB=CB$, yaǵnıy ABC üshmüyeshlik teń qaptallı eken. Sonı dálillew talap etilgen edi.



4. Teń qaptallı üshmüyeshliktiń tórt ájayıp noqatı bir tuwrı sızıqta jatıwın dálilleń. Ol qaysı tuwrı sızıq boladı?
5. Üshmüyeshlik medianalarınıń kesisiw noqatı orta oray menen betpe-bet túsedi. Berilgen üshmüyeshlik teń qaptallı ekenin dálilleń.
6. Üshmüyeshliktiń tóbesi biyiklikleri keskin noqatı bolıwı mümkün be?
7. Üshmüyeshlik medianalarınıń kesisiw noqatı medianalardan biriniń ayırması 3 cm ge teń bóleklerge bóledi Bul mediana uzınlıǵın tabıń.

61–62. 5-BAQLAW JUMISI. QATELER ÜSTİNDE ISLEW

1. AB – O oraylı sheñberdiñ diametri. Eger $OA=OC=AC$ bolsa, BCO müyeshti tabıñ.
2. 1) Sheñber sırtında berilgen noqattan sheñber noqatlarına shekem bolğan eñ úlken hám eñ kishi aralıqlar sáykes türde 50 cm hám 20 cm ge teñ. berilgen sheñberdiñ radiusın tabıñ.
2) Sheñber orayınan B noqatına shekem 3 cm ge radius 10 cm ge teñ. B noqattan sheñberge shekem bolğan eñ kishi hám eñ úlken aralıqtı tabıñ.
3. AB hám AC tuwrı sızıqlar O oraylı sheñberge B hám C noqatlarda urınadı. Eger $\angle OAB=30^\circ$ hám $AB=5$ cm bolsa, BC nı tabıñ.
4. Sheñber $11 : 16 : 9$ qatnasta úsh doğağa bólingen hám bóliniw noqatları tutastırılğan. Payda bolğan úshmüyeshlik müyeshleriniñ kölemin tabıñ.

5-TEST

Óziñizdi sınap kóriñ!

1. Sheñber orayınan B noqatına shekem aralıq 5 cm ge, radius 12 cm ge teñ. B noqattan sheñberge shekem bolğan eñ kishi hám eñ úlken aralıqtı tabıñ.
A) 7 cm, 17 cm; B) 7 cm, 12 cm; D) 5 cm, 7 cm; E) 7 cm, 24 cm.
2. Sheñber sırtında berilgen noqattan sheñber noqatlarına shekem bolğan eñ úlken hám eñ kishi aralıqlar sáykes türde 30 cm hám 10 cm ge teñ. Berilgen sheñberdiñ radiusın tabıñ.
A) 20 cm; B) 10 cm; D) 15 cm; E) 5 cm.
3. AB – O oraylı sheñberdiñ diametri. Eger $OA=OC=BC$ bolsa, CAO müyeshti tabıñ.
A) 60° ; B) 30° ; D) 90° ; E) 120° .
4. Radiusı R ge teñ bolğan sheñberdegi noqattan uzınlıqları R ge teñ bolğan eki xorda ótkizildi. Xordalar arasındağı müyeshti tabıñ.
A) 120° ; B) 110° ; D) 135° ; E) 40° .
5. Sheñberdi kesiwshi eki xorda arasındağı müyeshlerden biri 80° qa teñ. Usı müyeshke qoñsı bolğan müyeshlerdiñ qosındısı tabıñ.
A) 200° ; B) 90° ; D) 100° ; E) 160° .
6. Sheñberdiñ sırtındağı noqattan sheñberge eki urınba ótkizilgen. Eger urınbalar arasındağı müyesh 72° bolsa, sheñberdiñ urınıw noqatları arasındağı úlken doğanı tabıñ.
A) 248° ; B) 240° ; D) 252° ; E) 236° .

Inglis tilin úyrenemiz!



Sheñber – circle

Xorda – chord

Radius – radius

Doğa – arc

Diametr – diameter

Oraylıq müyesh – central angle

Sheñberge urınba – tangent to the circle

Perpendikulyar – perpendicular



Tariyxiy mağlıwmatlar

Abul Wafo Buzjaniy 940-jılı Xorasan wálayatınıń Gerat hám Nishapur qalaları arasındaǵı Buzjon qalasında (házirgi Túrkmennıstannıń Sarxatabad qalası átirapında) tuwılǵan. Ol Baǵdadta oqıǵan hám dóretiwshilik penen shuǵıllanǵan.

Abul Wafo Buzjaniydiń «Ónermentshiler geometriyalıq sızıwlardan nelerdi biliwleri zárúr» degen kitabınıń birinshi hám ekinshi bapları sızǵısh hám cirkul járdeminde sızıwlarǵa baǵıshlanǵan. Biz sizge Abul Vafonıń sheńberdiń orayın tabıw máselesin keltiremiz.

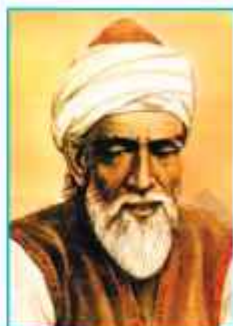
«Eger «Sheńberdiń orayı qalay tabıladı?» dep soralsa, onıń sheńberinde A hám B noqatlardı belgilep AB aralıq penen A hám B noqatlardı oray qılıp eki teńdey sheńber sızamız, olar C hám D noqatlarda kesilisedi (1-súwret). CD sızǵın ótkizemiz hám onı sheńber menen E hám F noqatlarda kesiliskenshe dawam ettiremiz, keyin EF sızıqtı O noqatta teń ekige bólemiz. Ol jaǵdayda O noqat sheńberdiń orayı boladı».

Abul Vafonıń bul usılı A hám B noqatlardı oray etip doǵa sızılǵanda olardıń kesiliskenden noqatların tutastırıwshı CD tuwrı sızıq berilgen sheńberdiń orayınan ótip, onıń AB xordasına perpendikulyar bolıwına tiykarlanǵan.

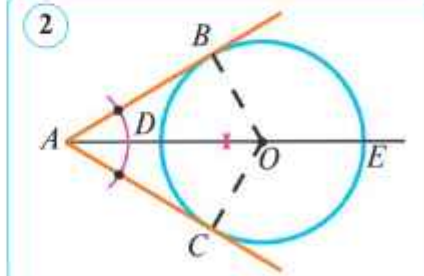
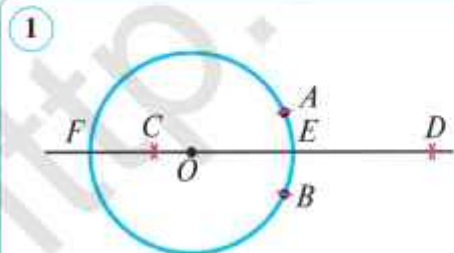
Házir bul másele tómendegishe sheshiledi: kóz aldımızǵa keltireyik, bizge orayı belgilenbegen sheńber berilgen hám onıń orayın anıqlaw talap etilgen (2-súwret).

A noqattan bul sheńberge AB hám AC urınbalardı ótkizemiz hám de BAC múyeshtiń bissektrisasın jasaymız. Bissektrisa sheńberdi D hám E noqatlarda kesedi. DE ni teń ekige bólssek, bóliniw noqatı O sheńberdiń orayı boladı. Nege? Yamasa B noqatta AB urınbaǵa perpendikulyar ótkizsek, ol bissektrisanı O noqatta kesedi. O noqat sheńber orayı boladı. Nege?

Sonıń menen bir qatarda Abul Wafo usı shıǵarmasında jáne jayıq doǵanı tolıq sheńberge toltırıw, sheńberge onıń sırtındaǵı noqattan urınba ótkiziw, sheńberge onıń sheńberinde jatqan noqattan urınba ótkiziw sıyaqlı sızıw usılların bergen.

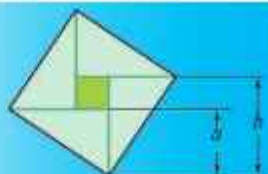


Abul Wafo Buzjaniy
(940–998)





VI BAP TÁKIRARLAW



8-KLASTA ÓTILGEN TEMALARDÍ TÁKIRARLAW USHÍN SHINÍGÍWLAR

1. Törtmüyeshliktiń tárepleri 2:4:5:7 sıyaqlı qatnasta, perimetri 108 cm ge teń. Usı törtmüyeshliktiń táreplerin tabıń.
2. Törtmüyeshliktiń eń kishi tárepi 5 cm ge teń, qalǵan tárepleriniń hár biri aldınǵısınań sáykes túrde 2 cm ge úlken. Usı törtmüyeshliktiń perimetrin tabıń.
3. Tuwrı müyeshli trapeciyanıń súyir müyeshi 45° qa teń. Kishi qaptal tárepi hám kishi ultanı 24 cm ge teń. Usı trapeciyanıń úlken ultanın tabıń.
4. Teń qaptallı úshmüyeshliktiń tárepleri: 1) 6 cm, 5 cm hám 5 cm; 2) 24 cm, 15 cm hám 15 cm; 3) 3,2 dm, 20 cm hám 20 cm; 4) 22 cm, 60 cm hám 60 cm. Usı úshmüyeshliktiń maydanı hám qaptal tárepine ótkizilgen biylikti tabıń.
5. $ABCD$ törtmüyeshlikte: $AB=CD$, $AD=BC$, A müyesh B müyeshтен úsh ese úlken. Usı törtmüyeshlikti tabıń.
6. $ABCD$ teń qaptallı trapeciyada $BC=20$ cm, $AB=24$ cm hám $\angle D=60^\circ$ bolsa, onıń AD ultanın tabıń.
7. $\triangle ABC$ da AE hám BD — biyiklikler $AC=20$ cm, $BD=16$ cm hám $BC=32$ cm. AE ni tabıń.
8. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń maydanı 168 cm^2 ge teń. Eger katetlerden biri ekinshisiniń $\frac{7}{12}$ bólegine teń bolsa, úshmüyeshliktiń katetlerin tabıń.
9. Úshmüyeshliktiń 24 cm^2 . Úshmüyeshliktiń 16 cm ge teń tárepine ótkizilgen biyikligin tabıń.
10. $ABCD$ romb berilgen. AC hám BD diagonalları sáykes túrde 30 cm hám 12 cm ge teń. Rombnıń maydanın tabıń.
11. Úsh tárepine qaray úshmüyeshliktiń maydanın tabıń:
1) 15, 15, 18; 2) 39, 42, 45; 3) 4, 13, 15; 4) 29, 25, 6.
12. ABC úshmüyeshlikte $BC=34$ cm. BC kesindiniń ortasınań AC tuwrı sıziqqa ótkizilgen EF perpendikulyar AC tárepti $AF=25$ cm hám $FC=15$ cm li kesindilerge ajıratadı. ABC úshmüyeshliktiń maydanın tabıń.
13. Rombnıń diagonalları 18 dm hám 24 dm. Usı romb nıń perimetri hám parallel tárepler arasındadı aralıqtı tabıń.

14. Teñ qaptallı trapeciyanıñ biyikligi qaptal tárepinen eki ese kishi. Trapecianıñ múyeshlerin tabıñ.
15. Teñ tárepli trapeciyanıñ biyikligi qaptal tárepinen eki ese kishi. Trapecianıñ múyeshlerin tabıñ.
16. Sheñberdiñ A , B hám C noqtaları onı: 1) $14:6:4$; 2) $13:12:5$; 3) $17:10:9$ qatnastağı doǵalargá boladı. A , B hám C noqatlardan urınbalar ótkerilip, bir-biri menen kesiskenshe dawam ettirilgen. Payda bolǵan úshmúyeshliktiñ múyeshlerin tabıñ.
17. Tuwrı tórtmúyeshliktiñ uzınlıǵı 30% ke arttırılsa hám eki 30%ke kemeytirilse, onıñ maydanı qalay ózgeredi?
18. Eger úshmúyeshliktiñ ultanı 20% uzayttırılıp, biyikligi 20% ke qısqartılса, onıñ maydanı qalay ózgeredi?
19. Tuwrı tórtmúyeshliktiñ maydanı 540 cm^2 , eki tárepiniñ qatnası $3:5$ sıyaqlı. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiñ perimetrin tabıñ.
20. Parallelogrammnıñ maydanı 24 cm^2 ge teñ. Eger biyiklikleri 3 cm hám 4 cm ge teñ bolsa, onıñ perimetrin tabıñ.
21. $ABCD$ parallelogrammdı sızıñ. Vektorların tabıñ:
1) $\overline{AB} + \overline{BC}$; 2) $\overline{AD} + \overline{DC}$; 3) $\overline{AB} - \overline{AD}$; 4) $\overline{DB} - \overline{DA}$.
22. Eger: 1) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; 2) $A(-2; 1)$, $B(-4; 3)$ bolsa, $\overline{AB}$ vektordıñ koordinataları nege teñ boladı?
23. ABC úshmúyeshlikte AA_1 — mediana, O — AA_1 nıñ ortası. $\overline{BO}$ vektordı $\vec{a} = \overline{BA}$ hám $\vec{b} = \overline{BC}$ vektorlar arqalı ańlatıñ.
24. $ABCD$ parallelogramm diagonalları O noqatta kesisedi, P noqat OB nıñ ortası $\overline{AP}$ vektordı $\overline{AB} = \vec{a}$ hám $\overline{AC} = \vec{b}$ vektorlar arqalı ańlatıñ.
25. 240° li doǵanıñ tóbelерinen ótkerilgen urınbalar kesiskenshe dawam ettirilgen. Olar arasındağı múyeshti tabıñ.
26. Parallelogrammnıñ múyeshлерinen biri ekinshisinen 4 ese úlken. Usı parallelogrammnıñ úlken múyeshin tabıñ.
27. Tuwrı tórtmúyeshliktiñ maydanı 288 cm^2 , eki tárepiniñ qatnası $1:2$ ge teñ. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiñ perimetrin tabıñ.
28. Parallelogrammnıñ táreplerinen birine ótkerilgen biyikligi usı tárepten úsh ese kishi. Parallelogrammnıñ maydanı 48 cm^2 . Usı tárep hám biyikligin tabıñ.
29. Kvadrattıñ maydanı 16 cm^2 . Eger: 1) onıñ barlıq tárepin eki ese qısqartsaq; 2) onıñ barlıq tárepin úsh ese uzaytsaq, kvadrattıñ maydanı qalay ózgeredi?
30. Eger: 1) $A(7; -5)$, $B(-9; -3)$; 2) $A(-8; 2)$, $B(-12; -4)$; 2) $A(8; -1)$, $B(-16; -11)$ bolsa, AB kespe ortası — C noqat kooordinataların tabıñ.

1. Tuwrı tórtmüyeshliktiń kishi tárepi 10 cm ge teń, diagonalları bolsa 60° li müyesh astında kesisedi. Usı tuwrı tórtmüyeshliktiń diagonalların tabıń.
2. Úshmüyeshliktiń tárepleri 11 cm, 7 cm hám 10 cm ge teń Berilgen úshmüyeshlik orta sızıqlarınan payda bolǵan úshmüyeshliktiń perimetrin tabıń.
3. Úshmüyeshliktiń tárepleri 21 cm, 72 cm hám 75 cm ge teń. Usı úshmüyeshliktiń maydanın tabıń.
4. Sheńberge sırtındaǵı noqattan ótkizilgen eki urınba arasındaǵı müyesh 75° qa teń. Usı urınba táreplerin óz ishine alǵan doǵalardı tabıń.
5. $\vec{a}(2; -3)$ hám $\vec{b}(-2; -3)$ vektorlar berilgen. $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$ vektordıń koordinataların tabıń.

6-TEST

Ózińizdi sınap kóriń!

1. Tórtmüyeshliktiń müyeshleri óz ara 3:5:4:6 qatnasta. Tórtmüyeshliktiń kishi müyeshin tabıń.
A) 80° ; B) 30° ; D) 60° ; E) 40° .
2. Dóñes tórtmüyeshliktiń diagonalları onı neshe úshmüyeshlikke ajratadı?
A) 4; B) 5; D) 6; E) 8.
3. Tuwrı tórtmüyeshliktiń eni 5 ke teń, uzınlıǵı onnan 7 cm ge artıq. Tuwrı tórtmüyeshliktiń perimetrin tabıń.
A) 32 cm; B) 34 cm; D) 24 cm; E) 26 cm.
4. Hárbir ishki müyeshi 162° bolǵan dóñes kópmüyeshliktiń neshe tárepi bar?
A) 18 ta; B) 20 ta; D) 15 ta; E) 12 ta.
5. Parallelogrammnıń eki tárepi qatnası 3:7 ge, onıń perimetri bolsa 18 cm ge teń. Usı parallelogrammnıń kishi tárepin tabıń.
A) 2,7 cm; b) 3,4 cm; d) 5,4 cm; E) 4,5 cm.
6. Tuwrı tórtmüyeshlik formasındaǵı maydannıń eni 32 m. Eger maydannıń beti 2 gektar bolsa, onıń uzınlıǵı neshe metr boladı?
A) 610 m; B) 615 m; D) 625 m; E) 630 m.
7. Rombnıń biyikligi 5 cm ge, diagonallarınıń kóbeymesi 80 cm^2 ge teń. Onıń perimetrin tabıń.
A) 32 cm; B) 16 cm; D) 24 cm; E) 28 cm.
8. $\vec{a}(2; -3)$ hám $\vec{b}(-2; -3)$ vektor berilgen. $\vec{m} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ vektordıń koordinataların tabıń.
A) $(-6; -3)$; B) $(-3; 6)$; D) $(-2; -9)$; E) $(2; -3)$.
9. $\vec{a}(3; 2)$ hám $\vec{b}(0; -1)$ vektor berilgen. $2\vec{a} - 4\vec{b}$ vektordıń modulin tabıń.
A) 10; B) 6; C) 8; D) 3.

Süyr müeyshli trigonometriyalıq funksiýalarınıń mánisleri kestesi. I-Qosımsha

Graduslar	$\sin \alpha$ $1^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	$\operatorname{tg} \alpha$ $1^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	$\operatorname{ctg} \alpha$ $1^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	$\cos \alpha$ $1^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	Graduslar
1	≈ 0,0175	≈ 0,0175	≈ 57,290	≈ 0,9998	89
2	≈ 0,0349	≈ 0,0349	≈ 28,636	≈ 0,9994	88
3	≈ 0,0523	≈ 0,0524	≈ 19,081	≈ 0,9986	87
4	≈ 0,0698	≈ 0,0699	≈ 14,301	≈ 0,9976	86
5	≈ 0,0872	≈ 0,0875	≈ 11,430	≈ 0,9962	85
6	≈ 0,1045	≈ 0,1051	≈ 9,514	≈ 0,9945	84
7	≈ 0,1219	≈ 0,1228	≈ 8,144	≈ 0,9925	83
8	≈ 0,1392	≈ 0,1405	≈ 7,115	≈ 0,9903	82
9	≈ 0,1564	≈ 0,1584	≈ 6,314	≈ 0,9877	81
10	≈ 0,1736	≈ 0,1763	≈ 5,671	≈ 0,9848	80
11	≈ 0,1908	≈ 0,1944	≈ 5,145	≈ 0,9816	79
12	≈ 0,2079	≈ 0,2126	≈ 4,705	≈ 0,9781	78
13	≈ 0,2250	≈ 0,2309	≈ 4,331	≈ 0,9744	77
14	≈ 0,2419	≈ 0,2493	≈ 4,011	≈ 0,9703	76
15	≈ 0,2588	≈ 0,2679	≈ 3,732	≈ 0,9659	75
16	≈ 0,2756	≈ 0,2867	≈ 3,487	≈ 0,9613	74
17	≈ 0,2924	≈ 0,3057	≈ 3,271	≈ 0,9563	73
18	≈ 0,3090	≈ 0,3249	≈ 3,078	≈ 0,9511	72
19	≈ 0,3256	≈ 0,3443	≈ 2,904	≈ 0,9455	71
20	≈ 0,3420	≈ 0,3640	≈ 2,747	≈ 0,9397	70
21	≈ 0,3584	≈ 0,3839	≈ 2,605	≈ 0,9336	69
22	≈ 0,3746	≈ 0,4040	≈ 2,475	≈ 0,9272	68
23	≈ 0,3907	≈ 0,4245	≈ 2,356	≈ 0,9205	67
24	≈ 0,4067	≈ 0,4452	≈ 2,246	≈ 0,9135	66
25	≈ 0,4226	≈ 0,4663	≈ 2,145	≈ 0,9063	65
26	≈ 0,4384	≈ 0,4877	≈ 2,050	≈ 0,8988	64
27	≈ 0,4540	≈ 0,5095	≈ 1,963	≈ 0,8910	63
28	≈ 0,4695	≈ 0,5317	≈ 1,881	≈ 0,8829	62
29	≈ 0,4848	≈ 0,5543	≈ 1,804	≈ 0,8746	61
30	≈ 0,5000	≈ 0,5774	≈ 1,732	≈ 0,8660	60
31	≈ 0,5150	≈ 0,6009	≈ 1,664	≈ 0,8572	59
32	≈ 0,5299	≈ 0,6249	≈ 1,600	≈ 0,8480	58
33	≈ 0,5446	≈ 0,6494	≈ 1,540	≈ 0,8387	57
34	≈ 0,5592	≈ 0,6745	≈ 1,483	≈ 0,8290	56
35	≈ 0,5736	≈ 0,7002	≈ 1,428	≈ 0,8192	55
36	≈ 0,5878	≈ 0,7265	≈ 1,376	≈ 0,8090	54
37	≈ 0,6018	≈ 0,7536	≈ 1,327	≈ 0,7986	53
38	≈ 0,6157	≈ 0,7813	≈ 1,280	≈ 0,7880	52
39	≈ 0,6293	≈ 0,8098	≈ 1,235	≈ 0,7771	51
40	≈ 0,6428	≈ 0,8391	≈ 1,192	≈ 0,7660	50
41	≈ 0,6561	≈ 0,8693	≈ 1,150	≈ 0,7547	49
42	≈ 0,6691	≈ 0,9004	≈ 1,111	≈ 0,7431	48
43	≈ 0,6820	≈ 0,9325	≈ 1,072	≈ 0,7314	47
44	≈ 0,6947	≈ 0,9657	≈ 1,036	≈ 0,7193	46
45	≈ 0,7071	1,0000	1,000	≈ 0,7071	45
Graduslar	$\cos \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 89^\circ$	$\operatorname{ctg} \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 89^\circ$	$\operatorname{tg} \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 89^\circ$	$\sin \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 89^\circ$	Graduslar

JUWAPLAR

7-klasta ótkenlerdi tákirarlaw. 5. 9 dm. 7. 3 cm. 9. Awa, teń. 10. 52° , 63° , 65° . 11. 60° . 13. 24° , 72° , 84° . 14. Yaq, kelip shıqpaydı. 18. 58° .

I bap. 1-tema. 2. 1) $n=8$; 2) $n=11$; 3) $n=24$. 4. 80° . 5. 1) $n=12$; 2) $n=36$; 3) $n=40$. 6. $n=8$ ta. 7. 1) $n=20$ ta; 2) $n=15$ ta; 3) $n=6$ ta. 9. 1) $n=24$ ta; 2) $n=8$ ta; 3) $n=5$ ta. 10. 36° , 72° , 108° , 144° . **2-tema.** 2. 25,5 cm, 50,5 cm. 3. 1) 35° , 145° , 35° , 145° ; 3) 85° , 105° , 85° , 105° . 4. $P_{ABO}=20$ cm; $P_{BOC}=24$ cm. 5. $AB=DC=16$ cm, $AD=BC=4$ cm. **3-tema.** 2. 1) Awa, tuwrı. 3. 32 cm. 7. 26 cm. 8. 45° , 135° , 135° , 45° . 9. 26 cm. **4-tema.** 2. 1) 9 cm; 2) 7 cm. 3. 12 cm. 4. $AB=DC=4$ cm, $BC=AD=8$ cm. 6. 1) $4+7<12$ – úshmüyeshlik teń salmağı orınlanbaydı; joq, bolıwı mümkün emes. 7. 7 cm, 14 cm, 7 cm, 14 cm. **5-6-temalar.** 2. 10 cm. 3. $BP=12$ cm. 5. 7 cm. 6. 40° , 140° , 40° , 140° . 9. 12 cm, 24 cm, 30 cm, 42 cm. 10. 64 cm. 12. 30 cm. 13. 32 cm. **7-8-temalar.** 3. 150° . 4. 23 cm. 6. 27 cm, 11 cm. 7. 20 cm, 14 cm. 10. 90° , 90° , 100° , 80° . 11. 48 cm. 12. 70 cm. **9-tema.** 3. $AC=5$ cm. 4. $OB_1=3,2$ cm, $OB_2=4,8$ cm, $OB_3=6,4$ cm. 6. 2) 19 cm. 8. $x=4$. 9. $OB_1=9$ cm, $OB_2=13,5$ cm, $OB_3=18$ cm. **10-11-temalar.** 2. 2,5 cm, 3,5 cm, 5,5 cm. 4. 22 cm, 10 cm. 6. 2) 15 cm. 9. 24 cm, 12 cm. 10. 3 cm. 11. 30 cm, 10 cm. 12. 12 cm.

II bap. 15-tema. 2. a) $\cos\alpha$; b) $\operatorname{tg}\alpha$; d) $\sin\alpha$; e) $\operatorname{ctg}\alpha$. 4. a) Awa, sebebi $0,98<1$; b) jaq, sebebi

$\sqrt{2}>1$; d) awa, sebebi $\sqrt{5}-2<1$. 5. $ML=24$, $MN=25$. 6. $\sin M=\frac{5}{13}$, $\cos M=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} M=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} M=\frac{12}{5}$. **16-tema.** 2. a) Tuwrı, sebebi $a=c\sin\alpha$; d) nadurıs, sebebi $c=\frac{a}{\sin\alpha}$. 3. Awa, sebebi tangenstıń mánisi qálegen oń san boladı. 4. 1) 16 cm; 2) 50 cm. 6. 16 cm. 7. 5 cm. 8. 50 cm. **17-tema.** 2. 1) 13; 2) 9; 3) 6,5. 3. 1) 40 cm; 2) 100 cm. 4. $x=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{2}$. 5. 1) 0,5; 2) $4\sqrt{2}$; 3) 0,8; 4) 1,5. **18-tema.** 2. 1) Yaq, sebebi $121+49\neq 289$; 2) awa, sebebi $3^2+1,6^2=3,4^2$, $11,56=11,56$. 5. Eki sheshimge iye. 6. 1) Awa, sebebi $12^2+35^2=37^2$; 2) yaq, sebebi $11^2+20^2\neq$

25^2 . 7. 2 cm. **19-tema.** 1. 1) 9,6 cm, 9,6 cm, 8 cm. 2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$. 3. 1) $h_b=\frac{12}{7}\sqrt{6}$ cm; 2) $h_c=11,2$ dm; 3) $h_a=6,72$ cm. 4. $h=6\sqrt{3}$ cm. 5. $h_a=\frac{15}{4}\sqrt{7}$ cm; $h_c=\frac{5}{2}\sqrt{7}$ cm. 7. $h_a=\frac{3}{2}\sqrt{15}$ cm.

20-21-temalar. 2. 1) $\frac{5}{13}$; 2,4; $\frac{5}{12}$. 4. 1) 2; 2) 1; 3) 1. 5. 1) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$. 7. 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{2}$. 9. 1) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{15}{8}$. 12. 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha$. 14. 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\sin^3\alpha$. **22-tema.** 2.

1) $x\approx 40^\circ$; 2) $x\approx 14^\circ$; 3) $x\approx 34^\circ$; 4) $x\approx 74^\circ$. 3. 1) $\sin B=0,6$; $\cos B=0,8$. 5. $\cos A=0,5$; $\operatorname{tg} A=\sqrt{3}$. 7. 1) $\sin\alpha=0,6$; $\cos\alpha=0,8$. 8. 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$. **23-tema.** 1. 1) 1,5; 3) 0,5. 3. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$; $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. 4. 12; 6. 5.

1) $\sin^2\alpha$; 2) $\sin^3\alpha$. 7. 2. 8. 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 1. **24-tema.** 1. a) 1) $\approx 0,0523$; 2) $\approx 0,3584$; 3) $\approx 0,7660$; 4) $\approx 0,6428$; e) 1) $\approx 5,671$; 2) $\approx 1,732$; 3) $\approx 0,2679$; 4) $\approx 11,430$. 2. b) 1) $\approx 42^\circ$; 2) $\approx 50^\circ$; 3) $\approx 87^\circ$; d) 1) $\approx 25^\circ$; 2) $\approx 85^\circ$; 3) $\approx 10^\circ$. 4. 1. 6. 1) 1; 2) 0. 7. 1) $\approx 0,9397$; 4) $\approx 23,078$. 8. $x\approx 8^\circ$.

25-tema. 1. 14 cm. 2. 45° , 45° . 3. $a\approx 6,691$; $b\approx 7,431$; $\beta\approx 48^\circ$. 5. $\cos^2\alpha$. 7. $a=4$ cm; $b=4\sqrt{3}$ cm, $\beta=60^\circ$. **26-tema.** 1. $b=9$ cm, $\alpha=\beta=45^\circ$. 2. $c=12$ cm, $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$. 5. 0. 7. $c=26$ cm.

27-tema. 3. $a=7$ cm, $\alpha=\beta=45^\circ$. 4. $a=6\sqrt{3}$ cm, $b=6$ cm, $\beta=30^\circ$. 5. $a=5$ cm (5-súwret); $AC=2\sqrt{13}$ cm, $BC=3\sqrt{13}$ cm (6-súwret). 6. 198 cm.

III bap. 31-tema. 3. 1) III sherek; 2) II sherek; 3) IV sherek; 4) I sherek. 4. 1) $(-10; -1)$; 2) $(0; -5,5)$; 3) $(-2; 1)$. 5. $B(-1; 5)$. 8. 1) $D(3; 0)$; 2) $D(4; 5)$. **32-33-temalar.** 2. 1) 10; 2) 17; 3) 13. 3. 1) $x_1=-2$; $x_2=6$. 4. $P=16$. 5. 1) $(x-7)^2+(y-11)^2=25$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$. 6. 1)

(2; 5), $R=7$; 2) $(-1; 5)$, $R=2$. **7.** 1) $C(3; -1)$, $R=4$; 2) $C(0; -5)$, $R=1$. **8.** 1) Ten qaptallı. **9.** 1) $(x-9)^2 + (y-4)^2 = 49$; 2) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 4$. **10.** 1) $C(7; -2)$, $R=5$; 2) $C(4; 0)$, $R=1$. **11.** 1)

$(8; -6)$ hám $(8; 6)$; 2) $(-5; -12)$ hám $(5; -12)$. **34-tema. 3.1)** $2x-y+5=0$; 2) $x+y-7=0$; 3)

$3x-2y+2=0$. **4.** $c=-3$. **5.** $a=b=\frac{1}{3}$. **6.** 1) $(0; -1,5)$ hám $(-3; 0)$; 2) $(0; 3)$ hám $(4; 0)$; 3) $(0;$

$-5)$ hám $(2,5; 0)$. **9.** $x+1=0$, $x-3y-8=0$, $x-y=0$. **35-tema. 2.** 1) $\overline{DC} \uparrow \overline{AB}$; 2) $\overline{AO} \uparrow \overline{OC}$;

3) $\overline{CB} \uparrow \overline{AD}$ hám $\overline{DA} \uparrow \overline{AD}$; 5) $\overline{DC} = \overline{AB}$; 6) $\overline{AO} = \overline{OC}$; 7) $\overline{DO} = \overline{OB}$. **4.** 1) Romb; 2) tra-

peciya. **36-37-temalar. 5.** Awa, orinlandı. **6.** $|\overline{AO}| = 16$ cm. **7.** $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{DC} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AC}$.

9. $\overline{AB} = -\overline{b}$; $\overline{BC} = -\overline{a} + \overline{b}$; $\overline{DA} = \overline{a} - \overline{b}$. **10.** $\overline{BF} = -2\overline{a} + \overline{b}$; $\overline{EC} = -\overline{a} + 2\overline{b}$; $\overline{EF} = -\overline{a} + \overline{b}$;

$\overline{BC} = -2\overline{a} + 2\overline{b}$. **38-39-temalar. 4.** $\overline{OA} = -\frac{1}{2}\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b}$; $\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{a} + \overline{b}$. **5.** 1) $\overline{AC} = \overline{CB}$; 2) $\overline{AB} = 2\overline{CB}$

; 3) $\overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{BA}$. **7.** 1) $(4; 5)$; 2) $(-1; 4)$; 3) $(0; 0)$. **8.** 1) 25; 2) 5; 3) 3. **9.** 1) $(1; -2)$; 2) $(2m; 2n)$.

11. $m=7$. **12.** $B(-2; -11)$. **40-tema. 2.** 1) $(-3; 4)$; 2) $(-5; 12)$. **3.** 1) $(-4; 10)$; 2) $(0; 2)$; 4) $(4; -10)$.

4. 1) $(3; 6)$; 2) $(5; 3)$; 3) $(-4; -3)$. **5.** 1) $(6; 3)$; 2) $(-6; 3)$; 3) $(-2; 15)$. **6.** 1) $\vec{c}(-4; -4)$; 2) $\vec{c}(8; 6)$. **7.**

1) $\vec{c}(-12; 6)$; 2) $\vec{c}(-11; 8)$. **8.1)** $\vec{c}(-2; -1)$; 2) $\vec{c}(2; -13)$. **41-tema. 1.** $CC_1 = 2$. **2.** $\overline{KC} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$

. **3.** $(5; 12)$. **4.** $B(5; 5)$, $D(1; -1)$. **5.** $B(-5; 11)$. **8.** $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AD}$.

IV bap. 45-tema. 2. 2) $0,0225 \text{ dm}^2$; 5) $6,25 \text{ m}^2$. **6.** 1) 4 márte artadı; 2) 9 márte kemeyedi; 3)

28 cm^2 qa artadı. **11.** 2) $3,6 \text{ dm}$; 3) 68 mm ; 5) 80 dm . **13.** $359,12 \text{ min km}^2$. **46-47-temalar. 2.**

1) $P=65,8 \text{ cm}$, $S=87 \text{ cm}^2$; 3) $P=7,4 \text{ dm}$, $S=3 \text{ dm}^2$. **4.** $S=5000 \text{ m}^2$. **5.** 1) $P=126 \text{ cm}$, $S=920$

cm^2 . **8.** 12 cm . **9.** 1) $S=500 \text{ cm}^2$; 2) $a=12 \text{ cm}$; 3) $h_a=5 \text{ cm}$. **11.** 1) 1,6 márte artadı; 2) 6,25

márte kemeyedi. **13.** 2) 280 cm^2 ; 4) $4,8 \text{ dm}^2$. **14.** $P=42 \text{ cm}$. **15.** $S=280 \text{ cm}^2$. **48-tema. 2.** 1) 14

cm^2 ; 2) 150 cm^2 . **3.** 4 cm . **4.** 5:1. **8.** 1) 756 cm^2 ; 2) 84 cm^2 ; 3) 192 cm^2 . **10.** 60 cm . **11.** $7,5 \text{ dm}^2$.

49-50-temalar. 2. 1) 32 cm . **3.** 1) 512 cm^2 ; 2) $1,62 \text{ dm}^2$. **4.** 12 cm . **5.** 5 cm . **7.** 1) $1,35 \text{ dm}^2$; 2)

180 cm^2 ; 3) 8 cm^2 . **8.** 1) 87 cm^2 ; 2) 14 cm . **10.** 1) $0,5a^2 \text{ kv.birl.}$ **11.** 360 cm^2 . **12.** 1) $2,45 \text{ dm}^2$;

2) 238 cm^2 ; 3) $31,5 \text{ cm}^2$. **14.** 1) $1,44 \text{ m}^2$. **15.** 1) 140 cm^2 . **51-tema. 1.** 2125 kv. birl. **2.** $(a+b) c$. **3.**

144 cm^2 . **5.** 16 kv. birl. **6.** 1) $20,8 \text{ km}$; 2) 8 km .

V bap. 55-tema. 3. AB hám BD kesiwshı. **4.** 25 cm . **5.** 1) $R=5 \text{ cm}$; 2) $R<5 \text{ cm}$; 3) $R>5 \text{ cm}$. **8.**

CD . **56-tema. 2.** 1) Sheñberler eki tärepinen bir-birine urınadı; 2) ulıwma noqatqa iye emes,

biri ekinshisinin ishinde jatadı. **3.** 1) 10 cm ; 2) 2 cm . **6.** 1) 144° ; 2) 96° ; 3) 210° ; 4) 200° ; 5) 260° ;

6) 306° ; 7) 276° . **7.** 1) 160° , 200° ; 2) 80° , 280° . **8.** 70° . **9.** 1) 72° ; 2) 60° ; 3) 40° ; 4) 36° ; 5) 30° . **10.**

1) $15,6 \text{ cm}$; 2) 21 cm ; 3) $1,6 \text{ dm}$. **57-tema. 3.** $AC=10 \text{ cm}$. **4.** 1) $\angle ACB=44^\circ$; 3) $\angle AEP=100^\circ$.

5. 36° , 60° , 84° . **6.** 1) 100° yaki 80° ; 2) 126° yaki 54° . **7.** $\angle BAC=20^\circ$. **8.** 100° . **58-tema. 3.** 220° .

4. a) $x=45^\circ$; b) $x=30^\circ$; d) $x=90^\circ$. **5.** 30° . **6.** 1) $\angle ABC=20^\circ$; 2) $\angle ABC=60^\circ$; 3) $\angle ABC=36^\circ$;

4) $\angle ABC=54^\circ$; 5) $\angle ABC=36^\circ$. **7.** 1) 100° , 40° , 40° . **8.** 1) 144° ; 2) 120° ; 3) 40° ; 4) 72° . **9.** 1) 128° ;

3) 76° . **59-tema. 3.** 4 cm . **6.** 8 cm . **9.** 10 cm . **11.** 90° .

VI bap. 1. 38° , 158° , 144° , 120° . **2.** 52 cm . **3.** 48 cm . **4.** 1) 12 cm^2 ; $4,8 \text{ cm}$; 2) 108 cm^2 ; $14,4 \text{ cm}$.

6. 44 cm . **7.** 10 cm . **9.** 3 cm . **10.** 180 cm^2 . **13.** 60 dm , $14,4 \text{ dm}$. **14.** 30° , 150° , 150° , 30° . **17.** 9%

ke kemeyedi. **19.** 96 cm . **20.** 28 cm . **22.** 1) $(1; -1)$; 2) $(-2; 2)$. **23.** $\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{4}\overline{b}$. **25.** 60° . **26.**

144° . **27.** 72 cm . **28.** 12 cm , 4 cm . **29.** 1) 4 cm^2 qa kemeyedi; 2) 128 cm^2 qa artadı.

MAZMUNÍ

7-klasta ótilgenlerdi tákirarlaw	3
I bap. Tórtmüyeshlikler	5
1-§. Tiýkargı tórtmüyeshlikler hám olardıń qásiyetleri	
1-tema. Kópmüyeshliktiń ishki hám sırtqı müyeshleriniń qásiyeti	5
2-tema. Parallelogramm hám onıń qásiyetleri	8
3-tema. Parallelogrammnıń belgileri	11
4-tema. Tuwrı tórtmüyeshlik hám onıń qásiyetleri	14
5-6-tema. Romb hám kvadrattıń qásiyetleri	16
7-8-tema. Trapeciya hám onıń qásiyetleri	19
2-§. Fales teoreması hám onıń qollanıwı	23
9-tema. Fales teoreması	23
10-11-tema. Úshmüyeshliktiń orta sızıgınıń qásiyeti. Trapeciya orta sızıgınıń qásiyeti	26
12-tema. Ámeliy jumıs hám qollanıw	29
13-14-tema. 1-baqlaw jumısı. Qáteler ústinde islew	33
1-test	33
Tariyxıy maǵlıwmatlar	34
II bap. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń tárepleri hám müyeshleri arasındagı qatnaslar	35
3-§. Súyir müyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları	35
15-tema. Súyir müyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensi	35
16-tema. Súyir müyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensi (dawamı)	38
4-§. Pifagor teoreması hám onıń qollanıwı	41
17-tema. Pifagor teoreması hám onıń hár qıylı dálilleri	41
18-tema. Pifagor teoremasına keri teorema	44
19-tema. Pifagor teoremasıń baǵı bir qollanıwı	47
5-§. Trigonometriyalıq birdeýlikler	49
20-21-tema. Tiýkargı trigonometriyalıq birdeýlik hám onıń nátiyjeleri	49
22-tema. Toliqtırıwshı müyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları ushın formulalar	52
23-tema. 30° , 45° , 60° müyeswhlerdiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensin esaplaw	54
6-§. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliklerdi sheshiw	56
24-tema. Trigonometriyalıq funksiyalardıń mánisleri kestesi	56
25-tema. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliklerdi sheshiw	58
26-tema. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliklerdi sheshiw (dawamı)	60
27-tema. Tuwrı müyeshli úshmüyeshliklerdi jasaw	62
28-tema. Ámeliy jumıs hám qollanıw	64
29-30-tema. 2-baqlaw jumısı. Qáteler ústinde islew	67
2-test	67
Tariyxıy maǵlıwmatlar	68
III bap. Koordinatalar usılı. Vektorlar	69
7-§. Tegislikte koordinatalar sisteması	69

31-tema. Tegislikte noqattın koordinataları. Kesindi ortasınıñ koordinataları	69
32-33-tema. Eki noqattın arasındaqı aralıq. Sheñber teñlemesi	72
34-tema. Tuwrı sıziq teñlemesi. Geometriyalıq máseleler sheshiwdiñ koordinatalar usılı	75
8-§. Tegislikte vektorlar	78
35-tema. Vektor túsiniğı. Vektordın uzınlıǵı hám baǵıtı.....	78
36-37-tema. Vektorlardı qosıw hám alıw	81
38-39-tema. Vektordı saǵa kóbeytiw. Vektordın koordinataları.....	85
40-tema. Koordinataları menen berilgen vektorlar ústinde ámeller	90
41-tema. Vektordın fizikalıq hám geometriyalıq talqılanıwı. Geometriyalıq máseleler sheshiwdiñ vektorlıq usılı.....	93
42-tema. Ámeliy jumıs hám qollanıw	96
43-44-tema. 3-baqlaw jumısı. Qáteler ústinde islew	99
3-test	99
Tariyxıy maǵlıwmatlar.....	100
IV bap. Maydan	101
9-§. Kópmúyeshliktiñ maydanı	101
45-tema. Maydan haqqında túsiniq.....	101
46-47-tema. Tuwrı tórtmúyeshlik hám parallelogrammnıñ maydanı.....	105
48-tema. Úshmúyeshliktiñ maydanı.....	110
49-50-tema. Romb hám trapeciyanıñ maydanı.....	114
51-tema. Kópmúyeshliktiñ maydanı.....	119
52-tema. Ámeliy jumıs hám qollanıw	122
53-54-tema. 4-baqlaw jumısı. Qáteler ústinde islew	126
4-test	126
Tariyxıy maǵlıwmatlar.....	127
V bap. Sheñber	128
10-§. Sheñberdegi múyeshler	128
55-tema. Tuwrı sıziq hám sheñberdiñ óz ara jaylasıwı. Sheñberge urınba hám onıñ qásiyetleri	128
56-tema. Eki sheñberdiñ óz ara jaylasıwı oraylıq múyesh hám doǵanıñ gradus ólshewi.....	132
57-tema. Sheñberge ishley sızilǵan múyesh	135
58-tema. Sheñberdiñ kesiwshileri payda etken múyeshler	138
59-tema. Sheñber xordası hám diametriniñ qásiyetleri	142
60-tema. Ámeliy jumıs hám qollanıw	144
Úshmúyeshliktiñ ájayıp noqatları	146
61-62-tema. 5-baqlaw jumısı. Qáteler ústinde islew	149
5-test	149
Tariyxıy maǵlıwmatlar.....	150
VI bap. Tákirarlaw	151
8-klasta ótilgen temalardı tákirarlaw ushın shınıǵıwlar.....	151
Juwmaqlawshı baqlaw jumısı. Qáteler ústinde islew	153
6-test	153
1-Qosımsha:	154
Juwaplar.....	155

R 29

Rahimqoriyev A.A.

Geometriya 8: Ulwma bilim beriw mektepleriniñ 8-klassı ushın sabaqlıq.
/ A.A. Rahimqoriyev, M.A. Toxtaxodjayeva. — Qayta islangen hám tolıqtırılğan
4-basilımı. — T.: «O'zbekiston» BPDÜ, 2019. — 160 b.

ISBN 978-9943-25-794-8

UOK 514(075)
KBK 22.151ya721

*ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA*

GEOMETRIYA

Ulwma bilim beriw mektepleriniñ 8-klassı ushın sabaqlıq

Qayta islangen hám tolıqtırılğan 4-basilımı

Awdarmashılar S. Aytmuratova
Redaktor S. Aytmuratova
Xudojnikler *Sh. Rahimqoriyev, X. Abdullayev*
Tex. redaktor *T. Xaritonova*
Operator *A. Atagullaeva*

Baspa licenziyası AI №158, 14.08.2009

Basıwǵa ruqsat etildi 2019-jıl 17-iyunda. Formatı 70x100¹/₁₆.
Kegli 11. Times KRKP garniturası. Ofset baspa usılında basıldı.
Shártli baspa tabaǵı 13,0. Esap baspa tabaǵı 10,0. 14220 nusqa.
Buyırtpa №.

Ózbekstan Respublikası Prezidenti Administraciyası janındaǵı
Málimleme hám ǵalaba kommunikaciýalar agentliginiñ
«O'zbekiston» baspa-poliografiyalıq dóretiwshilik úyinde basıp shıǵarıldı.
100011, Tashkent, Nawayı kóshesi, 30-úy.

Telefon: (371) 244-87-55, 544-87-20

Faks: (371) 244-87-55, 544-87-20.

e-mail: uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz
www.iptd-uzbekistan.uz

İjarğa berilgen sabaqlıqtıñ jaǵdayn kórsetiwshi keste

T/n	Oqıwshınıń atı, familiyası	Oqıw jılı	Sabaq- lıq- tıñ alıńan- daǵı jaǵdayı	Klass basshı- sınıń qol tań- bası	Sabaq- lıqtıñ qaytıp tapsırıl- ǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshı- sınıń qol tańbası
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

**Sabaqlıq ijarğa berilgende hám oqıw jılınıń juwmaǵında qaytarıp alıńanda
joqarıdaǵı keste klass basshısı tárepinen tómendegishe bahalawǵa muwapıq
toltırıladı**

Jańa	Sabaqlıqtıñ paydalanıwǵa birinshi berilgendegi jaǵdayı
Jaqsı	Muqabası pütün, sabaqlıqtıñ tiykargı bóliminen ajıralmaǵan. Barlıq betleri bar, jırtılmaǵan, kósh- pegen, betlerinde jazıw hám sızılwar joq.
Qanaatlanarlıq	Muqaba jazılǵan, bir qansha sızılıp, shetleri jelingen, sabaqlıqtıñ tiykargı bóliminen ajıralıw jaǵdayı bar, paydalanıwshı tárepinen qanaatlan- narlıq ońlanǵan. Kóshken betleri qayta ońlan- ǵan, ayırım betleri sızılǵan.
Qanaatlandırmaydı	Muqaba sızılǵan, ol jırtılǵan, tiykargı bólim- nen ajıralǵan yamasa pútkilley joq, qanaatlan- dırarsızlıq ońlanǵan. Betleri jırtılǵan, betleri jetispeydi, sızıp, boyap taslanǵan, sabaqlıqtı tik- lewge bolmaydı.