MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SHERALIYEV SHUXRAT NURALIYEVICH

TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI MASALALARINING SPEKTRAL NAZARIYASI USULLARIDA MATEMATIK TADQIQ QILISH

01.01.02 – Differentsial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA
FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

UDK: 517.968

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SHERALIYEV SHUXRAT NURALIYEVICH

TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI MASALALARINING SPEKTRAL NAZARIYASI USULLARIDA MATEMATIK TADQIQ QILISH

01.01.02 – Differentsial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida №B2021.3.PhD/FM630 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz) va «ZiyoNet» Axborot ta'lim portalida (http://www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Alimov Shavkat Arifdjanovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor, akademik.
Rasmiy opponentlar:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor.
	Babajanov Bazar Atajanovich fizika-matematika fanlari doktori, dotsent.
Yetakchi tashkilot:	**Farg`ona davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil «14» mart soat 14^{00}dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (16-raqami bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24.

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil «29» fevral kuni tarqatildi.

(2024 yil «29» fevral dagi 2-raqamli reyestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI * MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI *

A. Sadullayev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor, akademik.

R.M. Jo'rayev
ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.f.d. (PhD).

A.Azamov
ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar raisi o'rinbosari,
f.-m.f.d., professor, akademik.

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida matematika va fizikaning turli sohalarida olib borilayotgan ilmiy va amaliy tadqiqotlar orasida tutash muhitlar mexanikasi matematik modellarini o‘rganish markaziy o‘rinlardan birini egallaydi. Tashqi ta’sirlarga duchor bo‘lgan materiallar va tuzilmalarning deformatsiya reaktsiyasini aniqlash uchun turli xil murakkab muammolarni hal qilishda samarali qo‘llaniladigan klassik tutash muhitlar mexanikasi yaratildi. Ammo bu fanning asosiy tenglamasi strukturada nuqsonlar, masalan, yoriqlar mavjud bo‘lganda qiyinchiliklarga duch keladi, chunki asosiy tenglamadagi fazoviy xususiy hosilalar berilgan shart uchun aniqlanmagan. Ushbu muammoni hal qilish uchun doimiy mexanikada peridinamika deb nomlanuvchi yangi yondashuv ishlab chiqildi. U tuzilishdagi yorilishi va uzilishi mavjudligi yoki yo‘qligidan qat’iy nazar, uning tenglamasi doimo o‘z kuchini saqlab turishi muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Jahonda peridinamika nazariyasi mexanikaning muhim sohasi bo‘lib, fan va texnikaning ko‘plab sohalarida qo‘llaniladi. Peridinamika nazariyasi eng ko‘p talab qilinadigan sohalardan biri bu metallurgiya va materialshunoslikdir. Bu sohalarda ishlab chiqarishni optimallashtirish va materiallar sifatini yaxshilash, shuningdek, turli tuzilmalar va mexanizmlarni loyihalash va sinovdan o‘tkazish uchun foydalaniladi. Peridinamika nazariyasi aerodinamika va aerokosmik texnika sohasida ham qo‘llanilishini topadi, bu yerda samolyotlar, raketalar va boshqa samolyotlarning loyihalarini optimallashtirish, shuningdek, zarur xususiyatlarga ega yangi materiallarni ishlab chiqish uchun foydalaniladi.Peridinamika nazariyasi geologiya va geofizika sohalarida ham qo‘llaniladi, bu yerda turli sharoitlarda tog‘ jinslari va yer qobig‘ining harakatini o‘rganish uchun foydalaniladi.

Mamlakatimizda, ayniqsa, oxirgi yillarda fundamental fanlar, xususan, matematika va fizika, ular bilan bir qatorda geologiya va geofizika masalalarida ilmiy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan dolzarb yo‘nalishlarga e’tibor kuchaydi. Jumladan, so‘nggi yillarda amaliy matematika, differensial va integro-differensial tenglamalar nazariyasi, matematik modellashtirish nazariyasi, operatorlar nazariyasi, dinamik tizimlar nazariyasi, funksional analiz nazariyasiga alohida e’tibor qaratilmoqda[1]. Bularning barchasi qaralayotgan masalalarning naqadar dolzarbligi va zarurligini ko‘rsatadi.

Mazkur dissertatsiya ishining mavzusi va tadqiqot ob’ekti O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son Farmonida, 2017-yil 17-fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2789 sonli va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708 sonli Qarorlarda, shuningdek, fundamental fanga

---

[1] O’zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi «O’zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to’g’risida»gi 292-son qarori.

oid boshqa me'yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarga mos keladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga bog'liqligi. Dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o'rganilganlik darajasi.

1970-yillarda E.Kroner va A.Ehringen kabi tadqiqotchilar hamda boshqa tadqiqotchilar bilan hammualliflikda tutash muhitlar mexanikasida nolokal nazariyani ishlab chiqishga urindilar. Bu davrda I. Kuninning ushbu mavzuga bag'ishlangan kitoblari ham nashr etilgan. Biroq, ushbu yondashuvlarning cheklovlari va nomukammalligi aniq bo'ldi, bu esa so'nggi yillarda nolokallikka qiziqishning yangilanishiga olib keldi.

Peridinamik nazariya - mikrodarajadagi materiallarning mexanik harakatlarini tasvirlash uchun ishlab chiqilgan nolokal nazariyaning bir turi. Ushbu nazariya 2000-yillarning boshida ishlab chiqilgan va materiallardagi deformatsiya va buzilishlarni modellashtirishga innovatsion yondashuvni ifodalaydi. Uning nazariyasida klassik lokal modellardagi kabi fazoviy differensial operatorlar emas, balki qattiq jismning zarralari orasidagi o'zaro ta'sirni tasvirlash uchun joy almashish maydonlarining farqlari ustidan integrallash qo'llaniladi. Bu peridinamik nazariya va tutash muhitlar mexanikaning an'anaviy lokal nazariyalari o'rtasidagi asosiy farqlardan biridir. Ushbu integro-differensial tenglamada fazoviy hosilalar mavjud emasligi sababli, chegara shartlari talab qilinmaydi, garchi bu integral yadroning singulyar xatti-harakatlarining o'ziga xos xususiyatlariga va masalaning funktsional-analitik formulasiga bog'liq. Biroq, ba'zi hollarda, yechimni nolga teng bo'lmagan hajmgacha cheklaydigan chegara bo'ylab chiziq ichidagi qiymatlarni ko'rsatib, "chegara" shartlarini kiritish mumkin.

Juftlik kuch funksiyasini chiziqlilashtirish jarayonidan foydalanib, chiziqli peridinamika modeli ishlab chiqildi va ko'plab mualliflar tomonidan o'rganildi.

Masalan, E.Emmrich va O.Veknerlar chiziqli holatda harakatning peridinamik tenglamasining to'g'riligi va strukturaviy xossalarini siljishlar boshlang'ich holatga nisbatan kichik bo'lganda o'rgandilar. Peridinamik gorizontning nolga kamayishi bilan tenglamaning cheklovchi harakati ham o'rganiladi. Ushbu tadqiqot lokal bo'lmagan peridinamik nazariyani chuqurroq tushunishga va uning kichik siljishlar sharoitida, shuningdek peridinamik gorizont nolga yaqinlashganda qo'llanilishiga yordam beradi. S.Silling ishida bu muammo o'rganildi va uni soddalashtirish uchun ikkinchi turdagi Fredgolm chiziqli integral tenglamasiga keltirish imkonini beruvchi transformatsiya qo'llanildi. Kun Chjou va Qiang Du tomonidan olib borilgan tadqiqotda nostandart bo'lmagan nolokal harakat sharoitlari bilan bog'liq muammolarni hal qilishga alohida e'tibor qaratilib, zarrachalar orasidagi bog'lanishlarga asoslangan chiziqli nolokal peridinamik model o'rganiladi. Ham statsionar, ham vaqtga bog'liq masalalar chekli sterjenda aniqlangan bir o'lchovli skalyar tenglama uchun, shuningdek, kvadrat sohada aniqlangan ikki o'lchovli tizim uchun ko'rib chiqiladi. Tadqiqot tegishli peridinamik operatorlar va tegishli funktsiyalar bo'shliqlarini tahlil qiladi. Bundan tashqari, maqola peridinamik modellarning chekli o‘lchovli yaqinlashuvlarini raqamli tahlil qilishda natijalarni qo‘llashni ko'rsatadi.

Sh.Alimov, Y.Chao va O.A. Ilxan peridinamik modelning to‘g‘riligi va muntazamligini maxsus yadro bilan tekshirishdi. Ushbu modelni tavsiflovchi differensial-integral tenglama Volterra operator-integral tenglamasiga aylantiriladi. Bundan so‘ng, Volterra integral tenglamasining tahlilidan foydalanib, peridinamika masalasini yechishning mavjudligi va qonuniyligi aniqlanadi. Regulyarlik bo'yicha olingan natijalar peridinamikaning umumiy modellarida qo‘llaniladigan oldingi ma‘lum natijalarni yaxshilaydi.

Ikki o‘lchovli fazoda yagona yadroli chiziqli peridinamik model Sh.A.Alimov va A.V.Yo‘ldoshevalar tomonidan ko‘rib chiqilgan. Mualliflar ikki o‘lchovli davriy tuzilmada chiziqli bo‘lmagan elastiklikning peridinamik modellari bilan bog‘liq bo‘lgan tenglamalarning berilgan funktsiyalari va yechilish sinflari uchun shartlarni topishga muvaffaq bo‘lishdi. Sobolev sinflaridagi funktsiyalar uchun yangi taxminlar isbotlangan.

Anizotrop materiallar va nochiziqli elastik xususiyatlarga ega bo‘lgan materiallarda deformatsiya jarayonlari bilan bog‘liq tadqiqotlar chiziqli bo‘lmagan peridinamik tenglamalarning paydo bo‘lishiga olib keladi. Adabiyotlarda bu tenglamalar sinfiga oid cheklangan miqdordagi natijalar mavjud. Asosan, tadqiqotchilar bu kontekstda faqat local hal qilish qobiliyatini isbotlay olishdi. Integro-differensial tenglamalar sohasidagi keyingi tadqiqotlar integro-differensial tenglamalarning umumiy nazariyasini ishlab chiqish nuqtai nazaridan ham, ularni turli peridinamik jarayonlarni matematik modellashtirishda qo‘llash nuqtai nazaridan ham muhim va dolzarbdir.

So‘nggi yillarda peridinamik modellar bilan bog‘liq tadqiqot ishlari tufayli tutash muhitlar mexanikasi sohasida bir qancha muhim ilmiy natijalarga erishildi. Muhim yutuqlardan biri bu sohadagi bir qator dolzarb muammolarni dunyo miqyosda hal qilishdir: peridinamika - yangi metodika bo'lib - bu yoriqlar mavjudligini hisobga olgan holda dengiz tuzilmalarida materiallarning yo‘q qilinishini taxmin qilish imkonini beradi (Stratklid universiteti, Glazgo); kompozit konstruktsiyaning qoldiq kuchini aniqlash uchun zarur bo‘lgan peridinamik buzilishning kritik parametrlarini olish uchun ikkita yondashuv taqdim etildi, xususan, tortishish va siqish yuklariga duchor bo‘lgan turli diametrli teshiklari bo‘lgan laminatning buzilish yuklari va yakuniy buzilish rejimlari prognoz qilingan (Arizona universiteti); dinamik yuk ostida shishadagi yopishtiruvchi sirt orqali yoriqlarning tarqalishi o‘rganilgan (Purdue universiteti, West Lafayette, Indiana); Oddiy va temir-beton konstruksiyalarni peridinamik modellashtirish o‘rganildi (Pekin); termal yuklanish tufayli o‘xshash bo‘lmagan materiallarning bog‘langan qatlamlarida deformatsiya maydonini bashorat qilish uchun peridinamik nazariyani o‘rganildi(Taypey, Tayvan); peridinamika nazariyasi yordamida kompozit laminatlarning strukturaviy barqarorligi va ishdan chiqishi o'rganib chiqildi (Portu, Portugaliya); issiqlik o'tkazuvchanligiga peridinamik yondashuvi o‘rganildi (Vankuver, Britaniya Kolumbiyasi, Kanada); kompozit laminatlarda shikastlanishning paydo bo‘lishi va o‘sishining peridinamik nazariyasi o‘rganildi (Dubrovnik, Xorvatiya); metall va kompozit konstruksiyalarda shikastlanishning paydo boʻlishi va oʻsishini bashorat qilish uchun peridinamik tahlil oʻrganib chiqildi (Florianopolis, Braziliya); peridinamika nazariyasi yordamida teshikli kompozit laminatlarning bosqichma-bosqich ishdan chiqishini bashorat qilish oʻrganilgan (Quddus, Isroil).

Hozirgi vaqtda jahon ilmiy hamjamiyati singulyar integro-differensial tenglamalar uchun boshlangʻich chegaraviy masalalarni yechish, shuningdek, chiziqli boʻlmagan peridinamik jarayonlar bilan bogʻliq boʻlgan tenglamalar uchun dastlabki maʼlumotlarga ega boʻlgan masalalarni yechish usullarini ishlab chiqish kabi turli asosiy yoʻnalishlarda faol tadqiqot olib bormoqda. Shuningdek, gipersingular yadroli integro-differensial tenglamalar yechimlarini turli tuzilmalar va boshqa koʻplab dolzarb mavzular boʻyicha tahlil qilishga alohida eʼtibor berilmoqda.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy taʼlim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalari bilan bogʻliqligi.

Dissertatsiya tadqiqoti OT-F4-88 “Ikkinchi va yuqori tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun toʻgʻridan-toʻgʻri va teskari masalalarni oʻrganish”, F-FA-2021-424 “Butun va kasr tartibli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish” tadqiqot rejasiga muvofiq amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi peridinamik modellar bilan bogʻliq boʻlgan zaif-singulyar, singulyar va gipersingular boʻlishi mumkin boʻlgan yadroli koʻp oʻlchovli integro-differensial tenglamalar, shuningdek chiziqli integro-differensial tenglamalar uchun boshlangʻich shartlar bilan berilgan masalalarini yechishdan iborat.

Tadqiqot vazifalari:

koʻp oʻlchovli davriy tuzilmada ($n \geq 3$ uchun) koʻrib chiqiladigan singulyar integro-differensial tenglama uchun ikkinchi tartibli singulyarlikka ega yadroning yangi turini ishlab chiqish va keyinchalik bu tenglamani Volterra operatori integral tenglamalariga keltirishdir.

koʻp oʻlchovli davriy tuzilmada peridinamik modellar bilan bogʻliq boʻlgan tenglamalarning berilgan funktsiyalari va yechilish sinflari uchun shartlarni topish;

gipersingular yadroli peridinamikaning integro-differensial tenglamasini tekshirish va yechimning mavjudligi va yagonaligini isbotlash;

chiziqli boʻlmagan peridinamik tenglamaning lokal yechilishi mezonlarini belgilash;

Sobolev sinfidagi funktsiyalarga oid yangi tasdiqlarni taqdim etish;

Volterra-Urisson tipidagi integro-differensial tenglamaning echilishi shartlarini oʻrganish, shuningdek, topilgan yechimlarning xususiyatlarini tahlil qilish.

Tadqiqot obʻyekti. Singular integrodifferensial tenglamalar, chiziqli boʻlmagan integrodifferensial tenglamalar va kvaziziqli integrodifferensial tenglamalardan iboratdir.

Tadqiqot predmeti. Tadqiqot yoʻnalishlariga peridinamika, singulyar integro-differensial tenglamalar nazariyasi, chiziqli boʻlmagan integro-differensial tenglamalar, shuningdek, matematik fizika nazariyasi, operator va integral tenglamalar kiradi.

Tadqiqot usullari. Muammolarni o‘rganishda Furye yoyish yordamida funktsiyalarni tahlil qilish usullari, masalan, Furye koeffitsientlarini hisoblash, spektral tahlil, shuningdek, matematik induksiya, integral tenglamalar, oddiy differensial tenglamalarni yechish, funktsional tahlil va differensial operatorlar nazariyani qo‘llash usullari qo'llanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

fazoning o‘lchami $n\geq 3$ da davriy tuzilmalar uchun qo‘llaniladigan integro-differensial tenglamalarning singulyar yadrolarining yangi kiritilgan logarifmik shkalasida tavsiflari topildi;

ko‘p o‘chovli sohalarda peridinamik tenglamalar uchun boshlang‘ich shartlarga ega bo‘lgan masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligini isbotlandi;

peridinamika masalalari bilan bog‘liq Kalderon-Zigmund tipidagi gipersingular integral operator uchun Gilbert fazolarining logarifmik shkalasi mavjudligi aniqlandi, bu operator tomonidan kvadratik yig‘indili davriy funksiyalar fazosiga o‘tkazish imkonini berdi. Bu o‘xshash muammolarni tahlil qilish va hal qilish uchun yangi istiqbollarni ochdi;

gipersingular integral operatori uchun Gilbert fazolarining logarifmik shkalasida Kalderon-Zigmund tengsizligini umumlashtiruvchi teorema isbotlandi;

Kalderon-Zigmund tipidagi gipersingular integral operatori uchun aniq pastki chegara olindi. Ushbu natija tadqiqotning muhimligini va uning peridinamika va matematik fizika sohasiga qo‘shgan hissasini ta’kidlaydi;

chiziqli bo‘lmagan peridinamik tenglamalarning lokal yechilishi uchun shartlar o‘rnatildi va lokal teorema isbotlandi.

Tadqiqotning amaliy natijalari. O‘tkazilgan tadqiqot fundamental bo‘lib, turli materiallarning chiziqli va chiziqli bo‘lmagan deformatsiya xususiyatlarini o‘rganish uchun qimmatli ma‘lumotlarni beradi. Bu natijalar peridinamik jarayonlarning matematik modellarini qurish uchun ham asos bo‘lib xizmat qilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi qat’iy matematik fikrlash va dalillar, shuningdek, funktsional tahlil usullari, matematik fizika va differentsial tenglamalar nazariyasidan foydalanish bilan tasdiqlanadi. Bundan tashqari olingan dissertatsiya natijalari impakt-faktorga ega va nufuzli ilmiy jurnallarda chon etilgan hamda Xalqaro va Respublika konfrensiyalarida ma’ruza qlinganligi bilan asoslanadi

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Ushbu ishning ilmiy ahamiyati singulyar yadroli integro-differensial tenglamalar nazariyasini ishlab chiqishda bo‘lib, bu sohada mavjud bilimlarni kengaytirishga yordam beradi.

Ushbu dissertatsiyadagi tadqiqotning amaliy ahamiyati uning turli materiallarning peridinamik xususiyatlarini tahlil qilish va turli peridinamik jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellarning raqamli yechimlarini yaratish uchun potentsial qo‘llanilishidadir.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi.

Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan integro-differensial tenglamalar bilan bog‘liq natijalar quyidagi tadqiqot ishlar amaliyotiga tatbiq etildi:

logarifmik Gilbert fazosida peridinamikaning singulyar davriy integro-differensial tenglamasi uchun boshlangʻich shartlar bilan bogʻliq masalalarni hal qilish uchun mavjudligi va yagonaligi teoremalari “Kamchatkaning tabiiy ofatlari - zilzilalar va vulqon otilishi” loyihasi doirasida qoʻllanilgan № AAAA-A19-119072290002-9 (“Vitus Bering nomidagi Kamchatka davlat universiteti” Federal davlat byudjeti taʻlim muassasasining 2023-yil 13-noyabrdagi 53-12-sonli sertifikati, Rossiya). Ilmiy natijani qoʻllash peridinamikaning singulyar integro-differensial tenglamasi asosida matematik modelni sonli yechishning samarali algoritmlarini ishlab chiqish imkonini berdi;

peridinamik modellar bilan bogʻliq integro-differensial tenglamalarni oʻrganish natijalari M.V.Lomonosov nomidagi Moskva davlat universiteti mexanika-matematika fakultetining Intellektual tizimlarning matematik nazariyasi kafedrasi xodimlari tomonidan 591-sonli “Yangi avlod qattiq holatda saqlash qurilmasi (SSD) boshqaruvchisini ishlab chiqish” biznes shartnomasi doirasida foydalanilgan. (M.V. Lomonosov nomidagi Moskva davlat universitetining mexanika-matematika fakulteti, 2023-yil 23-oktyabrdagi 386-23/101-03 sonli ma’lumotnomasi, Rossiya).

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi.

Dissertatsiya tadqiqoti natijalari M.V. Lomonosov nomidagi Moskva davlat universitetining Toshkent shahridagi filiali Amaliy matematika va informatika kafedrasining “Matematik fizikaning zamonaviy muammolari” ilmiy seminarida, Oʻzbekiston milliy universiteti Differensial tenglamalar va matematik fizika kafedrasining “Differentsial tenglamalar va matematik fizikaning zamonaviy muammolari” ilmiy seminarida va bir qancha ilmiy-amaliy konferensiyalarda, jumladan, 6 ta xalqaro va 1 ta respublika konferensiyalarida taqdim etilgan va muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi.

Ushbu dissertatsiyaning tadqiqot yoʻnalishi boʻyicha 12 ta ilmiy maqola chop etilgan. Jumladan, 5 ta maqola Oʻzbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasi tomonidan falsafa fanlari doktori (PhD) ilmiy darajasini olish uchun dissertatsiyalarda taqdim etilgan asosiy ilmiy natijalarni nashr etish uchun tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda, 3 tasi respublika jurnallarida, 2 tasi xorijiy jurnallarda, shu jumladan 2 ta maqola Scopus ma’lumotlar bazasida indekslangan jurnallarda nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi.

Dissertatsiya kirish qismi, 3 ta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar roʻyxatidan iborat. Dissertatsiya hajmi 102 sahifani tashkil etadi.

DISSERTATSINING ASOSIY MAZMUNI

Dissertatsiyaning birinchi bobi davriy tuzilishga ega boʻlgan uzluksiz peridinamik modellarga bagʻishlangan boʻlib, ular joy almashish maydonini birlashtirishni oʻz ichiga oladi**.**

Ushbu bobning **birinchi paragrafida** davriy holatda koʻp oʻlchovli sohada peridinamik tenglama uchun Koshi masalasini oʻrganishga bagʻishlangan. Ya’ni, barcha berilgan funksiyalar fazoviy oʻzgaruvchilarda davriy funksiyalar ekan deb hisoblaymiz.

Chiziqli peridinamik modelni quyidagi integro-differensial tenglama bilan tavsiflash mumkin:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\int_{\mathbb{T}^n} K(x,y)\left[u(x,t)-u(y,t)\right]dy = f(x,t),\ x\in\mathbb{T}^n, t>0. \quad (1)$$

Bunda $\mathbb{T}^n=\left[-\pi,\pi\right]^n$, boshlang‘ich shartlar

$$u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in\mathbb{T}^n. \quad (2)$$

Bu yerda $u:\mathbb{T}^n\times\left[0,T\right]\to\mathbb{R}^n$ noma’lum siljish funksiyasi, yadro $K-n\times n$-matritsa-funksiya, aniqlanish sohasi $\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n$, $\phi:\mathbb{T}^n\to\mathbb{R}^n$ va $\psi:\mathbb{T}^n\to\mathbb{R}^n$ boshlang‘ich shartlari, va $f:\mathbb{T}^n\times\left[0,T\right]\to\mathbb{R}^n$ tashqi kuch.

Ushbu paragrafda biz $n\geq 3$ deb faraz qilamiz.

Quyidagi yadroni ko‘ramiz:

$$K(x,y)=P(x-y),\ \ x\in\mathbb{T}^n,\ \ y\in\mathbb{T}^n. \quad (3)$$

Bu yerda $P(x)$ davriy funksiya bo‘lib va $x\in\mathbb{T}^n$ uchun ushbu ko‘rinishga ega:

$$P(x)=\frac{(x\otimes x)}{|x|^{n+2}}\chi(|x|),\ \ x\in\mathbb{T}^n. \quad (4)$$

$\chi\in C^\infty(\mathbb{R})$ funksiyasi ba’zi bir fiksirlangan ρ parameter uchun $0<\rho<\pi/2$, quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\chi(r)=\begin{cases}1 \ \ \text{для}\ \ r\leq\dfrac{\rho}{2}, \\ 0 \ \ \text{для}\ \ r\geq\rho\end{cases} \quad (5)$$

va $0\leq\chi(r)\leq 1$ agar $r\in\mathbb{R}$.

(1)-(2) Koshi masalaning yechimi $u(x,t)$ deb, har bir $t\geq 0$ uchun $L_2(\mathbb{T}^n)$ tegishli funksiya sifatida aniqlaymiz, fazoning normasi bo‘yicha $t\geq 0$ yopiq yarim tekislikda t bo‘yicha uzluksiz, $L_2(\mathbb{T}^n)$ normasi bo‘yicha $t>0$ ochiq yarim tekislikda t bo‘yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo‘lib (1) tenglama va (2) boshlang‘ich shartni qanotlantiradi.

Furye koeffitsientlarini aniqlaymiz:

$$v_k=(2\pi)^{-n}\int_{T^n} v(x)\,e^{-ikx}\,dx,\ k\in\mathbb{Z}^n.$$

Bunda

$$v(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_k e^{ikx},\ x\in\mathbb{T}^n.$$

Gilbert fazolarining quyidagi H_m logarifmik shkalalarini kiritamiz:

$$H_m=\left\{v \ \mid\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|v_k\right|^2 \ln^{2m}\sqrt{e^2+|k|^2}<\infty\right\},\ m=1,2,\ldots \quad (6)$$

Skalyar ko‘paytma

$$\left(u,v\right)_m=\left(2\pi\right)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\hat{u}_k,\hat{v}_k\right)\ln^{2m}\sqrt{e^2+\left|k\right|^2} \tag{7}$$

va quyidagi norma $\|v\|_m=\sqrt{\left(v,v\right)_m}$.

Eslatib o‘tamiz, $v\in L_2\left(\mathbb{T}^n\right)$ funksiyasi Sobolev $W_2^{\mu}\left(\mathbb{T}^n\right)$ fazosiga tegishli, agar uning normasi quyidagicha aniqlangan bo‘lsa:

$$\|v\|^2_{W_2^{\mu}}=\left(2\pi\right)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|v_k\right|^2\left(1+\left|k\right|^2\right)^{\mu}. \tag{8}$$

Quyidagi belgilash kiritamiz:

$$H_{\infty}=\bigcap_{m=1}^{\infty}H_m\ . \tag{9}$$

1-teorema. *Aytaylik* $\mu>0$ *va boshlang‘ich funktsiyalar* $\phi\left(x\right)$ *va* $\psi\left(x\right)$ $W_2^{\mu}\left(\mathbb{T}^n\right)$ *Sobolev fazolarga tegishli bo‘lib, va* $f\left(x,t\right)$ *tashqi kuch* $W_2^{\mu}\left(\mathbb{T}^n\right)$ *normada* t *bo‘yicha uzluksiz bog‘liq bo‘lsin.*

U holda (1)-(2) Koshi masalasining yechimi $0\le t\le T$ *da mavjud va yagona,* H_{∞} *fazoga tegishli. Bu yerda* T *faqat* μ *ga bog‘liq.*

Ikkinchi paragrafida biz (1) integro-differensial tenglamani ikkinchi turdagi Volterra tenglamasiga aylantiramiz. Quyidagi singulyar operatorni kiritamiz:

$$Bv\left(x\right)=\int_{T^n}P\left(x-y\right)\left[v\left(y\right)-v\left(x\right)\right]dy. \tag{10}$$

Shunda (1) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozib olishimiz mumkin:

$$\frac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial t^2}-Bu\left(x,t\right)=f\left(x,t\right),\ \ x\in\mathbb{T}^n. \tag{11}$$

(11) ni t bo‘yicha ikki marta integrallash bilan quyidagi Volterra integral tenglamasini hosil qilamiz

$$u\left(x,t\right)-\int_0^t\left(t-s\right)Bu\left(x,s\right)ds=F\left(x,t\right),\ \ x\in\mathbb{T}^n,t>0, \tag{12}$$

bunda

$$F\left(x,t\right)=\phi\left(x\right)+t\cdot\psi\left(x\right)+\int_0^t\left(t-s\right)f\left(x,s\right)ds,\qquad x\in\mathbb{T}^n,t>0. \tag{13}$$

Faraz qilamiz,

$$\nabla\otimes\nabla=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^{\ 2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^{\ 2}}\end{pmatrix} \tag{14}$$

va

$$I\Delta=\begin{pmatrix}\Delta & 0 & \dots & 0\\ 0 & \Delta & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \Delta\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Bu yerda Δ – bu Laplas operatori, I – esa birlik matritsa.

1-lemma. *$n\geq 3$ va $y\neq 0$ uchun quyidagi tenglik o'rinli*

$$(\nabla\otimes\nabla)\frac{1}{|y|^{n-2}}-\Delta\frac{\ln|y|}{|y|^{n-2}}=n(n-2)\frac{(y\otimes y)}{|y|^{n+2}}. \tag{16}$$

1-lemmaga asosan, B operatorni quyidagi shaklda ifodalash mumkin:

$$Bv(x)=\int_{\mathbb{T}^n}\frac{\chi(|y|)}{n(n-2)}\left[(\nabla\otimes\nabla)\frac{1}{|y|^{n-2}}-I\Delta\frac{\ln|y|}{|y|^{n-2}}\right]\left[v(x-y)-v(x)\right]dy.$$

Bundan, har bir y_j o'zgaruvchi uchun ikki marta bo'laklab integrallash orqali quyidagini olamiz:

$$Bv(x)=$$

$$=\frac{1}{n(n-2)}\int_{\mathbb{T}^n}\left[\frac{1}{|y|^{n-2}}(\nabla\otimes\nabla)-\frac{\ln|y|}{|y|^{n-2}}I\Delta\right]\cdot\chi(|y|)\left[v(x-y)-v(x)\right]dy. \tag{17}$$

So'ng, biz quyidagi uchta integro-differensial operatorni kiritamiz:

$$B_1v(x)=-\frac{1}{n(n-2)}\int_{\mathbb{T}^n}\chi(|y|)\frac{\ln|y|}{|y|^{n-2}}I\Delta v(x-y)dy, \tag{18}$$

so'ng,

$$B_2v(x)=\frac{1}{n(n-2)}\int_{\mathbb{T}^n}\chi(|y|)\frac{1}{|y|^{n-2}}(\nabla\otimes\nabla)v(x-y)dy, \tag{19}$$

va nihoyat,

$$B_3v(x)=\frac{1}{n(n-2)}\sum_{|\alpha|\leq 1}\int_{\mathbb{T}^n}R_\alpha(y)D^\alpha v(x-y)dy. \tag{20}$$

Λ o'zgarmasni quyidagi tenglik bilan aniqlaymiz:

$$\Lambda=\frac{1}{n(n-2)}\int_{\mathbb{T}^n}\left[\frac{1}{|y|^{n-2}}(\nabla\otimes\nabla)-\frac{\ln|y|}{|y|^{n-2}}I\Delta\right]\cdot\chi(|y|)dy, \tag{21}$$

bunda $R_\alpha(x)$ $|x|<\dfrac{\rho}{2}$ va $|x|>\rho$ da nolga teng cheksiz differentsiallanuvchi matritsa funksiyasidir.

Keyinchalik (17) quyidagi shaklda qayta yozishimiz mumkin

$$Bv(x)=B_1v(x)+B_2v(x)+B_3v(x)-\Lambda v(x). \tag{22}$$

Uchinchi paragrafida biz B operatorning va, xususan, (18)-(20) formulalar bilan aniqlangan integro-differensial operatorlar xususiyatlarini batafsilroq o'rganamiz. Ushbu bo'limda klassik Furye tahlili usullaridan foydalanamiz.

2-lemma. *L yadroni L_k Furye koeffitsientlari va ixtiyoriy natural $\mathbb{N}$ uchun quyidagi baho o'rinli:*

$$L_k = \frac{1}{|k|^2}\left[\alpha_n \ln|k| + \beta_n\right] + O\left(|k|^{-N}\right), \qquad |k| \geq 1. \tag{23}$$

α_n va β_n o'zgarmaslar faqat n raqamiga bog'liq.

1-natija. *Ixtiyoriy $v \in C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$ funksiyasi va ixtiyoriy $N \in \mathbb{N}$ uchun quyidagi baho o'rinli:*

$$\left(B_1 v\right)_k = -\frac{1}{n(n-2)}\left(2\pi\right)^n v_k\left[\alpha_n \ln|k| + \beta_n + O\left(|k|^{-N}\right)\right], |k| \geq 1. \tag{24}$$

3-lemma. *Ixtiyoriy $v \in C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$ vektor-funksiyasi va ixtiyoriy $N \in \mathbb{N}$ uchun quyidagi baho o'rinli:*

$$B_2 v_k = -\frac{1}{n(n-2)}\left(2\pi\right)^n \alpha_n \frac{\left(k \otimes k\right)}{|k|^2} \cdot v_k\left[1 + O\left(|k|^{-N}\right)\right], |k| \geq 1. \tag{25}$$

4-lemma. *$R_\alpha\left(x\right)$ matritsa funktsiyaning $R_{\alpha k}$ Furye koeffitsientlari va ixtiyoriy natural N uchun quyidagi baho o'rinli:*

$$R_{\alpha k} = O\left(|k|^{-N}\right), \; |k| \geq 1.$$

Endi B operatorini Gilbert fazosining logarifmik shkalasida (6) baholashimiz mumkin.

5-lemma. *Ixtiyoriy $v \in H_1$ funksiyasi uchun Bv funksiyaning Furye koeffitsientlari quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:*

$$Bv_k = \Phi\left(k\right) \cdot v_k, \tag{26}$$

bunda $\Phi(k)$ funksiyasi barcha $N \in \mathbb{N}$ uchun quyidagi baholashni qanoatlantiradi

$$\begin{gathered}\Phi\left(k\right) = -\left(2\pi\right)^n\left(\alpha_n \ln|k| + \beta_n + \Lambda\right)I + \\ +\left(2\pi\right)^n \alpha_n \frac{\left(k \otimes k\right)}{|k|^2} + O\left(|k|^{-N}\right), |k| \geq 1.\end{gathered} \tag{27}$$

2-natija. *Shunday o'zgarmas $M > 0$ son mavjudki, (26) va (27)* tenglikdagi *$\Phi(k)$ funksiyasi uchun quyidagi o'rinli:*

$$\left|\Phi\left(k\right)\right| \leq M \cdot \ln\sqrt{e^2 + |k|^2}, \; k \in \mathbb{Z}^n. \tag{28}$$

(10) tenglik bilan aniqlangan B operatorni o'rganishga o'tamiz.

6-lemma. *Ixtiyoriy $v \in H_\infty$ funksiyasi uchun va ixtiyoriy m nomeri uchun quyidagi baholash bajariladi:*

$$\| Bv \|_m \leq M \cdot | v |_{m+1}\,. \tag{29}$$

To'rtinchi paragrafida biz Volterra integral tenglamasining yechilishini o'rganamiz. $H_0 = L_2\left(\mathbb{T}^n\right)$. Gilbert fazosida (12) asosiy tenglamani ko'rib chiqamiz.

Quyidagi operatorni kiritamiz:

$$Av(t) = \int_0^t (t-s)Bv(s)ds. \tag{30}$$

Bu holatda (12) tenglama quyidagi shaklni oladi:

$$u(t) = Au(t) + F(t). \tag{31}$$

Odatiy tarzda ketma-ket yaqinlashishni aniqlaylik

$$v_{k+1}(t) = Av_k(t), \qquad v_0(t) = F(t).$$

Bizning maqsadimiz Neyman qatorining yaqinlashishini o‘rganishdir

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k F(t), \tag{32}$$

va uning yig‘indisi (31) tenglamaning yechimi ekanligini isbotlash.

H — gilbert fazosi bo‘lsin va

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

$C\left[\mathbb{R}^+ \to H\right]$ orqali $f : \mathbb{R}^+ \to H$ funksiyalar sinfini belgilaymiz, $t \in \mathbb{R}^+$ o‘zgaruvchi bo‘ylab uzluksiz va cheklangan normasi quyidagicha bo‘lsin:

$$\| f \|_{H,\, t} = \sup_{0 \leq s \leq t} \| f(s) \|_H .$$

$H = H_m$ bo‘lgan holatda quyidagicha belgilashni ishlatamiz:

$$\| f \|_{m,\, t} = \sup_{0 \leq s \leq t} \| f(s) \|_m . \tag{33}$$

7-lemma. *Barcha* $m \in \mathbb{N}$ *uchun* $F \in C\left[\mathbb{R}^+ \to H_m\right]$ *bo‘lsin. U holda* $k \in \mathbb{N}$ *va* $m \in \mathbb{N}$ *nomerlar uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:*

$$\left\| A^k F \right\|_{m,t} \leq M^k \left\| F \right\|_{k+m,t} \frac{t^{2k}}{2(2k-1)!!}. \tag{34}$$

Birinchi bo‘limda kiritilgan H_m Gilbert fazolari va $W_2^{\mu}\left(\mathbb{T}^n\right)$ klassik Sobolev fazolari o‘rtasidagi munosabatga oid quyidagi taklifning to‘g‘riligini aniqlaylik.

8-lemma. Ixtiyoriy $m \in \mathbb{N}$ *nomer uchun va ixtiyoriy* $\mu > 0$ *uchun quyidagi o‘rinli:*

$$W_2^{\mu}\left(\mathbb{T}^n\right) \subset H_m, \tag{35}$$

va ixtiyoriy $F \in W_2^{\mu}\left(\mathbb{T}^n\right)$ *funksiya uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:*

$$\| F \|_m \leq e^{\mu - 1} \frac{m!}{\mu^m} \| F \|_{W_2^{\mu}}, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

9-lemma. $\mu > 0$ *va* $F \in C\left[\mathbb{R}^+ \to W_2^{\mu}\left(\mathbb{T}^n\right)\right]$ *bo‘lsin. U holda* $k \in \mathbb{N}$ *va* $m \in \mathbb{N}$ *nomerlar uchun quyidagi baholash o‘rinli:*

$$\| A^k F \|_{m,t} \leq C_m(\mu) \cdot k^{m+1} \left(\frac{Mt^2}{2\mu} \right)^k \| F \|_{W_2^{\mu},t}, \tag{37}$$

bunda

$$C_m(\mu) = e^{\mu - 1} \frac{(m+1)!}{\mu^m}. \tag{38}$$

10-lemma. *$\mu>0$ va $0<T<\sqrt{2\mu/M}$ bo‘lsin, bunda M o‘zgarmas (28) baholashdan olingan. U holda ixtiyoriy $F\in C\left[\mathbb{R}^{+}\to W_2^{\mu}\left(\mathbb{T}^n\right)\right]$ funksiya va ixtiyoriy $m\in\mathbb{N}$ nomer uchun (32) Neyman qatori H_m Gilbert fazo normasi bo‘yicha $0\le t\le T$ kesimda tekis yaqinlashadi va uning summasi quyidagi baholashni qanoatlantiradi:*

$$\|u(t)\|_m\le C_m(\mu)\|F\|_{W_2^{\mu},t}\cdot(m+1)!\left[1-\frac{MT^2}{2\mu}\right]^{-m-2}, \qquad (39)$$

bunda $C_m(\mu)$ (38) tenglik bilan aniqlanadi.

Beshinchi paragrafida singulyar yadroli integro-differensial tenglama uchun Koshi masalasini yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi 1-teoremani isbotlaymiz.

“Peridinamika bilan bog‘liq gipersingular operatorlar haqida” deb nomlangan **ikkinchi bobi** peridinamika masalalari bilan bog‘liq Kalderon-Zigmund tipidagi gipersingular integral operatorni o‘rganishga bag‘ishlangan.

Birinchi paragrafida kirish qismi va masalaning berilishi tasvirlangan.

Chiziqli versiyada peridinamikaning asosiy tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-A_s u(x,t)=f(x,t),\quad x\in D\subset\mathbb{R}^n,\ t>0,$$

bu yerda A_s integral operatori quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$A_s u(x)=\int_D K_s(x,y)\left[u(y)-u(x)\right]dy.$$

D - chegaralangan n- ulchovli ($n\ge 3$) chegarasi bo‘lakli silliq soha, $u:D\times[0,T]\to\mathbb{R}^n$- noma‘lum funksiya, K_s bu yerda $n\times n$-matrisa-funksiya, $D\times D$ sohada aniqlangan integral operatorning berilgan yadrosidir, $f:D\times[0,T]\to\mathbb{R}^n$ funktsiyasi tashqi kuchni ifodalaydi.

Bu bobda biz svyortka integral operator A_s davriy funksiyalar fazosida ko‘rib chiqamiz, ya‘ni

$$A_s u(x)=\int_{\mathbb{T}^n} K_s(x-y)\left[u(y)-u(x)\right]dy,\ x\in\mathbb{T}^n=\left[-\pi,\pi\right]^n. \qquad (40)$$

(40) tipidagi operatorlarining muhim sinfi quyidagi singulyar yadrosiga ega operatorlardan iborat shakilni kurib chiqamiz:

$$K_s(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n},\ x\in\mathbb{T}^n.$$

Faraz qilamizki, $\Omega(x)$ matritsa funksiyasi $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ sohasida silliq va har qanday $\lambda>0$ uchun quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$\Omega(\lambda x)=\Omega(x),\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

Quyidagi singulyar integral operatorni ko‘rib chiqaylik:

$$Sf(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)\,dy. \tag{41}$$

Ω yadroning birlik sferasidagi o‘rtacha qiymati bo‘lgan Ω^* matritsasini aniqlaymiz:

$$\Omega^* = \frac{1}{\omega_n}\int_{\theta} \Omega(\theta)\,d\theta. \tag{42}$$

Ushbu paragrafida $\Omega^* \neq 0$ holat ko‘rib chiqiladi. Bunda (41) operator gipersingular holga keladi.

$0 < \rho < \pi$ oraliqdan ρ ni aniqlaymiz va $C^\infty(\mathbb{R})$ fazoga mansub manfiy bo‘lmagan funksiyani $\chi(r)$ belgisi bilan belgilaymiz, $r \leq \rho/2$ uchun birga, $r \geq \rho.$ uchun esa nolga teng.

Ushbu ishning asosiy maqsadi integral operatorni o‘rganishdir

$$Af(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \cdot \chi(|y|)\left[f(x-y) - f(x)\right]dy. \tag{43}$$

Ko‘rinib turibdiki, $\Omega^* = 0$ holatda operator (43) Kalderon-Zigmund tipidagi singulyar operator bilan mos keladi.

Asosiy natijani shakllantirish uchun biz logarifmik silliqlikka ega davriy funksiyalarning funksiya fazosini kiritamiz.

Birinchi tartibdagi o‘ziga qo‘shma psevdodifferensial operatorni ko‘rib chiqaylik

$$\Lambda f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k e^{ikx}\sqrt{1+|k|^2},$$

bunda

$$f_k = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Boshqacha qilib aytganda, $\Lambda = \sqrt{1-\Delta}$, bunda Δ - Laplas operatorining davriy chegara shartlarini qondiruvchi $L_2(\mathbb{T}^n)$ da o‘ziga qo‘shma kengaytmasi. Δ operatorining aniqlanish sohasi $W_2^2(\mathbb{T}^n)$, Sobolev fazosi ekanligini qayd etamiz, demak $D(\Lambda) = W_2^1(\mathbb{T}^n)$. Bu holatda $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ funksiya $W_2^1(\mathbb{T}^n)$ vektor-funksiya fazosiga tegishli, agar har bir $f_j(x)$ komponenta oddiy $W_2^1(\mathbb{T}^n)$ fazosiga tegishli bo‘lsa.

Har bir natural m uchun $L_2(\mathbb{T}^n)$ da musbat o‘ziga qo‘shma $\log^m(1+\Lambda)$ operatorni ko‘rib chiqamiz. Ya’ni,

$$\log^m(1+\Lambda) f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k e^{ikx}\log^m\left(1+\sqrt{1+|k|^2}\right).$$

Ushbu operatorning aniqlanish sohasini quyidagicha belgilaymiz $H_{log}^m(\mathbb{T}^n)$:

$$H_{log}^m(\mathbb{T}^n) = D\left(\log^m(1+\Lambda)\right). \tag{44}$$

Bu degani,

$$H_{log}^{m}=\left\{\ f\ \mid\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|f_k\right|^2\log^{2m}\left(1+\sqrt{1+|k|^2}\right)<\infty\right\},\qquad m=1,2,\dots$$

Har bir H_{log}^{m} fazo skalyar ko‘paytmali Hilbert fazosidir

$$(f,g)_m=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}f_k\overline{g_k}\log^{2m}\left(1+\sqrt{1+|k|^2}\right).\tag{45}$$

Ushbu skalyar ko‘paytma bilan bog'liq $f\in H_{log}^{m}\left(\mathbb{T}^n\right)$ element normasini quyidagicha belgilaymiz $\|f\|_m=\sqrt{(f,f)_m}$, ya’ni

$$\|f\|_m^2=\|\log^m(1+\Lambda)f\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}^2=(2\pi)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|f_k|^2\log^{2m}\left(1+\sqrt{1+|k|^2}\right).$$

$H_{log}^{0}\left(\mathbb{T}^n\right)=L_2\left(\mathbb{T}^n\right)$. Ravshanki, ixtiyoriy natural m uchun quyidagi tenglik bajariladi:

$$\log(1+\Lambda)H_{log}^{m}\left(\mathbb{T}^n\right)=H_{log}^{m-1}\left(\mathbb{T}^n\right),\qquad m\in\mathbb{N}.\tag{46}$$

Ω^* matritsa normasi deganda biz quyidagi miqdorni tushunamiz:

$$\left\|\Omega^*\right\|=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|\Omega_{ij}^*\right|^2\right)^{1/2}.$$

Quyidagi tasdiqlar o‘rinlidir.

2-teorema. *Ixtiyoriy* $m\in\mathbb{N}$ *uchun* $C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$ *fazo* $H_{log}^{m}\left(\mathbb{T}^n\right)$ *da zichdir.*

3-teorema. *Ixtiyoriy natural* m *uchun (43) tenglik bilan aniqlangan* A *operator* $H_{log}^{m}\left(\mathbb{T}^n\right)$ *ni* $H_{log}^{m-1}\left(\mathbb{T}^n\right)$ *ga akslantiradi va quyidagi baholashni qanoatlantiradi*

$$\|Af\|_{m-1}\le C\left\|\Omega^*\right\|\cdot\|f\|_m+C\|f\|_{m-1}.\tag{47}$$

Eng muhimi $m=1$ holatda bu tasdiqni quyidagicha shakllantirish mumkin.

3-natija. A *operator* $D(\log(1+\Lambda))$ *ni* $L_2\left(\mathbb{T}^n\right)$ *ga uzluksiz akslantiradi va bunda quyidagi tengsizlik bajariladi:*

$$\|Af\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}\le C\left\|\Omega^*\right\|\cdot\|f\|_1+C\|f\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}.$$

Keyingi bo‘limda biz tadqiqotning lemmalarini o‘rganamiz.

Quyidagi yordamchi gipersingular operatorni ko‘rib chiqaylik:

$$A^*f(x)=\int_{\mathbb{T}^n}\frac{\chi(|y|)}{|y|^n}\Omega^*\left[f(x-y)-f(x)\right]dy.\tag{48}$$

Quyidagi tasdiqlar o‘rinlidir.

11-lemma. *Aytaylik* 2π- *davriy funktsiya* $L(x)$ *uchun quyidagi shaklda berilgan bo‘lsin:*

$$L(x)=-\frac{1}{n-2}\cdot\frac{\ln|x|}{|x|^{n-2}}\chi(|x|),\qquad x\in\mathbb{T}^n,$$

u holda ushbu funktsiya uchun quyidagi tenglik to‘g‘ri bo'ladi:

$$\Delta L(x) = \frac{\chi(|x|)}{|x|^n} + Q(x),$$

bunda Q *funksiya* $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *ga tegishli va uning tashuvchisi* $\rho/2 \le |x| \le \rho$ *qatlamda joylashgan.*

12-lemma. *Ixtiyoriy* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *funksiya uchun quyidagi tenglik bajariladi:*

$$A^* f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} L(y)\Omega^* \Delta f(x-y)dy + Bf(x) + Mf(x), \qquad (49)$$

bu yerda M *- doimiy matritsa,* B *- yadrosi* $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *tegishli bo'lgan svyortka operatori.*

13-lemma. *Har qanday natural* N *soni uchun* $L(x)$ *funksiyasining* L_k *Furye koeffitsientlari quyidagi baholashni qondiradi:*

$$L_k = -\frac{1}{n-2} \cdot \left[\frac{1}{|k|^2}\left[\alpha_n \ln|k| + \beta_n\right] + O\left(|k|^{-N}\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}^n, \ |k| \ge 1.$$

α_n *va* β_n *konstantalari faqat sohaning* n *o'lchamiga bog'liq.*

14-lemma. *Har qanday* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *funksiyasi uchun* $A^* f(x)$ *funktsiyasining Furye koeffitsientlari quyidagi baholashni qondiradi:*

$$\left|\left(A^* f\right)_k\right| \le C\left\|\Omega^*\right\| \cdot |f_k| \cdot \ln\left(1 + \sqrt{1+|k|^2}\right) + C|f_k|. \qquad (50)$$

Quyidagi yordamchi funktsiyani kiritamiz:

$$\Omega_1(x) = \Omega(x) - \Omega^*,$$

bu yerda doimiy Ω^* matritsa (42) tenglik bilan aniqlanadi. Ushbu ta'rifga ko'ra, quyidagi tenglik bajariladi:

$$\int_\theta \Omega_1(\theta)d\theta = 0.$$

15-lemma. *Har qanday* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *funksiyasi uchun quyidagi baholash o'rinli:*

$$\| Af \|_{L_2(\mathbb{T}^n)} \le C \| \Omega^* \| \cdot \| f \|_1 + C \| f \|_{L_2(\mathbb{T}^n)}.$$

16-lemma. *Har qanday* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *funksiya uchun asosiy baho (47) bajariladi.*

"Peridinamika muammolari bilan bog'liq Kalderon-Zigmund tipidagi gipersingular integral operatori uchun pastdan baho to'g'risida" deb nomlangan **ikkinchi paragrafda** pastdan baho olindi.

Svyortka shaklidagi A_s integral operatorni davriy funksiyalar fazosida ko'rib chiqamiz, ya'ni

$$A_s u(x) = \int_{\mathbb{T}^n} K_s(x-y)\left[u(y) - u(x)\right]dy, \ x \in \mathbb{T}^n = \left[-\pi, \pi\right]^n. \qquad (51)$$

(51) shaklidagi operatorlarining muhim sinfi, quyidagi shakldagi singulyar yadrosiga ega bo'lgan operatorlar iboratdir:

$$K_s(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n},\ \ x\in\mathbb{T}^n,$$

bu yerda

$$\Omega(x)=\frac{x\otimes x}{(x,x)}, \tag{52}$$

va

$$x\otimes x=\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}=\left(x_{jk}\right)_{\substack{j=\overline{1,n}\\ k=\overline{1,n}}}. \tag{53}$$

3-teoremadan quyidagi tasdiq kelib chiqadi:

4-natija. *Har qanday natural* m *uchun (43) tenglik bilan aniqlangan* A *operatori* $H_{log}^m\left(\mathbb{T}^n\right)$ *fazodan* $H_{log}^{m-1}\left(\mathbb{T}^n\right)$ *fazosiga ta'sir qiladi va quyidagi bahoni qanoatlantiradi:*

$$\| Af \|_{m-1}\le C\| f \|_m,\quad f\in H_{log}^m\left(\mathbb{T}^n\right). \tag{54}$$

Ushbu bo‘limda qarama-qarshi bahoning to‘g‘riligi isbotlanadi va shu bilan bahoning to‘g‘riligini tasdiqlaydi (2.2.4).

4-teorema. *Har qanday natural* m *va har qanday* $f\in H_{log}^m\left(T^n\right)$ *funksiya uchun quyidagi baho bajariladi:*

$$\| f \|_m\le C\| Af \|_{m-1}+C\| f \|_{m-1}. \tag{55}$$

1-izoh. $f(x)\equiv 1$ *funksiyasi misoli shuni ko‘rsatadiki, (55) bahoning o‘ng tomonidagi ikkinchi hadni chiqarib bo‘lmaydi.*

4-teoremaning isboti quyidagi lemmalarga asoslanadi.

17-lemma. (52) tenglik bilan aniqlangan $\Omega(x)$ *yadrosining (42) tenglik bilan aniqlangan o‘rtacha qiymati quyidagi shaklga ega:*

$$\Omega^*=\frac{1}{n}I, \tag{56}$$

bu yerda I *- birlik matritsa.*

Quyidagi yordamchi gipersingular operatorni kiritamiz:

$$Af(x)=\int\limits_{\mathbb{T}^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}\chi(|y|)\left[f(x-y)-f(x)\right]dy. \tag{57}$$

18-lemma. *Har qanday* $f\in C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$ *funksiyasi uchun* $A^*f(x)$ *funktsiyasining Furye koeffitsientlari quyidagi baholashni qondiradi:*

$$|f_k|\log\left(1+\sqrt{1+|k|^2}\right)\le C\left|\left(A^*f\right)_k\right|+C|f_k|,\ k\in\mathbb{Z}^n. \tag{58}$$

19-lemma. *Har qanday* $f\in C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$ *funksiyasi uchun quyidagi bajariladi:*

$$\| f \|_1\le C\| Af \|_0+C\| f \|_0. \tag{59}$$

20-lemma. *Har qanday* $f \in C^{\infty}\left(\mathbb{T}^n\right)$ *funksiyasi uchun (55) asosiy baholash bajariladi.*

Dissertatsiyaning "Peridinamikaning kvazichiziqli davriy masalasini yechilishi qobiliyati to'g'risida" deb nomlangan **uchinchi bobi** peridinamikaning kvazichiziqli integro-differensial tenglamasini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, unda chiziqli bo'lmaganlik Urison integral operatori yordamida modellashtiriladi.

Biz siljish maydoni farqining integrallashni o'z ichiga olgan davriy tuzilmaning peridinamik kvazichiziqli modelini ko'rib chiqamiz. Kvazichiziqli peridinamik modelni quyidagi integro-differensial tenglama bilan tavsiflash mumkin:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\mathbb{T}^n} K(x,y)\left[u(x,t) - u(y,t)\right]dy + G[u](x,t) = f(x,t). \quad (60)$$

Har qanday $x \in \mathbb{T}^n, t > 0$ uchun boshlang'ich shartlar quyidagicha

$$u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{T}^n,\ n \geq 1. \quad (61)$$

Bu yerda $\mathbb{T}^n = [-\pi,\pi]^n$, $u : \mathbb{T}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$— noma'lum vektor-funksiya, yadro $K - n \times n$ matrisa-funksiya, bunda aniqlanish sohasi $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$, $\phi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ va $\psi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$— boshlang'ich berilgan funksiyalari, $f : \mathbb{T}^n \times \overline{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}^n$ tashqi kuch. Bu yerda $\overline{\mathbb{R}_+}$ - manfiy bo'lmagan sonlar.

Chiziqli bo'lmagan $G[u]$ quyidagi ko'rinishga ega:

$$G[u](x,t) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} g\left(x, y, u(y,t)\right)dy, \quad (62)$$

(Urison chiziqli bo'lmagan operatori**).**

Faraz qilaylik, $g(x, y, u)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$g \in C\left(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n\right) \quad va \quad \frac{dg}{du_j} \in C\left(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n\right), \quad (63)$$

barcha $j = 1, 2, ..., n$ uchun.

Biz quyidagi yadroni ko'rib chiqamiz:

$$K(x,y) = P(x-y),\ x \in \mathbb{T}^n, y \in \mathbb{T}^n,$$

bunda $P(x)$ funksiya davriy va quyidagi ko'rinishga ega:

$$P(x) = \frac{(x \otimes x)}{\sigma(x)} \chi(x) + \beta(x),\ x \in \mathbb{T}^n. \quad (64)$$

Bu erda har qanday $x \in \mathbb{R}^n$ uchun:

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right|^2.$$

σ va β funksiyalar $\in C\left(\mathbb{T}^n\right)$ dan olingan va σ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\sigma(x) \geq 0,\quad x \in \mathbb{T}^n,\quad \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{|x|^2}{\sigma(x)}dx < +\infty. \quad (65)$$

Har qanday $T>0$ uchun $C^{0,2}\left(\mathbb{T}^n\times[0,T]\right)$ orqali Banax funksiyalari fazosini shunday $u:\mathbb{T}^n\times[0,T]\to\mathbb{R}^n$ belgilaymizki, bunda u va uning u_t va u_{tt} hosilalari $C\left(\mathbb{T}^n\times[0,T]\right)$ ga tegishli.

Bu yerda $C\left(\mathbb{T}^n\times[0,T]\right)$ shunday $u:\mathbb{T}^n\times[0,T]\to\mathbb{R}^n$ Banax funksiyalari fazosiki, ular x o‘zgaruvchi bo‘yicha davriy va $\mathbb{T}^n\times[0,T]$ to‘plamda uzluksiz.

(60)-(61) Koshi masalasining $0\le t\le T$ oraliqdagi $u(x,t)$ yechimini $u\in C^{0,2}\left(\mathbb{T}^n\times[0,T]\right)$, funksiya sifatida aniqlaymiz. Bunda ushbu funksiya (60) tenglamalar va (61) shartlarni qanoatlantiradi.

5-teorema. *Boshlang‘ich* $\phi(x)$ *va* $\psi(x)$ *funksiyalar* $C\left(\mathbb{T}^n\right)$ *fazoga,* $f(x,t)$ *tashqi kuch esa* $C\left(\mathbb{T}^n\times\overline{\mathbb{R}_+}\right)$ *ga tegishli bo‘lsin.*

U holda shunday $T>0$ *mavjudki, (60)-(61) Koshi masalasining* $[0,T]$ *oralig'ida yechimi mavjud va yagonadir.*

Ikkinchi paragrafida biz (60)-(61) masalani ikkinchi turdagi Volterra-Urison tipidagi integral tenglamaga aylantirishni tasvirlaymiz.

Quyidagi operatorni kiritamiz:

$$B[u](x)=\int_{\mathbb{T}^n}K(x,y)\left[u(y,t)-u(x,t)\right]dy-G[u](x,t). \tag{66}$$

Keyin (60) ni quyidagicha qayta yozishimiz mumkin:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-B[u](x,t)=f(x,t),\ x\in\mathbb{T}^n. \tag{67}$$

(67) ni t bo‘yicha ikki marta bo‘laklab integrallash va dastlabki (61) berilganlarni hisobga olgan holda biz Volterra-Urison tipidagi integral tenglamani olamiz

$$u(x,t)-\int_0^t(t-s)B[u](x,s)ds=F(x,t),\quad x\in\mathbb{T}^n,\ t>0, \tag{68}$$

bunda

$$F(x,t)=\phi(x)+t\cdot\psi(x)+\int_0^t(t-s)f(x,s)ds,\ x\in\mathbb{T}^n,\ t>0. \tag{69}$$

Uchinchi paragrafida chiziqli bo‘lmagan operator siquvchi akslantirish ekanligini ko‘rsatamiz va 5-teoremani isbotlaymiz.

Quyidagi tenglamani ko‘rib chiqamiz:

$$A[u](x,t)=\int_0^t(t-s)B[u](x,s)ds+F(x,t),\ x\in\mathbb{T}^n,\ t>0. \tag{70}$$

U holda (68) tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$u(x,t)=A[u](x,t),\ x\in\mathbb{T}^n, t>0. \tag{71}$$

Har qanday $R>0$ va $T>0$ uchun $M_R(T)$ orqali to‘liq metrik fazoni belgilaymiz ($C\left(\mathbb{T}^n\times[0,T]\right)$ fazolar topologiyasida):

$$M_R(T)=$$
$$=\{u\in C\left(\mathbb{T}^n\times[0,T]\right):\left|u(x,t)-\phi(x)\right|\le R,\quad (x,t)\in\mathbb{T}^n\times[0,T]\}. \qquad (72)$$

21-lemma. *Har qanday* $R>0$ *uchun shuday* $T>0$ *mavjudki, quyidagi bajariladi:*

$$AM_R(T)\subset M_R(T).$$

22-lemma. *Har qanday* $R>0$ *uchun shuday* $T>0$ *mavjudki, bunda* A akslantirish $M_R(T)$ *ni* $M_R(T)$ *ga siquvchi akslantirishidir.*

To‘rtinchi paragrafida lokal mavjudlik haqidagi 3.1.1 global mavjudlikni kafolatlamasligini ko‘rsatish uchun qarshi misol keltirilgan. Shuni ta‘kidlash kerakki, yechim mavjud bo‘lgan interval boshlang‘ich berilganlarga bog‘liq.

Quyidagi tenglamani ko‘rib chiqamiz:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\int_{\mathbb{T}^n}K(x,y)\left[u(x,t)-u(y,t)\right]dy+G[u](x,t)=0. \qquad (73)$$

Bunda boshlang‘ich berilganlar

$$u(x,0)=\frac{1}{\mu^2},\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{2}{\mu^3}, \qquad (74)$$

bunda $\mu>0.$

U holda,

$$g(x,y,u)=-\frac{6}{(2\pi)^n}\cdot u^2.$$

Yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$u(x,t)=\frac{1}{(\mu-t)^2},\ 0\le t<\mu. \qquad (75)$$

Haqiqatdan ham, ushbu $u(x,t)$ funksiya uchun

$$\int_{\mathbb{T}^n}K(x,y)\left[u(x,t)-u(y,t)\right]dy+G[u](x,t)=$$
$$=\int_{\mathbb{T}^n}g(x,y,u)dy=-\frac{6}{(2\pi)^n}\cdot u^2(t)\int_{T^n}dy=-6\cdot u^2(t). \qquad (76)$$

(75) ni differentsiallab, quyidagini olamiz

$$u'(t)=\frac{2}{(\mu-t)^3},\quad u'(0)=\frac{2}{\mu^3}.$$

So‘ng,

$$u''(t)=\frac{6}{(\mu-t)^4}=6\cdot u^2(t). \qquad (77)$$

(76) va (77) dan (75) funksiya Koshi masalasining (73)-(74) yechimi ekanligi kelib chiqadi.

5-teoremaga ko‘ra, bu (73)-(74) Koshi masalasining yagona yechimidir. E’tibor bering, bu holda yechim faqat $t<\mu$ uchun mavjud.

XULOSA

Dissertatsiyada taqdim etilgan tadqiqot davomida quyidagi natijalarga erishildi:

Volterra integro-differensial tenglamasining yechilishi isbotlandi;

singulyar yadroli integro-differensial tenglama uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlandi;

uch va undan ortiq fazoviy o‘zgaruvchilardan foydalanilganda Koshi muammosining yechimi Neyman qatori ko‘rinishida topildi;

peridinamika masalalari bilan bog‘langan Kalderon-Zigmund tipidagi gipersingular integral operator uchun Gilbert fazosi topiladi, bu operator tomonidan kvadratik yig‘indili davriy funksiyalar fazosiga akslantiradi.

peridinamika muammolari bilan bog‘liq Kalderon-Zigmund tipidagi gipersingular integral operator uchun pastdan baho olindi. Bu tenglamaning uzluksiz davriy yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan;

yadro singulyarligi kuchsiz bo‘lgan kvaziliziqli peridinamika modelida uzluksiz funksiyalar fazosida lokal yechuvchanlik isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА
ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ШЕРАЛИЕВ ШУХРАТ НУРАЛИЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент – 2024

Тема диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.3.PhD/FM630.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Алимов Шавкат Арифджанович** доктор физико-математических наук, профессор, академик.
Официальные оппоненты:	**Ашуров Равшан Раджабович** доктор физико-математических наук, профессор. **Бабажанов Базар Атажанович** доктор физико-математических наук, доцент.
Ведущая организация:	**Ферганский государственный университет**

Защита диссертации состоится «14» марта 2024 г. в 14.00 на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека. (Адрес: 100174, город Ташкент, Алмазарский район, улица Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21 E-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (зарегистрирована за № 16). (Адрес: 100174, город Ташкент, Алмазарский район, улица Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «29» февраля 2024 г.

(протокол рассылки № 2 от «29» февраля 2024 г.).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIIY UNIVERSITETI

А. Садуллаев
Председатель Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик.

Р.М. Жураев
Ученый секретарь Научного совета
по присуждению ученых степеней,
(PhD) по ф.-м.н., и.о.доцента.

А.Азамов
Заместитель председателя Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.м.н., профессор, академик.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире научных и прикладных исследований, проводимых в различных областях математики и физики, одно из центральных мест занимает изучение математических моделей механики сплошных сред. Для выявления деформационного реагирования материалов и конструкций, подвергающихся внешнему воздействию, была создана классическая механика сплошной среды, которая эффективно используется для решения разнообразных сложных задач. Но основное уравнение этой науки сталкивается с трудностями, когда в структуре имеются дефекты, такие как трещины, потому что пространственные частные производные в основном уравнении не определены для данного условия. С целью решения этой проблемы был разработан новый подход в континуальной механике, известный как перидинамика. Он был создан с тем, чтобы его уравнение всегда оставалось действительным, независимо от наличия или отсутствия разрывов в структуре.

В настоящее время в мире теория перидинамики является важной областью механики, которая находит применение во многих областях науки и техники. Одной из областей, в которых теория перидинамики наиболее востребована, является металлургия и материаловедение. В этих областях она используется для оптимизации производства и повышения качества материалов, а также для проектирования и испытания различных конструкций и механизмов. Также теория перидинамики находит применение в области аэродинамики и аэрокосмической техники, где она используется для оптимизации проектирования самолетов, ракет и других летательных аппаратов, а также для разработки новых материалов, обладающих необходимыми свойствами. Теория перидинамики также находит применение в области геологии и геофизики, где она используется для изучения поведения горных пород и земной коры в различных условиях.

В нашей стране, особенно за последние годы, придается значительное значение фундаментальным наукам, включая математику, физику, геологию и геофизику, которые имеют как научное, так и практическое значение. Особое внимание сосредотачивается на развитии прикладной математики, теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, математического моделирования, теории операторов, динамических систем и функционального анализа[2]. Это отражает актуальность и важность данных направлений исследований.

Тема и объект исследования данной диссертации соответствуют задачам, определенным в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации,

[2] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, связанных с фундаментальной наукой.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Попытки разработки нелокальных теорий в механике сплошной среды начали активно проводиться в 1970-х годах исследователями, такими как Е.Кронер и А.Эринген в соавторстве с другими исследователями. В этот период также были опубликованы книги И.Кунина, посвященные данной теме. Тем не менее выявились ограничения и несовершенства этих подходов, что привело к вновь возросшему интересу к вопросам нелокальности в более поздние годы.

Перидинамическая теория является одной из разновидностей нелокальных теорий, которая была разработана для описания механического поведения материалов на микроуровне. Эта теория была разработана в начале 2000-х годов и представляет собой инновационный подход к моделированию деформаций и разрушения в материалах. В его теории для описания взаимодействия между частицами твердого тела используется интегрирование по разностям полей перемещений, а не пространственно-дифференциальные операторы, как в классических локальных моделях. Это является одним из ключевых отличий перидинамической теории от традиционных локальных теорий механики сплошной среды. Поскольку в данном интегро-дифференциальном уравнении отсутствуют пространственные производные, граничные условия не обязательны, хотя это зависит от специфики сингулярного поведения интегрального ядра и функционально-аналитической постановки задачи. Однако в некоторых случаях можно ввести «краевые» условия, указывая значения в пределах полосы вдоль границы, которая ограничивает решение на ненулевом объеме.

С помощью процесса линеаризации попарной силовой функции была разработана линеаризованная модель перидинамики, которая подверглась исследованию множеством авторов.

Например, в работе Э. Эммриха и О. Векнера проведено исследование корректности и структурных свойств перидинамического уравнения движения в линейном случае, когда перемещения являются малыми относительно исходного состояния. Также изучается предельное поведение уравнения при уменьшении перидинамического горизонта к нулю. Это исследование способствует более глубокому пониманию нелокальной перидинамической теории и ее применимости в условиях малых перемещений, а также при сближении перидинамического горизонта к нулю. В работе С. Силлинга данная проблема была исследована и для её упрощения было применено преобразование, которое позволило свести ее к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В исследовании Кун Чжоу и Цян Ду исследуется линейная нелокальная перидинамическая модель на основе связей между частицами, с особым акцентом на решении проблем, связанных с нестандартными нелокальными условиями перемещения. Рассматриваются как стационарные, так и зависящие от времени задачи для одномерного скалярного уравнения, определенного на конечной стержня, а также для двумерной системы, определенной на квадратной области. В ходе исследования анализируются связанные с перидинамическими операторами и связанными функциональными пространствами. Кроме того, в статье иллюстрируются применения результатов в численном анализе конечномерных приближений перидинамических моделей.

В работе Ш. Алимов, Ю. Чао и О.А. Ильхан исследовали корректность и регулярность перидинамической модели с особым ядром. Дифференциально-интегральное уравнение, описывающее данную модель, преобразуется в операторно-интегральное уравнение Вольтерра. Затем с помощью анализа интегрального уравнения Вольтерра проводится установление существования и регулярности решения задачи перидинамики. Полученные результаты по регулярности улучшают предыдущие известные результаты, применимые к более общим моделям перидинамики.

Линейная перидинамическая модель с сингулярным ядром в двумерном пространстве была рассмотрена Ш. А. Алимовым и А. В. Юлдашевой. Авторам удалось найти условия на заданные функции и классы разрешимости уравнений, связанных с перидинамическими моделями нелинейной эластики в двумерной периодической структуре. Доказаны новые оценки для функций из классов Соболева.

Исследования, связанные с процессами деформации в анизотропных материалах и материалах с нелинейными свойствами упругости, приводят к возникновению нелинейных перидинамических уравнений. В литературе существует ограниченное количество результатов, касающихся этого класса уравнений. Главным образом, исследователям удалось доказать лишь локальную разрешимость в данном контексте. Дальнейшие исследования в области интегро-дифференциальных уравнений представляют важность и актуальность как с точки зрения развития общей теории интегро-дифференциальных уравнений, так и с точки зрения их применения в математическом моделировании различных перидинамических процессов.

За последние годы было достигнуто несколько значимых научных результатов в области механики сплошной среды благодаря научно-исследовательским работам, связанным с перидинамическими моделями. Одним из важных достижений является решение нескольких актуальных задач в данной области на мировом уровне: исследована новая методика - Перидинамика, которая позволяет предсказывать разрушение материалов в морских конструкциях, учитывая наличие разрывов (Университет Стратклайда, Глазго); было представлено два подхода к получению критических параметров перидинамического разрушения, необходимых для определения остаточной прочности композитной конструкции, в частности спрогнозированы разрушающие нагрузки и окончательные режимы разрушения ламината с отверстиями различного диаметра, подверженного растягивающим и сжимающим нагрузкам (Аризонский университет); исследовано распространение трещин через клейкую поверхность в стекле под действием динамической нагрузки (Университет Пердью, Западный Лафайет, Индиана); исследовано перидинамическое моделирование простых и железобетонных конструкций (Пекин); исследована перидинамическая теория для прогнозирования поля деформации в связанных слоях разнородных материалов из-за термической нагрузки (Тайбэй, Тайвань); исследованы структурная стабильность и разрушение композитных ламинатов с использованием теории перидинамики (Порту, Португалия); исследован перидинамический подход к теплопроводности (Ванкувер, Британская Колумбия, Канада); исследована перидинамическая теория возникновения и роста повреждений в композитных ламинатах (Дубровник, Хорватия); исследован перидинамический анализ для прогнозирования возникновения и роста повреждений в металлических и композитных конструкциях (Флорианополис, Бразилия); исследовано прогнозирование постепенного разрушения композитных ламинатов с отверстием с использованием теории перидинамики (Иерусалим, Израиль).

В настоящее время в мировой научной среде активно проводятся исследования в различных ключевых направлениях, таких как решение начально-краевых задач для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, а также разработка методов решения задач с начальными данными для уравнений, связанных с нелинейными перидинамическими процессами. Особое внимание также уделяется анализу решений интегро-дифференциальных уравнений с гиперсингулярными ядрами на различных структурах и многие другие актуальные темы.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательских работ ОТ-Ф4-88 «Исследование прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков», Ф-ФА-2021-424 «Решение краевых задач для дифференциальных уравнений с целыми и дробными порядками».

Целью данного исследования является изучение разрешимости задач с начальными данными для многомерных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, которые могут быть слабо сингулярными, сингулярными или гиперсингулярными, а также нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, связанных с перидинамическими моделями.

Задачи исследования:

разработать нового вида ядра с особенностью второго порядка для сингулярного интегро-дифференциального уравнения, рассматриваемого на многомерной периодической структуре (при $n \geq 3$), и последующее сведение этого уравнения к операторным интегральным уравнениям Вольтерра;

найти условия на заданные функции и классы разрешимости уравнений, связанных с перидинамическими моделями в многомерной периодической структуре;

исследовать интегро-дифференциальное уравнение перидинамики с гиперсингулярным ядром и доказать существование и единственности решения;

установить критерии локальной разрешимости нелинейного уравнения перидинамики;

представить новые утверждения, касающиеся функций из класса Соболева;

исследовать условия разрешимости интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра–Урысона, а также провести анализ свойств обнаруженных решений.

Объект исследования. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения, нелинейные интегро-дифференциальные уравнения и квазилинейные интегро-дифференциальные уравнения.

Предмет исследования. Области исследования включают в себя перидинамику, теорию сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, а также теорию математической физики, теорию операторных и интегральных уравнений.

Методы исследования. В исследовании задач использовались методы анализа функций с использованием разложения Фурье, такие как вычисление коэффициентов Фурье, спектральный анализ, а также методы математической индукции, интегральных уравнений, решения обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа и применение теории дифференциальных операторов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

обнаружены новые формулировки сингулярных ядер интегро-дифференциальных уравнений, применимые в случае периодических структур при $n \geq 3$;

установлена теорема, подтверждающая существование и единственность решений задач с начальными данными для перидинамических уравнений в многомерных областях;

установлено, что для гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона–Зигмунда, связанного с задачами перидинамики, существует гильбертово пространство, которое переводится данным оператором в пространство квадратично суммируемых периодических функций. Это открывает новые перспективы для анализа и решения подобных задач;

получена точная нижняя оценка для гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона-Зигмунда, что подчеркивает важность данного исследования и его вклад в область перидинамики и математической физики;

установлены условия локальной разрешимости нелинейных уравнений перидинамики.

Практические результаты исследования. Проведенные исследования являются фундаментальными и предоставляют ценную информацию для изучения линейных и нелинейных свойств деформации различных материалов. Эти результаты также могут послужить основой при построении математических моделей перидинамических процессов.

Достоверность результатов исследования подтверждается строгими математическими рассуждениями и доказательствами, а также применением методов функционального анализа, математической физики и теории дифференциальных уравнений. Помимо того, опубликование результатов диссертации в уважаемых научных изданиях, включая те, которые имеют импакт-факторы, и представление работы на научных семинарах, а также на республиканских и международных конференциях, подтверждает достоверность результатов диссертации.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость данной работы заключается в развитии теории интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами, что способствует расширению существующих знаний в этой области.

Практическая значимость исследований данной диссертационной работы заключается в их потенциальном применении для анализа перидинамических свойств различных материалов и для создания численных решений математических моделей, описывающих различные перидинамические процессы.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с линейными и нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями, были внедрены в практику следующих исследовательских работ:

теоремы существования и единственности решения задач с начальными данными для сингулярного периодического интегро-дифференциального уравнения перидинамики в логарифмическом Гильбертовом пространстве были использованы в рамках проекта «Природные катастрофы Камчатки – землетрясения и извержение вулканов» № АААА-А19-119072290002-9 (справка Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга» за номером 53-12 от 13 ноября 2023 г., Россия). Применение научного результата позволило разработать эффективные алгоритмы для численного решения математической модели, основанной на сингулярном интегро-дифференциальном уравнении перидинамики;

результаты исследования интегро-дифференциальных уравнений, связанных с моделями перидинамики, были использованы сотрудниками кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова в рамках хоздоговора №591 «Разработка контроллера твердотельного накопителя информации (ТНИ) нового поколения» (справка механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за номером 386-23/101-03 от 23 октября 2023 г., Россия).

Апробация результатов исследования. Полученные результаты диссертационного исследования обсуждались на научно-исследовательском семинаре «Современные проблемы математической физики» при кафедре прикладной математики и информатики филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Ташкенте, на научно-исследовательском семинаре «Современные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики» при кафедре дифференциальных уравнений и математической физики Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, а также были представлены и обсуждались на нескольких научно-практических конференциях, включая 6 международные и 1 республиканскую.

Публикация результатов исследования. В области исследования данной диссертации было опубликовано 12 научных работ. Из них 5 статей были опубликованы в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов, представляемых в диссертациях для получения ученой степени доктора философии (PhD). Из этих 5 статей 3 были опубликованы в республиканских журналах, а 2 - в зарубежных журналах, включая 2 статьи, индексируемые в базах Scopus.

Структура и объём диссертации. Содержание диссертации состоит из введения, 3-х глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 102 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава диссертации посвящена непрерывным перидинамическим моделям с периодической структурой, которые включают интегрирование по полю смещения.

Первый параграф посвящен изучению задачи Коши для перидинамического уравнения в многомерной области в периодическом случае. Т.е. мы считаем, что все заданные функцию являются периодическими функциями по пространственным переменным.

Линейная перидинамическая модель может быть описана следующим интегро-дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\int_{T^n} K(x,y)\big[u(x,t)-u(y,t)\big]dy = f(x,t),\ x\in T^n, t>0, \quad (1)$$

где $\mathbb{T}^n=\left[-\pi,\pi\right]^n$, с начальными данными

$$u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in\mathbb{T}^n. \quad (2)$$

Здесь $u:\mathbb{T}^n\times[0,T]\to\mathbb{R}^n$ неизвестная функция смещения, ядро $K-n\times n$ матрица-функция, с областью определения $\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n,\ \phi:\mathbb{T}^n\to\mathbb{R}^n$ и $\psi:\mathbb{T}^n\to\mathbb{R}^n$ с начальными данными, и $f:\mathbb{T}^n\times\left[0,T\right]\to\mathbb{R}^n$ внешняя сила.

В данной главе мы предполагаем, что $n\geq 3$.

Мы рассматриваем ядро

$$K(x,y)=P(x-y),\ \ x\in\mathbb{T}^n,\ \ y\in\mathbb{T}^n, \quad (3)$$

где функция $P(x)$ является периодической и для $x \in \mathbb{T}^n$ имеет вид

$$P(x) = \frac{(x \otimes x)}{|x|^{n+2}} \chi(|x|), \quad x \in \mathbb{T}^n. \tag{4}$$

Функция $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ для некоторого фиксированного $\rho,\ 0 < \rho < \pi/2$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 \;\; \text{для} \;\; r \le \dfrac{\rho}{2}, \\ 0 \;\; \text{для} \;\; r \ge \rho \end{cases} \tag{5}$$

и $0 \le \chi(r) \le 1$ для $r \in \mathbb{R}$.

Решением задачи Коши (1)-(2) назовём функцию $u(x,t)$, при каждом $t \ge 0$, принадлежащая пространству $L_2(\mathbb{T}^n)$, непрерывна по t по норме этого пространства на замкнутой полупрямой $t \ge 0$, дважды непрерывно дифференцируема по норме $L_2(\mathbb{T}^n)$, на открытой полупрямой $t > 0$ и удовлетворяет условиям (1) и (2).

Определим коэффициенты Фурье:

$$v_k = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} v(x)\, e^{-ikx}\, dx, \; k \in \mathbb{Z}^n.$$

Тогда

$$v(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} v_k e^{ikx}, \; x \in \mathbb{T}^n.$$

Введем следующую логарифмическую шкалу гильбертовых пространств H_m:

$$H_m = \left\{ v \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |v_k|^2 \ln^{2m} \sqrt{e^2 + |k|^2} < \infty \right\}, \; m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_m = (2\pi)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\hat{u}_k, \hat{v}_k) \ln^{2m} \sqrt{e^2 + |k|^2} \tag{7}$$

и с ассоциированной нормой $\| v \|_m = \sqrt{(v, v)_m}$.

Напомним, что функция $v \in L_2(\mathbb{T}^n)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^\mu(\mathbb{T}^n)$ если конечна норма, определяемая соотношением

$$\| v \|^2_{W_2^\mu} = (2\pi)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |v_k|^2 \left(1 + |k|^2\right)^\mu. \tag{8}$$

Обозначим

$$H_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} H_m. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть* $\mu > 0$ *и пусть начальные функции* $\phi(x)$ *и* $\psi(x)$ *принадлежат Соболевскому пространству* $W_2^{\mu}(\mathbb{T}^n)$*, а внешняя сила* $f(x,t)$ *непрерывно зависит от переменной* t *в норме пространства* $W_2^{\mu}(\mathbb{T}^n)$.

Тогда решение задачи Коши (1)-(2) существует, принадлежит классу H_∞ *и является единственным на отрезке* $0 \le t \le T$*, где* T *зависит только от* μ.

Во втором параграфе мы преобразовываем интегро-дифференциальное уравнение (1) к уравнению Вольтерра второго рода.

Введём сингулярный оператор

$$Bv(x) = \int_{T^n} P(x-y)\left[v(y) - v(x)\right]dy. \tag{10}$$

Тогда мы можем переписать (1) в виде

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - Bu(x,t) = f(x,t), \; x \in \mathbb{T}^n. \tag{11}$$

Интегрируя (11) два раза по t, мы получим следующее интегральное уравнение Вольтерра:

$$u(x,t) - \int_0^t (t-s) Bu(x,s) ds = F(x,t), \; x \in \mathbb{T}^n, t > 0, \tag{12}$$

где

$$F(x,t) = \phi(x) + t \cdot \psi(x) + \int_0^t (t-s) f(x,s) ds, \quad x \in \mathbb{T}^n, t > 0. \tag{13}$$

Положим

$$\nabla \otimes \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n{}^2} \end{pmatrix} \tag{14}$$

и

$$I\Delta = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где Δ — это оператор Лапласа, а I — единичная матрица.

Предложение 1. *Для* $n \ge 3$ *и* $y \ne 0$ *справедливо равенство*

$$(\nabla\otimes\nabla)\frac{1}{|y|^{n-2}}-\Delta\frac{\ln|y|}{|y|^{n-2}}=n(n-2)\frac{(y\otimes y)}{|y|^{n+2}}. \qquad (16)$$

Преобразуем, основываясь на предложение 1, оператор B можно придать следующий вид:

$$Bv(x)=\int_{\mathbb{T}^n}\frac{\chi(|y|)}{n(n-2)}\left[(\nabla\otimes\nabla)\frac{1}{|y|^{n-2}}-I\Delta\frac{\ln|y|}{|y|^{n-2}}\right]\left[v(x-y)-v(x)\right]dy.$$

Отсюда, интегрируя два раза по частям по каждой переменной y_j, получаем

$$Bv(x)=$$

$$=\frac{1}{n(n-2)}\int_{\mathbb{T}^n}\left[\frac{1}{|y|^{n-2}}(\nabla\otimes\nabla)-\frac{\ln|y|}{|y|^{n-2}}I\Delta\right]\cdot\chi(|y|)\left[v(x-y)-v(x)\right]dy. \qquad (17)$$

Далее введем следующие три интегро-дифференциальных оператора:

$$B_1v(x)=-\frac{1}{n(n-2)}\int_{\mathbb{T}^n}\chi(|y|)\frac{\ln|y|}{|y|^{n-2}}I\Delta v(x-y)dy, \qquad (18)$$

дальше,

$$B_2v(x)=\frac{1}{n(n-2)}\int_{\mathbb{T}^n}\chi(|y|)\frac{1}{|y|^{n-2}}(\nabla\otimes\nabla)v(x-y)dy, \qquad (19)$$

и наконец,

$$B_3v(x)=\frac{1}{n(n-2)}\sum_{|\alpha|\le 1}\int_{\mathbb{T}^n}R_\alpha(y)D^\alpha v(x-y)dy. \qquad (20)$$

Определим постоянную Λ равенством:

$$\Lambda=\frac{1}{n(n-2)}\int_{\mathbb{T}^n}\left[\frac{1}{|y|^{n-2}}(\nabla\otimes\nabla)-\frac{\ln|y|}{|y|^{n-2}}I\Delta\right]\cdot\chi(|y|)dy, \qquad (21)$$

где $R_\alpha(x)$ является бесконечно дифференцируемой матричной функцией, равной нулю при $|x|<\frac{\rho}{2}$ и при $|x|>\rho$.

Далее мы можем переписать (17) в следующем виде:

$$Bv(x)=B_1v(x)+B_2v(x)+B_3v(x)-\Lambda v(x). \qquad (22)$$

В третьем параграфе мы подробнее изучим свойства оператора B и, в частности, интегро-дифференциальные операторы, определяемых формулами (18)-(20). В этом параграфе мы будем использовать методы классического анализа Фурье.

Предложение 2. *Для коэффициентов Фурье* L_k *ядра* L *и для любого натурального* $\mathbb{N}$ *выполняется соотношение*

$$L_k=\frac{1}{|k|^2}\left[\alpha_n\ln|k|+\beta_n\right]+O\left(|k|^{-N}\right),\qquad |k|\ge 1. \qquad (23)$$

Постоянные α_n *и* β_n *зависят только от* n.

Следствие 1. *Для любой функции* $v \in C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$ *и для любого* $N \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\left(B_1 v\right)_k = -\frac{1}{n(n-2)}\left(2\pi\right)^n v_k\left[\alpha_n \ln|k| + \beta_n + O\left(|k|^{-N}\right)\right], |k| \geq 1. \qquad (24)$$

Предложение 3. *Для любой вектор-функции* $v \in C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$ *и для любого* $N \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$B_2 v_k = -\frac{1}{n(n-2)}\left(2\pi\right)^n \alpha_n \frac{\left(k \otimes k\right)}{|k|^2} \cdot v_k\left[1 + O\left(|k|^{-N}\right)\right], |k| \geq 1. \qquad (25)$$

Предложение 4. *Коэффициенты Фурье* $R_{\alpha k}$ *матриц-функций* $R_\alpha\left(x\right)$ *для любого числа* N *удовлетворяют следующее оценке:*

$$R_{\alpha k} = O\left(|k|^{-N}\right),\ |k| \geq 1.$$

Теперь мы можем оценить оператор B в логарифмической шкале Гильбертово пространстве (6).

Предложение 5. *Для любой функции* $v \in H_1$ *коэффициенты Фурье функции* Bv *представляется в виде*

$$Bv_k = \Phi\left(k\right) \cdot v_k, \qquad (26)$$

где функция $\Phi(k)$ *удовлетворяет для всех* $N \in \mathbb{N}$ *следующую оценку:*

$$\begin{aligned}\Phi\left(k\right) = &-\left(2\pi\right)^n\left(\alpha_n \ln|k| + \beta_n + \Lambda\right)I + \\ &+\left(2\pi\right)^n \alpha_n \frac{\left(k \otimes k\right)}{|k|^2} + O\left(|k|^{-N}\right), |k| \geq 1.\end{aligned} \qquad (27)$$

Следствие 2. *Существует постоянная* $M > 0$ *такая, что для функции* $\Phi(k)$ *из равенств (26) и (27) справедлива оценка*

$$\left|\Phi\left(k\right)\right| \leq M \cdot \ln\sqrt{e^2 + |k|^2},\ k \in \mathbb{Z}^n. \qquad (28)$$

Перейдём к изучению оператора B, определённого равенством (10).

Предложение 6. *Для любой функции* $v \in H_\infty$ *и любого номера* m *выполняется оценка*

$$\| Bv \|_m \leq M \cdot | v |_{m+1}. \qquad (29)$$

В четвёртом параграфе мы исследуем разрешимость интегрального уравнения Вольтерра.

Рассмотрим основное уравнение (12) в Гильбертовом пространстве $H_0 = L_2\left(\mathbb{T}^n\right)$.

Введем следующий оператор:

$$Av\left(t\right) = \int_0^t \left(t - s\right) Bv\left(s\right) ds. \qquad (30)$$

Тогда уравнение (12) принимает вид

$$u\left(t\right) = Au\left(t\right) + F\left(t\right). \qquad (31)$$

Определим последовательные приближения обычным образом:

$$v_{k+1}(t) = Av_k(t), \qquad v_0(t) = F(t).$$

Нашей целью является исследование сходимости ряда Неймана

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k F(t), \tag{32}$$

и доказательство того, что его сумма представляет собой решение уравнения (31).

Пусть H — гильбертово пространство и

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Обозначим через $C[\mathbb{R}^+ \to H]$ класс функций $f : \mathbb{R}^+ \to H$, которая непрерывна по переменной $t \in \mathbb{R}^+$ и имеют конечную норму

$$\| f \|_{H,\,t} = \sup_{0 \leq s \leq t} \| f(s) \|_H .$$

В случае, когда $H = H_m$ мы используем обозначение

$$\| f \|_{m,\,t} = \sup_{0 \leq s \leq t} \| f(s) \|_m . \tag{33}$$

Предложение 7. *Пусть* $F \in C[\mathbb{R}^+ \to H_m]$ *для всех* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда для любых номеров* $k \in \mathbb{N}$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\| A^k F \|_{m,t} \leq M^k \| F \|_{k+m,t} \frac{t^{2k}}{2(2k-1)!!}. \tag{34}$$

Установим справедливость следующего предложения, касающегося взаимосвязи между введённым в первом параграфе Гильбертовыми пространствами H_m и классическими Соболевскими пространствами $W_2^{\mu}(\mathbb{T}^n)$.

Предложение 8. *Для любого* $\mu > 0$ *и для любого номера* $m \in \mathbb{N}$ *выполняется включение*

$$W_2^{\mu}(\mathbb{T}^n) \subset H_m, \tag{35}$$

и для любой функции $F \in W_2^{\mu}(\mathbb{T}^n)$ *справедливо следующее неравенство:*

$$\| F \|_m \leq e^{\mu-1} \frac{m!}{\mu^m} \| F \|_{W_2^{\mu}}, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

Предложение 9. *Пусть* $\mu > 0$ *и функция* $F \in C[\mathbb{R}^+ \to W_2^{\mu}(\mathbb{T}^n)]$. *Тогда для любых номеров* $k \in \mathbb{N}$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка*

$$\| A^k F \|_{m,t} \leq C_m(\mu) \cdot k^{m+1} \left(\frac{Mt^2}{2\mu} \right)^k \| F \|_{W_2^{\mu},t}, \tag{37}$$

где

$$C_m(\mu) = e^{\mu-1} \frac{(m+1)!}{\mu^m}. \tag{38}$$

Предложение 10. *Пусть* $\mu > 0$ *и* $0 < T < \sqrt{2\mu / M}$, *где постоянная* M *взята из оценки (28). Тогда для любой функции* $F \in C\left[\mathbb{R}^+ \to W_2^\mu\left(\mathbb{T}^n\right)\right]$ *и любого номера* $m \in \mathbb{N}$ *ряд Неймана (32) сходится по норме Гильбертова пространства* H_m *равномерно на отрезке* $0 \le t \le T$ *и его сумма удовлетворяет следующую оценку:*

$$\| u(t) \|_m \le C_m(\mu) \| F \|_{W_2^\mu, t} \cdot (m+1)! \left[1 - \frac{MT^2}{2\mu}\right]^{-m-2}, \tag{39}$$

где $C_m(\mu)$ *определяется равенством (38).*

В пятом параграфе мы доказываем теорему 1 о существовании и единственности решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с сингулярным ядром.

Вторая глава диссертации, названная «О гиперсингулярных операторах, связанных с перидинамикой» посвящена исследованию гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона-Зигмунда, связанного с задачами перидинамики.

В первом параграфе описано введение и постановка задачи.

Основное уравнение перидинамики в линеаризованном варианте имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - A_s u(x,t) = f(x,t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

где сингулярный интегральный оператор A_s определяется равенством:

$$A_s u(x) = \int_D K_s(x,y)\left[u(y) - u(x)\right] dy.$$

D - ограниченная n - мерная ($n \ge 3$) область с кусочно-гладкой границей, $u : D \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ - неизвестная функция, $n \times n$ -матрица-функция K_s, определенная в $D \times D$, является заданным ядром интегрального оператора, функция $f : D \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ представляет собой внешнюю силу.

В настоящей главе мы рассматриваем интегральный оператор A_s в виде свёртки в пространстве периодических функций, а именно

$$A_s u(x) = \int_{\mathbb{T}^n} K_s(x-y)\left[u(y) - u(x)\right] dy,\ x \in \mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n. \tag{40}$$

Важный класс операторов вида (40) составляют операторы с сингулярным ядром вида

$$K_s(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n},\ x \in \mathbb{T}^n.$$

Будем предполагать, что матрица-функция $\Omega(x)$ является гладкой в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и для любого $\lambda > 0$ удовлетворяет условию (однородность)

$$\Omega(\lambda x) = \Omega(x),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор

$$Sf(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)\,dy. \tag{41}$$

Определим матрицу Ω^*, представляющую собой среднее значение ядра Ω по единичной сфере:

$$\Omega^* = \frac{1}{\omega_n} \int_{\theta} \Omega(\theta)\,d\theta. \tag{42}$$

В данном параграфе рассматривается случай, когда $\Omega^* \neq 0.$ В этом случае оператор (41) становится гиперсингулярным.

Зафиксируем ρ из интервала $0 < \rho < \pi$ и обозначим символом $\chi(r)$ неотрицательную функцию, принадлежащую пространству $C^\infty(\mathbb{R})$, равную единице при $r \leq \rho / 2$ и нулю при $r \geq \rho.$

Основной целью настоящей работы является изучение интегрального оператора

$$Af(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \cdot \chi(|y|)\left[f(x-y) - f(x) \right] dy, \tag{43}$$

где

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 \;\; \textit{для} \;\; r \leq \dfrac{\rho}{2}, \\ 0 \;\; \textit{для} \;\; r \geq \rho. \end{cases}$$

Ясно, что в случае $\Omega^* = 0$ оператор (43) совпадает с сингулярным оператором типа Кальдерона-Зигмунда.

Для того, чтобы сформулировать основной результат, введем функциональное пространство периодических функций с логарифмической гладкостью.

Рассмотрим самосопряжённый псевдодифференциальный оператор первого порядка

$$\Lambda f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{ikx} \sqrt{1 + |k|^2},$$

где

$$f_k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx}\,dx.$$

Иными словами, $\Lambda = \sqrt{1 - \Delta}$, где Δ - самосопряжённое расширение в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператора Лапласа, отвечающее периодическим граничным условиям. Отметим, что областью определения оператора Δ является пространство

Соболева $W_2^2(\mathbb{T}^n)$, следовательно $D(\Lambda)=W_2^1(\mathbb{T}^n)$. При этом функция $f:\mathbb{T}^n\to\mathbb{R}^n$ принадлежит пространству вектор-функций $W_2^1(\mathbb{T}^n)$, если каждая компонента $f_j(x)$ принадлежит обычному пространству $W_2^1(\mathbb{T}^n)$.

Для любого натурального m рассмотрим положительный самосопряжённый в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператор $\log^m(1+\Lambda)$. То есть

$$\log^m(1+\Lambda)\, f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k e^{ikx}\log^m\left(1+\sqrt{1+|k|^2}\right).$$

Область определения этого оператора обозначим $H_{log}^m(\mathbb{T}^n)$:

$$H_{log}^m(\mathbb{T}^n)=D\left(\log^m(1+\Lambda)\right). \tag{44}$$

Это означает

$$H_{log}^m=\left\{\ f\ \mid\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|f_k\right|^2\log^{2m}\left(1+\sqrt{1+|k|^2}\right)<\infty\right\},\quad m=1,2,\ldots$$

Каждое пространство H_{log}^m является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g)_m=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k\overline{g_k}\log^{2m}\left(1+\sqrt{1+|k|^2}\right). \tag{45}$$

Ассоциированную с этим скалярным произведением норму элемента $f\in H_{log}^m(\mathbb{T}^n)$ означим $||f||_m=\sqrt{(f,f)_m}$, т.е.

$$\|f\|_m^2=\|\log^m(1+\Lambda)\, f\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}^2=(2\pi)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|f_k|^2\log^{2m}\left(1+\sqrt{1+|k|^2}\right).$$

Положим $H_{log}^0(\mathbb{T}^n)=L_2(\mathbb{T}^n)$ очевидно, для любого натурального m выполняется равенство

$$\log(1+\Lambda)H_{log}^m(\mathbb{T}^n)=H_{log}^{m-1}(\mathbb{T}^n),\qquad m\in\mathbb{N}. \tag{46}$$

Под нормой матрицы Ω^* мы понимаем величину

$$\left\|\Omega^*\right\|=\left(\sum_{i,j=1}^n\left|\Omega_{ij}^*\right|^2\right)^{1/2}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Для любого $m\in\mathbb{N}$ пространство $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ плотно в $H_{log}^m(\mathbb{T}^n)$.*

Теорема 3. *Для любого натурального m оператор A, определённый равенством (43), действует из $H_{log}^m(\mathbb{T}^n)$ в $H_{log}^{m-1}(\mathbb{T}^n)$ и удовлетворяет оценке*

$$\left\|Af\right\|_{m-1}\le C\left\|\Omega^*\right\|\cdot\|f\|_m+C\|f\|_{m-1}. \tag{47}$$

В наиболее важном случае $m=1$ данное утверждение может быть сформулировано следующим образом.

Следствие 3. *Оператор* A *действует непрерывно из* $D\left(\log\left(1+\Lambda\right)\right)$ *в* $L_2\left(\mathbb{T}^n\right)$, *при этом выполняется неравенство*

$$\|Af\|_{L_2\left(\mathbb{T}^n\right)} \le C\|\Omega^*\|\cdot\|f\|_1 + C\|f\|_{L_2\left(\mathbb{T}^n\right)}.$$

В следующем разделе мы изучим Леммы исследования.

Рассмотрим вспомогательный гиперсингулярный оператор

$$A^* f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\chi(|y|)}{|y|^n}\Omega^*\left[f(x-y)-f(x)\right]dy. \tag{48}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть* 2π *-периодическая функция* $L(x)$ *имеет вид*

$$L(x) = -\frac{1}{n-2}\cdot\frac{\ln|x|}{|x|^{n-2}}\chi(|x|), \qquad x\in\mathbb{T}^n,$$

тогда справедливо равенство

$$\Delta L(x) = \frac{\chi(|x|)}{|x|^n} + Q(x),$$

где функция Q *принадлежит* $C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$ *и её носитель расположен в слое* $\rho/2 \le |x| \le \rho$.

Лемма 2. *Для любой функции* $f\in C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$ *выполняется равенство*

$$A^* f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} L(y)\Omega^*\Delta f(x-y)dy + Bf(x) + Mf(x), \tag{49}$$

где M *- постоянная матрица, а* B *- оператор свёртки с ядром из пространства* $C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$.

Лемма 3. *Коэффициенты Фурье* L_k *функции* $L(x)$ *для любого натурального* N *удовлетворяют равенству*

$$L_k = -\frac{1}{n-2}\cdot\left[\frac{1}{|k|^2}\left[\alpha_n \ln|k| + \beta_n\right] + O\left(|k|^{-N}\right)\right], \quad k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|\ge 1.$$

Постоянные α_n *и* β_n *зависят только от размерности области* n.

Лемма 4. *Для любой функции* $f\in C^\infty\left(\mathbb{T}^n\right)$ *коэффициенты Фурье функции* $A^* f(x)$ *удовлетворяют оценке*

$$\left|\left(A^* f\right)_k\right| \le C\|\Omega^*\|\cdot|f_k|\cdot\ln\left(1+\sqrt{1+|k|^2}\right) + C|f_k|. \tag{50}$$

Введем следующую вспомогательную функцию:

$$\Omega_1(x) = \Omega(x) - \Omega^*,$$

где постоянная матрица Ω^* определена равенством (42). Согласно этому определению, выполняется равенствоы

$$\int_{\theta} \Omega_1(\theta)\, d\theta = 0.$$

Лемма 5. *Для любой функции* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *справедлива следующая оценка:*

$$\| Af \|_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leq C \| \Omega^* \| \cdot \| f \|_1 + C \| f \|_{L_2(\mathbb{T}^n)} .$$

Лемма 6. *Для любой функции* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *выполняется основная оценка (47).*

Во втором параграфе, озаглавленном "Об оценке снизу гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона-Зигмунда, связанного с задачами перидинамики", была получена оценка снизу.

Мы рассматриваем интегральный оператор A_s в виде свёртки в пространстве периодических функций, а именно

$$A_s u(x) = \int_{\mathbb{T}^n} K_s(x-y)\left[u(y) - u(x)\right] dy,\ x \in \mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n. \tag{51}$$

Важный класс операторов вида (51) составляют операторы с сингулярным ядром вида

$$K_s(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n},\ x \in \mathbb{T}^n,$$

где

$$\Omega(x) = \frac{x \otimes x}{(x, x)}, \tag{52}$$

где

$$x \otimes x = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} = \left(x_{jk}\right)_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,n}}}, \tag{53}$$

Из теоремы 3 следует следующее утверждение:

Следствие 4. *Для любого натурального* m *оператор* A, *определённый равенством (43), действует из пространства* $H^m_{log}(\mathbb{T}^n)$ *в пространство* $H^{m-1}_{log}(\mathbb{T}^n)$ *и удовлетворяет оценке*

$$\| Af \|_{m-1} \leq C \| f \|_m, \quad f \in H^m_{log}(\mathbb{T}^n). \tag{54}$$

В этом же разделе доказывается справедливость противоположной оценки, тем самым подтверждая точность оценки (54).

Теорема 4. *Для любого натурального* m *и любой функции* $f \in H^m_{log}(T^n)$ *выполняется оценка*

$$\| f \|_m \le C \| Af \|_{m-1} + C \| f \|_{m-1} . \tag{55}$$

Замечание 1. *Пример функции* $f(x) \equiv 1$ *показывает, что второе слагаемое в правой части оценки (55) не может быть исключено.*

Доказательство теоремы 4 опирается на следующие леммы.

Лемма 7. *Среднее значение (42) ядра* $\Omega(x)$ *, определённого равенством (52), имеет вид*

$$\Omega^* = \frac{1}{n} I, \tag{56}$$

где I *— единичная матрица.*

Введем следующий вспомогательный гиперсингулярный оператор

$$A^* f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\chi(|y|)}{|y|^n} \Omega^* \left[f(x-y) - f(x) \right] dy. \tag{57}$$

Лемма 8. *Для любой функции* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *коэффициенты Фурье функции* $A^* f(x)$ *удовлетворяют оценке*

$$|f_k| \log\left(1 + \sqrt{1 + |k|^2}\right) \le C \left| \left(A^* f\right)_k \right| + C |f_k|, \; k \in \mathbb{Z}^n. \tag{58}$$

Лемма 9. *Для любой функции* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *выполняется оценка*

$$\| f \|_1 \le C \| Af \|_0 + C \| f \|_0 . \tag{59}$$

Лемма 10. *Для любой функции* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *выполняется основная оценка (55).*

Третья глава диссертации, названная «О разрешимости квазилинейной периодической задачи перидинамики» посвящена исследованию квазилинейного интегро-дифференциального уравнения перидинамики, где нелинейность моделируется с использованием интегрального оператора Урысона.

Мы рассматриваем перидинамическую квазилинейную модель периодической структуры, которая включает в себя интегрирование разности поля смещения. Квазилинейная перидинамическая модель может быть описана следующим интегро-дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int_{\mathbb{T}^n} K(x,y)\left[u(x,t) - u(y,t)\right] dy + G[u](x,t) = f(x,t), \tag{60}$$

для всех $x \in \mathbb{T}^n, t > 0$, с начальными данными

$$u(x,0) = \phi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x), \; x \in \mathbb{T}^n, \; n \ge 1. \tag{61}$$

Здесь $\mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n$, $u : \mathbb{T}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ — неизвестная вектор-функция, ядро $K - n \times n$ матрица-функция с областью определения $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$, $\phi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\psi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ — с начальными данными, а $f : \mathbb{T}^n \times \overline{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}^n$ внешняя сила. Здесь $\overline{\mathbb{R}_+}$ - неотрицательные числа.

Нелинейный член $G[u]$ имеет вид

$$G[u](x,t)=\int_{\mathbb{T}^n} g\left(x,y,u\left(y,t\right)\right)dy, \tag{62}$$

(нелинейный оператор Урысона (см. [86] §18, формула 18.1 стр. 363)).

Предположим, что функция $g(x,y,u)$ удовлетворяет условиям:

$$g\in C\left(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n\right) \quad и \quad \frac{dg}{du_j}\in C\left(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n\right), \tag{63}$$

для всех $j=1,2,...,n$.

Мы рассматриваем ядро

$$K\left(x,y\right)=P\left(x-y\right),\ x\in\mathbb{T}^n, y\in\mathbb{T}^n,$$

где функция $P(x)$ является периодическим и имеет вид

$$P\left(x\right)=\frac{\left(x\otimes x\right)}{\sigma\left(x\right)}\chi\left(x\right)+\beta\left(x\right),\ x\in\mathbb{T}^n. \tag{64}$$

Здесь для любого $x\in\mathbb{R}^n$ положим

$$\left|x\right|^2=\sum_{j=1}^n\left|x_j\right|^2.$$

Функции σ и β взяты из $\in C\left(\mathbb{T}^n\right)$ и функция σ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sigma\left(x\right)\geq 0,\quad x\in\mathbb{T}^n,\quad \int_{\mathbb{T}^n}\frac{\left|x\right|^2}{\sigma\left(x\right)}dx<+\infty. \tag{65}$$

Для любого $T>0$ обозначим через $C^{0,2}\left(\mathbb{T}^n\times\left[0,T\right]\right)$ Банахово пространство функций $u:\mathbb{T}^n\times\left[0,T\right]\to\mathbb{R}^n$ такое, что u и его производные u_t и u_{tt} принадлежат $C\left(\mathbb{T}^n\times\left[0,T\right]\right)$.

Здесь $C\left(\mathbb{T}^n\times\left[0,T\right]\right)$ такое Банахово пространство функций $u:\mathbb{T}^n\times\left[0,T\right]\to\mathbb{R}^n$, которые периодические по переменной x и непрерывные на множестве $\mathbb{T}^n\times\left[0,T\right]$.

Определим решение $u\left(x,t\right)$ задачи Коши (60)-(61) на интервале $0\leq t\leq T$ как функция $u\in C^{0,2}\left(\mathbb{T}^n\times\left[0,T\right]\right)$, которая удовлетворяет уравнениям (60) и условиям (61).

Теорема 5. *Пусть начальные функции $\phi\left(x\right)$ и $\psi\left(x\right)$ принадлежат пространству $C\left(\mathbb{T}^n\right)$, а внешняя сила $f(x,t)$ принадлежит $C\left(\mathbb{T}^n\times\overline{\mathbb{R}_+}\right)$.*

Тогда существует такое $T>0$, что решение задачи Коши (60)-(61) на интервале $\left[0,T\right]$ существует и единственно.

Во втором параграфе мы описываем преобразование задачи (60)-(61) в интегральное уравнение типа Вольтерра–Урысона второго рода.

Введём оператор

$$B[u](x)=\int_{\mathbb{T}^n} K(x,y)\left[u(y,t)-u(x,t)\right]dy-G[u](x,t). \tag{66}$$

Тогда мы можем переписать (60) в виде

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-B[u](x,t)=f(x,t),\ x\in\mathbb{T}^n. \tag{67}$$

Интегрируя (67) два раза по t и учитывая начальные данные (61), мы получаем интегральное уравнение типа Вольтерра–Урысона

$$u(x,t)-\int_0^t (t-s)B[u](x,s)ds=F(x,t),\quad x\in\mathbb{T}^n,\ t>0, \tag{68}$$

где

$$F(x,t)=\phi(x)+t\cdot\psi(x)+\int_0^t (t-s)f(x,s)ds,\ x\in\mathbb{T}^n,\ t>0. \tag{69}$$

В третьем параграфе мы показываем, что соответствующий нелинейный оператор является сжимающим отображением некоторого полного метрического пространства непрерывных функций и доказываем теорему 5.

Рассмотрим уравнение

$$A[u](x,t)=\int_0^t (t-s)B[u](x,s)ds+F(x,t),\ x\in\mathbb{T}^n,\ t>0. \tag{70}$$

Тогда уравнение (68) принимает вид

$$u(x,t)=A[u](x,t),\ x\in\mathbb{T}^n, t>0. \tag{71}$$

Для любых $R>0$ и $T>0$ мы обозначаем через $M_R(T)$ полное (в топологии пространства $C\left(\mathbb{T}^n\times[0,T]\right)$) метрическое пространство:

$$\begin{gathered} M_R(T)= \\ =\{u\in C\left(\mathbb{T}^n\times[0,T]\right):\left|u(x,t)-\phi(x)\right|\le R,\quad (x,t)\in\mathbb{T}^n\times[0,T]\}. \end{gathered} \tag{72}$$

Предложение 11. *Для любого* $R>0$ *существует* $T>0$, *такое, что выполняется следующее включение*

$$AM_R(T)\subset M_R(T).$$

Предложение 12. *Для любого* $R>0$ *существует* $T>0$, *такое что* A *является сжимающим отображением* $M_R(T)$ *на* $M_R(T)$.

В четвёртом параграфе представлен контрпример, демонстрирующий, что теорема 5 о локальном существовании не гарантирует глобального существования. Стоит отметить, что интервал, на котором существует решение, зависит от начальных данных.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\int_{\mathbb{T}^n} K(x,y)\left[u(x,t)-u(y,t)\right]dy+G[u](x,t)=0, \tag{73}$$

с начальными данными

$$u(x,0)=\frac{1}{\mu^2},\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{2}{\mu^3}, \tag{74}$$

где $\mu > 0$.

В случае, когда

$$g(x,y,u) = -\frac{6}{(2\pi)^n} \cdot u^2,$$

решение имеет следующий вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{(\mu - t)^2}, \ 0 \le t < \mu. \tag{75}$$

Действительно, для данной функции $u(x,t)$ имеем

$$\int_{\mathbb{T}^n} K(x,y)\left[u(x,t) - u(y,t)\right]dy + G[u](x,t) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^n} g(x,y,u)dy = -\frac{6}{(2\pi)^n} \cdot u^2(t) \int_{T^n} dy = -6 \cdot u^2(t). \tag{76}$$

Дифференцируя (75), получаем

$$u'(t) = \frac{2}{(\mu - t)^3}, \quad u'(0) = \frac{2}{\mu^3}.$$

Далее

$$u''(t) = \frac{6}{(\mu - t)^4} = 6 \cdot u^2(t). \tag{77}$$

Из (76) и (77) следует, что функция (75) является решением задачи Коши (73)-(74).

Согласно Теореме 5, это единственное решение задачи Коши (73)-(74). Обратите внимание, что в данном случае решение существует только для $t < \mu$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследований, представленных в диссертационной работе, были получены следующие результаты:

была доказана разрешимость интегро-дифференциального уравнения Вольтерра;

было доказано существование и единственность решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с сингулярным ядром;

в случае использования трех и более пространственных переменных, решение задачи Коши было найдено в виде ряда Неймана;

для гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона–Зигмунда, связанного с задачами перидинамики, найдено гильбертово пространство, которое переводится данным оператором в пространство квадратично суммируемых периодических функций;

для гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона-Зигмунда, связанного с задачами перидинамики, получена оценка снизу;

доказано существование и единственность непрерывного периодического решения данного уравнения;

в случае квазилинейной модели перидинамики со слабой особенностью ядра доказана локальная разрешимость в пространстве непрерывных функций.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

SHERALIEV SHUKHRAT NURALIEVICH

THE MATHEMATICAL INVESTIGATION OF PROBLEMS IN CONTINUUM MECHANICS USING SPECTRAL THEORY METHODS

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT
OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2021.3.PhD/FM630.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz) and the website of "ZiyoNet" of information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Alimov Shavkat** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Academician
Official opponents:	**Ashurov Ravshan** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics.
	Babajanov Bazar Doctor of Sciences in Physics and Mathematics.
Leading organization:	**Fergana state university**

Defense will take place on "14" march 2024 at 14^{00} at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+99871) 227-12-24, Fax: (+99871) 246-53-21, E-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (registered for No. 16) (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "29" february 2024.

(Mailing report No. 2 on "29" february 2024.)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

A. Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor, Academician.

R.M. Juraev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Phisics.

A. Azamov
Deputy Chairman of Scientific seminar under Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor, Academician.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of this research work is to investigate the solvability of problems with initial data for multidimensional integro-differential equations with kernels that can be weakly singular, singular, or hypersingular. Additionally, the study addresses nonlinear integro-differential equations associated with peridynamic models.

Subject of the Research. The research areas encompass peridynamics, the theory of singular integro-differential equations, nonlinear integro-differential equations, as well as the theory of mathematical physics, operator theory, and integral equations theory.

The scientific novelty of the research is as follows:

new formulations of singular kernels for integro-differential equations have been identified, applicable in the case of periodic structures for $n \geq 3$. These representations enable the reduction of problems to equations with regular kernels.

theorems confirming the existence and uniqueness of solutions for problems with initial data for peridynamic equations in multidimensional domains have been established.

it is established that for the hypersingular integral operator of Calderón–Zygmund type associated with problems in peridynamics, there exists a Hilbert space that is mapped by this operator into the space of quadratically summable periodic functions. This opens new perspectives for the analysis and solution of similar problems.

an exact lower bound estimate for the hypersingular integral operator of Calderón-Zygmund type has been obtained, emphasizing the significance of this research and its contribution to the field of peridynamics and mathematical physics.

conditions for the local solvability of nonlinear peridynamic equations have been established.

Implementation of Research Results.

The outcomes related to linear and nonlinear integro-differential equations have been incorporated into the practice of the following research projects:

The theorems on the existence and uniqueness of solutions for problems with initial data for a singular periodic integro-differential equation in the logarithmic Hilbert space were utilized in the framework of the project ‘Natural Disasters of Kamchatka – Earthquakes and Volcanic Eruptions’, No. AAAA-A19-119072290002-9 (reference from the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education ‘Kamchatka State University named after Vitus Bering’, No. 53-12 dated November 13, 2023, Russia). The application of the scientific result facilitated the development of efficient algorithms for numerically solving the mathematical model based on the singular integro-differential equation of peridynamics.

The results of the research on integro-differential equations associated with peridynamic models were utilized by the faculty members of the Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems at the Mechanics and Mathematics Faculty of Lomonosov Moscow State University under the agreement No. 591 ‘Development of a Controller for a Solid-State Information Storage (SSIS) of the

New Generation' (reference from the Mechanics and Mathematics Faculty of Lomonosov Moscow State University, No. 386-23/101-03 dated October 23, 2023, Russia).

Dissertation structure and volume.

The dissertation is composed of an introduction, three chapters, a conclusion, and a bibliography. The dissertation spans a total of 102 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Alimov S. and Sheraliev S. On the solvability of the singular equation of peridynamics. Complex Variables and Elliptic Equations., 2019, Volume 64, Issue 5, Pages 873-887. **(Scopus, IF= 0.765)** https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1565406
2. Sheraliev Sh. N. On the solvability of the quasi-linear periodic problem of peridynamics. Bulletin of the Institute of Mathematics, 2020, №3. стр. 86-93. **(01.00.00, №17)**
3. Alimov S. and Sheraliev S. On the solvability of hypersingular equation of peridynamics. Bulletin of the National University of Uzbekistan, 2020. Volume 3 Issue 3. p. 278-298. **(01.00.00, №8)**
4. Алимов Ш. А., Шералиев Ш. Н. Об оценке гиперсингулярного оператора типа Кальдерона-Зигмунда, Доклады Академии наук Республики Узбекистан, №3, 2023 г., Стр. 10 – 16. **(01.00.00, №7)**
5. Алимов Ш. А., Шералиев Ш. Н. О гиперсингулярных операторах, связанных с перидинамикой, Дифференциальные уравнения, 2023, том 59, №7, с. 914–918. **(Scopus, IF= 0,661)** https://doi.org/10.1134/S0012266123070054

II бўлим (II часть; II Part)

6. Alimov S. and Sheraliev S. On the solvability of the hyper-singular equation of peridynamics. 14th World Congress on Computational Mechanics (WCCM), ECCOMAS Congress 2020, 11–15 January 2021, Paris, France, pp.555.
7. Sheraliev S. On the solvability of the non-linear periodic problem of peridynamics. PROCEEDINGS OF SCIENTIFIC CONFERENCE “ACTUAL PROBLEMS OF STOCHASTIC ANALYSIS” dedicated to the 80th anniversary of the birth of academician Sh.K.FORMANOV, February 20-21, 2021 Tashkent. pp.236-237.
8. Sheraliev S. On the quasi-linear periodic problem of peridynamics. IX Международная научная конференция «Современные проблемы математики и физики» посвященная 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б.Сабитова, 12 – 15 сентября 2021 года, стр 247-249.
9. Шералиев Ш. Н. Об оценке снизу гиперсингулярного оператора перидинамики. XVI Международная научная конференция “Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании”, Саранск, 17 — 20 августа 2023 г., стр 265-267.
10. Шералиев Ш. Н. Об оценке гиперсингулярного оператора, связанного с перидинамикой. XVI Международная Казанская школа-конференция

“Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”, Казань, 22 – 27 августа 2023 г., стр 291-292.
11. Шералиев Ш. Н. Об оценке гиперсингулярного оператора, связанного с перидинамикой. VII Всемирный Конгресс Математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023), г. Туркестан, 20–23 сентября 2023 года, стр. 158.
12. Алимов Ш. А., Шералиев Ш. Н. О гиперсингулярных уравнениях перидинамики. VII Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 4–8 декабря 2023 г., стр. 34 – 36.

Avtoreferat «O'zMU xabarlari» jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3. Adadi 100 dona. Buyurtma № 9/24.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.