

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

Tarix yo'nalishi

II – kurs 3 – semistr uchun

«EHTIMOLLAR NAZARIYASI»

MA'RUZALAR MATNI

Tuzuvchilar: dots. B. Eshmatov
Katta o'qit. S. Shodiyev

QARSHI – 2014 yil

MUNDARIJA

1. Ehtimollar nazariyasining predmeti va uning iqtisodiy, texnik masalalar uchun ahamiyati. Ehtimollik va uning ta'rifi.....
2. Hodisalar ustida amallar. Shartli ehtimollik.....
3. Ehtimolliklarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari.
To'la ehtimollik va Bayes formulalari.....
4. Bog'liqmas tajribalar ketma-ketligi. Laplasning lokal va integral teoremlari.....
5. Diskret tasodifiy miqdorlar. Taqsimot qonuni. Diskret taqsimotlarning turlari.....
6. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli tavsiflari va ularning xossalari.....
7. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot va zichlik funksiyalari, ularning xossalari.....
8. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli tavsiflari. Uzluksiz taqsimotlarning turlari.....
9. Katta sonlar qonuni va uning amaliy ahamiyati. Markaziy limit teorema haqida tushuncha.....
10. Matematik statistikaning predmeti va asosiy masalalari.

	Tanlanma.....
11.	Tanlanmaning statistik taqsimoti. Empirik taqsimot funksiyasi. Poligon va gistogramma.....
12.	Statistik baho. Statistik bahoga qo'yiladigan talablar. Tanlanma o'rtacha va tanlanma dispersiya.....
13.	Intervalli baholar. Ishonchlilik intervali. Normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun ishonchlilik .intervallari.....
14.	Korrelyatsiyaviy va regressiyaviy tahlil elementlari.....
15.	Tanlanma korrelyatsiya koeffisienti va uning xossalari.....
16.	Statistik gipotezalar va ularning tasnifi. Statistik mezon.....
17.	Muvofiqlik mezonlari.....
	Adabiyotlar ro'yxati.....

1-mavzu

Ehtimollar nazariyasining predmeti va uning iqtisodiy, texnik masalalar uchun ahamiyati.

Ehtimollik va uning ta'rifi

Reja:

1. Ehtimollar nazariyasi predmeti.
2. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishining qisqacha tarixi.
3. Ehtimollar nazariyasining iqtisodiy, texnik masalalar uchun ahamiyati.
4. Elementar hodisalar va hodisalar.
5. Ehtimollik va uning ta'rifi.
6. Nisbiy chastota.

Uzoq davrlar mobaynida insoniyat o'z faoliyati uchun faqat determinirlangan deb atalmish qonuniyatlarni o'rganar va ular-dan foydalanar edi. Biroq tasodifiy hodisalar bizning hayotimizga xohish-irodamizdan qat'iy nazar kirib kelgani va bizni doimo o'rab turgani uchun hamda, ustiga-ustak, tabiatning deyarli barcha hodisalari tasodifiy xususiyatli bo'lgani uchun ularni tadqiq qilishni o'rganish va shu maqsadda tadqiqot usullarini ishlab chiqish zarurdir.

Tabiat va jamiyat qonunlari sababiy bog'lanishlarning namoyon bo'lish shakli

bo'yicha ikkita sinfga bo'linadi: determinirlangan (oldindan aniq) va statistik.

Masalan, osmon mexanikasi qonunlariga asosan Quyosh sis-temasidagi

sayyoralarning hozir ma'lum bo'lgan vaziyati bo'yicha ularning ixtiyoriy

paytdagi vaziyati amalda bir qiymatli oldindan aytib berilishi mumkin, shu

jumladan, Quyosh va Oy tutilishlari juda aniq bashorat qilinishi mumkin. Bu

determinirlangan qonunlarga misol.

Shu bilan birga hamma hodisalarni ham aniq bashorat qilib bo'lmaydi. Masalan,

iqlimning uzoq muddat davomida o'zgarishlari, ob-havoning qisqa muddatli

o'zgarishlari muvaffaqiyatli bashorat qilishning ob'ektlari bo'la olmaydi, ya'ni

ko'pgina qonunlar va qonuniyatlar determinirlangan doiraga ancha kam darajada

bo'ysunadi. Bunday turdagi qonunlar statistik qonunlar deb ataladi. Bunday qonunlarga asosan, biror-bir tizimning kelajakdagi holati bir qiymatli emas, balki faqat ma'lum bir ehtimollik bilan aniqlanadi.

Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot ehtiyojlaridan paydo bo'ldi va rivojlandi. U ommaviy tasodifiy hodisalarga xos qonuniyatlarni o'rganish bilan shug'ullanadi.

Ehtimollar nazariyasi shart-sharoitlarning aniq bir majmuasini amalga oshirganda ko'p marotalab qaytarilishga qodir bo'lgan ommaviy tasodifiy hodisalarning xossalarini o'rgana-di. Tabiatidan qat'iy nazar, ixtiyoriy tasodifiy hodisaning asosiy xususiyati — uni amalga oshirishining o'lchovi yoki ehtimolligi.

Biz kuzatadigan hodisalarni uchta turga bo'lish mumkin: muqarrar, mumkin bo'lmagan va tasodifiy.

Muqarrar hodisa deb albatta ro'y beradigan hodisaga aytiladi. *Mumkin bo'lmagan hodisa* deb mutlaqo ro'y bermaydigan hodisaga aytiladi. *Tasodifiy hodisa* deb ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisaga aytiladi.

Ehtimollar nazariyasi yakka hodisa ro'y berish yoki bermasligini oldindan aytib berish vazifasini o'z oldiga qo'ymaydi, chunki tasodifiy hodisaga hamma shart-sharoitlarning ta'siri-ni hisobga olish mumkin emas. Boshqa tomondan qaraganda, konkret tabiatidan qat'iy nazar, yetarlicha ko'p sondagi bir jinsli tasodifiy hodisalar tayin qonuniyatlarga, aniqrog'i ehtimoliy qonuniyatlarga

bo'ysunadi.

Shunday qilib, *ehtimollar nazariyasining predmeti ommaviy bir jinsli tasodifiy hodisalarning ehtimoliy qonuniyatlarini o'rganishdir.*

XVII asrning boshlaridayoq ommaviy tasodifiy hodisalarga xos bo'lgan ba'zi-bir masalalarni tegishli matematik uslublar-dan foydalangan holda yechishga urinishgan. B. Paskal, P. Ferma va X. Gyuygens XVII asrning o'rtalarida turli qimor o'yinlarining kechishi va natijalarini o'rgana borib, klassik ehtimollar nazariyasiga asos solishdi. Ular o'z ishlarida ehtimollik va tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi tushunchalaridan oshkor bo'lmagan holda foydalanishgan. Faqat XVIII asrning boshida Ya.Bernulli ehtimollik tushunchasini shakllantiradi.

Ehtimollar nazariyasining keyingi muvaffaqiyatlari Muavr, Laplas, Gauss, Puasson va boshqalarning nomlari bilan bog'liq.

Ehtimollar nazariyasining rivojlanishiga P.L. Chebishev, A.A. Markov, A.M. Lyapunov, S.N. Bernshteyn, A.N. Kolmogorov, A.Ya. Xinchin, A. Proxorov va boshqalar kabi rus va sovet matematiklari ulkan hissa qo'shishgan.

Akademiklar V.I. Romanovski, S.X. Sirojiddinov, T.A. Sarimsoqov, T.A. Azlarov, Sh.K. Farmonov, professorlar I.S. Badalboyev, M.U. G'ofurov, Sh.A. Xoshimov kabi yorqin namoyondalari bo'lgan O'zbekiston maktabining ehtimollar nazariyasini rivojlantirishdagi alohida o'rni bor.

Yuqorida ta'kidlab o'tilganidek, amaliyot ehtiyojlari ehtimollar nazariyasining paydo bo'lishiga ko'maklashgan holda uning fan sifatida rivojlanishini ta'minladi, yangi tarmoqlar va bo'limlarning paydo bo'lishiga olib keldi. Vazifasi bosh to'plamga xos bo'lgan tavsiflarni tanlanma bo'yicha ma'lum bir ishonchlilik darajasida tiklashdan iborat bo'lgan matematik statistika ehtimollar nazariyasiga tayanadi. Ehtimollar nazariyasidan tasodifiy- jarayonlar nazariyasi, ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi, axborot nazariyasi, ishonchlilik nazariyasi, ekonometrik modellashtirish kabi fan tarmoqlari ajralib chiqdi.

Ehtimollar nazariyasini tatbiq qilishning eng muhim yo'nalishlari sifatida iqtisodiyot, texnika fanlarini ko'rsatish mumkin. Hozirgi paytda ehtimollar nazariyasiga tayanuvchi mo-dellashtirishlarsiz, korrelyatsiyaviy va regressiyaviy tahlil, adekvatlik hamda «sezgir» adaptiv modellarisiz iqtisodiy-texnik tasodifiy jarayonlarni tadqiq etishni tasavvur qilish qi-yin.

Avtomobil oqimlarida ro'y beradigan hodisalar, mashina qismlarining ishonchlilik darajasi, yo'llardagi avtohalokatlar, yo'llarni loyihalash jarayonidagi har xil holatlar determinirlanmagan bo'lganligi sababli ehtimollar nazariyasi uslublari orqali tadqiq etiluvchi muammolar doirasiga kiradi.

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari — tajriba yoki eksperiment va hodisalar. Muayyan shart-sharoit va holatlarda amalga oshiriladigan xatti-harakatlarni *eksperiment* deb ataymiz. Eksperimentning har bir amalga oshishi *tajriba* deb ataladi.

Eksperimentning har qanday mumkin bo'lgan natijasi *elementar hodisa* deb ataladi va ω orqali belgilanadi. Tasodifiy hodisalar bir qancha elementar hodisalardan tashkil topadi va $A, B, C, D, \dots$ orqali belgilanadi.

- 1) eksperiment o'tkazilishi natijasida ω elementar hodisalarning bittasi doimo sodir bo'ladi;
 - 2) bitta tajribada faqat bitta ω elementar hodisa sodir bo'ladi
- degan shartlar bajariladigan elementar hodisalar to'plami *elementar hodisalar fazosi* deb ataladi va Ω orqali belgilanadi.

Shunday qilib, ixtiyoriy tasodifiy hodisa elementar hodisalar fazosining qism to'plami bo'ladi. Elementar hodisalar fazosining ta'rifiga asosan muqarrar hodisani Ω orqali belgilash mumkin. Mumkin bo'lmagan hodisa $\emptyset$ orqali belgilanadi.

1-misol. Shashqoltosh tashlanmoqda. Ushbu eksperimentga to'g'ri keluvchi elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ ko'rinishda bo'ladi.

2-misol. Qutida 2 ta qizil, 3 ta ko'k va 1 ta oq, hammasi bo'lib 6 ta shar bo'lsin. Eksperiment qutidan tavakkaliga sharlarni olishdan iborat. Ushbu eksperimentga to'g'ri keluvchi elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerda elementar hodisalar quyidagi qiymatlarga ega bo'ladi: ω_1 — oq shar chiqdi; ω_2, ω_3 — qizil shar chiqdi; $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ — ko'k shar chiqdi. Quyidagi hodisalarni ko'rib chiqamiz:

A — oq sharning chiqishi;

V — qizil sharning chiqishi;

S — ko'k sharning chiqishi;

D — rangli (oq bo'lmagan) sharning chiqishi.

Bu yerda ko'rinib turibdiki, bu hodisalarning har biri u yoki bu imkon darajasiga ega: ba'zilar — ko'proq, boshqalari — kamroq. Shubhasiz, V hodisaning imkon darajasi A hodisaniki-dan ko'proq; xuddi shunday S niki V nikidan, D niki esa S niki-dan ko'proq. Hodisalarni imkon darajalari bo'yicha miqdoriy tomondan taqqoslash uchun, shubhasiz, har bir hodisa bilan ma'lum bir sonni bog'lash zarur. Bu son hodisa qanchalik imkoniyat-liroq bo'lsa, shunchalik kattaroq bo'ladi.

Bu sonni $P(A)$ orqali belgilaymiz va A hodisaning ehti-molligi deb ataymiz. Endi ehtimollikning ta'rifini beramiz.

Elementar hodisalar fazosi Ω chekli to'plam bo'lsin va uning elementlari $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ bo'lsin. Ularni teng imkoniyat-li elementar hodisalar deb hisoblaymiz, ya'ni har bir elemen-tar hodisaning sodir bo'lishi boshqalarnikidan ko'proq imkoniyatga ega emas. Ma'lumki, har bir A tasodifiy hodisa Ω ning qism to'plami sifatida elementar hodisalardan tashkil topgan. Bu elementar hodisalar A ning ro'y berishiga qulaylik tug'diruv-chilari deyiladi.

A hodisaning ehtimolligi

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda m — A hodisaning ro'y beri-shiga qulaylik

tugʻdiruvchi elementar hodisalar soni, $n - \Omega$ ga kiruvchi barcha elementar hodisalar soni.

Agar 1-misolda A orqali juft tomon tushishi hodisasi belgilansa, u holda

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2-misolda hodisalarning ehtimolliklari quyidagi qiy-matlarga ega: $P(A) = \frac{1}{6}$;

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(D) = \frac{5}{6}.$$

Ehtimollikning taʼrifidan uning quyidagi xossalari ke-lib chiqadi:

1. *Muqarrar hodisaning ehtimolligi birga teng.*

Haqiqatan, agar hodisa muqarrar boʻlsa, u holda barcha elementar hodisalar uning roʻy berishiga qulaylik tugʻdiradi. Bu holda $m=n$, binobarin

$$P(\Omega) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Mumkin boʻlmagan hodisaning ehtimolligi nolga teng.*

Haqiqatan, mumkin boʻlmagan hodisaning roʻy berishi uchun birorta ham elementar hodisa qulaylik tugʻdirmaydi. Bu holda $m=0$, binobarin

$$P(\emptyset) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. *Tasodifiy hodisaning ehtimolligi nol bilan bir orasidagi musbat sonidir.*

Haqiqatan, tasodifiy hodisaning roʻy berishiga elementar hodisalarning faqat bir qismi qulaylik tugʻdiradi. Bu holda $0 < m < n$, demak $0 < \frac{m}{n} < 1$, binobarin

$$0 < P(A) < 1.$$

Shunday qilib, ixtiyoriy hodisaning ehtimolligi

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1.2)$$

tengsizliklarni qanoatlantiradi

Hodisaning nisbiy chastotasi deb hodisa roʻy bergan taj-ribalar sonining aslida oʻtkazilgan jami tajribalar soniga nisbatiga aytiladi.

Shunday qilib, A hodisaning nisbiy chastotasi

$$W(A) = \frac{m}{n} \quad (1.3)$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda t — hodisaning roʻy berish-lari soni, p — jami tajribalar soni.

Ehtimollik va nisbiy chastotaning taʼriflarini solishti-rib, quyidagi xulosaga kelamiz: ehtimollikning taʼrifida taj-ribalar haqiqatan oʻtkazilganligi talab qilinmaydi; nisbiy chastotaning taʼrifida esa tajribalar aslida oʻtkazilganligi faraz qilinadi.

3-misol. Tasodifiy tanlangan 80 ta bir xil detaldan 3 tasi yaroqsiz ekanligi aniqlandi. Yaroqsiz detallarning nisbiy chastotasi $W(A) = \frac{3}{80}$ ga teng.

4-misol. Bir yil davomida ob'ektlarning birida 24 ta tek-shiruv o'tkazildi, bunda 19 marta qonunchilikning buzilishlari qayd etildi. Qonunchilik buzilishlarining nisbiy chastotasi $W(A) = \frac{19}{24}$ ga teng.

Uzoq kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, agar bir xil shart-sharoitlarda tajribalar o'tkazilib, ularning har birida tajriba-lar soni yetarlicha katta bo'lsa, u holda nisbiy chastota juda oz (tajribalar qancha ko'p o'tkazilgan bo'lsa, shuncha kam) o'zgarib, bi-ror o'zgarmas son atrofida tebranadi. Bu o'zgarmas son hodisa-ning ro'y berish ehtimolligi ekan.

Shunday qilib, agar tajriba yo'li bilan nisbiy chastota aniqlangan bo'lsa, u holda uni ehtimollikning taqribiy qiyma-ti sifatida olish mumkin. Bu ehtimollikning statistik ta'ri-fidir.

Xotimada ehtimollikning geometrik ta'rifini ko'rib chi-qaylik.

Agar elementar hodisalar fazosi Ω ni tekislik yoki fazo-dagi qandaydir bir soha, A ni esa uning qism to'plami deb qaray-digan bo'lsak, u holda A hodisaning ehtimolligi A va Ω ning yuzalari yoki hajmlari nisbatida qaraladi hamda

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} \quad (1.4)$$

va

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} \quad (1.5)$$

formulalar bo'yicha topiladi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Tabiat va jamiyat qonunlari sababiy bog'lanishlarning namo-yon bo'lish shakli bo'yicha qanday sinflarga bo'linadi?
2. Hodisalarni qanday turlarga bo'lish mumkin?
3. Ehtimollar nazariyasining predmeti nima?
4. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishi tarixi haqida nimalar-ni bilasiz?
5. Ehtimollar nazariyasining iqtisodiy, texnik masalalar uchun ahamiyati qanday?
6. Eksperiment, tajriba, elementar hodisa va hodisa nima, ular qanday belgilanadi?
7. Elementar hodisalar fazosi deb nimaga aytiladi?
8. Hodisaning ehtimolligi qanday aniqlanadi?
9. Ehtimollikning qaysi xossalari bilasiz?
10. Hodisaning nisbiy chastotasi haqida nima bilasiz?
11. Ehtimollikning statistik ta'rifining mohiyati nimada?
12. Ehtimollikning geometrik ta'rifi qanaqa?

2-mavzu

Hodisalar ustida amallar. Shartli ehtimollik

Reja:

1. Hodisalar ustida amallar.
2. Shartli ehtimollik.

Ikkita A i V tasodifiy hodisalar bir-biri bilan qancha-lik bog'langan, bu hodisalardan bittasining sodir bo'lishi ik-kinchisining sodir bo'lish imkoniyatiga qay darajada ta'sir qi-ladi degan savol tez-tez paydo bo'ladi.

Ikkita hodisa o'rtasidagi bog'lanishning eng sodda misoli sifatida hodisalardan birining sodir bo'lishi ikkinchisining albatta sodir bo'lishiga olib keladigan yoki, aksincha, hodisalar-dan birining sodir bo'lishi ikkinchisining sodir bo'lish imko-niyatini yo'qqa chiqaradigan holatlarni keltirish mumkin.

Agar eksperiment natijasida A va V hodisalar bir vaqt-ning o'zida ro'y berishi mumkin bo'lmasa, ular *birgalikda bo'lma-gan* hodisalar deb ataladi, aks holda esa *birgalikda bo'lgan* hodi-salar deb ataladi.

1-misol. Yashikdan tavakkaliga bitta detal olindi. Uning standart bo'lishi nostandart ekanligini istisno qiladi. «Tavak-kaliga olingan detalning standart bo'lishi» va «Tavakkaliga olingan detalning nostandart bo'lishi» hodisalari birgalikda bo'lmagan hodisalardir.

Agar hodisalar elementar hodisalar fazosining qism to'p-lamlari sifatida qaralsa, u holda hodisalar o'rtasidagi munosa-batlarni to'plamlar o'rtasidagi munosabatlar sifatida talqin qilish mumkin. Birgalikda bo'lmagan hodisalar — bu umumiy elementar hodisalarga ega bo'lmagan hodisalardir.

Agar eksperiment natijasida A hodisaning ro'y berishidan V hodisaning ro'y berishi albatta kelib chiqsa, A hodisa V hodi-sani *ergashtiradi* deyiladi va bu $A \subset B$ orqali belgilanadi. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa, u holda $A = B$ bo'ladi.

2-misol. Shashqoltosh tashlanmoqda. «4 raqamli tomon chiq-di» hodisasi «juft ochko chiqdi» hodisasini ergashtiradi.

Ikkita A va V hodisalarning yig'indisi deb yo A hodisaning, yo V hodisaning, yo shu ikkala hodisaning ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi. U $A+V$ yoki $A \cup B$ orqali belgilanadi. *Bir nechta hodisalarning yig'indisi* deb shu hodisalardan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

3-misol. Zambarakdan ikki marta o'q uzilmoqda. Agar A ho-disa birinchi o'q uzishda nishonga tegish, V esa ikkinchi o'q uzish-da nishonga tegish hodisasi bo'lsa, u holda $A+V$ hodisasi yo bi-rinchi o'q uzishda, yo ikkinchi o'q uzishda, yo ikkala o'q uzishda ni-shonga tegish hodisasi bo'ladi.

Ikkita A va V hodisalarning ko'paytmasi deb A va V hodi-salarning birgalikda ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga ay-tiladi. U AV yoki $A \cap B$

orqali belgilanadi. *Bir nechta hodisa-larning ko'paytmasi* deb shu hodisalardan hammasining birga-likda ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

4-misol. Yashikda birinchi va ikkinchi sonli zavodlarda ish-lab chiqarilgan detallar bor. Agar A hodisa standart detalning chiqishi, V esa detal birinchi sonli zavodda tayyorlangan hodisa-si bo'lsa, u holda AV hodisasi birinchi sonli zavodning standart detali chiqishi hodisasi bo'ladi.

A hodisaga *qarama-qarshi* hodisa $\bar{A}$ orqali belgilanadi. U A hodisa ro'y bermaganda va faqat shu holdagina ro'y bergan hi-soblanadi. Boshqacha qilib aytganda, A va $\bar{A}$ hodisalar ikkalasi jamlanib muqarrar hodisani tashkil etadigan birgalikda bo'l-magan hodisalaridir, ya'ni $A \cup \bar{A} = \Omega$.

5-misol. O'q uzishda nishonga tegish va xato ketish — qara-ma-qarshi hodisalar. Agar A nishonga tegish bo'lsa, u holda $\bar{A}$ xa-to ketishdir.

A hodisaning ro'y berishi va V hodisaning ro'y bermasli-gidan iborat bo'lgan hodisa A va V hodisalarining ayirmasi deb ataladi va $A \setminus V$ orqali belgilanadi.

Agar ikkita hodisadan birining ehtimolligi ikkinchisi-ning ro'y berishi yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lmasa, u holda bunday hodisalar *bog'liqmas* deb ataladi. Aks holda bu hodisalar *bog'liq* deb ataladi.

6-misol. Tanga 2 marta tashlanmoqda. Birinchi tashlashda gerbning chiqishi (A hodisa)ning ehtimolligi ikkinchi tashlash-da gerbning chiqishi (V hodisa)ga bog'liq emas. O'z navbatida, ik-kinchi tashlashda gerbning chiqishi birinchi tashlashning natija-siga bog'liq emas. Shunday qilib, A va V hodisalar bog'liq emas.

Agar bir nechta hodisaning ixtiyoriy ikkitasi o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda bunday hodisalar *juft-jufti bilan bog'liq emas* deb ataladi.

A va V ikkita tasodifiy hodisa bo'lib, bunda $P(B) \neq 0$ bo'l-sin. Bog'liq hodisalarining ta'rifidan ikkita hodisadan biri-ning ehtimolligi ikkinchisining ro'y berishi yoki ro'y bermasli-giga bog'liq ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun, agar bizni A hodisaning ehtimolligi qiziqтира, u holda V hodisaning ro'y berganligini bilish muhimdir.

A hodisaning V hodisa ro'y berganligi shartidagi ehtimol-ligi *shartli ehtimollik* deb ataladi va $P(A/B)$ orqali belgi-lanadi.

7-misol. Qutida 3 ta oq va 3 ta qora shar bor. Qutidan ta-vakkaliga orqaga qaytarmasdan ikki marta bittadan shar olina-di. Agar birinchi sinovda qora shar chiqqan bo'lsa (V hodisa), ik-kinchi sinovda oq sharning chiqishi (A hodisa)ning ehtimolligi topilsin.

Yechish. Birinchi sinovdan keyin qutida hammasi bo'lib 5 ta shar, ulardan 3 tasi oq shar qoldi. Qidirilayotgan shartli ehti-mollik $P(A/B) = \frac{3}{5}$ ga teng.

Endi shartli ehtimollik formulasini chiqaramiz. A va V hodisalarining ro'y berishiga n ta elementar hodisadan mos ra-vishda m va k tasi qulaylik tug'dirsin; u

holda, (1.1) ga asosan, ularning shartsiz ehtimolliklari mos ravishda $\frac{m}{n}$ va $\frac{k}{n}$ ga teng. A hodisaning ro'y berishiga V hodisa ro'y berganligi shartida r ta elementar hodisa qulaylik tug'dirsin, u holda, (1.1) ga asosan, A hodisaning shartli ehtimolligi

$$P(A/B) = \frac{r}{k}$$

ga teng. Surat va maxrajni n ga bo'lib, shartli ehtimollikning

$$P(A/B) = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

yoki

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (2.1)$$

formulasini olamiz, chunki AV hodisaga r ta elementar hodisa mos keladi, binobarin, $\frac{r}{n}$ — uning shartsiz ehtimolligi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Qanday hodisalar birgalikda bo'lmagan, qaysilari esa birga-likda bo'lgan hodisalar deb ataladi?
2. «A hodisa o'zidan keyin V hodisani keltirib chiqaradi (er-gashtiradi)» degan ibora nimani bildiradi va u qanday belgi-lanadi?
3. Hodisalarning yig'indisi deb nimaga aytiladi va u qanday belgilanadi?
4. Hodisalarning ko'paytmasi deb nimaga aytiladi va u qanday belgilanadi?
5. Qarama-qarshi hodisa nima va u qanday belgilanadi?
6. Hodisalarning ayirmasi deb nimaga aytiladi va u qanday belgilanadi?
7. Qanday hodisalar bog'liqmas, qaysilari esa bog'liq hodisalar deb ataladi?
8. Shartli ehtimollik nima va uning formulasi qanday?

3-mavzu

Ehtimolliklarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari.

To'la ehtimollik va Bayes formulalar

Reja:

1. Ehtimolliklarni qo'shish teoremlari.
2. Ehtimolliklarni ko'paytirish teoremlari.
3. To'la ehtimollik formulasi.
4. Bayes formulasi.

A va V hodisalar birgalikda bo'lmasin hamda ularning ehtimolliklari berilgan bo'lsin. Yo A , yo V hodisaning ro'y berishi, ya'ni bu hodisalarning yig'indisi $A+V$ ning ehtimolligini qan-day topish mumkin? Bunga quyidagi teorema javob beradi.

3.1-teorema (birgalikda bo'lmagan hodisalarning ehtimolliklarini qo'shish). *Ikkita birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisining ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklari-ning yig'indisiga teng:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (3.1)$$

Isbot. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

- n — elementar hodisalarning umumiy soni;
 m_1 — A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar soni;
 m_2 — V hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar soni.

Yo A , yo V hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar soni $m_1 + m_2$ ga teng. Shuning uchun

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$$

bo'ladi.

$$\frac{m_1}{n} = P(A) \text{ va } \frac{m_2}{n} = P(B) \text{ ekanligini e'tiborga olib,}$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

ni olamiz.

3.1-natija. *Bir nechta birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisining ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklarining yig'indisiga teng:*

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (3.2)$$

1-misol. Qutida 30 ta shar bor, ulardan 10 tasi qizil, 5 ta-si ko'k va 15

tasi oq. Rangli shar chiqishining ehtimolligi to-pilsin.

Yechish. Rangli sharning chiqishi yo qizil, yo ko'k sharning chi-qishini bildiradi.

Qizil shar chiqishi (A hodisa)ning ehtimolligi $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ ga teng.

Ko'k shar chiqishi (V hodisa)ning ehtimolligi esa $P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ ga teng.

A va V hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalardir (biror rangdagi sharning chiqishi boshqa rangdagi sharning chiqishini istisno qiladi), shuning uchun qidirilayotgan ehtimollik

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \text{ bo'ladi.}$$

Qarama-qarshi hodisalar birgalikda muqarrar hodisani tashkil etgani uchun 3.1-teoremadan

$$P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

ekanligi kelib chiqadi, shu sababli

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \quad (3.3)$$

2-misol. Kun davomida yog'ingarchilik bo'lishining ehtimol-ligi $p = 0,3$ ga teng. Kun ochiq bo'lishining ehtimolligi topil-sin.

Yechish. «Kun davomida yog'ingarchilik bo'ladi» va «Kun ochiq» hodisalari qarama-qarshi hodisalardir, shuning uchun qidirila-yotgan ehtimollik $q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0,7$ ga teng.

(2.1) formuladan quyidagi teoremani olamiz.

3.2-teorema (bog'liq hodisalarning ehtimolliklarini ko'paytirish). *Ikkita bog'liq hodisalar ko'paytmasining ehti-molligi ulardan birining ehtimolligining shu hodisa ro'y berdi degan farazda hisoblangan ikkinchi hodisa shartli ehtimolligi-ga ko'paytmasiga teng:*

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B). \quad (3.4)$$

3-misol. Yig'uvchida 3 ta konussimon va 7 ta ellipssimon valik bor. Yig'uvchi tavakkaliga avval bitta valikni, so'ngra esa ikkinchi valikni oldi. Birinchi valik konussimon, ikkinchisi esa ellipssimon ekanligining ehtimolligi topilsin.

Yechish. Birinchi valik konussimon ekanligi (V hodisa)ning ehtimolligi $P(B) = \frac{3}{10}$ ga teng. Ikkinchi valik ellipssimon ekanligi (A hodisa)ning birinchi

valik konussimon degan faraz-da hisoblangan shartli ehtimolligi $P(A/B) = \frac{7}{9}$ ga teng.

U holda (3.4) formulaga asosan qidirilayotgan ehtimollik

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B) = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{30} \text{ bo'ladi.}$$

Endi A va V hodisalar bog'liqmas bo'lgan holga o'tamiz va bu hodisalar ko'paytmasining ehtimolligini topamiz.

A hodisa V hodisaga bog'liq bo'lmagani uchun uning $P(A/B)$ shartli ehtimolligi $P(A)$ shartsiz ehtimolligiga tengdir, ya'ni

$$P(A/B) = P(A).$$

Bu yerdan quyidagi teorema kelib chiqadi.

3.3-teorema (bog'liqmas hodisalarning ehtimolliklari-ni ko'paytirish). *Ikkita bog'liqmas hodisalar ko'paytmasining ehtimolligi shu hodisalar ehtimolliklarining ko'paytmasiga teng:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (3.5)$$

3.2-natija. *Bir nechta bog'liqmas hodisalar ko'paytmasi-ning ehtimolligi shu hodisalar ehtimolliklarining ko'paytmasiga teng:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

4-misol. 10 tadan detali bor 3 ta yashik mavjud. 1-yashikda 8 ta, 2-yashikda 7 ta va 3-yashikda 9 ta standart detal bor. Har bir yashikdan tavakkaliga bittadan detal olinmoqda. Uchchala olingan detal standart bo'lishining ehtimolligi topilsin.

Yechish. 1-yashikdan standart detal olinishi (A hodisa)ning ehtimolligi

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0,8 \text{ ga teng. 2-yashikdan standart detal olinishi (V hodisa)ning}$$

$$\text{ehtimolligi } P(B) = \frac{7}{10} = 0,7 \text{ ga teng. 3-yashikdan standart detal olinishi (S}$$

$$\text{hodisa)ning ehtimolligi } P(C) = \frac{9}{10} = 0,9 \text{ ga teng.}$$

A , V va S hodisalar bog'liqmas bo'lgani uchun 3.2-natijaga asosan qidirilayotgan ehtimollik

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504 \text{ ga teng.}$$

Endi A va V hodisalar birgalikda bo'lgan holga o'tamiz va bu hodisalar yig'indisining ehtimolligini topamiz.

3.4-teorema (birgalikda bo'lgan hodisalarning ehtimolliklarini qo'shish). *Ikkita birgalikda bo'lgan hodisalar yig'indisining ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklarining yig'indisidan ularning ko'paytmasi ehtimolligining ayirmasiga teng:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (3.6)$$

5-misol. Birinchi va ikkinchi zambarakdan o'q uzishda ni-shonga tegish ehtimolliklari mos ravishda $p_1 = 0,7$ va $p_2 = 0,8$ ga teng. Ikkala zambarakdan

bir vaqtning o'zida o'q uzishda hech bo'lmaganda bitta zambarakning o'qi nishonga tegishi ehtimolli-gi topilsin.

Yechish. Har bir zambarakdan nishonga tegish ehtimolligi boshqa zambarakdan o'q uzish natijasiga bog'liq emas, shuning uchun A hodisa (birinchi zambarakdan nishonga tegish) va V hodisa (ikkinchi zambarakdan nishonga tegish) bog'liqmas.

Shu sababli AV hodisa (ikkala zambarakdan nishonga te-gish)ning ehtimolligi $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$ ga teng. U holda qidirilayotgan ehtimollik

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94 \text{ ga teng.}$$

Agar bog'liq mas $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar birgalikda muqarrar hodisani tashkil etsa, u holda shu hodisalardan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimolligini quyidagi formula bo'yicha topish mumkin

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (3.7)$$

6-misol. Bosmaxonada 4 ta dastgoh bor. Har bir dastgoh-ning ayni shu paytda ishlashining ehtimolligi 0,9 ga teng. Ayni shu paytda hech bo'lmaganda bitta dastgoh ishlashi (A hodisa)ning ehtimolligi topilsin.

Yechish. Ayni shu paytda dastgoh ishlamasligining ehtimol-ligi $q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$ ga teng. U holda qidirilayotgan ehti-mollik $P(A) = 1 - q^4 = 1 - (0,1)^4 = 0,9999$ ga teng.

Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar birgalikda bo'lmasa va hamma-si jamlanib muqarrar hodisani tashkil etsa, ya'ni $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$; $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ bo'lsa, u holda ular *hodisalarning to'la gruppasini* tashkil etadi deb ataladi.

Faraz qilaylik, A hodisa faqat to'la gruppani tashkil etuv-chi $H_1, H_2, \dots, H_n$ hodisalardan biri ro'y bergandagina sodir bo'lishi mumkin, bu hodisalarni *gipotezalar* deb ataymiz. Bu hodi-salarning ehtimolliklari va $P(A / H_i)$ ($i = 1, n$) shartli ehti-molliklar ma'lum bo'lsin.

$A\Omega = A$ bo'lgani uchun $A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$ bo'ladi.

$H_1, H_2, \dots, H_n$ larning birgalikda emasligidan $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$ hodisalarning birgalikda emasligi kelib chiqadi.

(3.1) formulani qo'llab, quyidagini olamiz

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n).$$

(3.4) formulaga asosan ($H_1, H_2, \dots, H_n$ hodisalar bog'liq bo'lishi ham mumkin) oxirgi ifodaning o'ng tomonidagi har bir $P(AH_i)$ qo'shiluvchini $P(A / H_i)P(H_i)$ ko'paytma bilan almashti-rib,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) \quad (3.8)$$

to'la ehtimollik formulasini olamiz.

7-misol. Detallarning 2 ta to'plami bor. 1-to'plamdan ta-vakkaliga olingan detal standart bo'lishining ehtimolligi 0,8 ga, ikkinchisidan olinganniki esa 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan to'plamdan tavakkaliga olingan detalning standart bo'lishi ehtimollligi topilsin.

Yechish. A orqali «olingan detal standart» hodisasini bel-gilaylik. Detal yo 1-to'plamdan olinishi mumkin (H_1 hodisa), yo 2-to'plamdan (H_2 hodisa).

Detal 1-to'plamdan olinishining ehtimolligi $P(H_1) = \frac{1}{2}$ ga, 2-to'plamdan

olinishining ehtimolligi esa $P(H_2) = \frac{1}{2}$ ga teng bo'ladi.

Misol shartiga asosan $P(A/H_1) = 0,8$ va $P(A/H_2) = 0,9$ bo'ladi. U holda qidirilayotgan ehtimollik to'la ehtimollik formulasiga asosan topiladi va quyidagiga teng

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,85.$$

To'la ehtimollik formulasini keltirib chiqarishdagi ho-disalar uchun A hodisa ro'y bergan bo'lsin va gipotezalarining $P(H_k/A)$ ($k = 1, n$) shartli ehtimolliklarini topish masalasi qo'yilgan bo'lsin.

$$(2.1) \text{ formuladan } P(H_k/A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

So'ngra, (3.4) formuladan quyidagini olamiz

$$P(AH_k) = P(H_k)P(A/H_k).$$

To'la ehtimollik formulasini qo'llab, bu yerdan va bundan avvalgi munosabatdan

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)} \quad (3.9)$$

Bayes formulasini keltirib chiqaramiz.

8-misol. Zavod sexida tayyorlanayotgan detallarning standart ekanligini ikkita nazoratchidan biri tekshiradi. Detalning 1-nazoratchiga tushish ehtimolligi 0,6 ga, 2-nazoratchiga tushish ehtimolligi esa 0,4 ga teng. Yaroqli detalning 1-nazoratchi tomonidan standart deb topilishining ehtimolligi 0,94 ga, 2-nazoratchi tomonidan esa 0,98 ga teng bo'lsin. Yaroqli detal tekshiruvda standart deb topildi. Bu detal 1-nazoratchi tomonidan tekshirilganligining ehtimolligi topilsin.

Yechish. A orqali yaroqli detal standart deb topilishi hodisasini belgilaymiz.

Ikkita faraz qilish mumkin

1) detalni 1-nazoratchi tekshirdi (H_1 gipotezasi);

2) detalni 2-nazoratchi tekshirdi (H_2 gipotezasi).

Misol shartiga asosan quyidagilarga egamiz:

$P(H_1) = 0,6$ (detalning 1-nazoratchiga tushish ehtimolligi);

$P(H_2) = 0,4$ (detalning 2-nazoratchiga tushish ehtimolligi);

$P(A/H_1) = 0,94$ (yaroqli detalning 1-nazoratchi tomonidan standart deb topilishining ehtimolligi);

$P(A/H_2) = 0,98$ (yaroqli detalning 2-nazoratchi tomonidan standart deb topilishining ehtimolligi).

Qidirilayotgan ehtimollikni Bayes formulasi bo'yicha topamiz:

$$\begin{aligned} P(H_1/A) &= \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \\ &= \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,58996 \end{aligned}$$

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimolliklarini qo'shish teoremasi nima haqida va uning isboti qanday?
2. Qarama-qarshi hodisaning ehtimolligi nimaga teng?
3. Bog'liq va bog'liqmas hodisalar ehtimolliklarini ko'paytirish teoremlarida nima haqida gap boradi?
4. Birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimolliklarini qo'shish teoremasi nima haqida?
5. Hech bo'lmaganda bitta hodisaning ro'y berish ehtimolligini qanday topish mumkin?
6. Qaysi hodisalar hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi?
7. To'la ehtimollik formulasi nima va u qanday keltirib chiqariladi?
8. Bayes formulasi nima va u qanday keltirib chiqariladi?

4-mavzu

Bog'liqmas tajribalar ketma-ketligi. Laplasning lokal va integral

teoremlar

Reja:

1. Bog'liqmas tajribalar ketma-ketligi.
2. Bernulli formulasi.
3. Muvaffaqiyatlarning eng ehtimolli soni.
4. Laplasning lokal teoremasi.
5. Laplasning integral teoremasi.
6. Nisbiy chastotaning o'zgarish ehtimollikdan chetlanishining ehtimolli.

Har birida A hodisa ro'y berishi (muvaffaqiyat) ham, ro'y bermasligi (muvaffaqiyatsizlik) ham mumkin bo'lgan n ta bog'liqmas tajribalar amalga oshirilsin. A hodisaning har bir tajribadagi ehtimollikni bir xil, ya'ni r ga teng deb hisob-laymiz. Demak, A hodisa ro'y bermasligining ehtimolli ham har bir tajribada doimiy va $q=1-p$ ga teng. Tajribalarning bunday ketma-ketligi *Bernulli sxemasi* deb ataladi.

Bunday tajribalarga misol sifatida, masalan, texnologik va tashkiliy shart-sharoitlarning doimiyligi holatida ma'lum bir uskunalarda mahsulotlarni ishlab chiqarishni qarash mum-kin, bu holda yaroqli mahsulotni tayyorlash — muvaffaqiyat, yaroqsizini tayyorlash — muvaffaqiyatsizlik. Agar biror mahsulotni tayyorlash jarayoni avvalgi mahsulotlarning yaroqli yoki yaroqsiz ekanligiga bog'liq emas deb hisoblansa, bu vaziyat Bernulli sxemasiga mos keladi.

Boshqa misol sifatida nishonga qarata o'q uzishni olish mumkin. Bu yerda o'qning nishonga tegishi — muvaffaqiyat, ni-shonga tegmasligi — muvaffaqiyatsizlik.

n ta tajribada A hodisa roppa-rosa k marta ro'y berishi va demak, $n-k$ marta ro'y bermasligi, ya'ni k ta muvaffaqiyat va $n-k$ ta muvaffaqiyatsizlik bo'lishining ehtimollikni hisoblash masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Qidirilayotgan ehtimollikni $P_n(k)$ orqali belgilaymiz. Masalan, $P_5(3)$ yozuvi beshta tajribada hodisa roppa-rosa 3 marta ro'y berishi va demak, 2 marta ro'y bermasligining ehtimollikni bildiradi.

p ta bog'liqmas tajribalar ketma-ketligini p ta bog'liqmas hodisalar ko'paytmadan iborat bo'lgan murakkab hodisa deb qarash mum-kin. Demak, p ta tajribada A hodisa k marta ro'y berishi va $n-k$ marta ro'y bermasligining ehtimolli bog'liqmas hodisalarning ehtimolliklarini ko'paytirish haqidagi 3.3-teoremaga asosan $p^k q^{n-k}$ ga teng. Bunday murakkab hodisalar p ta elementdan k

ta-dan nechta gruppalar tuzish mumkin bo'lsa, shuncha, ya'ni C_n^k ta bo'ladi.

Bu murakkab hodisalar birgalikda bo'lmagani uchun birgalikda bo'lmagan hodisalarning ehtimolliklarini qo'shish haqidagi 3.1-teoremaga asosan izlanayotgan ehtimollik mumkin bo'lgan barcha murakkab hodisalar ehtimolliklarining yig'indisiga teng. Bu murakkab hodisalarning ehtimolliklari bir xil bo'lgani uchun izlanayotgan ehtimollik (p ta tajribada A hodisaning k marta ro'y berish ehtimolligi) bitta murakkab hodisaning ehtimolligini ularning soniga ko'paytirilganiga teng

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

yoki

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (4.1)$$

Hosil qilingan formula *Bernulli formulasi* deb ataladi.

1-misol. Bir sutkada elektr quvvati sarfining belgilangan me'yordan ortib ketmasligi ehtimolligi $p = 0,75$ ga teng. Yaqin 6 sutkaning 4 sutkasi davomida elektr quvvati sarfining belgilangan me'yordan ortib ketmasligi ehtimolligi topilsin.

Yechish. 6 sutkaning har birida elektr quvvatining me'yorda sarflanishining ehtimolligi o'zgaras va $p = 0,75$ ga teng. Demak, har bir sutkada elektr quvvatining me'yordan ortiq sarflanishining ehtimolligi ham o'zgaras va $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$ ga teng.

Izlanayotgan ehtimollik Bernulli formulasiga asosan

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} (0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = \frac{1215}{4096} \approx 0,297$$

ga teng bo'ladi.

Qator masalalarda muvaffaqiyatlarning eng ehtimolli sonini, ya'ni ehtimolligi (4.1) ehtimolliklar ichida eng kattasi bo'lgan muvaffaqiyatlarning soni $\hat{m}$ ni topish talab etiladi. k ortganda (4.1) ehtimolliklar avval o'sib, so'ngra, ma'lum bir paytdan boshlab, kamaygani sababli $\hat{m}$ uchun

$$P_n(\hat{m}) \geq P_n(\hat{m} - 1) \quad (4.2)$$

va

$$P_n(\hat{m}) \geq P_n(\hat{m} + 1) \quad (4.3)$$

munosabatlar o'rinli bo'lishi kerak.

(4.1) formuladan va $p + q = 1$ munosabatdan foydalanib, (4.2) va (4.3) dan mos ravishda

$$(n - \hat{m} + 1)p \geq \hat{m}q \quad (4.4)$$

va

$$(\hat{m} + 1)q \geq (n - \hat{m})p \quad (4.5)$$

tengsizliklarni olamiz.

Pirovard natijada $\hat{m}$ ning uzunligi 1 ga teng bo'lgan in-tervalda yotishi kelib chiqadi:

$$np - q \leq \hat{m} \leq np + p. \quad (4.6)$$

Biroq, ta'kidlab o'tish joizki, Bernulli formulasini p ning katta qiymatlarida qo'llash ancha qiyin, chunki formula ju-da katta sonlar ustida amallar bajarishni talab qiladi.

Masalan, $n = 50$, $k = 30$, $p = 0,1$ bo'lsa, u holda $P_{50}(30)$ ehtimollikni hisoblash uchun $P_{50}(30) = \frac{50!}{30! \cdot 20!} \cdot (0,1)^{30} \cdot (0,9)^{20}$ ifodani hisoblashga

to'g'ri keladi, bu yerda $50! = 30414093 \cdot 10^{57}$, $30! = 26525286 \cdot 10^{25}$, $20! = 24329020 \cdot 10^{11}$.

Bunday savol tug'ilishi tabiiy: bizni qiziqtirayotgan ehti-mollikni Bernulli formulasini qo'llamasdan hisoblash ham mumkinmi? Mumkin ekan. Laplasning lokal teoremasi tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda hodisaning n ta tajribada roppa-ro-sa k marta ro'y berishi ehtimolligini taqribiy hisoblash uchun asimptotik formula beradi.

Laplasning lokal teoremasi. Agar har bir tajribada A ho-disaning ro'y berish ehtimolligi r o'zgarmas bo'lib, nol va bir-dan farqli bo'lsa, u holda p ta tajribada A hodisaning roppa-rosa k marta ro'y berishining ehtimolligi $P_n(k)$ taqriban (p qancha katta bo'lsa, shunchalik aniq)

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x)$$

funksiyaning $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ dagi qiymatiga teng.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ funksiyaning qiymatlaridan tuzilgan jad-vallar mavjud.}$$

Bunda $\phi(-x) = \phi(x)$ ekanligini hisobga olish ke-rak, chunki $\phi(x)$ funksiya juft funksiyadir.

Shunday qilib, p ta bog'liqmas tajribada A hodisaning roppa-rosa k marta ro'y berish ehtimolligi taqriban

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x) \quad (4.7)$$

ga teng, bu yerda $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

2-misol. Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta tajribada bu hodisaning roppa-rosa 80 marta ro'y berishi ehtimolligi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $n = 400$; $k = 80$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. (4.7) formuladan foydalanamiz:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \phi(x) = \frac{1}{8} \cdot \phi(x).$$

x ning misol shartlari orqali aniqlanadigan qiymatini hisob-laymiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0.$$

Jadvaldan $\phi(0) = 0,3989$ ekanligini topamiz.

$$\text{Izlanayotgan ehtimollik } P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986 \text{ ga teng.}$$

Bernulli formulasi ham taxminan shu natijaga olib kela-di (hisoblashlar uzundan-uzoq bo'lgani uchun keltirilmadi):

$$P_{400}(80) = 0,0498.$$

Endi p ta tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta (qisqacha « k_1 dan k_2 martagacha») ro'y berishi ehtimolligi $P_n(k_1, k_2)$ ni hisoblash talab qilingan bo'lsin. Bu mu-ammo quyidagi teorema yordamida hal qilinadi.

Laplasning integral teoremasi. Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi r o'zgarmas bo'lib, nol va bir-dan farqli bo'lsa, u holda p ta tajribada A hodisaning k_1 dan k_2 martagacha ro'y berishi ehtimolligi $P_n(k_1, k_2)$ quyidagi aniq in-tegralga teng:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (4.8)$$

$$\text{bu yerda } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \text{ va } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Laplasning integral teoremasini qo'llashni talab etuvchi masalalarni yechishda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ integrali uchun max-sus jadvaldan foydalaniladi.}$$

Jadvalda $\Phi(x)$ funksiyaning qiy-matlari $x \geq 0$ uchun berilgan, $x < 0$ uchun esa $\Phi(x)$ funksiyaning toq ekanligidan foydalanamiz, ya'ni $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

$\Phi(x)$ funk-siya ko'pincha *Laplas funksiyasi* deyiladi.

Shunday qilib, p ta bog'liqmas tajribada A hodisaning k_1 dan k_2 martagacha ro'y berishi ehtimolligi

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (4.9)$$

ga teng, bu yerda $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ va $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

3-misol. Tashkilotning soliq inspeksiyasi tekshiruvdan o'tmasligining ehtimolligi $p = 0,2$ ga teng. Tasodifan olingan 400 ta tashkilotdan 70 tadan 100 tagachasi tekshiruvdan o'tmasli-gining ehtimolligi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. (4.9) formuladan foydalanamiz:

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Integrallashning quyi va yuqori chegaralarini hisoblaymiz:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25 ;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5 .$$

Shunday qilib, quyidagini hosil qilamiz

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) .$$

$\Phi(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvalidan $\Phi(2,5) = 0,4938$; $\Phi(1,25) = 0,3944$ ekanligini topamiz.

Izlanayotgan ehtimollik quyidagiga teng

$$P_{400}(70, 100) \approx 0,4938 + 0,3944 = 0,8882 .$$

1-mavzuda ta'kidlab o'tilganidek, ehtimollikning statis-tik ta'rifiga asosan ehtimollik sifatida nisbiy chastotani olish mumkin, shuning uchun ular orasidagi

farqni baholash qi-ziqish uyg'otishi mumkin. $\frac{m}{n}$ nisbiy chastotaning o'zgarmas r

eh-timollikdan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha avvaldan be-rilgan $\varepsilon > 0$ sonidan katta bo'lmasligining ehtimolligi

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \quad (4.10)$$

ga teng.

4-misol. Detalning nostandart bo'lishi ehtimolligi $p = 0,1$ ga teng. Tasodifan tanlangan 400 ta detal ichida nostan-dart detallar bo'lishi nisbiy chastotasining $p = 0,1$ ehtimollik-dan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,03

dan katta bo'lmashi-gining ehtimolligi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $n = 400$; $p = 0,1$; $q = 0,9$; $\varepsilon = 0,03$.

$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,1\right| \leq 0,03\right)$ ehtimollikni topish talab qilinadi.

(4.10) formuladan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,1\right| \leq 0,03\right) \approx 2\Phi\left(0,03 \cdot \sqrt{\frac{400}{0,1 \cdot 0,9}}\right) = 2\Phi(2).$$

Jadvaldan $\Phi(2) = 0,4772$ ni topamiz. Demak, $2\Phi(2) = 0,9544$.
Shunday qilib, izlanayotgan ehtimollik taqriban 0,9544 ga teng.

Hosil qilingan natijaning ma'nosi quyidagicha: agar yetar-li darajada ko'p marta tekshirish o'tkazilib, har bir tekshirish-da 400 tadan detal olinsa, u holda bu tekshirishlarning taxmi-nan 95,44 % ida nisbiy chastotaning o'zgarish $p = 0,1$ ehtimol-likdan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,03 dan katta bo'l-maydi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Bernulli sxemasi deb nima ataladi?
2. Bernulli formulasi qanday keltirib chiqariladi?
3. Muvaffaqiyatlarning eng ehtimolli soni qanday topiladi?
4. Laplasning lokal teoremasida nima haqida gap boradi?
5. Laplasning integral teoremasida nima haqida gap boradi?
6. Nisbiy chastotaning o'zgarish ehtimollikdan chetlanishining ehtimolligi qanday topiladi?

Tayanch iboralar:

Erkli tajribalar ketma-ketligi, Bernulli sxemasi, Bernulli formulasi, muvaffaqiyatlarning eng ehtimolli soni, Laplas-ning lokal teoremasi, p ta erkli tajribada A hodisaning roppa-ro-sa k marta ro'y berish ehtimolligi, Laplasning integral teore-masi, p ta erkli tajribada A hodisaning k_1 dan k_2 martagacha ro'y berishi ehtimolligi, Laplas funksiyasi, nisbiy chastotaning o'z-garmas ehtimollikdan chetlanishining ehtimolligi.

5-mavzu

Diskret tasodifiy miqdorlar. Taqsimot qonuni. Diskret taqsimotlarning turlari

Reja:

1. Tasodifiy miqdor tushunchasi va uning turlari.
2. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni.
3. Ayrim diskret taqsimotlar.

Oldingi mavzularda u yoki bu sonning chiqishidan iborat bo'lgan hodisalar bir necha marta keltirildi. Masalan, shashqol-tosh tashlanganda 1, 2, 3, 4, 5 va 6 sonlari chiqishi mumkin edi. Chiqqan ochkolar sonini oldindan aniqlab bo'lmaydi, chunki u to'raligicha hisobga olishning imkoni bo'lmagan ko'pgina tasodifiy sabablarga bog'liq. Shu ma'noda ochkolar soni tasodifiy katta-likdir; 1, 2, 3, 4, 5 va 6 sonlari shu kattalikning mumkin bo'lgan qiymatlaridir.

Tasodifiy miqdor deb dastlab ma'lum bo'lmagan, oldindan hisobga olinishi mumkin bo'lmagan tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan bitta va faqat bitta mumkin bo'lgan qiymatni tajriba natijasida qabul qiladigan kattalikka aytiladi.

1-misol. Yuzta chaqaloq ichida o'g'il bolalar soni 0, 1, 2, ... , 100 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdordir.

2-misol. Zambarakdan otilgan snaryadning uchib o'tgan maso-fasi tasodifiy miqdordir. Bu miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari biror (a, b) oraliqqa tegishlidir.

Tajribalar natijasida elementar hodisalar ro'yi bergani uchun tasodifiy miqdor va elementar hodisa tushunchalarini bog'lab, tasodifiy miqdorning boshqa ta'rifini berish mumkin.

Tasodifiy miqdor deb Ω elementar hodisalar fazosida aniqlangan $X = X(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) funksiyaga aytiladi.

3-misol. Ikkita tanga tashlanganda chiqqan gerblar soni X 0, 1 va 2 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdordir. Elementar hodisalar fazosi quyidagi elementar hodisalardan iborat:

$$\omega_1 = \{IT\}, \omega_2 = \{PI\}, \omega_3 = \{IP\}, \omega_4 = \{PP\}.$$

U holda X quyidagi qiymatlarni qabul qiladi:

$$\begin{aligned} X(\omega_1) &= X(IT) = 2, & X(\omega_2) &= X(PI) = 1, \\ X(\omega_3) &= X(IP) = 1, & X(\omega_4) &= X(PP) = 0. \end{aligned}$$

Tasodifiy miqdorlar $X, Y, Z, \dots$ bosh lotin harflari, ularning mumkin bo'lgan qiymatlari esa mos $x, y, z, \dots$ kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, X tasodifiy miqdor uchta qiymatga ega bo'lishi mumkin bo'lsa, ular x_1, x_2, x_3 orqali belgilanadi.

Diskret (uzlukli) tasodifiy miqdor deb ayrim, ajralgan mumkin bo'lgan qiymatlarni ma'lum ehtimolliklar bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdorga aytiladi. Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarining soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Bunga misol sifatida 1-misoldagi tasodifiy miqdorni olish mumkin.

Uzluksiz tasodifiy miqdor deb biror chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdorga aytiladi. Uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarining soni cheksizdir. Bunday tasodifiy miqdorga misol sifatida 2-misoldagi tasodifiy miqdorni olish mumkin.

Diskret tasodifiy miqdorning berilishi uchun uning mumkin bo'lgan qiymatlarini sanab chiqish yetarli emas, yana ularning ehtimolliklarini ham ko'rsatish lozim. Ikkinchi tomondan, ko'p masalalarda tasodifiy miqdorlarni elementar hodisalarning funksiyalari sifatida qarashning zarurati yo'q, faqat tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimolliklarini, ya'ni tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini bilish yetarli.

Diskret tasodifiy miqdor ehtimolliklarining taqsimot qonuni yoki soddagina *taqsimot qonuni* deb mumkin bo'lgan qiymatlar bilan ularning ehtimolliklari orasidagi moslikka aytiladi; uni jadval, grafik va formula ko'rinishda berish mumkin.

Ehtimolliklar taqsimot qonunining turli usullarda berilishini misollarda ko'rib chiqaylik.

Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonunining jadval orqali berilishida jadvalning birinchi satri mumkin bo'lgan qiymatlardan, ikkinchi satri esa ularning ehtimolliklaridan tuziladi. Jadvalning ikkinchi satridagi ehtimolliklarning yig'indisi 1 ga teng bo'lishi kerak. 5.1-jadvalda 3-misoldagi diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan.

5.1 – j a d v a l

x_i	0	1	2
p_i	1 / 4	1 / 2	1 / 4

4-misol. Pul lotereyasida 100 ta bilet chiqarilgan. Bitta 5000 so'mlik, beshta 1000 so'mlik va o'nta 500 so'mlik yutuq o'ynalmoqda. Bitta lotereya bileti egasining mumkin bo'lgan yutu-g'idan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni topilsin.

Yechish. X ning mumkin bo'lgan qiymatlarini yozamiz: $x_1 = 5000$, $x_2 = 1000$, $x_3 = 500$, $x_4 = 0$. Bu mumkin bo'lgan qiymat-larning

ehtimolliklari quyidagicha: $p_1 = 0,01$, $p_2 = 0,05$, $p_3 = 0,1$,
 $p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 0,84$.

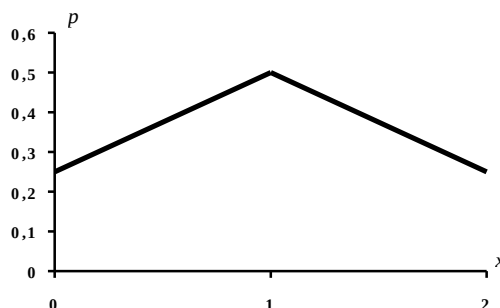
U holda izlanayotgan taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishda

5.2 – j a d v a l

x_i	0	500	1000	5000
p_i	0,84	0,1	0,05	0,01

Yaqqollik uchun diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qo-nunini grafik ko‘rinishda ham tasvirlash mumkin, buning uchun to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida (x_i, p_i) nuqtalar belgilanadi, so‘ngra ular kesmalar bilan birlashtiriladi. Ho-sil bo‘lgan shakl *taqsimot ko‘pburchagi* deb ataladi. 5.1-rasmda 3-misoldagi X tasodifiy miqdorning taqsimot ko‘pburchagi kelti-rilgan.

Endi formulalar orqali berilgan ayrim diskret taqsimot-lar — binomial, geometrik va Puasson taqsimotlarini ko‘rib chiqaylik.



5.1 - rasm.

n ta bog‘liqmas tajriba o‘tkazilayotgan bo‘lib, ularning har birida A hodisa ro‘y berishi (muvaqqafiyat)ning ehtimolligi doimiy va p ga teng bo‘lsin (demak, ro‘y bermaslik (muvaqqafiyatsizlik)-ning ehtimolligi $q=1-p$ ga teng). X diskret tasodifiy miqdor sifatida A hodisaning shu tajribalarda ro‘y berishlarining soni-ni ko‘rib chiqaylik. X ning mumkin bo‘lgan qiymatlari bunday: 0, 1, 2, ..., n . Bu mumkin bo‘lgan qiymatlarning ehtimolliklari (4.1) Bernulli formulasi bo‘yicha topiladi:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

bu yerda $k=0, 1, 2, \dots, n$.

Ehtimolliklarning binomial taqsimoti deb Bernulli formulasi bilan aniqlanadigan ehtimolliklar taqsimotiga aytiladi. Bernulli formulasining o‘ng tomonini Nyuton binomi yoyilmasining umumiy hadi sifatida qarash mumkin bo‘lgani uchun bu taqsimot qonuni «binomial» deb ataladi:

$$(p + q)^n = C_n^0 p^n + C_n^1 p^{n-1} q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^n q^n.$$

$p + q = 1$ bo‘lgani uchun tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari

ehtimolliklarining yig'indisi 1 ga teng.

Shunday qilib, binomial taqsimot qonuni quyidagi ko'ri-nishga ega

5.3 – j a d v a l

x_i	n	$n - 1$	$\dots$	k	$\dots$	0
p_i	p^n	$n p^{n-1} q$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	q^n

Binomial taqsimotga misol sifatida 3-misoldagi tasodi-fiy miqdorning taqsimotini keltirish mumkin.

Faraz qilaylik, bog'liqmas tajribalar o'tkazilib, ularning har birida A hodisaning ro'y berishi (muvaqqiyat)ning ehtimolli-gi r ga ($0 < p < 1$), binobarin, uning ro'y bermasligi (muvaqqi-qiyatsizlik)ning ehtimolligi $q=1-p$ ga teng bo'lsin. Tajribalar birinchi muvaqqiyatgacha davom etadi. Shunday qilib, agar A hodisa k -tajribada ro'y bersa, u holda avvalgi $k - 1$ ta tajribada u ro'y bermaydi.

Agar X orqali birinchi muvaqqiyatgacha bo'lgan tajribalar soniga teng bo'lgan diskret tasodifiy miqdorni belgilasak, u holda uning mumkin bo'lgan qiymatlari 1, 2, 3, ... natural son-lardan iborat bo'ladi.

Faraz qilaylik, birinchi $k - 1$ ta tajribada A hodisa ro'y ber-masdan, k -tajribada ro'y berdi. Bu «murakkab hodisaning» ehti-molligi, bog'liqmas hodisalarning ehtimolliklarini ko'paytirish haqidagi 3.3-teoremaga asosan

$$P(X = k) = q^{k-1} p \quad (5.1)$$

ga teng.

Ehtimolliklarning geometrik taqsimoti deb (5.1) formu-la bilan aniqlanadigan ehtimolliklar taqsimotiga aytiladi, chunki bu formulada $k = 1, 2, \dots$ deb faraz qilsak, birinchi hadi r ga va maxraji q ga ($0 < q < 1$) teng bo'lgan geometrik progressiyaga ega bo'lamiz:

$$p, qp, q^2 p, \dots, q^{k-1} p, \dots$$

Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisini topsak, tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari ehti-molliklarining yig'indisi 1 ga teng ekanligini oson ko'rish mumkin:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Shunday qilib, geometrik taqsimot qonuni quyidagi ko'ri-nishga ega:

5.4 – j a d v a l

x_i	1	2	3	...	K	...
p_i	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{k-1} p$	...

5-misol. Zambarakdan nishonga birinchi marta tekkuncha o'q uzilmoqda. Nishonga tegishning ehtimolligi $p = 0,6$ ga teng. Uchinchi o'q uzishda nishonga tegishning ehtimolligi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $p = 0,6$, $q = 0,4$, $k = 3$. Izlanayotgan ehtimollik (5.1) formulaga asosan $P(X = 3) = 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,096$ ga teng.

Har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolligi r ga teng bo'lgan n ta bog'liqmas tajriba o'tkazilsin. Bu tajribalarda hodisaning k marta ro'y berishi ehtimolligini topish uchun Bernulli for-mulasidan foydalaniladi. Agar p katta bo'lsa, Laplasning lokal teoremasidan foydalaniladi. Biroq bu teorema hodisaning ehtimolligi kichik ($p \leq 0,1$) bo'lganda katta xato beradi.

Agar $n \rightarrow \infty$ da np ko'paytma doimiy, aniqrog'i $np = \lambda$ qiy-matini saqlaydi degan shart qo'ysak, u holda har birida hodisa-ning ehtimolligi juda kichik bo'ladigan juda ko'p sondagi si-novlarda hodisaning roppa-rosa k marta ro'y berishi ehtimol-ligi quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (5.2)$$

Bu formula ommaviy (p juda katta) va kam ro'y beradigan (r kichik) hodisalar ehtimolliklarining *Puasson* taqsimot qonu-nini ifodalaydi. Puasson taqsimoti uchun maxsus jadvallar mavjud.

6-misol. Zavod bazaga 5000 ta sifatli mahsulot jo'natdi. Mahsulotning yo'lda shikastlanish ehtimolligi 0,0002 ga teng. Bazaga 3 ta yaroqsiz mahsulot kelishining ehtimolligi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $n = 5000$, $p = 0,0002$, $k = 3$. λ ni to-pamiz:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1.$$

Izlanayotgan ehtimollik (5.2) formula bo'yicha quyidagiga teng:

$$P_{5000}(3) = \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,06.$$

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Tasodifiy miqdor umumiy holda va funksiyalar tilida qan-day ta'riflanadi?
2. Diskret tasodifiy miqdor nima?
3. Uzluksiz tasodifiy miqdor nima?
4. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni haqida ni-mani bilasiz?

5. Binomial taqsimot qonuni haqida nimani bilasiz?
6. Geometrik taqsimot qonunining alohida xususiyatlari nima-lardan iborat?
7. Qaysi hollarda Puasson taqsimotidan foydalaniladi?

Tayanch iboralar:

Tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdor, uzluksiz ta-sodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonu-ni, taqsimot ko'pburchagi, binomial taqsimot, geometrik taqsi-mot, Puasson taqsimoti.

6-mavzu

Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli tavsiflari

va ularning xossalari

Reja:

1. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi.
2. Matematik kutilmaning xossalari.
3. Diskret tasodifiy miqdor tarqoqligining sonli tavsiflari.
4. Dispersiyaning xossalari.
5. Diskret tasodifiy miqdorlarning boshqa sonli tavsiflari.

Yuqorida ko'rganimizdek, taqsimot qonuni diskret tasodi-fiy miqdorni to'liq tavsiflaydi. Biroq ko'pincha taqsimot qonu-ni noma'lum bo'lib, tasodifiy miqdorni yig'ma holda tasvir-laydigan sonlar bilan cheklanishga to'g'ri keladi; bunday sonlar *tasodifiy miqdorning sonli tavsiflari* deb ataladi.

Muhim sonli tavsiflar qatoriga matematik kutilma kira-di. Matematik kutilma taqriban tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymatiga teng. Ko'pgina masalalarni yechish uchun matematik ku-tilmani bilish yetarlidir. Masalan, agar birinchi mergan urgan ochkolarining matematik kutilmasi ikkinchi mergannikidan katta ekanligi ma'lum bo'lsa, u holda birinchi mergan o'rta hisobda ik-kinchi merganga nisbatan ko'proq ochko uradi, binobarin, u ikkin-chi mergandan yaxshiroq otadi.

X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning eh-timolliklari ko'paytmalari yig'indisiga aytiladi va $M(X)$ orqa-li belgilanadi.

X tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_n$

ehtimolliklar bilan qabul qilsin. U holda X taso-difiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \quad (6.1)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Agar X diskret tasodifiy miqdor cheksiz ko'p mumkin bo'lgan qiymatlarni qabul qilsa, u holda

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \quad (6.2)$$

1-misol. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini bilgan holda uning matematik kutilmasi topilsin

6.1 – j a d v a l

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

Yechish. Izlanayotgan matematik kutilma (6.1) formulaga asosan $M(X) = 3 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 3,9$ ga teng.

2-misol. Agar A hodisaning ehtimolligi r ga teng bo'lsa, bitta tajribada A hodisaning ro'y berishlar sonining matematik kutilmasi topilsin.

Yechish. X tasodifiy miqdor — A hodisaning bitta tajribada ro'y berishlar soni — faqat ikkita — r ehtimollik bilan $x_1 = 1$ (A hodisa ro'y berdi) va $q = 1 - r$ ehtimollik bilan $x_2 = 0$ (A hodisa ro'y bermadi) qiymatni qabul qilishi mumkin. Izlanayotgan matematik kutilma (6.1) formulaga asosan $M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$ ga teng.

Shunday qilib, *hodisaning bitta tajribada ro'y berishlar sonining matematik kutilmasi shu hodisa ehtimolligiga teng.*

Endi matematik kutilmaning xossalarini keltiramiz.

6.1-xossa. *O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasi shu o'zgarmasning o'ziga teng:*

$$M(C) = C.$$

Isbot. S o'zgarmasni bitta mumkin bo'lgan S qiymatga ega bo'lgan va uni $p = 1$ ehtimollik bilan qabul qiladigan diskret tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz. Demak,

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

6.2-xossa. *O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma bel-gisidan tashqariga chiqarish mumkin:*

$$M(CX) = CM(X).$$

Agar ikkita tasodifiy miqdordan birining taqsimot qonu-ni ikkinchisining qanday qiymat qabul qilganligiga bog'liq bo'l-masa, bu tasodifiy miqdorlar *bog'liqmas* deb ataladi.

Bog'liqmas X va Y tasodifiy miqdorlarning ko'paytmasi deb shunday XY tasodifiy miqdorga aytiladiki, uning mumkin bo'l-gan qiymatlari X ning mumkin bo'lgan har bir qiymatini Y ning mumkin bo'lgan har bir qiymatiga ko'paytirilganiga teng; XY ko'-paytmaning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimolliklari ko'-paytuvchilarning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollikla-ri ko'paytmasiga teng.

6.3-xossa. Ikkita bog'liqmas tasodifiy miqdor ko'paytmasi-ning matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalari ko'paytmasiga teng:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

6.1-natija. Bir nechta bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ko'-paytmasining matematik kutilmasi ularning matematik ku-tilmalari ko'paytmasiga teng.

3-misol. Bog'liqmas X va Y tasodifiy miqdorlar quyidagi taq-simot qonunlari orqali berilgan:

6.2 – ж а д в а л

x_i	5	2	4
p_i	0,6	0,1	0,3

va

6.3 – ж а д в а л

y_i	7	9
p_i	0,8	0,2

XY tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi topilsin.

Yechish. Berilgan tasodifiy miqdorlarning har birining matematik kutilmasini topamiz:

$$M(X) = 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 = 4,4;$$

$$M(Y) = 7 \cdot 0,8 + 9 \cdot 0,2 = 7,4.$$

X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas, shuning uchun izlanayot-gan matematik kutilma quyidagiga teng:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y) = 4,4 \cdot 7,4 = 32,56.$$

X va Y tasodifiy miqdorlarning yig'indisi deb shunday $X+Y$ tasodifiy miqdorga aytiladiki, uning mumkin bo'lgan qiy-matlari X ning mumkin bo'lgan har bir qiymati bilan Y ning mumkin bo'lgan har bir qiymati yig'indilariga teng; $X+Y$ ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimolliklari bog'liqmas X va Y ta-sodifiy miqdorlar uchun qo'shiluvchilarning ehtimolliklari ko'-paytmasiga teng; bog'liq tasodifiy miqdorlar uchun esa qo'shiluv-chilardan birining ehtimolligi bilan ikkinchisining shartli ehtimolligi ko'paytmasiga teng.

6.4-xossa. Ikkita tasodifiy miqdor yig'indisining mate-matik kutilmasi qo'shiluvchilarning matematik kutilmalari yig'indisiga teng:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

6.2-natija. Bir nechta tasodifiy miqdorlar yig'indisi-ning matematik

kutilmasi qo'shiluvchilarning matematik kutilmalari yig'indisiga teng.

4-misol. Ikkita shashqoltosh tashlanganda tushishi mumkin bo'lgan ochkolar yig'indisining matematik kutilmasi topilsin.

Yechish. X orqali birinchi shashqoltoshda va Y orqali ikkinchi shashqoltoshda tushishi mumkin bo'lgan ochkolar sonini belgilay-miz. Bu miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlari bir xil bo'lib, 1, 2, 3, 4, 5 va 6 ga teng, chunki bu qiymatlarning har biri-ning ehtimolligi $1/6$ ga teng.

Birinchi shashqoltoshda tushishi mumkin bo'lgan ochkolar sonining matematik kutilmasini topamiz:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

$M(Y) = \frac{7}{2}$ ekanligi ham ravshan.

Izlanayotgan matematik kutilma quyidagiga teng:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7.$$

6.5-xossa. Har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolligi r o'zgarmas bo'lgan n ta bog'liqmas tajribada bu hodisaning ro'y berish-lari sonining matematik kutilmasi tajribalar sonini bitta si-novda hodisaning ro'y berish ehtimolligiga ko'paytirilganiga teng:

$$M(X) = np.$$

5-misol. Bitta korxona tekshirilganda hujjat yuritishda-gi xatolarni aniqlash ehtimolligi $p = 0,6$ ga teng. Agar 10 mar-ta korxonalar tekshirilgan bo'lsa, xatolarni aniqlashlar jami sonining matematik kutilmasi topilsin.

Yechish. Har bir tekshirishda xatolarni aniqlash boshqa tek-shirishlar natijasiga bog'liq emas, shuning uchun qaralayotgan ho-disalar bog'liqmasdir, binobarin, izlanayotgan matematik kutilma quyidagicha:

$$M(X) = np = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ (marta xatolarni aniqlash).}$$

Ayrim tasodifiy miqdorlar bir xil matematik kutilma-larga ega bo'lsalarda, mumkin bo'lgan qiymatlari har xil bo'ladi. Masalan, quyidagi taqsimot qonunlari bilan berilgan X va Y diskret tasodifiy miqdorlarni ko'rib chiqaylik:

6.4 – ж а д в а л

x_i	-0,01	0,01
p_i	0,5	0,5

va

6.5 – ж а д в а л

y_i	-100	100
p_i	0,5	0,5

Bu miqdorlarning matematik kutilmalarini topaylik:

$$M(X) = -0,01 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,5 = 0;$$

$$M(Y) = -100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 0.$$

Bu yerda ikkala miqdorning matematik kutilmalari bir xil, mumkin bo'lgan qiymatlari esa har xil, bunda X ning mumkin bo'lgan qiymatlari uning matematik kutilmasiga yaqin, Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari esa o'zining matematik

kutilmasidan ancha uzoq. Shunday qilib, tasodifiy miqdorning faqat matema-tik kutilmasini bilgan holda uning qanday qiymatlar qabul qi-lishi mumkinligi haqida ham, bu qiymatlar matematik kutilma atrofida qanday sochilganligi haqida ham biror mulohaza yuri-tish mumkin emas.

Boshqacha qilib aytganda, matematik kutilma tasodifiy miqdorni to‘liq tavsiflamaydi. Shu sababli matematik kutilma bilan bir qatorda boshqa sonli tavsiflar ham qaraladi.

X — tasodifiy miqdor va $M(X)$ uning matematik kutilmasi bo‘lsin. *Tasodifiy miqdorning chetlanishi* deb $X - M(X)$ ayir-maga aytiladi.

Amaliyotda ko‘pincha tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlarining o‘rtacha qiymati atrofida tarqoqligini baholash talab qilinadi. Masalan, artilleriyada otilgan snaryadlar urib tushirilishi lozim bo‘lgan nishon atrofiga qanchalik yaqin tushi-shini bilish muhimdir.

Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi (tarqoqligi) deb tasodifiy miqdorning o‘zining matematik kutilmasidan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (6.3)$$

Dispersiyani hisoblash uchun ko‘pincha quyidagi formuladan foydalanish qulay bo‘ladi:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (6.4)$$

6-misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X taso-difiy miqdorning dispersiyasi topilsin:

6.6 – j a d v a l

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Yechish. $M(X)$ matematik kutilma quyidagiga teng:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5.$$

X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha:

6.7 – j a d v a l

x_i^2	4	9	25
p_i	0,1	0,6	0,3

$M(X^2)$ matematik kutilma quyidagicha:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3.$$

Izlanayotgan dispersiya

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05 \text{ bo'ladi.}$$

Matematik kutilma kabi, dispersiya ham bir nechta xossaga ega.

6.6-xossa. *O'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng:*

$$D(C) = 0.$$

Isbot. Dispersiyaning ta'rifiga ko'ra

$$D(C) = M[C - M(C)]^2.$$

6.1-xossadan foydalanib, $D(C) = M[C - C]^2 = M(0) = 0$ ni hosil qilamiz.

Shunday qilib,

$$D(C) = 0.$$

O'zgarmas miqdor doimo aynan bir xil qiymatni saqlashi va demak, tarqoqlikka ega emasligi inobatga olinsa, bu xossa oydin bo'lib qoladi.

6.7-xossa. *O'zgarmas ko'paytuvchini kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:*

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

6.8-xossa. *Ikkita bog'liqmas tasodifiy miqdor yig'indisining dispersiyasi bu miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng:*

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

6.3-natija. *Bir nechta bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'in-disining dispersiyasi bu miqdorlar dispersiyalarining yig'indi-siga teng.*

6.4-natija. *O'zgarmas miqdor bilan tasodifiy miqdor yig'indisining dispersiyasi tasodifiy miqdorning dispersiyasiga teng:*

$$D(C + X) = D(X).$$

Isbot. S va X miqdorlar o'zaro bog'liqmas, shuning uchun 6.8-xossaga asosan

$$D(C + X) = D(C) + D(X).$$

6.6-xossaga asosan $D(C) = 0$. Demak,

$$D(C + X) = D(X).$$

X va $X + S$ miqdorlar faqat sanoq boshi bilan farq qilishi va demak, o'zlarining matematik kutilmalari atrofida bir xil tarqoqlikka ega ekanligi inobatga olinsa, bu xossa oydin bo'lib qoladi.

6.9-xossa. *Ikkita bog'liqmas tasodifiy miqdor ayirmasining dispersiyasi bu miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng:*

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Isbot. 6.8-xossaga asosan

$$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D(-Y).$$

6.7-xossaga asosan

$$D(X - Y) = D(X) + (-1)^2 \cdot D(Y).$$

yoki

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

6.10-xossa. Har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolligi r o'zgarmas bo'lgan n ta bog'liqmas tajribada bu hodisaning ro'y berish-lari sonining dispersiyasi tajribalar sonini bitta tajribada hodi-saning ro'y berish va ro'y bermaslik ehtimolliklariga ko'payti-rilganiga teng:

$$D(X) = npq.$$

7-misol. DSI tomonidan har birida hujjat yuritishdagi xatolarni aniqlash ehtimolligi $p = 0,6$ ga teng bo'lgan 10 marta korxonalarning tekshiruvlari o'tkazilmoqda. X tasodifiy miqdor — bu tekshiruvlarda hujjat yuritishdagi xatolarni aniqlashlar sonining dispersiyasi hisoblansin.

Yechish. Shartga ko'ra, $n = 10$, $p = 0,6$. Hujjat yuritishdagi xatolarni aniqlamaslik ehtimolligi $q = 1 - 0,6 = 0,4$ ga teng.

Izlanayotgan dispersiya $D(X) = npq = 10 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 2,4$ bo'ladi.

Tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarining uning o'rtacha qiymati atrofida tarqoqligini baholash uchun o'rtacha kvadratik chetlanish ham xizmat qiladi.

X tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (6.5)$$

8-misol. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

6.8 – j a d v a l

x_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

$\sigma(X)$ o'rtacha kvadratik chetlanish topilsin.

Yechish. $M(X)$ matematik kutilma quyidagiga teng:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,5 = 6,4.$$

$M(X^2)$ matematik kutilma quyidagicha:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,4 + 100 \cdot 0,5 = 54.$$

Dispersiyani topamiz:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 54 - (6,4)^2 = 13,04.$$

Izlanayotgan o'rtacha kvadratik chetlanish quyidagiga teng:

$$\sigma (X) = \sqrt{D (X)} = \sqrt{13,04} \approx 3,61 .$$

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Tasodifiy miqdorning sonli tavsiflari deb nimaga aytiladi va ularning qanday turlarini bilasiz?
2. Matematik kutilma nima va u qanday aniqlanadi?
3. Hodisaning bitta tajribada ro'y berishlar sonining matematik kutilmasi nimaga teng va u qanday topiladi?
4. Matematik kutilmaning 1- va 2-xossalari (6.1- va 6.2-xossalari) haqida nima bilasiz?
5. Qanday tasodifiy miqdorlar bog'liqmas deyiladi va bog'liqmas tasodifiy miqdorlarning ko'paytmasi nima bo'ladi?
6. Tasodifiy miqdorlarning yig'indisi qanday aniqlanadi?
7. Matematik kutilmaning 3- va 4-xossalari hamda ularning natijalari (6.3- va 6.4-xossalari, 6.1- va 6.2-natijalari) haqida nima bilasiz?
8. Tasodifiy miqdorning matematik kutilmadan tashqari boshqa sonli tavsiflarini kiritishning maqsadga muvofiqligi nimada va tasodifiy miqdorning chetlanishi nima?
9. Dispersiya nima va u qanday topiladi?
10. Dispersiyaning 1- va 2-xossalari (6.6- va 6.7-xossalari) haqida nima bilasiz?
11. Dispersiyaning 3-xossasi hamda uning natijalari (6.8-xossa, 6.3- va 6.4-natijalari) haqida nima bilasiz?
12. Dispersiyaning 4-xossasi (6.9-xossa) haqida nima bilasiz?
13. n ta bog'liqmas tajribada A hodisaning ro'y berishlar sonining matematik kutilmasi va dispersiyasi nimaga teng (6.5- va 6.10-xossalari)?
14. O'rtacha kvadratik chetlanish nima va u qanday aniqlanadi?

Tayanch iboralar:

Tasodifiy miqdorning sonli tavsiflari, matematik kutilma, erkli tasodifiy miqdorlar, erkli tasodifiy miqdorlarning ko'paytmasi, tasodifiy miqdorlarning yig'indisi, tasodifiy miqdorning chetlanishi, dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish.

7-mavzu

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot va zichlik funksiyalari, ularning xossalari

Reja:

1. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.
2. Taqsimot funksiyasining xossalari.
3. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi.
4. Zichlik funksiyasining xossalari.

Diskret tasodifiy miqdor uning barcha mumkin bo'lgan qiy-matlari va ularning ehtimolliklari ro'yxati bilan berilishi mumkin. Biroq bu usulni uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun qo'llab bo'lmaydi.

Masalan, mumkin bo'lgan qiymatlari (a, b) intervalni to'la-to'kis to'ldiruvchi X tasodifiy miqdorni ko'rib chiqaylik. X ning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari ro'yxatini tuzish mumkin emasligi ravshan. Shuning uchun ixtiyoriy tipdagi tasodifiy miqdorlarni berish mumkin bo'ladigan umumiy usulni kiritish maqsadga muvofiqdir, buning uchun tasodifiy miqdor ehtimol-liklarining taqsimot funksiyalari kiritiladi.

x haqiqiy son bo'lsin. X ning x dan kichik qiymat qabul qilishidan iborat $X < x$ hodisaning ehtimolligini $F(x)$ orqali belgilaymiz. Agar x o'zgarsa, $F(x)$ ham o'zgaradi, ya'ni $F(x)$ x ning funksiyasidir.

X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb tajriba natijasida X tasodifiy miqdor x dan kichik qiymatni qabul qilishining ehtimolligini aniqlovchi $F(x)$ funksiyaga aytiladi, ya'ni

$$F(x) = P(X < x). \quad (7.1)$$

Bu tenglikni geometrik nuqtai nazardan bunday talqin qilish mumkin: $F(x)$ — son o'qida x nuqtadan chapda yotuvchi nuqta bilan tasvirlanadigan qiymatni tasodifiy miqdor qabul qilishining ehtimolligi.

Taqsimot funksiyasining xossalarini ko'rib chiqaylik.

7.1-xossa. Taqsimot funksiyasining qiymatlari $[0, 1]$ kes-maga tegishli:

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (7.2)$$

Isbot. Bu xossa taqsimot funksiyasining ehtimollik sifa-tida ta'riflanishidan kelib chiqadi: ehtimollik doimo 1 dan katta bo'lmagan nomanfiy son.

7.2-xossa. $F(x)$ — kamaymaydigan funksiya, ya'ni:

$$\text{agar } x_1 < x_2 \text{ bo'lsa, u holda } F(x_1) \leq F(x_2). \quad (7.3)$$

7.1-natija. Tasodifiy miqdorning (a, b) intervalda yotuv-chi qiymatni qabul qilish ehtimolligi taqsimot funksiyasining shu intervaldagi orttirmasiga teng:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (7.4)$$

1-misol. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya-si bilan berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ x/4 + 1/4 & -1 < x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdor $(0, 2)$ intervalga tegish-li qiymatni qabul qilishining ehtimolligi topilsin:

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0).$$

Yechish. Shartga ko'ra $(0, 2)$ intervalda $F(x) = x/4 + 1/4$ bo'l-gani uchun $F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2$ bo'ladi.
Demak, $P(0 < X < 2) = 1/2$.

7.2-natija. X uzluksiz tasodifiy miqdorning aniq bir qiymatni qabul qilishining ehtimolligi nolga teng.

7.3-xossa. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari (a, b) intervalga tegishli bo'lsa, u holda: 1) $x \leq a$ da $F(x) = 0$; 2) $x \geq b$ da $F(x) = 1$.

Isbot. 1) $x_1 \leq a$ bo'lsin. U holda $X < x_1$ hodisa mumkin bo'l-magan hodisadir (chunki, shartga ko'ra, X miqdor x_1 dan kichik qiymatlarni qabul qilmaydi), demak, uning ehtimolligi nolga teng.

2) $x_2 \geq b$ bo'lsin. U holda $X < x_2$ hodisa muqarrar hodisadir (chunki X ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari x_2 dan ki-chik), demak, uning ehtimolligi birga teng.

7.3-natija. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari butun x sonlar o'qida joylashgan bo'lsa, u holda quyidagi limit munosabatlar o'rinli:

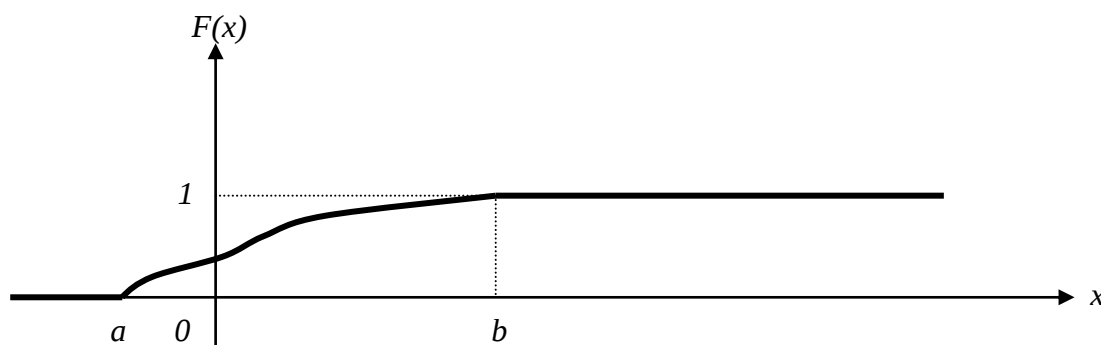
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1. \quad (7.5)$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining grafigi 7.1-xossaga asosan $y = 0$, $y = 1$ to'g'ri chiziqlar bilan chega-ralangan soha ichida joylashgan.

7.2-xossadan shu narsa kelib chiqadiki, tasodifiy miqdor-ning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari joylashgan (a, b) inter-valda x o‘zgaruvchi o‘sganda, grafik yo yuqoriga qiya, yo gorizontal ko‘rinishda bo‘ladi.

7.3-xossaga asosan $x \leq a$ da grafikning ordinatalari nolga teng; $x \geq b$ da esa grafikning ordinatalari birga teng.

Uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining gra-figi 7.1-rasmda joylashgan.



7.1 - rasm.

Diskret tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining grafi-gi pog‘ona ko‘rinishda bo‘ladi.

2-misol. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qo-nuni bilan berilgan:

7.1 – j a d v a l

x_i	1	4	8
p_i	0,3	0,1	0,6

Taqsimot funksiyasi topilsin va uning grafigi chizilsin.

Yechish. Agar $x \leq 1$ bo‘lsa, u holda 7.3-xossaga asosan $F(x) = 0$.

Agar $1 < x \leq 4$ bo‘lsa, u holda $F(x) = 0,3$. Haqiqatan, X miq-dor 1 qiymatni 0,3 ehtimollik bilan qabul qilishi mumkin.

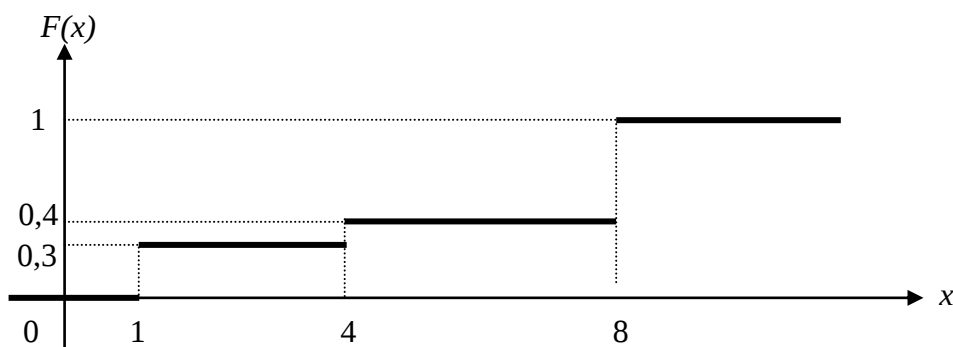
Agar $4 < x \leq 8$ bo‘lsa, u holda $F(x) = 0,4$. Haqiqatan, agar x_1 $4 < x_1 \leq 8$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $F(x_1)$ $X < x_1$ ho-disaning ehtimolligiga teng bo‘lib, bu hodisa X miqdor 1 qiymat-ni 0,3 ehtimollik bilan yoki 4 qiymatni 0,4 ehtimollik bilan qa-bul qilganda amalga oshishi mumkin. Bu ikkita hodisa birgalikda bo‘lmagani uchun 3.1-teoremaga asosan $X < x_1$ hodisaning ehtimol-ligi ehtimolliklar yig‘indisiga teng $0,3 + 0,1 = 0,4$.

Agar $x > 8$ bo‘lsa, u holda 7.3-xossaga asosan $F(x) = 1$.

Shunday qilib, taqsimot funksiyasi analitik ko‘rinishda quyidagicha yozilishi mumkin:

$$F(x) = \begin{cases} x \leq 1 & \partial a & 0 \\ 1 < x \leq 4 & \partial a & 0,3 \\ 4 < x \leq 8 & \partial a & 0,4 \\ x > 8 & \partial a & 1 \end{cases}.$$

Bu funksiyaning grafigi 7.2-rasmda keltirilgan.



7.2 - rasm.

Uzluksiz tasodifiy miqdorni zichlik funksiyasi deb ata-luvchi boshqa funksiya dan foydalangan holda ham berish mumkin.

X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deb $f(x)$ funksiyaga — $F(x)$ taqsimot funksiyasidan olingan bi-rinchi tartibli hosilaga aytiladi:

$$f(x) = F'(x). \quad (7.6)$$

Bu yerdan taqsimot funksiyasi zichlik funksiyasi uchun bosh-lang'ich funksiya ekanligi kelib chiqadi. Diskret tasodifiy miqdorning ehtimolliklari taqsimotini tasvirlash uchun zichlik funksiyasidan foydalanib bo'lmaydi.

Zichlik funksiyasini bilgan holda, uzluksiz tasodifiy miqdor berilgan intervalga tegishli qiymat qabul qilishining ehtimolligini hisoblash mumkin.

7.1-teorema. *X* uzluksiz tasodifiy miqdor (a, b) interval-ga tegishli qiymat qabul qilishining ehtimolligi zichlik funksiyasidan a dan b gacha olingan aniq integralga teng:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (7.7)$$

Isbot. (7.4) formulaga asosan

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

bo'ladi. Nyuton–Leybnis formulasiga asosan esa

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib,

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

$P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$ bo'lgani uchun

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

ni hosil qilamiz.

3-misol. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} x \leq 0 & f(x) = 0 \\ 0 < x \leq 1 & f(x) = 2x \\ x > 1 & f(x) = 0 \end{cases}$$

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdor $(0,5; 1)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilishining ehtimolligi topilsin.

Yechish. (7.7) formulaga asosan izlanayotgan ehtimollik

$$P(0,5 < X < 1) = \int_{0,5}^1 2x dx = x^2 \Big|_{0,5}^1 = 1 - 0,25 = 0,75 \text{ ga teng.}$$

$f(x)$ zichlik funksiyasini bilgan holda $F(x)$ taqsimot funksiyasini

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz \quad (7.8)$$

formula bo'yicha topish mumkin

4-misol. Berilgan zichlik funksiyasi bo'yicha taqsimot funksiyasi topilsin:

$$f(x) = \begin{cases} x \leq a & f(x) = 0 \\ a < x \leq b & f(x) = 1/(b-a) \\ x > b & f(x) = 0 \end{cases}$$

Topilgan funksiyaning grafigi yasalsin.

Yechish. (7.8) formuladan foydalanamiz. Agar $x \leq a$ bo'lsa, u holda $f(x) = 0$, demak, $F(x) = 0$. Agar $a < x \leq b$ bo'lsa, u holda $f(x) = 1/(b-a)$, demak,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz = \int_{-\infty}^a 0 dz + \int_a^x \frac{1}{b-a} dz = \frac{x-a}{b-a}.$$

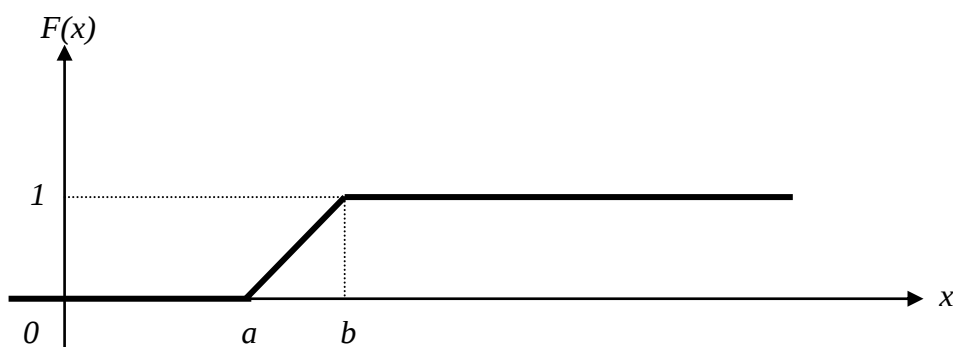
Agar $x > b$ bo'lsa, u holda

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 \, dz + \int_a^b \frac{1}{b-a} \, dz + \int_b^x 0 \, dz = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Demak, izlanayotgan taqsimot funksiyasi quyidagi ko‘rinish-ga ega

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi 7.3 rasmda tasvirlangan.



7.3 - rasm.

Zichlik funksiyasining ikkita xossasini keltiramiz.

7.4-xossa. Zichlik funksiyasi — nomanfiy funksiya:

$$f(x) \geq 0. \quad (7.9)$$

Isbot. Taqsimot funksiyasi — kamaymaydigan funksiya, de-mak, uning hosilasi $F'(x) = f(x)$ — nomanfiy funksiya.

7.5-xossa. Zichlik funksiyasidan $-\infty$ dan ∞ gacha olingan xosmas integral birga teng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1. \quad (7.10)$$

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Nima uchun ixtiyoriy tipdagi tasodifiy miqdorlarni berish mumkin bo‘ladigan umumiy usulni kiritish maqsadga muvofiq?
2. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb nimaga ayti-ladi?
3. Taqsimot funksiyasining 1-xossasi (7.1-xossa) haqida nima bilasiz?
4. Taqsimot funksiyasining 2-xossasi hamda uning natijalari (7.2-xossa, 7.1- va 7.2-natijalar) haqida nima bilasiz?
5. Taqsimot funksiyasining 3-xossasi hamda uning natijasi (7.3-xossa va 7.3-

- natija) haqida nima bilasiz?
6. Uzluksiz va diskret tasodifiy miqdorlar taqsimot funktsiya-larining grafiklari qanday xossalarga ega?
 7. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi deb nima-ga aytiladi va 7.1 teorema haqida nima bilasiz?
 8. Zichlik funktsiyasini bilgan holda taqsimot funktsiyasini qan-day topish mumkin va zichlik funktsiyasining xossalari haqida nima bilasiz (7.4- va 7.5-xossalar)?

Tayanch iboralar:

Tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi, uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funktsiyasining grafigi, diskret tasodifiy miqdor taqsimot funktsiyasining grafigi, uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi.

8-mavzu

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli tavsiflari. Uzluksiz taqsimotlarning turlari

Reja:

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli tavsiflari.
2. Normal taqsimot.
3. Tekis va ko'rsatkichli taqsimotlar.

Diskret tasodifiy miqdorlar kabi uzluksiz tasodifiy miqdorlar ham sonli tavsiflarga ega. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini ko'rib chiqaylik.

X uzluksiz tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funktsiyasi bi-lan berilgan bo'lsin va bu tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari $[a, b]$ kesmaga tegishli bo'lsin.

Mumkin bo'lgan qiymatlari $[a, b]$ kesmaga tegishli bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb quyidagi aniq integralga aytiladi:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx . \quad (8.1)$$

Agar mumkin bo'lgan qiymatlar butun Ox sonli o'qqa tegishli bo'lsa, u holda matematik kutilma quyidagi ko'rinishga ega

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx . \quad (8.2)$$

Mumkin bo'lgan qiymatlari $[a, b]$ kesmaga tegishli bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb quyidagi aniq integralga aytiladi:

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx . \quad (8.3)$$

Agar mumkin bo'lgan qiymatlar butun Ox sonli o'qqa tegishli bo'lsa, u holda dispersiya quyidagi ko'rinishga ega

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx . \quad (8.4)$$

Dispersiyani hisoblash uchun mos ravishda

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 \quad (8.5)$$

va

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 \quad (8.6)$$

formulalar qulayroq.

Diskret tasodifiy miqdorlar matematik kutilmasi va dispersiyasining xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham saqlanadi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi diskret tasodifiy miqdor uchun bo'lgani kabi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} . \quad (8.7)$$

1-misol. Quyidagi taqsimot funksiyasi bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'r-tacha kvadratik chetlanishi topilsin:

$$F(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \partial a & 0 \\ 0 < x \leq 1 & \partial a & x \\ x > 1 & \partial a & 1 \end{cases}$$

Yechish. Zichlik funksiyasini topamiz:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \partial a & 0 \\ 0 < x \leq 1 & \partial a & 1 \\ x > 1 & \partial a & 0 \end{cases}$$

Matematik kutilmani (8.1) formula bo'yicha topamiz:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = x^2/2 \Big|_0^1 = 1/2.$$

Dispersiyani (8.5) formula bo'yicha topamiz:

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - [1/2]^2 = x^3/3 \Big|_0^1 - 1/4 = 1/12.$$

O'rtacha kvadratik chetlanishni (8.7) formula bo'yicha topamiz:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1/12} \approx 0,29.$$

Amaliyotdan kelib chiqadigan masalalarni hal qilishda uz-luksiz tasodifiy miqdorlarning turli taqsimotlari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning zichlik funksiyalari *taqsimot qonunlari* ham deb ataladi. Normal, tekis va ko'rsatkichli taqsimot qonunlari eng ko'p uchraydi.

a va σ ($\sigma > 0$) parametrli normal taqsimot deb

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (8.8)$$

zichlik funksiyasi bilan tasvirlanadigan uzluksiz tasodifiy miqdorning ehtimolliklari taqsimotiga aytiladi.

Bu yerdan ko'rinib turibdiki, normal taqsimot ikkita a va σ parametrlar bilan aniqlanadi. Normal taqsimotni berish uchun bu parametrlarni bilish kifoya.

Bu parametrlarning ehtimoliy ma'nosini ko'raylik. De-mak, $M(X) = a$, ya'ni *normal taqsimotning matematik kutil-masi a parametrغا teng*, va $\sigma(X) = \sigma$, ya'ni *normal taqsimot-ning o'rtacha kvadratik chetlanishi σ parametrغا teng*.

Normal tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz \quad (8.9)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Umumiy normal taqsimot deb ixtiyoriy a va σ ($\sigma > 0$) parametrli normal taqsimotga aytiladi. *Standart* normal taqsimot deb $a = 0$ va $\sigma = 1$ parametrli normal taqsimotga aytiladi.

Standart normal taqsimotning zichlik funksiyasi

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (8.10)$$

ko'rinishda ekanligini ko'rish oson. Bu funksiya bizga 4-mavzuda uchragan. Uning qiymatlari adabiyotlardagi maxsus jadvallarda keltirilgan.

Ixtiyoriy a va σ parametrli normal tasodifiy miqdor-ning (α, β) intervalga tegishli qiymat qabul qilishining ehti-molligini

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ Laplas funksiyasidan foydala-nib topish mumkin.

Haqiqatan, 7.1-teoremaga asosan

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ekanligini ko‘ramiz.

Yangi $z = (x - a)/\sigma$ o‘zgaruvchi kiritamiz. Bu yerdan $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$ ekanligi kelib chiqadi. Integrallashning yangi che-garalarini topamiz. Agar $x = \alpha$ bo‘lsa, u holda $z = (\alpha - a)/\sigma$ bo‘ladi; agar $x = \beta$ bo‘lsa, u holda $z = (\beta - a)/\sigma$ bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$\begin{aligned} P(\alpha < X < \beta) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} (\sigma dz) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

bo‘ladi.

$\Phi(x)$ funksiyadan foydalanib, pirovardida

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \quad (8.11)$$

ni olamiz.

Xususan, X standart normal tasodifiy miqdorning $(0, x)$ intervalga tegishli qiymat qabul qilishining ehtimolligi

$$P(0 < X < x) = \Phi(x) \quad (8.12)$$

ga teng, chunki bu holda $a = 0$ va $\sigma = 1$.

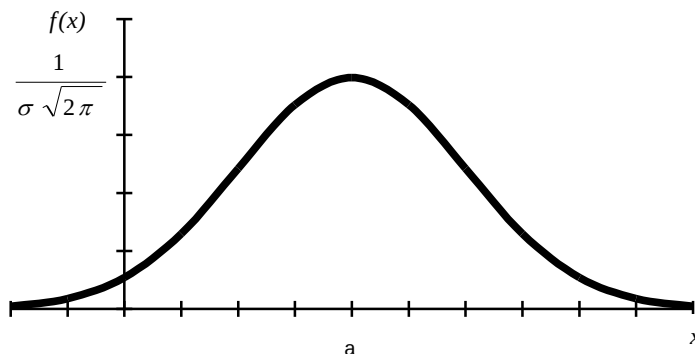
2-misol. X tasodifiy miqdor normal qonun bo‘yicha taqsim-langani. Bu miqdorning matematik kutilmasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda 30 va 10 ga teng. X ning $(10, 50)$ inter-valga tegishli qiymat qabul qilishining ehtimolligi topilsin.

Yechish. (8.11) formuladan foydalanamiz. Shartga ko‘ra $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $a = 30$, $\sigma = 10$, demak,

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

Jadvaldan $\Phi(2) = 0,4772$ ni topamiz. Bu yerdan izlanayotgan ehtimollik $P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$ ga teng ekanli-gi kelib chiqadi.

Normal taqsimot zichlik funksiyasining grafigi *normal eg-ri chiziq* (*Gauss egri chizig'i*) deb ataladi. Bu grafik 8.1-rasmda tasvirlangan.



8.1 - rasml.

$[a, b]$ kesmadagi tekis taqsimot deb zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} x \leq a & 0 \\ a < x \leq b & 1/(b-a) \\ x > b & 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

ko'rinishda bo'lgan, barcha mumkin bo'lgan qiymatlari ushbu kes-maga tegishli bo'lgan X tasodifiy miqdorning ehtimolliklari taqsimotiga aytiladi.

$[a, b]$ da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsi-mot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} x \leq a & 0 \\ a < x \leq b & (x-a)/(b-a) \\ x > b & 1 \end{cases} \quad (8.14)$$

ko'rinishga ega.

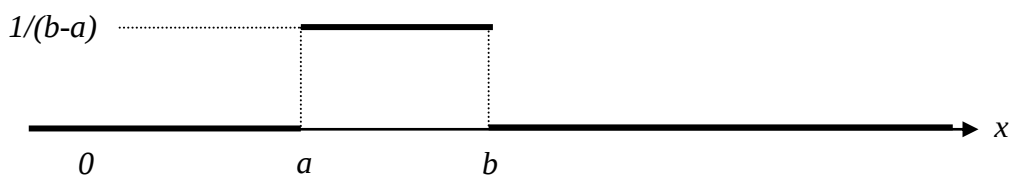
Tekis taqsimotning zichlik funksiyasi grafigi 8.2-rasmda, taqsimot funksiyasi grafigi esa 7.3-rasmda keltirilgan.

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik ku-tilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz. (8.1) formulaga asosan

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

ni olamiz.

$f(x)$



8.2 - rasm.

Soʻngra, (8.5) formulaga asosan

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \left[\frac{a+b}{2} \right]^2 =$$

$$= \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b - \left[\frac{a+b}{2} \right]^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi $[a, b]$ da tekis taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning $[a, b]$ ning ichida yotgan (c, d) intervalga tegishli qiymat qabul qilishining ehtimolligini topamiz.

7.1-teorema va (8.13) formuladan foydalanib,

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_c^d 1 \cdot dx = \frac{d-c}{b-a}$$

ni yoki

$$P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a} \quad (8.15)$$

ni olamiz.

Koʻrsatkichli (eksponensial) taqsimot deb

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & 0 \\ x \geq 0 & \lambda e^{-\lambda x} \end{cases} \quad (8.16)$$

zichlik funksiyasi bilan tasvirlanadigan X uzluksiz tasodifiy miqdorning ehtimolliklari taqsimotiga aytiladi, bu yerda λ — oʻzgarmas musbat kattalik.

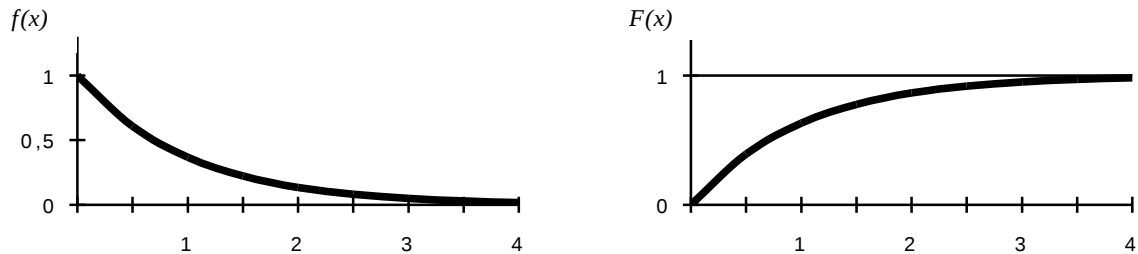
Taʼrifdan koʻrinib turibdiki, koʻrsatkichli taqsimot bitta λ parametr bilan aniqlanadi. Koʻrsatkichli qonunning taqsimot funksiyasini topamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz = \int_{-\infty}^0 0 dz + \lambda \int_0^x e^{-\lambda z} dz = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Demak,

$$F(x) = \begin{cases} x < 0 & \partial a & 0 \\ x \geq 0 & \partial a & 1 - e^{-\lambda x} \end{cases} \quad (8.17)$$

Ko'rsatkichli qonunning zichlik va taqsimot funksiyalari-ning grafiklari 8.3-rasmda tasvirlangan.



8.3 - rasm.

(8.17) formuladagi ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning (a, b) intervalga tegishli qiy-mat qabul qilishining ehtimolligini topamiz. (7.4) formuladan foydalanib,

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = 1 - e^{-\lambda b} - (1 - e^{-\lambda a})$$

ni yoki

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad (8.18)$$

ni olamiz.

3-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & \partial a & 0 \\ x \geq 0 & \partial a & 2e^{-2x} \end{cases}$$

ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan. Tajriba natijasida X tasodifiy miqdor $(0,3; 1)$ intervalga tegishli qiymat qabul qilishining ehtimolligi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $\lambda = 2$. (8.18) formuladan foydalanamiz:

$$P(0,3 < X < 1) = e^{-(2 \cdot 0,3)} - e^{-(2 \cdot 1)} = e^{-0,6} - e^{-2} \approx 0,548 - 0,135 \approx 0,41$$

Ko'rsatkichli taqsimot parametrining ehtimoliy ma'nosi-ni ko'raylik. *Ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilma-si va o'rtacha kvadratik chetlanishi* λ parametrning teskari qiymatiga teng, ya'ni $M(X) = 1/\lambda$ va $\sigma(X) = 1/\lambda$.

4-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & \partial a & 0 \\ x \geq 0 & \partial a & 5e^{-5x} \end{cases}$$

ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan. X tasodifiy miqdor-ning matematik kutilmasi, o'rtacha kvadratik chetlanishi va dis-persiyasi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $\lambda = 5$. Demak,

$$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda = 1/5 = 0,2 ;$$

$$D(X) = [\sigma(X)]^2 = 1/\lambda^2 = 1/5^2 = 0,04 .$$

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi nima?
2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi nima va u qan-day hisoblanadi?
3. Normal taqsimot deb nimaga aytiladi?
4. Normal taqsimot parametrlarining ehtimoliy ma'nosi qana-qa?
5. Umumiy va standart normal taqsimotlar nima, ularning zich-lik va taqsimot funksiyalari qanaqa?
6. Normal tasodifiy miqdorning berilgan intervaldagi qiy-matni qabul qilishi ehtimolligi qanday topiladi?
7. Tekis taqsimot deb nimaga aytiladi?
8. Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutil-masi va dispersiyasi qanday hisoblanadi?
9. Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning berilgan inter-valdagi qiymatni qabul qilishi ehtimolligi qanday topila-di?
10. Ko'rsatkichli taqsimot deb nimaga aytiladi?
11. Ko'rsatkichli tasodifiy miqdorning berilgan intervaldagi qiymatni qabul qilishi ehtimolligi qanday topiladi?
12. Ko'rsatkichli taqsimot parametrining ehtimoliy ma'nosi qa-naqa?

Tayanch iboralar:

Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, uz-luksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi, taqsimot qonuni, normal taqsimot, umumiy normal taqsimot, standart normal taq-simot, normal tasodifiy miqdorning berilgan intervaldagi qiy-matni qabul qilishi ehtimolligi, normal egri chiziq (Gauss egri chizig'i), tekis taqsimot, tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor-ning berilgan intervaldagi qiymatni qabul qilishi ehtimolli-gi, ko'rsatkichli taqsimot, ko'rsatkichli tasodifiy miqdorning be-rilgan intervaldagi qiymatni qabul qilishi ehtimolligi.

9-mavzu

Katta sonlar qonuni va uning amaliy ahamiyati.

Markaziy limit teorema haqida tushuncha

Reja:

1. Katta sonlar qonuni.
2. Markaziy limit teorema.

Avvalgi mavzularda ko'rganimizdek, tasodifiy miqdor si-nov natijasida mumkin bo'lgan qiymatlardan qaysi birini qabul qilishini avvaldan ishonch bilan aytib bo'lmaydi, chunki bu hisobga olib bo'lmaydigan ko'pgina tasodifiy sabablarga bog'liq bo'ladi. Biroq ba'zi-bir nisbatan kengroq shartlar ostida yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining tasodifiylik xarakteri deyarli yo'qolar va u qonuniyatga aylanib qolar ekan.

Amaliyot uchun juda ko'p tasodifiy sabablarning birgalikda-gi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda katta ahamiyatga ega, chunki bu hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi. Ana shu shartlar umumiy nom bilan *katta sonlar qonuni* deb yuritiladigan teoremlarda ko'rsatiladi. Ular jumla-siga Chebishev i Bernulli teoremlari mansub.

Katta sonlar qonuniga mansub teoremlar p ta tasodifiy miqdor o'rta arifmetik qiymatining bu miqdorlar matematik kutilmalarining o'rta arifmetik qiymatiga yaqinlashishining shartlarini belgilaydi.

Dastlab yuqorida tilga olingan teoremlarning isbotlari tayanadigan Chebishev tengsizligini keltiramiz.

Agar tasodifiy miqdor dispersiyasi ma'lum bo'lsa, u holda uning yordamida bu miqdor o'zining matematik kutilmasidan be-rilgan kattalikka chetlanishining ehtimoligini baholash mum-kin, bu baholash faqat dispersiyaga bog'liq bo'ladi. Ehtimollik-ning bahosini *P.L.Chebishev tengsizligi* beradi:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0. \quad (9.1)$$

Bu tengsizlikdan natija sifatida

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0 \quad (9.2)$$

tengsizlikni olish mumkin.

1-misol. X tasodifiy miqdor o'zining matematik kutilma-sidan shu miqdor o'rta kvadratik chetlanishining uch baravaridan oshuvchi kattalikka chetlanishining ehtimolligi baholansin.

Yechish. Shartga ko'ra $\varepsilon = 3\sigma(X)$. $D(X) = [\sigma(X)]^2$ ekanligini hisobga olib, (9.1) formuladan $P(|X - M(X)| \geq 3\sigma(X)) \leq \frac{D(X)}{9[\sigma(X)]^2} = \frac{1}{9}$ ni olamiz.

9.1-teorema (Chebishevning katta sonlar qonuni). $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ularning dispersiyalari yuqoridan bir xil s soni bilan chegara-langani bo'lsin: $D(X_i) \leq c$, $i = 1, 2, \dots$. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (9.3)$$

munosabat o'rinli.

Bu teoremdan bir xil ehtimolliklar taqsimotiga ega erk-li tasodifiy miqdorlarning o'rta arifmetigi uchun katta sonlar qonunining o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

9.1-natija. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ bir xil a matematik kutil-maga ega bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ular-ning dispersiyalari yuqoridan bir xil s soni bilan chegaralangan bo'lsin: $D(X_i) \leq c$, $i = 1, 2, \dots$. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (9.4)$$

munosabat o'rinli.

Bir xil matematik kutilmaga ega bog'liqmas tasodifiy miqdor-lar uchun katta sonlar qonuni bog'liqmas tajribalar ketma-ketligida tasodifiy miqdorlar o'rta arifmetik qiymatining bu tasodifiy miqdorlarning umumiy matematik kutilmasiga yaqinlashi-shini aks ettiradi.

Shunday qilib, yetarlicha katta sondagi (dispersiyalari bir tekisda chegaralangan) bog'liqmas tasodifiy miqdorlarning o'rta arif-metik qiymati tasodifiylik xususiyatini yo'qotadi. Bu shunday izohlanadi: har bir miqdorning o'zining matematik kutilmasidan chetlanishi ham musbat, ham manfiy bo'lishi mumkin, biroq o'rta arifmetik qiymatda ular o'zaro yo'qolib ketadi.

Katta sonlar qonuni ko'pgina amaliy tatbiqlarga ega. Haqiqiy qiymati a ga teng bo'lgan qandaydir kattalik p marta bog'liqmas ravishda o'lchansin. Har bir o'lchashning natijasi X_i tasodifiy miqdor bo'ladi. Agar o'lchashlar tizimli xatolarsiz amalga oshirilsa, u holda X_i tasodifiy miqdorlarning matematik kutilma-sini o'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatiga teng deb hisoblash mumkin, $M(X_i) = a$, $i = 1, 2, \dots$. O'lchashlar natijalari-ning dispersiyasini ko'pincha qandaydir s soni bilan chegaralangan deb hisoblash mumkin.

U holda o'lchashlarning tasodifiy natijalari 9.1-teorema-ning shartlarini

qanoatlantiradi va demak, katta sondagi o'l-chashlarda p ta o'lchashning o'rta arifmetik qiymati o'lchanayotgan a kattalikning haqiqiy qiymatidan amalda ko'p farq qila olmaydi. Bu holat o'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymati sifatida o'lchashlarning o'rta arifmetik qiymati olinishini asoslaydi.

Bog'liqmas tajribalardagi muvaffaqiyatlarning nisbiy chastotasi uchun quyidagi teorema o'rinli.

9.2-teorema (Bernullining katta sonlar qonuni). Agar p ta bog'liqmas tajribalarning har birida A hodisa ro'y berishining ehtimolligi r o'zgarmas bo'lsa, u holda bu tajribalardagi muvaffaqiyatlar soni t uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (9.5)$$

munosabat o'rinli.

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ bog'liqmas, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini ko'rib chiqaylik. $M(X_i) = a$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, \dots$ bo'lsin. Tasodifiy miqdorlarning markazlashtirilgan va normalashtirilgan Y_n , $n = 1, 2, \dots$, yig'indilari ketma-ketligi-ni tuzamiz:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma \sqrt{n}}. \quad (9.6)$$

Markaziy limit teoremasiga asosan, $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlariga qo'yilgan ancha umumiylar shartlar ostida tasodifiy miqdorlarning markazlashtirilgan va normalashtirilgan Y_n yig'indilari taqsimot funksiyalarining ketma-ketligi $n \rightarrow \infty$ da ixtiyoriy x uchun standart normal tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasiga yaqinlashadi.

9.3-teorema (markaziy limit teorema). $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ bog'liqmas, bir xil taqsimlangan, chekli $D(X_i) = \sigma^2$ dispersiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $M(X_i) = a$, $i = 1, 2, \dots$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy x ($-\infty < x < \infty$) uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (9.7)$$

munosabat o'rinli.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Umumiy nom bilan katta sonlar qonuni deb yuritiladigan teoremlarda nima haqida so'z yuritiladi?
2. Chebishev tengsizligi haqida nima bilasiz?

3. Chebishevning katta sonlar qonuni nimani ta'kidlaydi?

4. Katta sonlar qonunining mohiyati nimada va uning amaliy aha-miyati qanday?

5. Bernullining katta sonlar qonuni nimani ta'kidlaydi?

6. Markaziy limit teoremda nima haqida so'z yuritiladi?

Tayanch iboralar:

Katta sonlar qonuni, Chebishev tengsizligi, erkli tasodi-fi-y miqdorlar ketma-ketligi, tasodifiy miqdorlarning mar-kazlashtirilgan va normalashtirilgan yig'indisi, markaziy li-mit teorema.

10-mavzu

Matematik statistikaning predmeti va asosiy masalalari. Tanlanma

Reja:

1. Matematik statistikaning vazifalari (masalalari).
2. Bosh va tanlanma to'plamlar.
3. Tanlanmalarning tiplari, tanlash usullari.

Matematik statistikani qo'llashdan asosiy maqsad ommaviy hodisalar va jarayonlar haqida ularni kuzatish yoki eksperiment-lar natijasida olingan ma'lumotlar asosida xulosalar hosil qi-lishdan iborat. Bu statistik xulosalar alohida tajribalarga tegish-li bo'lmasdan, balki tadqiq qilinayotgan hodisani keltirib chiqa-ruvchi shart-sharoitlarning doimiy ekanligi farazidagi shu hodi-saning umumiy tavsiflari (ehtimolliklari, taqsimot qonunlari va ularning parametrlari, matematik kutilmalari va h.k.) haqida-gi da'volardan iborat.

Ommaviy tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlar-ni aniqlash statistik ma'lumotlarni — kuzatish natijalarini ehtimollar nazariyasi uslublari bilan o'rganishga asoslanadi.

Matematik statistikaning birinchi vazifasi (masalasi) — kuzatishlar yoki maxsus o'tkazilgan eksperimentlar natijasida olingan statistik ma'lumotlarni to'plash va guruhlash usullari-ni ko'rsatish.

Matematik statistikaning ikkinchi vazifasi (masalasi):

a) hodisaning noma'lum ehtimolligini baholash; noma'lum taqsimot funksiyasini baholash; ko'rinishi ma'lum bo'lgan taqsi-motning parametrlarini baholash; tasodifiy miqdorning boshqa bitta yoki bir nechta tasodifiy miqdorlarga bog'liqligini baho-lash va h.k.;

b) noma'lum taqsimotning ko'rinishi haqidagi yoki ko'rini-shi ma'lum bo'lgan

taqsimot parametrlarining kattaligi haqida-gi statistik gipotezalarni tekshirish kabi tadqiqot maqsadlari-ga bog'liq ravishda statistik ma'lumotlarni tahlil qilish usullarini ishlab chiqishdan iborat.

Demak, *matematik statistikaning predmeti ilmiy va amaliy xulosalar hosil qilish maqsadida statistik ma'lumot-larni to'plash va qayta ishlash usullarini yaratishdan iborat.*

Matematik statistika ehtimollar nazariyasiga tayanadi va uning maqsadi — bosh to'plam tavsiflarini tanlanma ma'lumot-lari asosida baholash.

Agar bir jinsli ob'ektlar to'plamini bu ob'ektlarni tavsiflovchi biror belgiga nisbatan o'rganish talab etilsa, u holda yalpi tekshirish o'tkazish, ya'ni to'plamning har bir ob'ektini ush-bu belgiga nisbatan tekshirish tabiiy bo'ladi. Biroq, amalda, yal-pi tekshirishni o'tkazish u yoki bu sabablarga ko'ra ko'pincha mum-kin bo'lmaydi. Bunday hollarda butun to'plamdan chekli sondagi ob'ektlar tasodifiy ravishda tanlanadi va ular o'rganiladi.

Tanlanma to'plam, yoki oddiy qilib, *tanlanma* deb tasodifiy ravishda tanlab olingan ob'ektlar to'plamiga aytiladi. *Bosh to'plam* deb tanlanma ajratiladigan ob'ektlar to'plamiga ayti-ladi. Masalan, agar Soliq akademiyasining barcha talabalari bosh to'plam bo'lsa, u holda biror guruh talabalari tanlanma to'plam bo'ladi.

To'plam (tanlanma yoki bosh to'plam)ning *hajmi* deb bu to'plamdagi ob'ektlar soniga aytiladi. Masalan, agar 1000 ta detal-dan tekshiruv uchun 100 ta detal tanlab olingan bo'lsa, u holda bosh to'plam hajmi $N = 1000$, tanlanma hajmi esa $n = 100$ bo'ladi.

Tanlanmani tuzishda ikki xil yo'l tutish mumkin: ob'ekt tanlanib, uning ustida kuzatish o'tkazilganidan so'ng, u bosh to'plamga qaytarilish yoki qaytarilmasligi mumkin. Shunga bog'liq ra-vishda tanlamalar takror va notakror tanlamalarga ajratiladi.

Takror tanlanma deb shunday tanlanmaga aytiladiki, bunda tanlab olingan ob'ekt (keyingisini olishdan oldin) bosh to'plam-ga qaytariladi. *Notakror* tanlanma deb tanlab olingan ob'ekt yana bosh to'plamga qaytarilmaydigan tanlanmaga aytiladi.

Tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha bosh to'plamning bizni qiziqtirayotgan belgisi haqida yetarlicha ishonch bilan fikr yuri-tish uchun tanlanmaning ob'ektlari uni to'g'ri tavsiflashi zarur. Boshqacha aytganda, tanlanma bosh to'plamning mutanosibliklari-ni to'g'ri tavsiflashi kerak, ya'ni tanlanma *representativ (to'laqonli tavsiflovchi)* bo'lishi lozim.

Agar bosh to'plam barcha ob'ektlarining tanlanmaga tushish ehtimolliklari bir xil degan farazda tanlanmaning har bir ob'-ekti bosh to'plamdan tasodifiy ravishda tanlangan bo'lsa, u holda katta sonlar qonuniga asosan tanlanma representativ bo'ladi deb ta'kidlash mumkin.

Agar bosh to'plamning hajmi yetarlicha katta bo'lib, tanlan-ma esa bu to'plamning uncha katta bo'lmagan qismini tashkil qil-sa, u holda takror va notakror tanlanmalar orasidagi farq yo'qolib boradi; cheksiz bosh to'plam qaralib, tanlanma chekli hajmga ega bo'lgan limit holda bu farq yo'qoladi.

Amaliyotda tanlashning turli usullari qo'llaniladi. Bosh to'plamni qismlarga

ajratishni talab qilmaydigan tanlash mav-jud, masalan, oddiy qaytarilmaydigan tasodifiy tanlash va od-diy qaytariladigan tasodifiy tanlash, shuningdek, bosh to‘plam qismlarga ajratilgandan keyin amalga oshiriladigan tanlash (ti-pik tanlash, mexanik tanlash, seriyali tanlash) ham qo‘llaniladi.

Butun bosh to‘plamdan ob’ektlar bittalab olinadigan tan-lash *oddiy tasodifiy* tanlash deb ataladi. Agar tanlangan ob’-ektlar keyingi tanlovda qatnashishi uchun bosh to‘plamga qayta-rilsa, bunday tanlash oddiy qaytariladigan tasodifiy tanlash, aks holda esa oddiy qaytarilmaydigan tasodifiy tanlash bo‘la-di. Masalan, agar biror hudud bo‘yicha o‘rtacha oylik ish haqini aniqlash talab etilgan bo‘lsa, oddiy qaytarilmaydigan tasodi-fiy tanlash qo‘llaniladi, chunki ayni bir odamning ish haqi fa-qat bir marta hisobga olinadi. Agar biror tumandagi turli ko-missiyalarning jinsi, yoshi, ijtimoiy holati, ma’lumoti bo‘yicha tarkibini aniqlash talab etilgan bo‘lsa, tanlash oddiy qaytari-ladigan tasodifiy tanlash bo‘ladi, chunki ayni bir odam har xil komissiyalarda ishtirok etishi mumkin, binobarin, tanlanmaga bir necha marta tushishi mumkin.

Ob’ektlar butun bosh to‘plamdan emas, balki uning har bir tipga tegishli qismlaridan olinsa, bunday tanlash *tipik tan-lash* deb ataladi. Masalan, agar detallar bir nechta stanokda ta-yyorlanayotgan bo‘lsa, u holda tanlash hamma stanoklarda tayyorlan-gan barcha detallar to‘plamidan emas, balki har bir stanok mahsu-lotidan alohida amalga oshiriladi. Tipik tanlashdan tekshiri-layotgan belgi bosh to‘plamning turli tiplarga tegishli qismla-rida sezilarli darajada o‘zgarib turganda foydalaniladi.

Bosh to‘plam tanlanmaga nechta ob’ekt kirishi lozim bo‘lsa, kattaligi taxminan bir xil bo‘lgan shuncha gruppaga mexanik ra-vishda ajratilib, har bir gruppadan esa ayni bitta nomerli ob’ekt tanlansa, bunday tanlash *mexanik tanlash* deb ataladi. Ma-salan, agar stanokda tayyorlangan detallarning 20% ini tanlab olish lozim bo‘lsa, u holda har beshinchi detal tanlanadi; agar detallarning 5% ini tanlab olish talab etilgan bo‘lsa, u holda har yigirmanchi detal tanlanadi va h.k. Mexanik tanlash ba’zan tanlanmaning reprezentativligini ta’minlamasligi mumkin.

Seriyali tanlash deb shunday tanlashga aytiladiki, bunda ob’ektlar bosh to‘plamdan bittalab emas, balki «seriya»lab oli-nadi va ular yalpisiga tekshiriladi. Masalan, agar mahsulotlar katta guruhdagi avtomat dastgohlar yordamida tayyorlanayotgan bo‘l-sa, u holda faqat bir nechta dastgohning mahsuloti yalpisiga tek-shiriladi. Seriyali tanlashdan tekshirilayotgan belgi turli seri-yalarda uncha o‘zgarmagan holda foydalaniladi.

Amaliyotda ko‘pincha kombinatsiyali (aralash) tanlash qo‘lla-niladi, bunda yuqorida ko‘rsatilib o‘tilgan usullardan birga-likda foydalaniladi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Matematik statistikaning oldida qanday vazifa (masala)lar turadi?
2. Matematik statistikani qo‘llashdan maqsad nima va uning predmeti nimadan iborat?
3. Tanlanma to‘plam (tanlanma), bosh to‘plam, to‘plam hajmi nima?
4. Takror tanlanma, notakror tanlanma va reprezentativ tanlan-ma deb nimaga

aytiladi?

5. Oddiy tasodifiy tanlash va tipik tanlash nimadan iborat?
6. Mexanik tanlash va seriyali tanlash nimadan iborat?

Tayanch iboralar:

Matematik statistika, baho, statistik gipotezalarni tek-shirish, statistik ma'lumotlarni to'plash va qayta ishlash, tan-lanma to'plam, tanlanma, bosh to'plam, to'plam hajmi, takror tan-lanma, notakror tanlanma, reprezentativ tanlanma, oddiy qayta-rilmaydigan tasodifiy tanlash, oddiy qaytariladigan tasodifiy tanlash, tipik tanlash, mexanik tanlash, seriyali tanlash, kombinatsiyali tanlash.

11-mavzu

Tanlanmaning statistik taqsimoti. Empirik taqsimot funksiyasi. Poligon va gistogramma

Reja:

1. Tanlanmaning statistik taqsimoti.
2. Empirik taqsimot funksiyasi.
3. Poligon va gistogramma.

Bosh to'plamdan tanlanma olingan bo'lsin. Bunda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta, ... , x_k qiymat esa n_k marta kuza-tilgan bo'lsin va h.k.; $\sum n_i = n$ tanlanmaning hajmi bo'lsin.

Kuzatilgan x_i qiymatlar *variantalar*, variantalarning o'sib borish tartibida yozilgan ketma-ketligi *variatsiyaviy qator* deb ataladi. n_i kuzatishlar sonlari *chastotalar*, ularning tanlanma hajmiga $n_i/n = W_i$ nisbatlari *nisbiy chastotalar* deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro'yxatiga aytiladi. Statistik taqsimotni oraliqlar va ularga mos chastotalarning ket-ma-ketligi ko'rinishida ham berish mumkin. Bu holda oraliqqa mos chastota sifatida shu oraliqqa tushgan chastotalar yig'indisi qabul qilinadi. Bunda chastotalar yig'indisi tanlanma hajmiga, nisbiy chastotalar yig'indisi esa birga teng bo'lishi kerak.

Taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miq-dorning mumkin bo'lgan

qiymatlari va ularning ehtimolliklari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilayotgan vari-antalar va ularning chastotalari (nisbiy chastotalari) orasidagi moslik tushuniladi.

1-misol. Hajmi $n = 20$ bo'lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan:

11.1 – j a d v a l

x_i	3	5	10
n_i	7	8	5

Nisbiy chastotalar taqsimoti yozilsin.

Yechish. Chastotalarni tanlanma hajmiga bo'lib, nisbiy chas-totalarni topamiz:

$$W_1 = 7/20 = 0,35, \quad W_2 = 8/20 = 0,4, \quad W_3 = 5/20 = 0,25.$$

Nisbiy chastotalar taqsimotini yozamiz:

11.2 – j a d v a l

x_i	3	5	10
W_i	0,35	0,4	0,25

N a z o r a t: $0,35 + 0,4 + 0,25 = 1.$

X miqdoriy belgi chastotalarining statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. n_x orqali belgining x dan kichik qiymatlari kuzatil-gan kuzatishlar sonini, n orqali esa kuzatishlarning umumiy so-ni (tanlanma hajmi)ni belgilaymiz. $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi n_x/n ga teng. x o'zgarganda nisbiy chastota ham o'zgaradi, ya'ni n_x/n nisbiy chastota x ning funksiyasidir.

Empirik taqsimot funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funk-siyasi) deb x ning har bir qiymati uchun $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $\overline{F}_n(x)$ funksiyaga aytiladi, ya'ni

$$\overline{F}_n(x) = n_x/n, \quad (11.1)$$

bu yerda n_x — x dan kichik variantalar soni; n — tanlanma haj-mi.

$\overline{F}_n(x)$ funksiya empirik (tajriba) yo'li bilan topilgani uchun empirik funksiya deb ataladi.

Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan farqli ra-vishda bosh to'planning $F(x)$ taqsimot funksiyasi *nazariy taq-simot funksiyasi* deb ataladi.

Empirik va nazariy funksiyalar orasidagi farq shundan iboratki, $F(x)$ nazariy funksiya $X < x$ hodisaning ehtimolligini aniqlaydi, $\overline{F}_n(x)$ empirik funksiya esa aynan shu hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydi.

Bernullining katta sonlar qonuni (9.2- teorema)dan kelib chiqadiki, katta n larda $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi, ya'ni $\overline{F}_n(x)$ va aynan shu hodisaning $F(x)$ ehtimolligi bir-bi-ridan quyidagi ma'noda kam farq qiladi:

$$\text{ixtiyoriy } \varepsilon > 0 \text{ da } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|F(x) - \overline{F}_n(x)\right| < \varepsilon\right) = 1 \text{ bo'ladi. (11.2)}$$

Ikkinchi tomondan, $\overline{F}_n(x)$ funksiyaning ta'rifidan u $F(x)$ ning barcha xossalriga ega ekanligi kelib chiqadi:

- 1) empirik funksiyaning qiymatlari $[0, 1]$ kesmaga tegishli;
- 2) $\overline{F}_n(x)$ — kamaymaydigan funksiya;
- 3) agar x_1 eng kichik varianta bo'lsa, u holda $x \leq x_1$ da $\overline{F}_n(x) = 0$ bo'ladi;

agar x_k eng katta varianta bo'lsa, u holda $x > x_k$ da $\overline{F}_n(x) = 1$ bo'ladi.

Bu yerdan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan bosh to'plamning nazariy taqsimot funksiyasini taqriban tasvirlash uchun foydalanishning maqsadga muvofiq ekanligi kelib chiqadi. Boshqacha qilib aytganda, tanlanmaning empirik taqsimot funksi-yasi bosh to'plamning nazariy taqsimot funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

2-misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha empirik taqsimot funksiyasi tuzilsin:

11.3 – j a d v a l

x_i	1	4	8
n_i	9	3	18

Yechish. Tanlanmaning hajmini topamiz: $9 + 3 + 18 = 30$. Eng kichik varianta 1 ga teng, demak

$$x \leq 1 \text{ da } \overline{F}_n(x) = 0 \text{ bo'ladi.}$$

$X < 4$ qiymat, ya'ni $x_1 = 1$ qiymat 9 marta kuzatildi, demak

$$1 < x \leq 4 \text{ da } \overline{F}_n(x) = 9/30 = 0,3 \text{ bo'ladi.}$$

$X < 8$ qiymat, ya'ni $x_1 = 1$ va $x_2 = 4$ qiymatlar $9 + 3 = 12$ marta kuzatildi, demak

$$4 < x \leq 8 \text{ da } \overline{F}_n(x) = 12/30 = 0,4 \text{ bo'ladi.}$$

Eng katta varianta 8 ga teng bo'lgani uchun

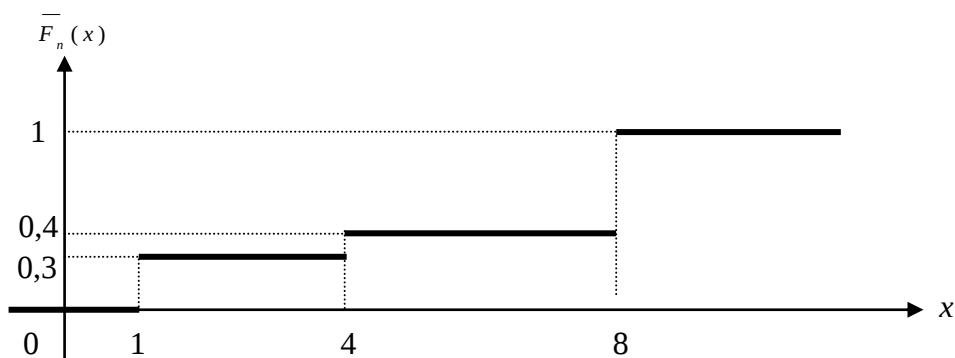
$$x > 8 \text{ da } \overline{F}_n(x) = 1 \text{ bo'ladi.}$$

Izlanayotgan empirik funksiya

$$\bar{F}_n(x) = \begin{cases} x \leq 1 & \partial a & 0 \\ 1 < x \leq 4 & \partial a & 0,3 \\ 4 < x \leq 8 & \partial a & 0,4 \\ x > 8 & \partial a & 1 \end{cases}$$

boʻladi.

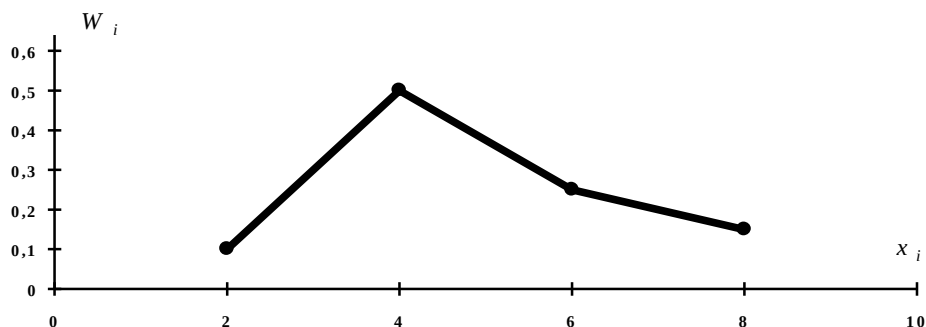
Bu funksiyaning grafigi 11.1-rasmda tasvirlangan.



11.1 - rasm.

Statistik taqsimotni grafik usulda turli yoʻllar bilan, xususan poligon va gistogramma koʻrinishida tasvirlash mumkin.

Chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Po-ligonni yasash uchun absissalar oʻqida x_i variantalar, ordinata-lar oʻqida esa ularga mos n_i chastotalar qoʻyib chiqiladi. Soʻngra $(x_i; n_i)$ nuqtalar toʻgʻri chiziq kesmalari bilan tutashtirilib, chastotalar poligoni hosil qilinadi.



11.2 - rasm.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1; W_1)$, $(x_2; W_2)$, ..., $(x_k; W_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Nisbiy chastotalar poligoni chastotalar poligoniga oʻxshash usulda yasaladi. 11.2-rasmda quyidagi taqsimotning nis-biy chastotalar poligoni tasvirlangan:

x_i	2	4	6	8
W_i	0,1	0,5	0,25	0,15

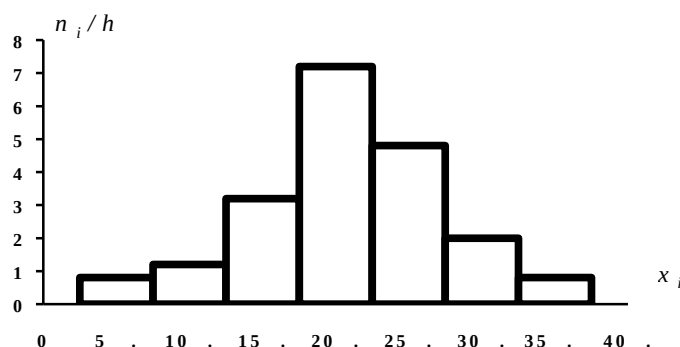
Uzluksiz belgi bo‘lgan holda gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir, buning uchun belgining barcha kuzatilayotgan qiy-matlarini o‘z ichiga olgan oraliq uzunligi h ga teng bo‘lgan bir nechta qism oraliqlarga bo‘linadi va har bir qism oraliq uchun i nchi oraliqqa tushgan variantalar chastotalarining yig‘indisi n_i topiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi qism oraliqlardan iborat bo‘lgan, balandliklari esa n_i/h nisbatga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onasimon shaklga aytiladi. Chastotalar gistogrammasini yasash uchun abs-sissalar o‘qida qism oraliqlar ajratiladi, ularning ustida esa absissalar o‘qiga parallel holda n_i/h masofada kesmalar o‘tkaziladi.

i nchi qism to‘rtburchakning yuzi i nchi oraliq variantalari chastotalarining yig‘indisi $h n_i/h = n_i$ ga teng; binobarin, *chas-totalar gistogrammasining yuzi barcha chastotalar yig‘indisi-ga, ya’ni tanlanma hajmiga teng.*

$h = 5$ uzunlikdagi qism oraliq	Qism oraliq variantalari chastotalarining yig‘indisi n_i	Chastota zichligi n_i/h
5 — 10	4	0,8
10 — 15	6	1,2
15 — 20	16	3,2
20 — 25	36	7,2
25 — 30	24	4,8
30 — 35	10	2,0
35 — 40	4	0,8

11.3-rasmda 11.5-jadvalda berilgan taqsimotning chastota-lar gistogrammasi tasvirlangan.



11.3 - rasm.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzun-likdagi qism oraliqlardan iborat bo'lgan, balandliklari esa W_i/h nisbatga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'o-nasimon shaklga aytiladi. Nisbiy chastotalar gistogrammasi chastotalar gistogrammasiga o'xshash usulda yasaladi.

i nchi qism to'rtburchakning yuzi i nchi oraliq variantalari nisbiy chastotalarining yig'indisi $h W_i/h = W_i$ ga teng; binoba-rin, *nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi barcha nisbiy chastotalar yig'indisiga, ya'ni birga teng*.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Variantalar, variatsiyaviy qator, chastotalar va nisbiy chastotalar deb nimaga aytiladi?
2. Tanlanmaning statistik taqsimoti nima va u qanday beriladi, ehtimollar nazariyasidagi taqsimot bilan matematik statistikadagi taqsimot orasidagi farq nimada?
3. Empirik taqsimot funksiyasi va nazariy taqsimot funksiyasi nima?
4. Empirik taqsimot funksiyasi qanday xossalarga ega?
5. Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan bosh to'plam-ning nazariy taqsimot funksiyasini baholash uchun foydalanishning maqsadga muvofiq ekanligi nimada?
6. Chastotalar poligoni va nisbiy chastotalar poligoni deb nimaga aytiladi hamda ular qanday yasaladi?
7. Chastotalar gistogrammasi nima, u qanday yasaladi va chastotalar gistogrammasining yuzi nimaga teng?
8. Nisbiy chastotalar gistogrammasi nima, u qanday yasaladi va nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi nimaga teng?

Tayanch iboralar:

Varianta, variatsiyaviy qator, chastota, nisbiy chastota, tanlanmaning statistik taqsimoti, empirik taqsimot funksiyasi, nazariy taqsimot funksiyasi, chastotalar poligoni, nisbiy chastotalar poligoni, chastotalar gistogrammasi, chastotalar gistogrammasining yuzi, nisbiy chastotalar gistogrammasi, nisbiy chastotalar

gistogrammasining yuzi.

12-mavzu

Statistik baho. Statistik bahoga qo'yiladigan talablar. Tanlanma o'rtacha va tanlanma dispersiya

Reja:

1. Taqsimot parametrlarining statistik baholari.
2. Siljimagan, effektiv va asosli baholar.
3. Bosh o'rtacha qiymat va o'rtacha tanlanma qiymat.
4. Bosh dispersiya va tanlanma dispersiyalar.

Statistik baholash nazariyasi masalaning qo'yilishi nuqtai nazaridan parametrik va noparametrik hollarga bo'linadi.

Agar bosh to'plamning miqdoriy belgisini o'rganish talab etilgan bo'lsa, bu belgining taqsimotini aniqlaydigan parametr-larni baholash masalasi yuzaga keladi. Masalan, o'rganilayotgan belgi bosh to'plamda normal taqsimlanganligi oldindan ma'lum bo'lsa, u holda matematik kutilmani va o'rtacha kvadratik chetla-nishni baholash (taqribiy hisoblash) zarur, chunki bu ikki para-metr normal taqsimotni to'liq aniqlaydi.

Odatda tanlamadagi ma'lumotlarga, masalan, miqdoriy belgining o'zaro bog'liqmas deb faraz qilinuvchi n ta kuzatuv nati-jasida olingan $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari ixtiyorda bo'ladi. Baho-lanayotgan belgi xuddi shu ma'lumotlar orqali ifodalanadi. $x_1, x_2, \dots, x_n$ larni bog'liqmas $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar deb qarab, nazariy taqsimot noma'lum parametrlarining statistik ba-hosini topish kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlarning bahola-nayotgan parametr taqribiy qiymatini beruvchi funksiyasini to-pishga teng kuchlidir deyish mumkin. Masalan, normal taqsimot-ning matematik kutilmasini baholash uchun belgining kuzatila-digan qiymatlarining o'rta arifmetik qiymati bo'ladigan $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ funksiya xizmat qiladi.

Shunday qilib, nazariy taqsimot *noma'lum θ parametri-ning statistik bahosi* deb kuzatiladigan tasodifiy miqdor-larning ma'lum statistik ma'noda shu parametr haqiqiy qiyma-tiga yaqin $\bar{\theta} = \bar{\theta}(n) = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ funksiyasiga aytiladi.

Statistik bahoning baholanayotgan parametr haqiqiy qiy-matiga yaqinligini aniqlaydigan eng muhim xossalari siljima-ganlik, asoslilik va effektivlik

xossalaridir.

$\bar{\theta}$ nazariy taqsimotning noma'lum θ parametrining statistik bahosi bo'lsin. Bosh to'plamdan ko'p marotalab n hajmli tanlanmalar olib, umuman olganda, bir-biridan farq qiluvchi $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_k$ baholarni olish mumkin. Shunday qilib, $\bar{\theta}$ bahoni tasodifiy miqdor sifatida, $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_k$ sonlarni esa uning mumkin bo'lgan qiymatlari sifatida qarash mumkin.

Agar $\bar{\theta}$ baho θ ning taqribiy qiymatini ortig'i bilan ber-sa, u holda tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha topilgan har bir $\bar{\theta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) son θ ning haqiqiy qiymatidan katta bo'ladi. Bu holda $\bar{\theta}$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (o'rtacha qiymati) ham θ dan katta, ya'ni $M(\bar{\theta}) > \theta$ bo'lishi ravshan. Agar $\bar{\theta}$ bahoni kami bilan bersa, u holda $M(\bar{\theta}) < \theta$ bo'lishi muqarrar.

Bu yerdan matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan statistik bahodan foydalanish o'lchashlar natijalarini tayinli bitta tomonga buzib ko'rsatuvchi tasodifiy bo'l-magan xatolar bo'lmish tizimli xatolarga olib kelishi ko'rinib turibdi. Shu sababga ko'ra, $\bar{\theta}$ baho matematik kutilmasining baholanayotgan parametrga tengligi $\bar{\theta}$ ning ba'zi qiymatlari θ dan katta, boshqalari esa kichik ekanligi tufayli xatolarni yo'-qotmasa ham, lekin tizimli xatolarga yo'l qo'yilmasligini kafo-latlaydi, chunki har xil ishorali xatolar deyarli teng miqdorda uchraydi.

Agar $\bar{\theta}$ statistik bahoning matematik kutilmasi baholana-yotgan θ parametrga ixtiyoriy hajmdagi tanlanmada teng, ya'ni

$$M(\bar{\theta}) = \theta \quad (12.1)$$

bo'lsa, bunday baho *siljimagan baho* deb ataladi.

Siljigan baho deb matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan bahoga aytiladi.

Biroq siljimagan baho baholanayotgan parametrga yaxshi yaqinlashishni har doim ham beravermaydi. Haqiqatan, $\bar{\theta}$ ning mumkin bo'lgan qiymatlari uning o'rta qiymati atrofida ancha tarqoq bo'lishi, ya'ni $D(\bar{\theta})$ dispersiya anchagina katta bo'lishi mumkin. Bunday holda bitta tanlanma ma'lumotlari bo'yicha topilgan baho $\bar{\theta}$ ning o'rta qiymatidan va demak, baholanayotgan θ parametrning o'zidan ham ancha uzoqlashgan bo'lishi mumkin. Agar $D(\bar{\theta})$ dispersiyaning kichik bo'lishi talab etilsa, u holda katta xatoga yo'l qo'yishning imkoniyati yo'q bo'ladi.

Agar statistik baho tanlanmaning berilgan n hajmida eng kichik mumkin bo'lgan dispersiyaga ega bo'lsa, u holda bunday baho *effektiv baho* deb ataladi.

Agar $\bar{\theta}$ statistik baho baholanayotgan θ parametrga ehti-mollik bo'yicha yaqinlashsa, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$n \rightarrow \infty \text{ da } P\left(\left|\bar{\theta}(n) - \theta\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 1 \quad (12.2)$$

bo'lsa, u holda bunday baho *asosli baho* deb ataladi. Masalan, agar siljimagan bahoning dispersiyasi $n \rightarrow \infty$ da nolga intilsa, u holda bunday baho *asosli baho* ham bo'ladi.

Bosh to'plam X miqdoriy belgiga nisbatan o'rganilayotgan bo'lsin.

$\bar{x}_B$ *bosh o'rtacha qiymat* deb bosh to'plam belgisi qiymatla-rining o'rta arifmetik qiymatiga aytiladi.

Agar N hajmli bosh to'plam belgisining barcha $x_1, x_2, \dots, x_N$ qiymatlari turlicha bo'lsa, u holda bosh o'rtacha qiymat

$$\bar{x}_B = (x_1 + x_2 + \dots + x_N) / N \quad (12.3)$$

ga teng bo'ladi.

Belgining $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, \dots, N_k$ chastotalarga ega va bunda $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ bo'lgan taqdirda esa bosh o'rtacha qiymat

$$\bar{x}_B = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_k N_k) / N \quad (12.4)$$

ga teng bo'ladi.

Agar bosh to'plamning tekshirilayotgan X belgisi tasodifiy miqdor deb qaralsa hamda (12.3) va (12.4) formulalar (6.1) va (6.2) formulalar bilan solishtirilsa, u holda belgining mate-matik kutilmasi shu belgining bosh o'rtacha qiymatiga teng degan xulosaga kelish mumkin:

$$\bar{x}_B = M(X). \quad (12.5)$$

Endi bosh to'plamni X miqdoriy belgiga nisbatan o'rganish uchun n hajmli tanlanma olingan bo'lsin.

$\bar{x}_T$ *o'rtacha tanlanma qiymat* deb tanlanma to'plam belgisi-ning kuzatilayotgan qiymatlarining o'rta arifmetik qiymatiga aytiladi.

Agar n hajmli tanlanma belgisining barcha $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari turlicha bo'lsa, u holda o'rtacha tanlanma qiymat

$$\bar{x}_T = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n \quad (12.6)$$

ga teng bo'ladi.

Belgining $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_k$ chastotalarga ega va bunda $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ bo'lgan taqdir-da esa o'rtacha tanlanma qiymat

$$\bar{x}_T = (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k) / n \quad (12.7)$$

ga yoki

$$\bar{x}_T = \left(\sum_{i=1}^k x_i n_i \right) / n \quad (12.8)$$

teng bo'ladi.

O'rtacha tanlanma qiymat bosh o'rtacha qiymatning siljima-gan bahosi ekan degan fikrga ishonch hosil qilaylik, ya'ni $\bar{x}_T$ ning matematik kutilmasi $\bar{x}_B$ ga teng ekanligini ko'rsatamiz. $\bar{x}_T$ ni tasodifiy miqdor va $x_1, x_2, \dots, x_n$ larni bog'liqmas, bir xil taq-simlangan tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Bu tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan bo'lgani uchun ular bir xil sonli tavsiflarga, xususan, bosh to'plam X belgisining matematika-tik kutilmasiga teng bo'lgan bir xil matematik kutilmaga ega.

Shunga asosan, 6.2-xossadan, 6.2-natijadan hamda (12.5) va (12.6) formulalardan foydalanib,

$$M(\bar{x}_T) = \bar{x}_B \quad (12.9)$$

ni olamiz.

9.1-natijadan foydalanib, o'rtacha tanlanma qiymat bosh o'r-tacha qiymatning asosli bahosi ham ekanligini osongina ko'rsa-tish mumkin.

Bosh va tanlanma to'plamlar miqdoriy belgilari qiymatla-rining o'zlarining o'rtacha qiymatlari atrofidagi tarqoqligini tavsiflash uchun jamlanma tavsiflar — mos ravishda bosh va tanlanma dispersiyalar hamda o'rtacha kvadratik chetlanishlar ki-ritiladi.

D_B *bosh dispersiya* deb bosh to'plam belgisi qiymatlarining ularning o'rtacha qiymati $\bar{x}_B$ dan chetlanishlari kvadratlarining o'rta arifmetik qiymatiga aytiladi.

Agar N hajmli bosh to'plam belgisining barcha $x_1, x_2, \dots, x_N$ qiymatlari turlicha bo'lsa, u holda bosh dispersiya

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_B)^2 \right) / N \quad (12.10)$$

ga teng bo'ladi.

Belgining $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, \dots, N_k$ chastotalarga ega va bunda $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ bo'lgan taqdirda esa bosh dispersiya

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2 N_i \right) / N \quad (12.11)$$

ga teng bo'ladi.

Bosh o'rtacha kvadratik chetlanish deb bosh dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} . \quad (12.12)$$

1-misol. Bosh to'plam

12.1 – j a d v a l

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

taqsimot jadvali bilan berilgan. Bosh dispersiya va bosh o'rtacha kvadratik chetlanish topilsin.

Yechish. Bosh o'rtacha qiymatni topamiz:

$$\bar{x}_B = \frac{2 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 3}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4 .$$

Bosh dispersiyani topamiz:

$$D_B = \frac{(2 - 4)^2 \cdot 8 + (4 - 4)^2 \cdot 9 + (5 - 4)^2 \cdot 10 + (6 - 4)^2 \cdot 3}{30} = \frac{54}{30} = 1,8 .$$

Bosh o'rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1,8} \approx 1,34 .$$

D_T tanlanma dispersiya deb tanlanma to'plam belgisining kuzatiladigan qiymatlarining ularning o'rtacha qiymati $\bar{x}_T$ dan chetlanishlari kvadratlarining o'rta arifmetik qiymatiga ayti-ladi.

Agar n hajmli tanlanma belgisining barcha $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari turlicha bo'lsa, u holda tanlanma dispersiya

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_T)^2 \right) / n \quad (12.13)$$

ga teng bo'ladi.

Belgining $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_k$ chastotalarga ega va bunda $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ bo'lgan taqdir-da esa tanlanma dispersiya

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_T)^2 n_i \right) / n \quad (12.14)$$

teng bo'ladi.

Tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish deb tanlanma dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} . \quad (12.15)$$

2-misol. Tanlanma to'plam

12.2 – j a d v a l

x_i	1	2	3	4
N_i	20	15	10	5

taqsimot jadvali bilan berilgan. Tanlanma dispersiya va tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish topilsin.

Yechish. O'rtacha tanlanma qiymatni topamiz:

$$\bar{x}_T = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Tanlanma dispersiyani topamiz:

$$D_T = \frac{(1-2)^2 \cdot 20 + (2-2)^2 \cdot 15 + (3-2)^2 \cdot 10 + (4-2)^2 \cdot 5}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} = \sqrt{1} = 1.$$

Dispersiyalarni

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) / N - (\bar{x}_B)^2, \quad (12.16)$$

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 N_i \right) / N - (\bar{x}_B)^2, \quad (12.17)$$

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) / n - (\bar{x}_T)^2 \quad (12.18)$$

va

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 n_i \right) / n - (\bar{x}_T)^2 \quad (12.19)$$

formulalardan foydalanib hisoblash qulayroq bo'ladi.

Endi tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha noma'lum D_B bosh dispersiyani baholash talab etilgan bo'lsin. D_T tanlanma dispersiya D_B ning siljigan bahosi bo'ladi, chunki

$$M(D_T) = \frac{n-1}{n} D_B. \quad (12.20)$$

Bosh dispersiyaning bahosi sifatida D_T ni $n/(n-1)$ kasrga ko'paytirish natijasida hosil qilingan s^2 tuzatilgan dispersiya olingan taqdirda esa u bosh dispersiyaning siljimagan bahosi bo'ladi. Haqiqatan, (12.20) ni hisobga olgan holda

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{n}{n-1} \frac{\left(\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_T)^2 n_i \right)}{n} = \left(\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_T)^2 n_i \right) / (n-1)$$

va

$$M(s^2) = M\left(\frac{n}{n-1} D_T\right) = \frac{n}{n-1} M(D_T) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_B = D_B \quad (12.22)$$

larni hosil qilamiz.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Noma'lum parametrning statistik bahosi deb nimaga aytiladi va u qanday muhim xossalarga ega bo'lishi mumkin?
2. Siljimagan baho nima va uning kiritilishi nima bilan asoslanadi?
3. Effektiv baho nima va uning kiritilishining zaruriyati nimada?
4. Siljigan baho va asosli baho deb nimaga aytiladi?
5. Bosh o'rtacha qiymat nima va u qaysi formulalar bo'yicha hisoblanadi?
6. O'rtacha tanlanma qiymat deb nimaga aytiladi va u qaysi formulalar bo'yicha hisoblanadi?
7. O'rtacha tanlanma qiymat bosh o'rtacha qiymatning qanday bahosi bo'ladi?
8. Bosh dispersiya nima va u qaysi formulalar bo'yicha hisoblanadi?
9. Tanlanma dispersiya deb nimaga aytiladi va u qaysi formulalar bo'yicha hisoblanadi?
10. Bosh o'rtacha kvadratik chetlanish va tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish nima, ular hamda bosh va tanlanma dispersiyalar nima uchun kiritiladi?
11. Dispersiyalarni qaysi formulalar bo'yicha hisoblash qulayroq?
12. Nima bosh dispersiyaning siljimagan bahosi bo'ladi?

Tayanch iboralar:

Noma'lum parametrning statistik bahosi, siljimagan baho, siljigan baho, effektiv baho, asosli baho, bosh o'rtacha qiymat, o'rtacha tanlanma qiymat, bosh dispersiya, bosh o'rtacha kvadratik chetlanish, tanlanma dispersiya, tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish, tuzatilgan dispersiya.

13-mavzu

Intervalli baholar. Ishonchlilik intervali. Normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun ishonchlilik intervallari

Reja:

1. Bahoning aniqligi, ishonchlilik, ishonchlilik intervali.
2. Normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum bo'lganda matematik kutilmasini baholash uchun ishonchlilik intervali.
3. Normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishi noma'lum bo'lganda matematik kutilmasini baholash uchun ishonchlilik intervali.
4. Normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishini baholash uchun ishonchlilik intervali.

Parametrlarni baholashning ikkita usuli mavjud: nuqta-viy va intervalli. Nuqtaviy usullar faqat atrofida baholana-yotgan noma'lum parametr joylashgan nuqtani ko'rsatadi. Intervalli usullar yordamida parametrning noma'lum qiymati ma'lum bir ehtimollik bilan yotadigan intervalni topish mumkin.

Nuqtaviy baho deb bitta son bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi. Tanlanmaning hajmi kichik bo'lgan holda nuqtaviy baho baholanayotgan parametrdan ancha farq qilishi, ya'ni qo'pol xato-larga olib kelishi mumkin. Shu sababga ko'ra tanlanma hajmi uncha katta bo'lmaganda intervalli baholardan foydalanish lozim.

Intervalli baho deb ikkita son — intervalning uchlari bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi. Intervalli baholar baho-larning aniqligi va ishonchliligini baholashga imkon beradi.

Tanlanma ma'lumotlari bo'yicha topilgan $\bar{\theta}$ statistik tav-sif noma'lum θ parametrning bahosi bo'lib xizmat qilsin. Agar $\delta > 0$ va $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ bo'lsa, u holda δ qanchalik kichik bo'lsa, $\bar{\theta}$ baho θ parametrni shunchalik aniq tavsiflaydi. *Bahoning aniqligi* δ musbat son bilan tavsiflanadi.

Biroq $\bar{\theta}$ baho $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradi deb qat'iy da'vo qilish mumkin emas. Statistik usullar faqat bu tengsizlik amalga oshadigan ehtimollik haqidagina gapirishga imkon beradi.

θ ning $\bar{\theta}$ bo'yicha baholanishining *ishonchliligi* (*ishonchli-lik ehtimolligi*) deb $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ tengsizlik amalga oshadigan γ ehtimollikka aytiladi, ya'ni

$$P(|\theta - \bar{\theta}| < \delta) = \gamma \quad (13.1)$$

bo'ladi. γ sifatida bir soniga yaqin bo'lgan son olinadi.

$$\left| \theta - \bar{\theta} \right| < \delta \text{ tengsizlikdan}$$

$$\bar{\theta} - \delta < \theta < \bar{\theta} + \delta \quad (13.2)$$

qo'sh tengsizlikni osongina olish mumkin. U holda (13.1) munosabat

$$P(\bar{\theta} - \delta < \theta < \bar{\theta} + \delta) = \gamma \quad (13.3)$$

ko'rinishni oladi. Bu munosabat quyidagini bildiradi: $(\bar{\theta} - \delta, \bar{\theta} + \delta)$ interval noma'lum θ parametrni o'z ichiga olishi (qopla-shi)ning ehtimolligi γ ga teng.

$(\bar{\theta} - \delta, \bar{\theta} + \delta)$ interval noma'lum θ parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplovchi *ishonchlilik intervali* deb ataladi.

Bosh to'planning X miqdoriy belgisi normal taqsimlangan bo'lib, bu taqsimotning σ o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum bo'lsin. Noma'lum a matematik kutilmani $\bar{x}$ o'rtacha tanlanma qiymat bo'yicha baholash talab qilinadi. O'z oldimizga a parametrni γ ishonchlilik bilan qoplovchi ishonchlilik intervallarini topish vazifasini qo'yamiz.

$\bar{x}$ o'rtacha tanlanma qiymatni $\bar{X}$ tasodifiy miqdor sifatida ($\bar{x}$ tanlanmadan tanlanmaga o'tganda o'zgaradi), belgining $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanma qiymatlarini esa bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida (bu sonlar ham tanlanma-dan tanlanmaga o'tganda o'zgaradi) qaraymiz. Bu miqdorlardan har birining matematik kutilmasi a ga va o'rtacha kvadratik chetlanishi σ ga teng.

U holda, 6.2-xossadan, 6.2-natijadan hamda (12.6) formula-dan foydalanib, $\bar{X}$ taqsimotining parametrlari

$$M(\bar{X}) = a, \quad \sigma(\bar{X}) = \sigma / \sqrt{n} \quad (13.4)$$

ekanligini ko'ramiz.

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma \quad (13.5)$$

munosabat bajarilishini talab qilamiz, bu yerda γ — berilgan ishonchlilik.

X ni $\bar{X}$ bilan va σ ni $\sigma(\bar{X}) = \sigma / \sqrt{n}$ bilan almashtirgan holda (8.11) formuladan foydalanib,

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = 2\Phi(\delta \sqrt{n} / \sigma) = 2\Phi(t) \quad (13.6)$$

munosabatni olish qiyin emas, bu yerda $t = \delta \sqrt{n} / \sigma$.

Oxirgi tenglikdan $\delta = t\sigma / \sqrt{n}$ ni topib,

$$P(|\bar{X} - a| < t\sigma / \sqrt{n}) = 2\Phi(t) \quad (13.7)$$

ni yozish mumkin.

Umumiylik uchun o'rtacha tanlanma qiymatni yana $\bar{x}$ orqali belgilab, (13.5) – (13.7) munosabatlardan

$$\Phi(t) = \gamma / 2 \quad (13.8)$$

va

$$P\left(\bar{x} - t\sigma / \sqrt{n} < a < \bar{x} + t\sigma / \sqrt{n}\right) = \gamma \quad (13.9)$$

munosabatlarni olamiz.

Demak, $(\bar{x} - t\sigma / \sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma / \sqrt{n})$ ishonchlilik intervali noma'lum a parametrni qoplashini γ ishonchlilik bilan da'vo qilish mumkin, bunda bahoning aniqligi $\delta = t\sigma / \sqrt{n}$ ga teng, t soni esa (13.8) tenglikdan Laplas funksiyasining jadvali bo'yicha aniqlanadi.

1-misol. X tasodifiy miqdor $\sigma = 3$ o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum bo'lgan normal taqsimotga ega. Agar tanlanma hajmi $n = 36$ bo'lib, bahoning $\gamma = 0,95$ ishonchliligi berilgan bo'lsa, noma'lum a matematik kutilmani $\bar{x}$ o'rtacha tanlanma qiymat bo'yicha baholash uchun ishonchlilik intervali topilsin.

Yechish. t ni topamiz. (13.8) munosabatdan $\Phi(t) = 0,475$ ni olamiz va Laplas funksiyasining jadvalidan $t = 1,96$ ni topamiz.

Bahoning aniqligini topamiz:

$$\delta = t\sigma / \sqrt{n} = (1,96 \cdot 3) / \sqrt{36} = 0,98.$$

Ishonchlilik intervali $(\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98)$ bo'ladi. Masalan, agar $\bar{x} = 4,1$ bo'lsa, u holda ishonchlilik intervali quyidagi ishonchli-lik chegaralariga ega bo'ladi:

$$\bar{x} - 0,98 = 4,1 - 0,98 = 3,12; \quad \bar{x} + 0,98 = 4,1 + 0,98 = 5,08.$$

Bu yog'iga bizga «xi kvadrat» va Student taqsimotlari kerak bo'ladi.

X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) lar normal bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, ulardan har birining matematik kutilmasi nolga, o'rtacha kvadratik chetlanishi esa birga teng bo'lsin. U holda bu miqdorlar kvadratlarining $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ yig'indisi

erkinlik darajalari $k = n$ ta bo'lgan χ^2 («xi kvadrat») qonuni bo'yicha taqsimlangan.

Bu taqsimotning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} x \leq 0 & 0 \\ x > 0 & \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} e^{-x/2} x^{(k/2)-1} \end{cases} \quad (13.10)$$

ko'rinishga ega, bu yerda $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ — gamma-funksiya.

Bu yerdan «xi kvadrat» taqsimoti bitta parametr — erkinlik darajalari soni k bilan aniqlanishi ko'rinib turadi.

So'ngra, Z normal tasodifiy miqdor bo'lib, $M(Z) = 0$ va $\sigma(Z) = 1$

bo'lsin, V esa Z ga bog'liq bo'lmagan, erkinlik daraja-lari k ta bo'lgan χ^2 qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsin. U holda

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}} \quad (13.11)$$

tasodifiy miqdor t -taqsimot yoki erkinlik darajalari k ta bo'lgan *Styudent taqsimoti* deb ataluvchi taqsimotga ega bo'la-di.

Endi bosh to'planning normal taqsimlangan X miqdoriy belgisining noma'lum a matematik kutilmasini bu taqsimotning σ o'rtacha kvadratik chetlanishi noma'lum bo'lganda $\bar{x}$ o'rtacha tanlanma qiymat bo'yicha baholash talab qilinsin. O'z oldimizga a parametrni γ ishonchlilik bilan qoplovchi ishonchlilik interval-larini topish vazifasini qo'yamiz.

Erkinlik darajalari $k = n - 1$ ta bo'lgan *Styudent taqsimoti*ga ega bo'lgan

$$T = \frac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n}} \quad (13.12)$$

tasodifiy miqdorni ko'rib chiqaylik. Bu yerda $\bar{X}$ — tanlanma o'rtacha qiymat, s — «tuzatilgan» o'rtacha kvadratik chetlanish, n — tanlanma hajmi.

Bu tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$S(t, n) = B_n \left[1 + \frac{t^2}{n-1} \right]^{-n/2} \quad (13.13)$$

ga teng, bunda $B_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}$. Bu yerdan (13.12) tasodifiy

miqdorning taqsimoti n parametr — tanlanma hajmi bilan aniqlanishi va noma'lum a va σ parametrlarga bog'liq emasligi ko'rinib turibdi.

$S(t, n)$ funksiya t bo'yicha juft bo'lgani uchun

$$\left| \frac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n}} \right| < t_\gamma \quad (13.14)$$

tengsizlik ro'y berishining ehtimolligi 7.1-teoremaga asosan

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = 2 \int_0^{t_\gamma} S(t, n) dt = \gamma \quad (13.15)$$

formuladan aniqlanadi. (13.14) tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan qo'sh tengsizlik bilan almashtirib,

$$P(\bar{x} - t_\gamma s/\sqrt{n} < a < \bar{x} + t_\gamma s/\sqrt{n}) = \gamma \quad (13.16)$$

munosabatni olamiz.

Shunday qilib, *Styudent taqsimotidan* foydalanib, noma'lum a parametrni

γ ishonchlilik bilan qoplovchi $(\bar{x} - t_\gamma s / \sqrt{n}, \bar{x} + t_\gamma s / \sqrt{n})$ ishonchlilik intervalini topdik. Maxsus jadvaldan berilgan n va γ bo'yicha t_γ ni topish mumkin.

2-misol. Bosh to'plamning X miqdoriy belgisi normal taq-simlangan. $n = 16$ hajmli tanlanma bo'yicha $\bar{x} = 20,2$ o'rtacha tanlanma qiymat va $s = 0,8$ «tuzatilgan» o'rtacha kvadratik chetlanish topilgan. Noma'lum a matematik kutilma $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan ishonchlilik intervali yordamida baholansin.

Yechish. t_γ ni topamiz. Jadvaldan foydalanib, $\gamma = 0,95$ va $n = 16$ bo'yicha $t_\gamma = 2,13$ ni topamiz.

Iшонchlilik chegaralarini topamiz:

$$\bar{x} - t_\gamma s / \sqrt{n} = 20,2 - 2,13 \cdot 0,8 / \sqrt{16} = 19,774,$$

$$\bar{x} + t_\gamma s / \sqrt{n} = 20,2 + 2,13 \cdot 0,8 / \sqrt{16} = 20,626.$$

Demak, $0,95$ ishonchlilik bilan noma'lum a parametr $19,774 < a < 20,626$ ishonchlilik intervalining ichida joylash-gan.

Bosh to'plamning X miqdoriy belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. Noma'lum σ bosh o'rtacha kvadratik chetlanishni s «tuza-tilgan» o'rtacha kvadratik chetlanish bo'yicha baholash talab qilina-di. O'z oldimizga σ parametrni γ ishonchlilik bilan qoplovchi ishonchlilik intervallarini topish vazifasini qo'yamiz.

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma \quad (13.17)$$

munosabat yoki unga teng kuchli bo'lgan

$$P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma \quad (13.18)$$

munosabat bajarilishini talab qilamiz, bu yerda γ — berilgan ishonchlilik.

$\delta/s = q$ deb olib,

$$s - \delta < \sigma < s + \delta \quad (13.19)$$

qo'sh tengsizlikdan

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q) \quad (13.20)$$

tengsizlikni olamiz.

σ parametrni qoplovchi ishonchlilik intervalini topish uchun faqat q ni topish qoldi. Shu maqsadda

$$\chi = (s/\sigma) \sqrt{n - 1} \quad (13.21)$$

tasodifiy miqdorni qaraymiz, bu yerda n — tanlanma hajmi (bu tasodifiy miqdor $s^2(n - 1)/\sigma^2$ tasodifiy miqdor erkinlik darajalari $n - 1$ ta bo'lgan χ^2 qonuni bo'yicha taqsimlangan bo'lga-ni uchun χ orqali belgilangan).

χ tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-3)/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad (13.22)$$

ko‘rinishga ega. Bu taqsimot baholanayotgan σ parametrga bog‘liq bo‘lmasdan, faqat tanlanma hajmi n ga bog‘liq bo‘ladi.

(13.20) tengsizlikdan

$$\frac{1}{s(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{s(1-q)} \quad (13.23)$$

tengsizlikni olish mumkin. Bu tengsizlikning hamma hadlarini $s\sqrt{n-1}$ ga ko‘paytirib,

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$$

ni yoki

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q} \quad (13.24)$$

ni olamiz.

7.1-teoremadan foydalanib, shu tengsizlik, binobarin, unga teng kuchli bo‘lgan (13.20) tengsizlik ro‘y berishining ehtimol-ligi

$$\int_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\sqrt{n-1}/(1-q)} R(\chi, n) d\chi = \gamma \quad (13.25)$$

ga teng ekanligini ko‘ramiz. Shu tenglamadan berilgan n va γ bo‘yicha q ni topish mumkin. Biroq amaliyotda q maxsus jadval-dan topiladi.

s ni tanlanma bo‘yicha hisoblab va q ni jadval bo‘yicha to‘pib, noma‘lum σ parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplovchi izlanayotgan $(s(1-q), s(1+q))$ ishonchlilik interva-lini olamiz.

3-misol. Bosh to‘planning X miqdoriy belgisi normal taq-simlangan. $n = 25$ hajmli tanlanma bo‘yicha $s = 0,8$ «tuzatilgan» o‘rtacha kvadratik chetlanish topilgan. σ bosh o‘rtacha kvadratik chetlanishni $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan qoplovchi ishonchlilik intervali topilsin.

Yechish. Maxsus jadvaldan berilgan $\gamma = 0,95$ va $n = 25$ bo‘yi-cha $q = 0,32$ ni topamiz.

Izlanayotgan ishonchlilik intervalini topamiz:

$$0,8(1 - 0,32) < \sigma < 0,8(1 + 0,32)$$

yoki

$$0,544 < \sigma < 1,056$$

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Parametrlarni baholashning qanday usullari va ular bilan bog'liq qaysi baholarni bilasiz?
2. **Bahoning aniqligi va ishonchlilik (ishonchlilik ehtimolligi) nima?**
3. Ishonchlilik intervali deb nimaga aytiladi?
4. Normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum bo'lganda matematik kutilmasini baholash uchun ishonchlilik intervali qanday topiladi?
5. «xi kvadrat» va Styudent taqsimotlari haqida nima bilasiz?
6. Normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishi noma'lum bo'lganda matematik kutilmasini baholash uchun ishonchlilik intervali qanday topiladi?
7. Normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishini baholash uchun ishonchlilik intervali qanday topiladi?

Tayanch iboralar:

Nuqtaviy baho, intervalli baho, bahoning aniqligi, ishonchlilik (ishonchlilik ehtimolligi), ishonchlilik intervali, normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum bo'lganda matematik kutilmasini baholash uchun ishonchlilik intervali, «xi kvadrat» taqsimoti, Styudent taqsimoti, normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishi noma'lum bo'lganda matematik kutilmasini baholash uchun ishonchlilik intervali, normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishini baholash uchun ishonchlilik intervali.

14-mavzu

Korrelyatsiyaviy va regressiyaviy tahlil elementlari

Reja:

1. Tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlik turlari.
2. Shartli o'rtacha qiymatlar va regressiya tanlanma tenglamalari.
3. Regressiya tanlanma tenglamasini guruhlanmagan ma'lumotlar bo'yicha topish.
4. Korrelyatsiyaviy jadval.
5. Regressiya tanlanma tenglamasini guruhlangan ma'lumotlar bo'yicha topish.

Korrelyatsiyaviy tahlil va regressiyaviy tahlil matematik statistikaning yondosh bo'limlari bo'lib, tanlanma ma'lumotlari bo'yicha tasodifiy miqdorlarning statistik bog'liqligini o'rga-nish uchun mo'ljallangan. Ikkita tasodifiy miqdor yo funksio-nal, yo statistik bog'liqlik bilan bog'langan yoxud bog'liqmas bo'lishi

mumkin.

Agar X tasodifiy miqdorning har bir mumkin bo'lgan qiy-matiga Y tasodifiy miqdorning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda Y X tasodifiy argumentning funksiyasi deb ataladi:

$$Y = \varphi(X),$$

X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlik esa *funksio-nal bog'liqlik* deb ataladi.

Qat'iy funksional bog'liqlik juda kam hollarda mavjud bo'ladi, chunki ikkala tasodifiy miqdor ham yoki ularning bitta-si tasodifiy omillarning ta'siriga ham uchraydi va ularning ichida ikkala miqdor uchun umumiy bo'lganlari, ya'ni ham X ga, ham Y ga ta'sir o'tkazuvchi omillar ham bo'lishi mumkin. Bu hol-da statistik bog'liqlik vujudga keladi. Bitta tasodifiy miq-dorning o'zgarishi boshqasining taqsimoti o'zgarishiga olib ke-ladigan bog'liqlik *statistik bog'liqlik* deb ataladi. Statistik bog'liqlikning xususiy holi korrelyatsiyaviy bog'liqlikdir.

Agar statistik bog'liqlik qaralayotgan tasodifiy miqdor-lardan birining o'zgarishidan ikkinchi tasodifiy miqdor o'rta qiymati o'zgarishining kelib chiqishida namoyon bo'lsa, u holda bunday statistik bog'liqlik *korrelyatsiyaviy bog'liqlik* deb ataladi.

X tasodifiy miqdor bilan funksional ravishda emas, bal-ki korrelyatsiyaviy holda bog'langan Y tasodifiy miqdorga misol keltiramiz. Y don hosili, X esa o'g'itlar miqdori bo'lsin. May-doni bir xil bo'lgan yer uchastkalaridan teng miqdorlarda o'g'it solinganda har xil miqdorda hosil olinadi, ya'ni Y miqdor X miqdorning funksiyasi bo'lmaydi. Bu holat yog'ingarchilik, havo harorati va boshqa tasodifiy omillarning ta'siri bilan tu-shuntiriladi. Ikkinchi tomondan, o'rtacha hosil o'g'itlar miqdo-rining funksiyasi bo'ladi, ya'ni Y miqdor X miqdor bilan kor-relyatsiyaviy bog'liqlik orqali bog'langan.

$\bar{y}_x$ shartli o'rtacha qiymat deb Y ning $X = x$ qiymatga mos kuzatilgan qiymatlarining o'rta arifmetik qiymatiga aytiladi. Masalan, agar $x_1 = 2$ da Y miqdor $y_1 = 5$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$ qiymat-larni qabul qilsa, u holda shartli o'rtacha qiymat $\bar{y}_{x_1} = (5 + 6 + 10) / 3 = 7$ ga teng bo'ladi.

$\bar{x}_y$ shartli o'rtacha qiymat deb X ning $Y = y$ qiymatga mos kuzatilgan qiymatlarining o'rta arifmetik qiymatiga aytiladi.

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $\bar{y}_x$ shartli o'rtacha qiymat x ning funksiyasi bo'ladi; bu funksiyani $\bar{f}(x)$ orqali belgilab,

$$\bar{y}_x = \bar{f}(x) \quad (14.1)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasi deb ataladi; $\bar{f}(x)$ funksiya Y ning X ga tanlanma regressiyasi, uning grafigi esa Y ning X ga regressiya tanlanma chizig'i deb ataladi.

Shunga o'xshash

$$\bar{x}_y = \bar{\varphi}(y) \quad (14.2)$$

tenglama X ning Y ga regressiya tanlanma tenglamasi deb atala-di; $\bar{\varphi}(y)$ funksiya X ning Y ga tanlanma regressiyasi, uning gra-figi esa X ning Y ga regressiya tanlanma chizig'i deb ataladi.

Yuqorida zikr etilganlar bilan bog'liq ravishda korrelyatsiya nazariyasining ikkita masalasi vujudga keladi. Birinchisi — $\bar{f}(x)$ va $\bar{\varphi}(y)$ funksiyalarning ko'rinishi ma'lum bo'lgan shartda parametrlarini kuzatish ma'lumotlari bo'yicha topish. Ikkinchisi — X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlikning kuchi (zichligi)ni baholash hamda bu miqdorlar orasidagi korrelyatsiya-viy bog'liqlikning mavjudligini aniqlash.

(X, Y) miqdoriy belgilar tizimi o'rganilayotgan bo'lsin. n ta bog'liqmas tajriba natijasida n ta $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ sonlar juftligi olindi.

Kuzatish ma'lumotlari bo'yicha regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasini topaylik. Aniqlik uchun Y ning X ga regressiyasining

$$\bar{y}_x = kx + b \quad (14.3)$$

tenglamasini izlaymiz.

X belgining har xil x qiymatlari va Y belgining ularga mos y qiymatlari bir martadan kuzatilgani uchun ma'lumotlar-ni guruhlashga zarurat yo'q. Shuningdek, shartli o'rtacha qiymat tushunchasidan foydalanishga ham hojat yo'q, shuning uchun (14.3) tenglamani

$$y = kx + b \quad (14.4)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining burchak koeffitsienti *tanlanma regressiya koeffitsienti* deb ataladi va ρ_{yx} orqa-li belgilanadi. Binobarin, Y ning X ga regressiya to'g'ri chizi-g'ining qidirilayotgan (14.4) tenglamasini

$$y = \rho_{yx} x + b \quad (14.5)$$

ko'rinishda izlash lozim.

Shunday ρ_{yx} va b parametrlarni topish kerakki, ularda kuza-tish ma'lumotlari bo'yicha yasalgan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ nuqtalar xOy tekislikda (14.5) to'g'ri chiziqqa iloji boricha yaqin-roq yotsin.

Buni amalga oshirish uchun *eng kichik kvadratlar usulidan* foydalanamiz. Bu usuldan foydalanganda $Y_i - y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) chet-lanishlar kvadratlarining yig'indisi minimal bo'lishi kerak, bu yerda Y_i — kuzatilayotgan x_i qiymatga mos hamda (14.5) tenglama bo'yicha hisoblangan ordinata, y_i esa — x_i ga mos kuzatilayotgan ordi-nata. Har bir chetlanish izlanayotgan parametrlarga bog'liq bo'lgani uchun chetlanishlar kvadratlarining yig'indisi ham shu parametrlarning

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 \quad (14.6)$$

yoki

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i)^2 \quad (14.7)$$

funksiyasi bo'ladi.

Minimumni topish uchun mos xususiy hosilalarni nolga tenglaymiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \rho} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) x_i = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \quad (14.8)$$

Bu ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini ρ va b ga nisbatan yechib, izlanayotgan parametrlarni topamiz:

$$\rho_{yx} = \frac{\left(n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)}; \quad (14.9)$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)}. \quad (14.10)$$

Xuddi shunga o'xshash ravishda X ning Y ga regressiya to'g'ri chizig'ining

$$\bar{x}_y = \rho_{xy} y + c \quad (14.11)$$

tanlanma tenglamasini topish mumkin, bu yerda ρ_{xy} — X ning Y ga tanlanma regressiya koeffisienti.

14.1 – j a d v a l

x_i	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y_i	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

1-misol. Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasi $n = 5$ ta kuzatish ma'lumotlari (14.1-jadval) bo'yicha topilsin.

Yechish. Quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz:

14.2 – j a d v a l

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum_{i=1}^n x_i = 15$	$\sum_{i=1}^n y_i = 8,15$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 57,50$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 26,975$

Izlanayotgan parametrlarni (14.9) va (14.10) munosabatlar-dan topamiz:

$$\rho_{yx} = (5 \cdot 26,975 - 15 \cdot 8,15) / (5 \cdot 57,5 - 15^2) = 0,202 ;$$

$$b = (57,5 \cdot 8,15 - 15 \cdot 26,975) / (5 \cdot 57,5 - 15^2) = 1,024 .$$

Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining qidirilayotgan tenglamasini topamiz:

$$y = 0,202 x + 1,024 .$$

Kuzatishlar soni katta bo'lganda x ning ayni bir qiymati n_x marta, y ning ayni bir qiymati n_y marta uchrashi, ayni bir (x, y) sonlar juftligi n_{xy} marta kuzatilishi mumkin. Shu sa-babli kuzatish ma'lumotlarini guruhlash lozim, buning uchun n_x , n_y , n_{xy} chastotalar hisoblanadi. Hamma guruhlangan ma'lu-motlar *korrelyatsiyaviy jadval* deb ataluvchi jadval (masalan, 14.3-jadval) ko'rinishda yoziladi.

14.3 – j a d v a l

Y	X				n_y
	10	20	30	40	
0,4	5	—	7	14	26
0,6	—	2	6	4	12
0,8	3	19	—	—	22
n_x	8	21	13	18	$n = 60$

14.3-korrelyatsiyaviy jadvalning birinchi satrida X belgi-ning kuzatilayotgan (10; 20; 30; 40) qiymatlari, birinchi ustuni-da esa Y belgining kuzatilayotgan (0,4; 0,6; 0,8) qiymatlari ko'r-satilgan. Satrlar va ustunlarning kesishmalarida belgilarning kuzatilayotgan qiymatlar juftliklarining n_{xy} chastotalari joy-lashgan.

So'nggi ustunda satrlardagi chastotalarning yig'indilari, so'nggi satrda esa ustunlardagi chastotalarning yig'indilari yozil-gan. Jadvalning pastki o'ng burchagida joylashgan katakda barcha chastotalarning yig'indisi, ya'ni jami

kuzatishlar soni n joy-lashtirilgan. $\sum n_x = \sum n_y = n$ ekanligi ravshan.

Endi Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasi parametrlarini olingan ma'lumotlarning soni katta (amalda izlanayotgan parametrlarni qoniqarli darajada baholash uchun kamida 50 ta kuzatish o'tkazilishi kerak), ular orasida tak-rorlanadiganlari bor hamda bu ma'lumotlar korrelyatsiyaviy jad-val ko'rinishda guruhlangan bo'lgan holda aniqlaymiz.

(14.8) sistemadan

$$\begin{cases} \rho_{yx} \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \rho_{yx} \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (14.12)$$

sistemani olish mumkin.

Soddalik uchun $\sum x = \sum_{i=1}^n x_i$, $\sum y = \sum_{i=1}^n y_i$, $\sum x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$,
 $\sum xy = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ belgilashlarni kiritib hamda $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$, $\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$,
 $\overline{x^2} = \frac{\sum x^2}{n}$ va (x, y) sonlar juftligi n_{xy} marta ku-zatilgan degan farazda
 $\sum xy = \sum n_{xy} xy$ munosabatlardan foyda-lanib, (14.12) dan

$$\begin{cases} n \overline{x^2} \rho_{yx} + n \bar{x} b = \sum n_{xy} xy \\ \bar{x} \rho_{yx} + b = \bar{y} \end{cases} \quad (14.13)$$

ni olamiz.

(14.13) sistemaning ikkinchi tenglamasini $b = \bar{y} - \bar{x} \rho_{yx}$ ko'rinishga keltirib va shu tenglikning o'ng tomonini $\bar{y}_x = \rho_{yx} x + b$ tenglamaga qo'yib,

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx} (x - \bar{x}) \quad (14.14)$$

munosabatni olamiz.

(12.15) va (12.19) munosabatlarni hisobga olgan holda, (14.13) sistemadan ρ_{yx} tanlanma regressiya koeffisientini topamiz:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n \bar{x} \bar{y}}{n (\overline{x^2} - (\bar{x})^2)} = \frac{\sum n_{xy} xy - n \bar{x} \bar{y}}{n \tilde{\sigma}_x^2}.$$

Bu tenglikning ikkala tarafini $\tilde{\sigma}_x / \tilde{\sigma}_y$ kasrga ko'paytiramiz:

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = \frac{\sum n_{xy} xy - n \bar{x} \bar{y}}{n \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}. \quad (14.15)$$

(14.15) tenglikning o'ng tarafini r_T orqali belgilaymiz:

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - n \bar{x} \bar{y}}{n \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}. \quad (14.16)$$

U holda (14.15) dan

$$\rho_{yx} = r_T \cdot \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x} \quad (14.17)$$

ni olamiz. Ushbu tenglikning o'ng tarafini (14.14) ga qo'yib, Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasini pirovardida

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_T \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x} (x - \bar{x}) \quad (14.18)$$

ko'rinishda olamiz.

Xuddi shunga o'xshash ravishda X ning Y ga regressiya to'g'ri chizig'ining

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_T \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} (y - \bar{y}) \quad (14.19)$$

tanlanma tenglamasini topish mumkin.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Korrelyatsiyaviy va regressiyaviy tahlil nimani o'rganadi, ta-sodifiy miqdorlar qanday bog'langan bo'lishi mumkin, taso-difiy argumentning funksiyasi va funksional bog'liqlik ni-mani anglatadi?
2. Statistik bog'liqlik va korrelyatsiyaviy bog'liqlik haqida ni-ma bilasiz?
3. Shartli o'rtacha qiymat, regressiya tanlanma tenglamasi, tan-lanma regressiya, regressiya tanlanma chizig'i nima va korrelya-siya nazariyasining qaysi ikkita masalasini bilasiz?
4. Regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasi guruhlanma-gan ma'lumotlar bo'yicha qanday ko'rinishda izlanadi va tan-lanma regressiya koeffisienti nima?
5. Eng kichik kvadratlar usulining mohiyati nimada va uning yor-damida regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasi qan-day topiladi?
6. Korrelyatsiyaviy jadval haqida nima bilasiz?
7. Regressiya to'g'ri chizig'i tanlanma tenglamasining parametrla-ri guruhlangan ma'lumotlar bo'yicha qanday topiladi?

Tayanch iboralar:

Korrelyatsiyaviy tahlil, regressiyaviy tahlil, tasodifiy ar-gumentning funksiyasi, funksional bog‘liqlik, statistik bog‘liqlik, korrelyatsiyaviy bog‘liqlik, shartli o‘rtacha qiymat, regres-siya tanlanma tenglamasi, tanlanma regressiya, regressiya tanlanma chizig‘i, korrelyatsiya nazariyasining ikkita masalasi, guruhlangan ma’lumotlar bo‘yicha regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi, tanlanma regressiya koeffisienti, eng kichik kvad-ratlar usuli, korrelyatsiyaviy jadval, guruhlangan ma’lumotlar bo‘yicha regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi.

15-mavzu

Tanlanma korrelyatsiya koeffisienti va uning xossalari

Reja:

1. Korrelyatsiyaviy moment va korrelyatsiya koeffisienti.
2. Tanlanma korrelyatsiya koeffisienti.
3. Tanlanma korrelyatsiyaviy nisbat.
4. Tanlanma korrelyatsiyaviy nisbatning xossalari.

X va Y tasodifiy miqdorlarning μ_{xy} korrelyatsiyaviy mo-menti deb shu tasodifiy miqdorlar chetlanishlari ko‘paytmasi-ning matematik kutilmasiga aytiladi:

$$\mu_{xy} = M \{ [X - M(X)][Y - M(Y)] \} . \quad (15.1)$$

Bu yerdan osongina

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) \quad (15.2)$$

munosabatni olish mumkin.

X va Y tasodifiy miqdorlarning r_{xy} korrelyatsiya koeffi-sienti deb korrelyatsiyaviy momentning shu tasodifiy miqdorlar o‘rtacha kvadratik chetlanishlarining ko‘paytmasiga nisbatiga ay-tiladi:

$$r_{xy} = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y) . \quad (15.3)$$

(15.2) munosabatdan bog‘liqmas tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiyaviy momenti va demak, korrelyatsiya koeffisienti nolga teng ekanligi kelib chiqadi.

Agar ikkita X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffisienti noldan farqli bo‘lsa, ular korrelyatsiyalangan deb ataladi; agar ikkita X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffisienti nolga teng bo‘lsa, ular

korrelyatsiyalanmagan deb ataladi.

Yuqorida aytilganlardan bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar doi-mo korrelyatsiyalanmaganligi, ikkita korrelyatsiyalangan tasodifiy miqdorlar esa bog‘liq ham ekanligi kelib chiqadi. Haqiqa-tan, agar korrelyatsiyalangan tasodifiy miqdorlar bog‘liqmas deb fa-raz qilsak, u holda ular uchun $\mu_{xy} = 0$ munosabat bajarilishi ke-rak, bu esa korrelyatsiyalangan tasodifiy miqdorlar uchun doimo $\mu_{xy} \neq 0$ munosabat bajarilishiga ziddir.

Ikkinchi tomondan, ikkita bog‘liq tasodifiy miqdorlar korrelyatsiyalangan ham, korrelyatsiyalanmagan ham bo‘lishi mumkin; korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar bog‘liq ham, bog‘liqmas ham bo‘lishi mumkin.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liqmas bo‘lsa, u holda kor-relyatsiya koeffisienti $r_{xy} = 0$ bo‘ladi; agar $r_{xy} = \pm 1$ bo‘lsa, u holda X va Y tasodifiy miqdorlar chiziqli funksional bog‘liqlik bi-lan bog‘langan bo‘ladi. Bu yerdan korrelyatsiya koeffisienti X va Y orasidagi chiziqli bog‘liqlikning kuchi (zichligi)ni o‘lchashi kelib chiqadi.

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - n \bar{x} \bar{y}}{n \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y} \quad (15.4)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi r_T kattalik *tanlanma korrelyatsiya ko-effisienti* deb ataladi. Bu yerda x va y — X va Y belgilar-ning variantalari (kuzatilgan qiymatlari); n_{xy} — (x, y) vari-antalar juftligining chastotasi; n — tanlanma hajmi (barcha chastotalar yig‘indisi); $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y$ — tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishlar; $\bar{x}, \bar{y}$ — o‘rtacha tanlanma qiymatlar.

r_T tanlanma korrelyatsiya koeffisienti bosh to‘plamning r_{xy} korrelyatsiya koeffisientining bahosi bo‘ladi. Shuning uchun un-dan X va Y kattaliklar — miqdoriy belgilar orasidagi chiziq-li bog‘liqlikni o‘lchash uchun ham foydalanish mumkin.

15.1 – j a d v a l

Y	X						n_y
	10	20	30	40	50	60	
15	5	7	—	—	—	—	12
25	—	20	23	—	—	—	43
35	—	—	30	47	2	—	79
45	—	—	10	11	20	6	47
55	—	—	—	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

1-misol. Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining tanlan-ma tenglamasi 15.1-korrelyatsiyaviy jadval ma'lumotlari bo'yicha topilsin.

Yechish. Avval tanlanma korrelyatsiya koeffisientini (15.4) formula bo'yicha hisoblaymiz:

$$\bar{x} = (10 \cdot 5 + 20 \cdot 27 + 30 \cdot 63 + 40 \cdot 67 + 50 \cdot 29 + 60 \cdot 9) / 200 = 35,75 ;$$

$$\bar{y} = (15 \cdot 12 + 25 \cdot 43 + 35 \cdot 79 + 45 \cdot 47 + 55 \cdot 19) / 200 = 35,9 ;$$

$$\overline{x^2} = (100 \cdot 5 + 400 \cdot 27 + 900 \cdot 63 + 1600 \cdot 67 + 2500 \cdot 29 + 3600 \cdot 9) / 200 = 1400,5 ;$$

$$\overline{y^2} = (225 \cdot 12 + 625 \cdot 43 + 1225 \cdot 79 + 2025 \cdot 47 + 3025 \cdot 19) / 200 = 1395 ;$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{1400,5 - 1278,0625} \approx 11,07 ;$$

$$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{1395 - 1288,81} \approx 10,30 ;$$

$$\begin{aligned} \sum n_{xy} xy &= 5 \cdot 10 \cdot 15 + 7 \cdot 20 \cdot 15 + 20 \cdot 20 \cdot 25 + 23 \cdot 30 \cdot 25 + 30 \cdot 30 \cdot 35 + \\ &+ 47 \cdot 40 \cdot 35 + 2 \cdot 50 \cdot 35 + 10 \cdot 30 \cdot 45 + 11 \cdot 40 \cdot 45 + 20 \cdot 50 \cdot 45 + \\ &+ 6 \cdot 60 \cdot 45 + 9 \cdot 40 \cdot 55 + 7 \cdot 50 \cdot 55 + 3 \cdot 60 \cdot 55 = 274350 ; \end{aligned}$$

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - n \bar{x} \bar{y}}{n \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y} = \frac{274350 - 200 \cdot 35,75 \cdot 35,9}{200 \cdot 11,07 \cdot 10,3} \approx 0,775 .$$

Endi topilgan qiymatlarni (14.18) formulaga qo'yamiz va Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining

$$\bar{y}_x - 35,9 = 0,775 \cdot \frac{10,30}{11,07} (x - 35,75)$$

yoki pirovardida

$$\bar{y}_x = 0,721 x + 10,12$$

tanlanma tenglamasini olamiz.

Agar tanlanma yetarlicha katta hajmga ega va bosh to'plamni yaxshi tasvirlasa (reprezentativ bo'lsa), u holda belgilar orasi-dagi chiziqli bog'liqlikning zichligi haqida tanlanma ma'lumot-lari bo'yicha olingan xulosa ma'lum darajada bosh to'plamga ham qo'llanilishi mumkin. Masalan, normal taqsimlangan bosh to'plamning r_B korrelyatsiya koeffisientini ($n \geq 50$ da) baholash uchun

$$r_T - 3 \frac{1 - r_T^2}{\sqrt{n}} \leq r_B \leq r_T + 3 \frac{1 + r_T^2}{\sqrt{n}}$$

formuladan foydalanish mumkin.

Shunday qilib, tanlanma korrelyatsiya koeffisienti tanlan-madagi belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsiyaviy bog'liqlik-ning zichligini baholash uchun xizmat qiladi. Chiziqli bo'lmagan korrelyatsiyaviy bog'liqlikning zichligini baholash uchun tanlan-ma korrelyatsiyaviy nisbat tushunchasi kiritiladi.

Y ning X ga *tanlanma korrelyatsiyaviy nisbati* deb

$$\eta_{yx} = \sigma_{\bar{y}_x} / \tilde{\sigma}_y \quad (15.5)$$

nisbatga aytiladi. Bu yerda

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{(\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2) / n};$$

$$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{(\sum n_y (y - \bar{y})^2) / n},$$

bo'lib, bunda n — tanlanma hajmi (barcha chastotalar yig'indi-si); n_x — X belgining x qiymati chastotasi; n_y — Y belgi-ning y qiymati chastotasi; $\bar{y}$ — Y belgining umumiy o'rtacha qiymati; $\bar{y}_x$ — Y belgining shartli o'rtacha qiymati.

Xuddi shunga o'xshash ravishda X ning Y ga

$$\eta_{xy} = \sigma_{\bar{x}_y} / \tilde{\sigma}_x \quad (15.6)$$

tanlanma korrelyatsiyaviy nisbati aniqlanadi.

2-misol. Quyidagi korrelyatsiyaviy jadval ma'lumotlari bo'yicha η_{yx} topilsin:

15.2 – j a d v a l

Y	X			n_y
	10	20	30	
15	4	28	6	38
25	6	—	6	12
n_x	10	28	12	$n = 50$
$\bar{y}_x$	21	15	20	

Yechish. Avval $\bar{y}$, $\tilde{\sigma}_y$ va $\sigma_{\bar{y}_x}$ ni topamiz:

$$\bar{y} = (38 \cdot 15 + 12 \cdot 25) / 50 = 17,4 ;$$

$$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{[38 \cdot (15 - 17,4)^2 + 12 \cdot (25 - 17,4)^2] / 50} \approx 4,27 ;$$

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{[10 \cdot (21 - 17,4)^2 + 28 \cdot (15 - 17,4)^2 + 12 \cdot (20 - 17,4)^2] / 50} \approx 2,73 .$$

Endi shu qiymatlarning barchasini (15.5) formulaga qo'yamiz va η_{yx} ni topamiz:

$$\eta_{yx} = \sigma_{\bar{y}_x} / \tilde{\sigma}_y \approx 2,73 / 4,27 \approx 0,64 .$$

Tanlanma korrelyatsiyaviy nisbatning xossalarini sanab o'tamiz.

15.1-xossa. *Tanlanma korrelyatsiyaviy nisbat*

$$0 \leq \eta_{yx} \leq 1$$

qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi.

15.2-xossa. Agar $\eta_{yx} = 0$ bo'lsa, u holda Y belgi X belgi bi-lan korrelyatsiyaviy bog'liqlik orqali bog'lanmagan.

15.3-xossa. Agar $\eta_{yx} = 1$ bo'lsa, u holda Y belgi X belgi bi-lan funksional bog'liqlik orqali bog'langan.

15.4-xossa. Tanlanma korrelyatsiyaviy nisbat tanlanma korrelyatsiya koeffisientining absolyut qiymatidan kichik emas: $\eta_{yx} \geq |r_T|$.

15.5-xossa. Agar tanlanma korrelyatsiyaviy nisbat tanlanma korrelyatsiya koeffisientining absolyut qiymatiga teng bo'lsa, u holda aniq chiziqli korrelyatsiyaviy bog'liqlik o'rinli bo'ladi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Korrelyatsiyaviy moment deb nima ataladi va korrelyatsiya koef-fisienti deb nima ataladi?
2. Korrelyatsiyalangan va korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdor-lar nima hamda tasodifiy miqdorlarning bog'liqligi va korre-lyatsiyalanganligi tushunchalari orasidagi bog'lanish qanday?
3. Tanlanma korrelyatsiya koeffisienti haqida nima bilasiz?
4. Tanlanma korrelyatsiyaviy nisbat nima va u nimaga xizmat qila-di?
5. Tanlanma korrelyatsiyaviy nisbatning qaysi xossalari ni bila-siz?

Tayanch iboralar:

Korrelyatsiyaviy moment, korrelyatsiya koeffisienti, korre-lyatsiyalangan tasodifiy miqdorlar, korrelyatsiyalanmagan tasodi-fiy miqdorlar, tanlanma korrelyatsiya koeffisienti, tanlanma korrelyatsiyaviy nisbat.

16-mavzu

Statistik gipotezalar va ularning tasnifi.

Statistik mezon

Reja:

1. Statistik gipotezalar va ularning tasnifi. Birinchi va ikkinchi tur xatolar.
2. Statistik mezon. Kritik soha va kritik nuqtalar.
3. Kritik sohalarni topish. Mezon quvvati.
4. Ikkita normal bosh to'plamning dispersiyalarini taqqoslash.
5. Ikkita normal bosh to'plamning o'rtacha qiymatlarini taqqoslash.

Bosh to'plamning taqsimot qonunini aniqlash talab etilgan bo'lsin va uni A deb ataymiz. Agar taqsimot qonuni noma'lum, lekin u tayin ko'rinishga ega deb taxmin qilishga asos bor bo'lsa, u holda bosh to'plam A qonun bo'yicha taqsimlangan degan gipoteza taklif etiladi. Shunday qilib, ushbu gipotezada taxmin qilina-yotgan taqsimotning ko'rinishi haqida gap boradi.

Taqsimot qonuni ma'lum, uning parametrlari esa noma'lum bo'lgan hol bo'lishi mumkin. Agar noma'lum Θ parametr ta-yin Θ_0 qiymatga teng deb taxmin qilishga asos bor bo'lsa, u hol-da $\Theta = \Theta_0$ ekanligi haqidagi gipoteza taklif etiladi. Shunday qilib, ushbu gipotezada ma'lum taqsimot parametrining taxmin qilinayotgan kattaligi haqida gap boradi.

Statistik gipoteza deb noma'lum taqsimotning ko'rinishi haqidagi gipotezaga yoki ma'lum taqsimotlarning parametr-lari haqidagi gipotezaga aytiladi. Masalan, quyidagi gipoteza-lar statistik gipotezalar bo'ladi:

- 1) bosh to'plam Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan;
- 2) ikkita normal to'plamning dispersiyalari o'zaro teng.

Birinchi gipotezada noma'lum taqsimotning ko'rinishi ha-qida, ikkinchisida ikkita ma'lum taqsimotning parametrlari ha-qida taxmin qilingan.

Nolinchi (asosiy) gipoteza deb taklif etilgan H_0 gipote-zaga aytiladi.

Konkurent (muqobil) gipoteza deb nolinchi gipotezaga zid bo'lgan H_1 gipotezaga aytiladi.

Masalan, agar nolinchi gipoteza normal taqsimotning mate-matik kutilmasi a 10 ga teng degan taxmindan iborat bo'lsa, u holda konkurent gipoteza $a \neq 10$ degan taxmindan iborat bo'lishi mumkin; ya'ni $H_0 : a = 10$; $H_1 : a \neq 10$.

Oddiy gipoteza deb faqat bitta taxminni o'z ichiga olgan gipotezaga aytiladi. Masalan, normal taqsimotning (σ ma'lum) matematik kutilmasi 3 ga tengligidan iborat H_0 gipoteza oddiy gipotezadir.

Murakkab gipoteza deb chekli yoki cheksiz sondagi oddiy gi-potezalardan iborat gipotezaga aytiladi. Masalan, $\lambda > 5$ ekan-ligidan iborat bo'lgan murakkab H gipoteza $H_i: \lambda = b_i$ ko'rinish-dagi oddiy gipotezalarning cheksiz to'plamidan iborat, bu yerda b_i — 5 dan katta ixtiyoriy son.

Taklif etilgan gipoteza to'g'ri yoki noto'g'ri bo'lishi mumkin, shuning uchun bu gipotezani (statistik usullar bilan amalga oshiriladigan) *statistik tekshirish* zarurati tug'iladi. Gipo-tezani statistik tekshirish natijasida xatolarga yo'l qo'yilishi mumkin.

Birinchi tur xato to'g'ri gipoteza rad etilishidan iborat.

Ikkinchi tur xato noto'g'ri gipoteza qabul qilinishidan iborat.

Nolinchi gipotezani tekshirish uchun aniq yoki taqribiy taq-simoti ma'lum bo'lgan maxsus tanlangan tasodifiy miqdor ish-latiladi. Bu tasodifiy miqdor K orqali belgilanadi va *statistik mezon* (yoki oddiygina *mezon*) deb ataladi.

Statistik mezonga misol keltiramiz. Agar ikkita normal bosh to'plamlar dispersiyalarining tengligi haqidagi gipoteza tekshirilayotgan bo'lsa, u holda K mezon sifatida tuzatilgan tan-lanma dispersiyalarning

$$F = s_1^2 / s_2^2$$

nisbati qabul qilinadi.

K_{qizam} kuzatiladigan qiymat deb mezonning tanlanmalar bo'yicha hisoblangan qiymatiga aytiladi. Masalan, agar ikkita tan-lanma bo'yicha $s_1^2 = 20$ va $s_2^2 = 5$ tuzatilgan tanlanma dispersiyalar topilgan bo'lsa, u holda F mezonning kuzatiladigan qiymati

$$F_{\text{qizam}} = s_1^2 / s_2^2 = 20 / 5 = 4$$

ga teng.

Tayinli mezon tanlanganidan so'ng uning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plami ikkita kesishmaydigan qism to'plamlarga ajratiladi: ulardan biri mezonning nolinchi gipoteza rad etiladigan qiymatlarini, ikkinchisi esa bu gipoteza qabul qilinadigan qiymatlarini o'z ichiga oladi.

Kritik soha deb mezonning nolinchi gipoteza rad etiladigan qiymatlari to'plamiga aytiladi.

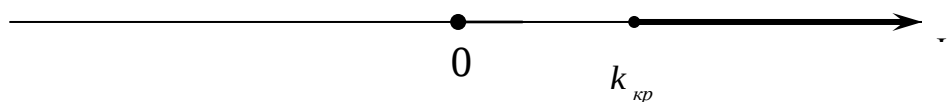
Gipotezaning qabul qilinish sohasi (joiz qiymatlar sohasi) deb mezonning nolinchi gipoteza qabul qilinadigan qiymatlari to'plamiga aytiladi.

K mezon bir o'lchovli tasodifiy miqdor bo'lgani uchun uning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari biror intervalga tegishli bo'ladi. Shuning uchun kritik soha ham, gipotezaning qabul qilinish sohasi ham intervallardan iborat bo'ladi va demak, ularni ajratib turadigan nuqtalar mavjud.

k_{kp} kritik nuqtalar (chegaralar) deb kritik sohani gipotezaning qabul qilinish sohasidan ajratib turadigan nuqtalarga aytiladi.

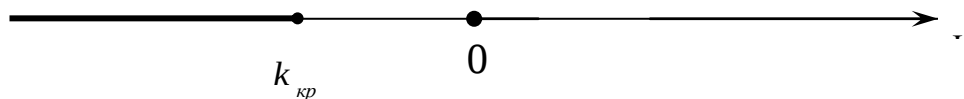
O'ng tomonlama kritik soha deb $K > k_{\text{kp}}$ tengsizlik bilan aniqlanadigan

kritik sohaga aytiladi, bu yerda k_{kp} — musbat son (16.1-rasm).



16.1 - rasm.

Chap tomonlama kritik soha deb $K < k_{kp}$ tengsizlik bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi, bu yerda k_{kp} — manfiy son (16.2-rasm).

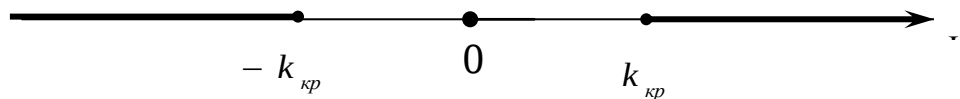


16.2 - rasm.

Bir tomonlama kritik soha deb o'ng tomonlama yoki chap tomonlama kritik sohaga aytiladi.

Ikki tomonlama kritik soha deb $K < k_1$, $K > k_2$ tengsizliklar bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi, bu yerda $k_2 > k_1$.

Xususan, agar kritik nuqtalar nolga nisbatan simmetrik bo'lsa, u holda ikki tomonlama kritik soha ($k_{kp} > 0$ degan faraz-da) $K < -k_{kp}$, $K > k_{kp}$ tengsizliklar bilan yoki ularga teng kuchli $|K| > k_{kp}$ tengsizlik bilan aniqlanadi (16.3-rasm).



16.3 - rasm.

Kritik sohani topish uchun kritik nuqta (nuqtalar)ni topish yetarli. Bunday nuqtani topish uchun esa yetarlicha kichik ehtimollik — *qiymatdorlik darajasi* α beriladi. So'ngra no-linchi gipoteza o'rinli ekanligi shartida K mezon kritik sohadan qiymatlar qabul qilishining ehtimolligi qabul qilingan qiymatdorlik darajasiga teng bo'ladi degan talabdan kelib chiqib k_{kp} kritik nuqta izlanadi.

Masalan, o'ng tomonlama kritik soha uchun

$$P(K > k_{kp}) = \alpha \quad (16.1)$$

munosabat, chap tomonlama kritik soha uchun

$$P(K < k_{kp}) = \alpha \quad (16.2)$$

munosabat, ikki tomonlama kritik soha uchun esa

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha \quad (16.3)$$

munosabat bajarilishi kerak.

Har bir mezon uchun tegishli jadvallar mavjud bo'lib, ular bo'yicha (16.1) –

(16.3) ko‘rinishdagi talablarni qanoatlantiruvchi kritik nuqta topiladi.

Agar mezon taqsimoti nolga nisbatan simmetrik bo‘lsa ham-da nolga nisbatan simmetrik $-k_{kp}$ va k_{kp} ($k_{kp} > 0$) nuqtalarni tanlash uchun asos bo‘lsa, u holda $P(K < -k_{kp}) = P(K > k_{kp})$ bo‘la-di. Shu munosabatni hisobga olib, (16.3) dan ikki tomonlama kritik soha uchun

$$P(K > k_{kp}) = \alpha/2 \quad (16.4)$$

munosabatni olamiz.

Mezon quvvati deb konkurent gipoteza o‘rinli ekanligi shar-tida mezonning kritik sohaga tushishi ehtimolligiga aytiladi. Boshqacha aytganda, mezon quvvati konkurent gipoteza o‘rinli bo‘l-ganda nolinchi gipoteza rad etilishining ehtimolligidir.

Gipotezani tekshirish uchun tayinli qiymatdorlik daraja-si qabul qilingan va tanlanma tayin hajmga ega bo‘lsin. Agar β ikkinchi tur xatoning, ya’ni «nolinchi gipoteza qabul qilingan, aslida esa konkurent gipoteza o‘rinli edi» hodisasining ehti-molligi bo‘lsa, u holda mezon quvvati $1 - \beta$ ga teng.

$1 - \beta$ quvvat ortib borsin; demak, ikkinchi tur xatoga yo‘l qo‘-yishning ehtimolligi β kamayib boradi. Binobarin, quvvat qan-chalik katta bo‘lsa, ikkinchi tur xatoning ehtimolligi shunchalik kichik bo‘ladi.

Shunday qilib, agar qiymatdorlik darajasi tanlab olingan bo‘lsa, u holda kritik sohani mezon quvvati maksimal bo‘ladigan qilib qurish lozim. Bu ikkinchi tur xatosini minimallashti-rishga imkon beradi.

Bu yog‘iga bizga Fisher – Snedekor taqsimoti kerak bo‘ladi.

Agar U va V lar erkinlik darajalari k_1 va k_2 ta bo‘lgan χ^2 qonuni bo‘yicha taqsimlangan bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, u holda

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2} \quad (16.5)$$

kattalik erkinlik darajalari k_1 va k_2 ta bo‘lgan *Fisher – Snedekor-ning* F taqsimoti deb ataluvchi taqsimotga ega bo‘ladi.

Bu taqsimotning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \partial a & 0 \\ x > 0 & \partial a & C_0 \frac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2 + k_1 x)^{(k_1+k_2)/2}} \end{cases},$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2) \Gamma(k_2/2)}.$$

F taqsimot ikkita parametr — erkinlik darajalari son-lari k_1 va k_2 bilan

aniqlanadi.

X va Y bosh to'plamlar normal taqsimlangan bo'lsin. Bu to'plamlardan olingan, hajmlari mos ravishda n_1 va n_2 ga teng bo'lgan bog'liqmas tanlanmalar bo'yicha s_x^2 va s_y^2 tuzatilgan tanlanma dispersiyalar topilgan. Berilgan α qiymatdorlik darajasida tuzatilgan dispersiyalar bo'yicha ko'rilayotgan to'plamlarning bosh dispersiyalari o'zaro teng ekanligidan iborat bo'lgan nolinch gipotezani tekshirish talab qilinadi:

$$H_0 : D(X) = D(Y). \quad (16.6)$$

Tuzatilgan dispersiyalar bosh dispersiyalarning siljima-gan baholari, ya'ni

$$M(s_x^2) = D(X), \quad M(s_y^2) = D(Y)$$

ekanligini hisobga olib, nolinch gipotezani

$$H_0 : M(s_x^2) = M(s_y^2) \quad (16.7)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Amaliyotda dispersiyalarni taqqoslash masalasi asboblarning, uskunalarning, o'lchash usullarining o'zining va hokazolar-ning aniqligini taqqoslash talab etilganda yuzaga keladi. Rav-shanki, o'lchash natijalarining eng kam tarqoqligini, ya'ni eng ki-chik dispersiyani ta'minlaydigan asbob, uskuna va usul ma'qul-roqdir.

Bosh dispersiyalarning tengligi haqidagi nolinch gipotezani tekshirish mezonni sifatida tuzatilgan dispersiyalarning kattarog'ining kichikrog'iga nisbati, ya'ni

$$F = s_{kam}^2 / s_{kuc}^2 \quad (16.8)$$

tasodifiy miqdor qabul qilinadi.

F kattalik nolinch gipoteza o'rinli degan shartda erkinlik darajalari $k_1 = n_1 - 1$ va $k_2 = n_2 - 1$ ta bo'lgan Fisher – Snedekor taqsimotiga ega, bu yerda n_1 hajmli tanlanma bo'yicha kattaroq tuzatilgan dispersiya hisoblangan, n_2 hajmli tanlanma bo'yicha ki-chikroq tuzatilgan dispersiya hisoblangan.

Kritik soha konkurent gipotezaning ko'rinishiga bog'liq ra-vishda quriladi.

Birinch hol. Nolinch gipoteza $H_0 : D(X) = D(Y)$. Konkurent gipoteza $H_1 : D(X) > D(Y)$.

Bu holda o'ng tomonlama kritik soha nolinch gipoteza o'rinli degan taxminda F mezonning sohaga tushish ehtimolligi qabul qilingan qiymatdorlik darajasiga teng bo'lishi talabiga asoslanib quriladi:

$$P(F > F_{kp}(\alpha; k_1; k_2)) = \alpha. \quad (16.9)$$

$F_{kp}(\alpha; k_1; k_2)$ kritik nuqta Fisher – Snedekor taqsimoti-ning kritik nuqtalari jadvali bo'yicha topiladi.

1-qoida. Berilgan qiymatdorlik darajasida normal to'plamlar bosh dispersiyalarining tengligi haqidagi $H_0 : D(X) = D(Y)$ nolinch gipotezani

konkurent gipoteza $H_1: D(X) > D(Y)$ bo'lgan-da tekshirish uchun tuzatilgan dispersiyalarning kattarog'ining ki-chikrog'iga nisbati, ya'ni

$$F_{\text{кызам}} = s_{\text{кам}}^2 / s_{\text{куч}}^2 \quad (16.10)$$

ni hisoblash kerak va Fisher – Snedekor taqsimotining kritik nuqtalari jadvali, berilgan α qiymatdorlik darajasi hamda erkinlik darajalari sonlari k_1 va k_2 bo'yicha $F_{\text{кр}}(\alpha; k_1; k_2)$ kri-tik nuqtani topish kerak (k_1 — kattaroq tuzatilgan dispersiya-ning erkinlik darajalari soni).

Agar $F_{\text{кызам}} < F_{\text{кр}}$ bo'lsa, nolinchi gipotezani rad etishga asos yo'q. Agar $F_{\text{кызам}} > F_{\text{кр}}$ bo'lsa, nolinchi gipoteza rad etiladi.

1-misol. X va Y normal bosh to'plamlardan olingan ikkita $n_1 = 12$ va $n_2 = 15$ hajmli bog'liqmas tanlanmalar bo'yicha $s_X^2 = 11,41$ va $s_Y^2 = 6,52$ tuzatilgan tanlanma dispersiyalar topilgan. 0,05 qiymatdorlik darajasida bosh dispersiyalarning tengligi haqi-dagi $H_0: D(X) = D(Y)$ nolinchi gipoteza konkurent gipoteza $H_1: D(X) > D(Y)$ bo'lganda tekshirilsin.

Yechish. Tuzatilgan dispersiyalarning kattarog'ining kichikro-g'iga nisbatini topamiz:

$$F_{\text{кызам}} = 11,41 / 6,52 = 1,75 .$$

Konkurent gipoteza $D(X) > D(Y)$ ko'rinishda, shuning uchun kri-tik soha o'ng tomonlama bo'ladi.

Fisher – Snedekor taqsimotining kritik nuqtalari jadva-li, $\alpha = 0,05$ qiymatdorlik darajasi hamda erkinlik darajalari sonlari $k_1 = 12 - 1 = 11$ va $k_2 = 15 - 1 = 14$ bo'yicha $F_{\text{кр}}(0,05; 11; 14) = 2,56$ kritik nuqtani topamiz.

$F_{\text{кызам}} < F_{\text{кр}}$ bo'lgani uchun bosh dispersiyalarning tengligi haqidagi nolinchi gipotezani rad etishga asos yo'q.

Ikkinchi hol. Nolinchi gipoteza $H_0: D(X) = D(Y)$. Konku-rent gipoteza $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

Bu holda ikki tomonlama kritik soha nolinchi gipoteza o'rinli degan taxminda F mezonning sohaga tushish ehtimolligi qabul qilingan α qiymatdorlik darajasiga teng bo'lishi tala-biga asoslanib quriladi.

Mezonning eng katta quvvati (konkurent gipoteza o'rinli bo'lganda mezonning kritik sohaga tushish ehtimolligi)ga mezon-ning kritik sohaning har bir intervaliga tushish ehtimolligi $\alpha/2$ ga teng bo'lganda erishiladi.

Agar F_1 orqali kritik sohaning chap chegarasi va F_2 orqali o'ng chegarasi belgilansa, u holda

$$P(F < F_1) = \alpha/2, \quad P(F > F_2) = \alpha/2 \quad (16.11)$$

munosabatlar o'rinli bo'lishi kerak.

Konkurent gipoteza $H_1: D(X) \neq D(Y)$ bo'lganda F mezon-ning ikki tomonlama kritik sohaga qabul qilingan α qiymat-dorlik darajasiga teng bo'lgan ehtimollik bilan tushishini ta'minlash uchun $F_2 = F_{kp}(\alpha/2; k_1; k_2)$ kritik nuqtani topish yetarli.

2-qoida. Berilgan qiymatdorlik darajasida normal to'plamlar bosh dispersiyalarining tengligi haqidagi $H_0: D(X) = D(Y)$ nolinch gipotezani konkurent gipoteza $H_1: D(X) \neq D(Y)$ bo'lganda tekshirish uchun tuzatilgan dispersiyalarning kattarog'ining ki-chikrog'iga nisbati, ya'ni (16.10) ni hisoblash kerak va Fisher – Snedekor taqsimotining kritik nuqtalari jadvali, berilgan $\alpha/2$ (berilgandan ikki marotaba kichik) qiymatdorlik darajasi hamda erkinlik darajalari sonlari k_1 va k_2 bo'yicha $F_{kp}(\alpha/2; k_1; k_2)$ kritik nuqtani topish kerak (k_1 — kattaroq tuzatilgan dispersiya-ning erkinlik darajalari soni).

Agar $F_{kuzam} < F_{kp}$ bo'lsa, nolinch gipotezani rad etishga asos yo'q. Agar $F_{kuzam} > F_{kp}$ bo'lsa, nolinch gipoteza rad etiladi.

2-misol. X va Y normal bosh to'plamlardan olingan ikkita $n_1 = 10$ va $n_2 = 18$ hajmli bog'liqmas tanlanmalar bo'yicha $s_x^2 = 1,23$ va $s_y^2 = 0,41$ tuzatilgan tanlanma dispersiyalar topilgan. 0,1 qiy-matdorlik darajasida bosh dispersiyalarning tengligi haqidagi $H_0: D(X) = D(Y)$ nolinch gipoteza konkurent gipoteza $H_1: D(X) \neq D(Y)$ bo'lganda tekshirilsin.

Yechish. Tuzatilgan dispersiyalarning kattarog'ining kichikro-g'iga nisbatini topamiz:

$$F_{kuzam} = 1,23 / 0,41 = 3.$$

Konkurent gipoteza $D(X) \neq D(Y)$ ko'rinishda, shuning uchun kri-tik soha ikki tomonlama bo'ladi.

Fisher – Snedekor taqsimotining kritik nuqtalari jadva-li, berilgandan ikki marotaba kichik qiymatdorlik darajasi, ya'ni $\alpha/2 = 0,05$ hamda erkinlik darajalari sonlari $k_1 = 10 - 1 = 9$ va $k_2 = 18 - 1 = 17$ bo'yicha $F_{kp}(0,05; 9; 17) = 2,50$ kritik nuqtani topamiz.

$F_{kuzam} > F_{kp}$ bo'lgani uchun bosh dispersiyalarning tengligi ha-qidagi nolinch gipoteza rad etiladi.

X va Y bosh to'plamlar normal taqsimlangan, ularning dis-persiyalari ma'lum bo'lsin. Bu to'plamlardan olingan, hajmlari mos ravishda n va m ga teng bo'lgan bog'liqmas tanlanmalar bo'yicha $\bar{x}$ va $\bar{y}$ o'rtacha tanlanma qiymatlar topilgan. Berilgan α qiymat-dorlik darajasida o'rtacha tanlanma qiymatlar bo'yicha ko'rilayot-gan to'plamlarning bosh o'rtacha qiymatlari (matematik

kutilma-lari) o‘zaro teng ekanligidan iborat bo‘lgan nolinchgi gipotezani tekshirish talab qilinadi:

$$H_0 : M(X) = M(Y). \quad (16.12)$$

O‘rtacha tanlanma qiymatlar bosh o‘rtacha qiymatlarning sil-jimagan baholari, ya’ni

$$M(\bar{x}) = M(X), \quad M(\bar{y}) = M(Y)$$

ekanligini hisobga olib, nolinchgi gipotezani

$$H_0 : M(\bar{x}) = M(\bar{y}) \quad (16.13)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Bosh o‘rtacha qiymatlarning tengligi haqidagi nolinchgi gipotezani tekshirish mezonni sifatida normalangan

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}} \quad (16.14)$$

normal tasodifiy miqdor qabul qilinadi.

Kritik soha konkurent gipotezaning ko‘rinishiga bog‘liq ra-vishda quriladi.

Birinchi hol. Nolinchgi gipoteza $H_0 : M(X) = M(Y)$. Konkurent gipoteza $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

Bu holda ikki tomonlama kritik soha nolinchgi gipoteza o‘rinli degan taxminda Z mezonning sohaga tushish ehtimolligi qabul qilingan α qiymatdorlik darajasiga teng bo‘lishi tala-biga asoslanib quriladi.

Z ning taqsimoti nolga nisbatan simmetrik bo‘lgani uchun kritik nuqtalar nolga nisbatan simmetrikdir, ya’ni agar z_{kp} or-qali o‘ng kritik nuqta belgilansa, u holda $-z_{kp}$ chap kritik nuqta bo‘ladi.

Mezonning eng katta quvvati (konkurent gipoteza o‘rinli bo‘lganda mezonning kritik sohaga tushish ehtimolligi)ga mezonning kritik sohaning har bir intervaliga tushish ehtimolligi $\alpha/2$ ga teng bo‘lganda erishiladi:

$$P(Z < -z_{kp}) = \alpha/2, \quad P(Z > z_{kp}) = \alpha/2. \quad (16.15)$$

Ikki tomonlama kritik sohaning o‘ng chegarasi z_{kp} ni topish uchun Laplas funksiyasining $(1 - \alpha)/2$ ga teng qiymatiga mos ke-luvchi argumentining qiymatini topish kifoya:

$$\Phi(z_{kp}) = (1 - \alpha)/2. \quad (16.16)$$

Mezonning kuzatish ma’lumotlari bo‘yicha hisoblangan qiymatini Z_{kuzat} orqali belgilaymiz.

Agar $|Z_{kuzat}| < z_{kp}$ bo‘lsa, nolinchgi gipotezani rad etishga asos yo‘q.

Agar $|Z_{kuzat}| > z_{kp}$ bo‘lsa, nolinchgi gipoteza rad etiladi.

Ikkinchi hol. Nolinchgi gipoteza $H_0 : M(X) = M(Y)$. Konkurent

gipoteza $H_1: M(X) > M(Y)$.

Bu holda o'ng tomonlama kritik soha nolinchi gipoteza o'rin-li degan taxminda Z mezonning sohaga tushish ehtimolligi qabul qilingan qiymatdorlik darajasiga teng bo'lishi talabiga asoslanib quriladi:

$$P(Z > z_{kp}) = \alpha. \quad (16.17)$$

O'ng tomonlama kritik sohaning chegarasi z_{kp} ni topish uchun Laplas funksiyasining $(1 - 2\alpha)/2$ ga teng qiymatiga mos keluvchi argumentining qiymatini topish kifoya:

$$\Phi(z_{kp}) = (1 - 2\alpha)/2. \quad (16.18)$$

Mezonning kuzatish ma'lumotlari bo'yicha hisoblangan qiymatini Z_{kuzat} orqali belgilaymiz.

Agar $Z_{kuzat} < z_{kp}$ bo'lsa, nolinchi gipotezani rad etishga asos yo'q.

Agar $Z_{kuzat} > z_{kp}$ bo'lsa, nolinchi gipoteza rad etiladi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Statistik gipoteza deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
2. Nolinchi (asosiy), konkurent (muqobil), oddiy, murakkab gipotezalar nima?
3. Birinchi va ikkinchi tur xatolar nimadan iborat, statistik mezon deb nimaga aytiladi?
4. Mezonning kuzatiladigan qiymati, kritik soha, gipoteza-ning qabul qilinish sohasi (joiz qiymatlar sohasi) deb nimaga aytiladi?
5. Kritik nuqtalar (chegaralar), o'ng tomonlama, chap tomonlama, bir tomonlama, ikki tomonlama kritik sohalar nima?
6. Qiymatdorlik darajasi deb nimaga aytiladi va kritik soha qanday topiladi?
7. Mezon quvvati nima va u ikkinchi tur xato bilan qanday bog'langan?
8. Fisher – Snedekor taqsimoti haqida nima bilasiz?
9. Ikkita normal bosh to'plamning dispersiyalari birinchi holda qanday taqqoslanadi?
10. Ikkita normal bosh to'plamning dispersiyalari ikkinchi holda qanday taqqoslanadi?
11. Ikkita normal bosh to'plamning o'rtacha qiymatlari birinchi holda qanday taqqoslanadi?
12. Ikkita normal bosh to'plamning o'rtacha qiymatlari ikkinchi holda qanday taqqoslanadi?

Tayanch iboralar:

Statistik gipoteza, nolinchi (asosiy) gipoteza, konkurent (muqobil) gipoteza, oddiy gipoteza, murakkab gipoteza, birinchi tur xato, ikkinchi tur xato, statistik mezon, mezonning kuzatila-digan qiymati, kritik soha, gipotezaning qabul qilinish sohasi (joiz qiymatlar sohasi), kritik nuqtalar (chegaralar), o'ng to-monlama kritik soha, chap tomonlama kritik soha, bir tomonlama kritik soha, ikki tomonlama kritik soha, qiymatdorlik daraja-si, mezon quvvati, Fisher – Snedekor taqsimoti, erkinlik dara-jalari.

17-mavzu

Muvofiqlik mezonlari

Reja:

1. Bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani tekshirish.
2. Pirsonning muvofiqlik mezon.
3. Normal taqsimotning nazariy chastotalarini hisoblash uslubiyoti.

Agar bosh to'plam taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, lekin u tayin ko'rinishga ega (uni A deb ataymiz) deb taxmin qilishga asos bor bo'lsa, u holda bosh to'plam A qonun bo'yicha taqsimlangan degan nolinchi gipoteza tekshiriladi.

Noma'lum taqsimotning taxmin qilinayotgan qonuni haqi-dagi gipotezani tekshirish taqsimot parametrlari haqidagi gi-potezani tekshirish kabi, ya'ni maxsus tanlangan tasodifiy miq-dor — muvofiqlik mezonni yordamida bajariladi.

Muvofiqlik mezon deb noma'lum taqsimotning taxmin qi-linayotgan qonuni haqidagi gipotezani tekshirish mezoniga ayti-ladi.

Muvofiqlik mezonlaridan biri bosh to'plamning normal taq-simlanganligi haqidagi gipotezani tekshirish uchun K.Pirsonning χ^2 («xi kvadrat») mezonidir (bu mezonni boshqa taqsimotlar uchun ham qo'llash mumkin). Bu mezonni qo'llash uchun empirik (kuzatila-digan) va nazariy (normal taqsimlangan degan taxminda hisoblan-gan) chastotalarni taqqoslaymiz.

Odatda empirik va nazariy chastotalar farq qiladi. Masa-lan:

emp. chastotalar . .	6	13	38	74	106	85	30	10	4
naz. chastotalar . . .	3	14	42	82	99	76	37	11	2

Empirik va nazariy chastotalarning farqi tasodifiy (muhim emas) bo'lishi hamda yo kuzatishlarning soni kamligi, yo ularni gu-ruhlash usuli, yo boshqa sabablar bilan tushuntirilishi mumkin. Ikkinchi tomondan, chastotalarning farqi tasodifiy emas (muhim) bo'lishi hamda nazariy chastotalar bosh to'plamning normal taqsim-

langanligi haqidagi noto'g'ri gipotezadan kelib chiqib hisoblan-ganligi bilan tushuntirilishi mumkin.

Pirson mezoni empirik va nazariy chastotalarning farqi tasodifiymi degan savolga javob beradi. To'g'ri, har qanday bosh-qa mezon kabi u gipotezaning o'rinli ekanligini isbotlamaydi, balki faqat qabul qilingan qiymatdorlik darajasida gipoteza-ning kuzatish ma'lumotlari bilan muvofiq kelishi yoki kelmas-ligini aniqlaydi.

n hajmli tanlanma bo'yicha

variantalar	x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_s
emp. chastotalar . .	n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_s

empirik taqsimot hosil qilingan bo'lsin.

Aytaylik, bosh to'plam normal taqsimlangan degan taxmin-da n'_i nazariy chastotalar hisoblangan bo'lsin. α qiymatdorlik darajasida bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi nolinchi gipotezani tekshirish talab qilinsin.

Nolinchi gipotezani tekshirish mezoni sifatida

$$\chi^2 = \sum (n_i - n'_i)^2 / n'_i \quad (17.1)$$

tasodifiy miqdor olinadi. Bu miqdor turli tajribalarda har xil, oldindan ma'lum bo'lmagan qiymatlar qabul qiladi. Rav-shanki, empirik va nazariy chastotalar qanchalik kam farq qilsa, (17.1) mezonning kattaligi shunchalik kichik bo'ladi va demak, u ma'lum darajada empirik va nazariy taqsimotlarning yaqinli-gini tavsiflaydi.

$n \rightarrow \infty$ da (17.1) tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni bosh to'plam qaysi taqsimot qonuniga bo'ysunishidan qat'iy na-zar erkinlik darajalari k ta bo'lgan χ^2 taqsimot qonuniga in-tiladi.

Erkinlik darajalari soni $k = s - 1 - r$ tenglikdan topila-di, bu yerda s — tanlanmadagi guruhlar (qism oraliqlar) soni; r — taxmin qilinayotgan taqsimotning tanlanma ma'lumotlari bo'yicha baholangan parametrlari soni.

Xususan, agar taxmin qilinayotgan taqsimot normal bo'lsa, u holda ikkita parametr (matematik kutilma va o'rtacha kvadratik chetlanish) baholanadi, shuning uchun $r = 2$ va erkinlik darajala-ri soni $k = s - 1 - r = s - 1 - 2 = s - 3$ ga teng.

Agar bosh to'plam Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan deb taxmin qilinsa, u holda bitta λ parametr baholanadi, shuning uchun $r = 1$ va $k = s - 2$ bo'ladi.

O'ng tomonlama kritik sohani nolinchi gipoteza o'rinli de-gan taxminda mezonning sohaga tushish ehtimolligi qabul qilin-gan qiymatdorlik darajasiga teng bo'lishi talabiga asoslanib quramiz:

$$P(\chi > \chi_{kp}^2(\alpha; k)) = \alpha. \quad (17.2)$$

Shunday qilib, o'ng tomonlama kritik soha $\chi > \chi_{kp}^2(\alpha; k)$ tengsizlik

bilan, nolinchgi gipotezaning qabul qilinish sohasi esa $\chi < \chi_{kp}^2(\alpha; k)$ tengsizlik bilan aniqlanadi.

Qoida. Berilgan qiymatdorlik darajasida bosh to'plam nor-mal taqsimlanganligi haqidagi H_0 nolinchgi gipotezani tekshi-rish uchun avval nazariy chastotalarni, so'ngra mezonning

$$\chi_{kuzat}^2 = \sum (n_i - n'_i)^2 / n'_i \quad (17.3)$$

kuzatilayotgan qiymatini hisoblash kerak va χ^2 taqsimotining kritik nuqtalari jadvali, berilgan α qiymatdorlik darajasi hamda erkinlik darajalari soni $k = s - 3$ bo'yicha $\chi_{kp}^2(\alpha; k)$ kri-tik nuqtani topish kerak.

Agar $\chi_{kuzat}^2 < \chi_{kp}^2$ bo'lsa, nolinchgi gipotezani rad etishga asos yo'q. Agar $\chi_{kuzat}^2 > \chi_{kp}^2$ bo'lsa, nolinchgi gipoteza rad etiladi.

Pirsonning muvofiqlik mezonining mohiyati empirik va nazariy chastotalarni taqqoslashdan iborat. Empirik chastotalar tajribadan topilishi ravshan. Bosh to'plam normal taqsimlangan deb taxmin qilinganda nazariy chastotalarni qanday topish mum-kin? Bu masalani quyidagi usul bilan yechish mumkin.

1. X ning kuzatilayotgan qiymatlari oralig'ining hammasi (n hajmli tanlanma) bir xil uzunlikdagi s ta (x_i, x_{i+1}) qism oraliqlarga bo'linadi. So'ngra qism oraliqlarning $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$ o'rtalari topiladi; x_i^* variantaning n_i chastotasi sifa-tida i nchi oraliqqa tushgan variantalar soni qabul qilinadi. Natijada bir-biridan teng uzoqlikda turgan variantalar va ularga mos chastotalar ketma-ketligi hosil qilinadi:

$$\begin{array}{cccccc} x_i^* & x_1^* & x_2^* & \cdots & x_s^* \\ n_i & n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array}$$

Bunda $\sum n_i = n$.

2. $\bar{x}^*$ o'rtacha tanlanma qiymat va σ^* tanlanma o'rtacha kvad-ratik chetlanish hisoblanadi.

3. X tasodifiy miqdor normalanadi, ya'ni $Z = (X - \bar{x}^*) / \sigma^*$ miqdorga o'tiladi va (z_i, z_{i+1}) intervallarning uchlari hisoblanadi:

$$z_i = (x_i - \bar{x}^*) / \sigma^*, \quad z_{i+1} = (x_{i+1} - \bar{x}^*) / \sigma^*,$$

bunda Z ning eng kichik qiymati, ya'ni $z_1 - \infty$ ga teng, eng katta qiymati, ya'ni z_s esa ∞ ga teng deb olinadi.

4. X ning (x_i, x_{i+1}) intervallarga tushishining p_i nazariy ehtimolliklari

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$$

tenglik bo'yicha hisoblanadi ($\Phi(z)$ — Laplas funksiyasi) va, ni-hoyat, qidirilayotgan $n'_i = np_i$ nazariy chastotalar topiladi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Muvofiqlik mezoni deb nimaga aytiladi va Pirson mezoni qanday qo'llaniladi?
2. Empirik va nazariy chastotalar qaysi sabablarga ko'ra farqlanadi?
3. Bosh to'plam normal taqsimlanganligi haqidagi nolinchgi-potezani tekshirish mezoni sifatida qanday tasodifiy miqdor qabul qilinadi va uning qaysi xossalari bilasiz?
4. Bosh to'plam normal taqsimlanganligi haqidagi nolinchgi-potezani tekshirish qoidasining mohiyati nimada?
5. Nazariy chastotalar qaysi usul bilan topiladi?

Tayanch iboralar:

Muvofiqlik mezoni, Pirson mezoni, empirik chastota, nazariy chastota, bosh to'plam normal taqsimlanganligi haqidagi nolinchgi-potezani tekshirish qoidasi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. S.X. Sirojiddinov, M.M. Mamatov. "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika". Toshkent. O'qituvchi. 1980.
2. Soatov Yo.U. Oliy matematika kursi. 2-qism. T.: O'qituvchi, 1994 y.
3. Soatov Y.U. Oliy matematika. 3 qism. Toshkent. O'qituvchi, 1996.
4. Кремер Ш.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: «Высшая школа», 2008 г.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Издание шестое. М.: «Высшая школа», 1998 г.
6. Gmurman V.E. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Ruscha to'ldirilgan 4-nashridan tarj. Inj.-ekon. institutlari studentlari uchun o'quv qo'llanma. T.: O'qituvchi, 1977 y.
7. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: «Высшая школа», 1979 г.
8. Gmurman V.E. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika-dan masalalar yechishga doir qo'llanma. Ruscha to'ldirilgan 2-nashridan tarjima. T.: O'qituvchi, 1980 y.
9. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М.: Изд. ДИС, 1998 г.
10. Колемаев В.А., Калинина В.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Инфра-М, 1997 г.
11. Колемаев В.А., О.В.Староверов, В.Б.Турундаевский. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для экон. спец. вузов. М.: «Высшая школа», 1991 г.
12. Справочник по математике для экономистов. / Под редакцией проф. Ермакова. М.: «Высшая школа», 1987 г.