O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

NURULLAEV JUSIPBAY ABDIUALIEVICH

SOBOLEV TIPIDAGI BA’ZI BIR TENGLAMALARNI YECHISHNING YUQORI ANIQLIKDAGI AYIRMALI SXEMALARI

01.01.03-Hisoblash matematikasi va diskret matematika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2024

UDK 519.6

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

NURULLAEV JUSIPBAY ABDIUALIEVICH

SOBOLEV TIPIDAGI BA’ZI BIR TENGLAMALARNI YECHISHNING YUQORI ANIQLIKDAGI AYIRMALI SXEMALARI

01.01.03-Hisoblash matematikasi va diskret matematika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2024

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.1.PhD/FM998 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya O‘zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz/) va «Ziyonet» Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Utebaev Dauletbay** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Shadimetov Xolmatvay Maxkambayevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Xudoyberganov Mirzoali O‘razalievich fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	**O‘zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti**

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi Dsc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil “30” aprel soat 14^{00} dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (31 raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil “16” aprel kuni tarqatildi.
(2024 yil “19” fevral dagi 1-raqamli reestr bayonnomasi).

M.M. Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z.R. Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.

R.D. Aloyev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy
seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) disertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy va amaliy tadqiqotlar tutash muhitlar mexanikasining nostatsionar jarayonlarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Ayniqsa, ichki to‘lqinlar, suyuqliklar va gazlar harakati, plazmadagi elektromagnit va ion-akustik to‘lqinlarning tarqalishi nazariyasidan noklassik yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechishga alohida e’tibor berilmoqda. Bunda, yuqori tartibli tenglamalar (Sobolev tipidagi tenglamalar) uchun murakkab nostatsionar masalalar hamda ularni yechish usullari hisoblash matematikasi va matematik modellashtirish sohalarining tadqiqot obyekti hisoblanadi. Shu sababli, differensial tenglamalarni yechishning silliqligi uchun tabiiy talablar ostida ushbu tenglamalar uchun aniqligi yuqori bo‘lgan sonli usullarni qurish, ularning turg‘unlik shartlarini va yaqinlashish baholarini olish muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda dunyoda matematik fizikaning chiziqli va nochiziqli tenglamalari, shu jumladan Sobolev tipidagi noklassik nostatsionar tenglamalar uchun aniqlikni oshirishning sonli usullarini qurish va o‘rganishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Ushbu tenglamalar Koshi-Kovalevskiy shartlarini qanotlantirmaydi va nostatsionar Sobolev tipidagi tenglamalarning yechimlari dispersion xususiyatga ega bo’lib, ularning analitik yechimlarini topish murakkab sanaladi. Shu nuqtai nazardan Sobolev tipidagi noklassik nostatsionar tenglamalar uchun qo’yilgan boshlang’ich va chegaraviy masalalarni sonli yechishning yuqori aniqlikdagi usullarini ishlab chiqish talab etiladi. Shu sababli Sobolev tipidagi nostatsionar tenglama uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechish, aniqlikni oshirishning turg‘un sonli usullarini va ularning tejamkor algoritmlarini ishlab chiqish hamda ularning samarodarligini aniqlash maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda amaliy va innovatsion tadqiqotlar asosi bo‘lgan fundamental fan yo‘nalishlariga alohida e’tibor qaratilmoqda. Tutash muhitlar mexanikasi, okeanologiya va atmosfera fizikasi kabi sohalardagi amaliy masalalarni yechishda sonli usullarni ishlab chiqish dolzarb hisoblanadi. Hozirgi vaqtda yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarni qurish va o‘rganishga bag‘ishlangan bir qator ilmiy tadqiqotlarda ushbu yo‘nalishda, ya’ni, sonli yechimning tejamkor algoritmlarini qurishda sezilarli natijalarga erishildi. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish O‘zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda Sobolev tipidagi yuqori tartibli vaqt xosilasiga nisbatan yechilmagan nostatsionar tenglamalar

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son qarori.

uchun yuqori aniqlikdagi sonli usullarni qurish va tadqiq qilish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida” gi farmoni, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori, 2019-yil 8-oktabrdagi PF-5847-son “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi farmoni, 2019-yil 27-apreldagi PQ-3682-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori va 2021-yil 1-apreldagi PF-6198-son “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo‘yicha davlat boshqaruvi tizimini takomillashtirish to‘g‘risida”gi farmonlari, hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishiga mos keladi.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. A.N. Tixonov, A.A. Samarskiy, G.I. Marchuk, N.N. Yanenko, S.K. Godunov, R. Richtmayer , O.A. Ladyjenskova, Yu.I. Shokin, V.L. Makarov, R.D. Lazarov, A.V. Gulin, N.N. Kalitkin, M.N. Moskalkov, P.N. Vabishchevich, M.M. Aripov, R.D. Aloev, M.O. Xudoyberganov va boshqalarning tadqiqotlari matematik fizika masalalarini yechishning sonli usullarini ishlab chiqishga fundamental hissa qo‘shdi. Yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni o‘rganish S.L. Sobolevning ishidan boshlangan. Ular geofizika, okeanologiya, atmosfera fizikasi, plazma fizikasi va magnitlangan strukturalarning kuchli dispersion muhitda to‘lqinlarning tarqalishi bilan bog‘liq va boshqa ko‘plab muammolarni yechishda paydo bo‘ladi. Ushbu turdagi masalalarni yechishning analitik usullari R.A. Aleksandryan, S.A. Galperin, R.T. Denchev, T.D. Dliuaraeva, S.A. Gabov, A.G. Sveshnikov, M.O. Korpusov, Yu.D. Pletner, A.I. Kojanov, G.A. Sviridyuk, S.G. Rossby, M.I. Lighthill, P.I. Chen va boshqalarning ishlarida o‘rganilgan bo‘lib, unda chiziqli va nochiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning global va lokal yechimlarini topish usullari keltirilgan. Bunday masalalarni yechishning sonli usullarini M.M. Moskalkov, N.N. Kalitkin, A.B. Al’shin, E.A. Al’shina, A.A. Zamishlyaeva, M.M. Aripov, D. Utebaev va boshqalar tarafidan o‘rganilgan. Yuqori tartibli nostatsionar tenglamalar uchun aniqlikni oshirishning sonli usullari M.M. Moskalkov, M.M. Aripov, D. Utebaev ishlarida ko‘rilgan va o‘rganilgan. Ularning ishlarida, asosan, chekli ayirmalar usuli va chekli elementlar usuliga asoslangan bo‘lib, yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarning aniqlik baholari olingan. Xuddi shunday tadqiqotlar A.A.Zamyshlyaevaning ishlarida ham o‘rganilgan, bu yerda takomillashtirilgan

Galerkin usuli va Rits usuliga asoslangan sonli yechim uchun algoritm ishlab chiqilgan.

Vaqt hosilasi bo‘yicha yechilmagan tenglamalarning sonli usullari N.N. Kalitkin, A.B. Al’shin, E.A. Al’shina ishlarida ko‘rib chiqilgan, bu yerda nostatsionar yuqori tartibli tenglamalar ikkita tenglamaga almashtirish yordamida yechiladi (birida fazoviy o‘zgaruvchilarga nisbatan differensiallash mavjud, ikkinchisi esa faqat vaqtga nisbatan) va keyin bu tenglamalar kvazitengo‘lchamli to‘rlarda chekli ayirmalar usuli bilan yechiladi. Bunda asosan, ikkinchi tartibli aniqlikga ega sxemalar olingan. V. Vuchev, N. Kolkovskning ishlari Sobolev tipidagi tenglamalarni yechishning sonli usullariga bag‘ishlangan bo‘lib, bu yerda vaqt va fazo o‘zgaruvchilari bo‘yicha birinchi va ikkinchi tartibli aniqlikdagi ayirmali sxemalar qurilgan va o‘rganilgan.

Ma‘lumki, yuqori tartibli vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan nostatsionar tenglamalarni faqat fazo o‘zgaruvchilari bo‘yicha approksimatsiyalash orqali ko‘p o‘lchamli oddiy differensial tenglamalar sistemasi olinadi. K. Husayn, F. Ismoil ishlarida umumiy to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun Runge-Kutta usullariga asoslanib, sonli usullar qurilgan va o‘rganilgan, bu yerda fazoviy o‘zgaruvchilar chekli ayirmalar usuli bilan approksimatsiyalangan. O.A. Tayvo, O.M. Ogunlaran asarlarida τ-usuli asosida, J. Talvar, R. Mohanti, K.K. Singx, D.I. Singx asarlarida esa chekli ayirmalar usuli asosida to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar yechimlari o‘rganilgan va ikkinchi tartibli aniqlik baholari olingan, bundan tashqari, yuqori darajadagi aniqlikni olish usullari ko‘rsatilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta‘lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti M. Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetining ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq “Amaliy matematika masalalarini yechish algoritmlari va dasturiy ta‘minoti” doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi. Sobolev tipidagi yuqori tartibli vaqt xosilasiga nisbatan yechilmagan nostatsionar tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarini qurish, ularning turg‘unlik shartlarini topish va yaqinlashish hamda aniqlik baholarini olishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan to‘rtinchi tartibli Sobolev tipidagi tenglamalarni sonli yechish uchun chekli elementlar usuli asosida yuqori aniqlikga ega ko‘p parametrli ayirmali sxemalarni ishlab chiqish;

to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun chekli elementlar usuli asosida yuqori aniqlikdagi ko‘p parametrli ayirmli sxemalarni ishlab chiqish;

vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan oltinchi tartibli Sobolev tipidagi tenglamalarni sonli yechish uchun chekli elementlar usuli asosida yuqori aniqlikga ega ko‘p parametrli ayirmali sxemalarni ishlab chiqish;

differensial masala yechimining silliqligiga minimal talablarda aniqlik baholarini olish;

vaqt hosilasi bo‘yicha yechilmagan Sobolev tipidagi nostatsionar tenglamalar uchun ba’zi boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni sonli modellashtirish uchun yangi qurilgan yuqori aniqlikga ega ko‘p parametrli ayirmali sxemalarini qo‘llash.

Tadqiqotning obyekti vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan to‘rtinchi va oltinchi tartibli Sobolev tipidagi nostatsionar tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar.

Tadqiqotning predmeti vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan Sobolev tipidagi tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechishning yuqori aniqlikdagi sonli usullarini ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida hisoblash matematikasi, sonli modellashtirish, algebra, funksional analiz, differensial tenglamalar nazariyasi, shuningdek, algoritmlash texnologiyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

magnitlanmagan plazmadagi ion-akustik to‘lqinlar, magnitlardagi spin to‘lqinlar, yengil tekislik tipidagi magnitlardagi spin to‘lqinlari, ikki haroratli plazma tenglamalari ko‘p parametrli yuqori aniqlikdagi chekli elementlar usuli asosida yechilgan, approksimatsiya xatoligi, turg‘unlik shartlari va aniqlik baholari olingan;

chekli elementlar usuli asosida to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun to‘rtinchi tartibli aniqlikdagi yangi ko‘p parametrli ayirmali sxemalari qurilgan, approksimatsiya xatoligi, turg‘unlik shartlari olingan va aniqlik teoremalari isbotlangan;

siqiladigan stratifikatsiyalangan aylanuvchi suyuqlik dinamikasi tenglamasi va magnitlangan plazmadagi ion-akustik to‘lqinlar tenglamalari uchun qo’yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni sonli yechishda yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar qurilgan hamda turg‘unlik shartlari olingan va yaqinlashish tezligi baholangan;

to‘rtinchi va oltinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning analitik yechimi va silliqligiga minimal talablarda ayirmali sxemalar orqali olingan sonli yechim o‘rtasidagi aniqlik baholari keltirilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

chekli elementlar usuli asosida ba’zi yuqori tartibli Sobolev tipidagi tenglamalarni sonli yechish uchun yuqori darajali yaqinlashishning yangi yarim aniq ko‘p parametrli ayirmali sxemalari qurilgan;

ikki haroratli plazma va magnitlangan plazmadagi ion-akustik to‘lqinlar tenglamalari uchun qo’yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalar sonli yechilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiya ishida olingan natijalar tegishli teoremalarni qat‘iy isbotlash, shuningdek, hisoblash eksperimenti asosida nazariy xulosalarni tasdiqlash bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Dissertatsiyada olingan natijalarning ilmiy ahamiyati to‘rtinchi tartibli tenglamalar sistemasi uchun abstrakt Koshi masalasini yechish uchun chekli elementlar usulining yangi yuqori aniqlikdagi koʻp parametrli ayirmali sxemalarini qurish va tadqiq qilish, aniq amaliy masalalarning yechimini asoslash bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati shundan iboratki, chekli elementlar usuli asosida qurilgan yuqori aniqlikdagi koʻp parametrli ayirmali sxemalar, shuningdek, algoritmlar va dasturlar toʻrtinchi va oltinchi tartibli har xil Sobolev tipidagi tenglamalar uchun, vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan boshlangʻish-chegaraviy masalaning sonli yechimlarini topish boʻyicha samarali hisoblash tajribalarini oʻtkazishga xizmat qilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan yuqori tartibli Sobolev tipidagi tenglamalar uchun chekli elementlar usuli asosida qurilgan yuqori aniqlikdagi koʻp parametrli ayirmali sxemalarni qurish boʻyicha olingan natijalar quyidagi ilmiy loyihalarda amalga oshirilgan:

vaqt hosilasiga nisbatan Sobolev tipidagi yuqori tartibli tenglamalarni sonli yechish usullaridan OT-F2-77-“Modellashtirish asosida ichki nuqsonlarni hisobga olgan holda yarimoʻtkazgichli asboblarning ishonchligini bashorat qilishning takomillashtirish usuli” grant loyihasida turli defektlarga ega yarimoʻtkazgich strukturalardagi jarayonlar haqida yangi ma’lumotlar olishda va ularning elektrofizik hamda optik xususiyatlarini aniqlashda foydalanilgan (Qoraqalpoq davlat universitetining 2023 yil 7 avgustdagi 01-22-04/276-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qoʻllanilishi yarimoʻtkazgichlar fizikasi masalalarida defektlarning paydo boʻlishi sabablarini aniqlash va muayyan turgʻunlikni ta’minlaydigan yarimoʻtkazgich priborlarni yaratishdagi usullarni yangilash imkonini bergan;

Sobolev tipidagi tenglamalar uchun qurilgan yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalardan AL-392103042-“Janubiy Orolboʻyi choʻl zonalarida hudud iqlimining isishiga olib keluvchi ekologik-meteorologik jarayonlarni modellashtirish” grant loyihasida qizdirilgan yuzadan mikrozarrachalarning konvektiv koʻtarilishining sonli modelini qurishda foydalanilgan (Qoraqalpogʻiston Tabiatshunoslik ilmiy-tadqiqot institutining 2023 yil 8 avgustdagi 17.01/303-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qoʻllanilishi qizdirilgan yuzadan mikrozarrachalarning konvektiv koʻtarilishi modelini va gaz muhiti bilan konvektiv oqimda harakatlanuvchi sferik mikrozarrachalarning molekulyar issiqlik uzatish modelini sonli yeshish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiya ishining natijalari 9 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 7 ta xalqaro va 2 ta respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjumanlarda ma’ruza qilingan va muhokamadan oʻtgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi boʻyicha jami 18 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, Oʻzbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 9 ta maqola, shu jumladan 4 tasi xorijiy ilmiy jurnallarda chop etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar roʻyxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 112 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi asoslangan, tadqiqotning O‘zbekiston Respublikasi fan va texnikasi rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga muvofiqligi ko‘rsatilgan, dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy-ilmiy tadqiqotlar sharhi va muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi va vazifalari shakllantirilgan, tadqiqot ob’ekti va predmeti tafsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon etilgan. Olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining amaliyotga joriy qilinishi, chop etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi haqida ma’lumotlar berilgan.

“To‘rtinchi tartibli Sobolev tipidagi tenglamalar uchun chekli elementlar usulining ayirmali sxemalarining aniqlik baholari” deb nomlangan **birinchi bobda** vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan to‘rtinchi tartibli Sobolev tipidagi tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni ko‘rib chiqilgan. Ushbu tenglamalarda birinchi navbatda fazoviy o‘zgaruvchilarni approksimatsiyalaymiz va vaqt o‘zgaruvchisi differensial shaklda saqlanadi. Natijada, ikkinchi tartibli yuqori o‘lchamli oddiy differensial tenglamalar sistemasini olamiz, keyin ushbu sistema Moskalkov-Utebaevning chekli elementlar usuli asosida qurilgan to‘rtinchi tartibli aniqlikga ega ayirmali sxemasi bilan yechiladi. Aniqlik baholarini olish uchun aprior baholarni olishning maxsus metodikasi qo‘llaniladi, chunki Teylor formulasiga asoslangan ayirmali sxemalarining yaqinlashuvini tadqiq qilishda klassik yondashuv izlanayotgan yechimning silliqligiga yuqori talablarni qo‘yadi. Bobning kirish qismida to‘rtinchi tartibli Sobolev tipidagi tenglamalar haqida qisqacha ma’lumot berilgan.

Birinchi paragrafda magnitlanmagan plazmadagi ion-akustik to‘lqinlar tenglamasi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_3 u - \theta u) + \Delta_3 u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{1}$$

uchun quyidagi chegaraviy va boshlang‘ish

$$u = 0, \ \ x \in \Gamma = \partial\Omega; \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \ \ x \in \overline{\Omega} \tag{3}$$

shartlari bilan berilgan masala uchun chekli elementlar usuli sxemasining aniqligi bo‘yicha tadqiqotlar olib borilgan.

Bu yerga $\Delta_3 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 + \partial^2 / \partial x_3^2$ - uch o‘lchamli Laplas operatori, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Omega = \{0 < x_k < l_k, k = 1,2,3\}$, $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, \ t \in (0,T]\}$, $f(x,t)$- ma’lum funktsiya.

Dissertatsiya davomida Δ operatorning spektri $\theta \notin \lambda(\Delta)$ deb hisoblaymiz. Bu yerda θ musbat son.

(1)-(3) masalaning fazoviy o‘zgaruvchilarini chekli elementlar usuli asosida diskretizatsiyalaymiz va quyidagi oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasiga ega bo‘lamiz:

$$D\ddot{u}_h(t)+Au_h(t)=f_h(t),\quad u_h(0)=u_{0,h},\quad \dot{u}_h(0)=u_{1,h}\,. \tag{4}$$

Bu yerda, D, A- H_h dan H_h ga harakatlanuvchi t ga bog‘lik bo‘lmagan doimiy operatorlar, H_h-diskret gilbert fazosi, $\ddot{u}=d^2u/dt^2$, $\dot{u}=du/dt$. Ular - $\mathrm{D}=\left(a_1(\varphi_l,\varphi_m)\right)_{l,m=1}^{M}$ va $\mathrm{A}=\left(a_2(\varphi_l,\varphi_m)\right)_{l,m=1}^{M}$ qattiqlik matritsalariga mos keladi. Bu yerda, $u_{k,h}=P_hu_k(x),\ k=0,1,\ P_h$ - proyeksiya operatori $P_hH=H_h$.

(4) masalani chekli elementlar usulining uch parametrli ayirmali sxemasi bilan approksimatsiyalaymiz (M.M. Moskalkov - D. Utebaev sxemalari):

$$D_\gamma\dot{y}_t+Ay^{(0.5)}=\varphi_1,\ D_\alpha y_t-D_\beta\dot{y}^{(0.5)}=\varphi_2,\quad y^0=u_0,\ \dot{y}^0=u_1\,. \tag{5}$$

Bu yerda $y=y^n=y(t_n),\ \hat{y}=y^{n+1},\ \dot{y}=\dot{y}^n=dy(t_n)/dt,\quad n=0,1,...,$ $y^n,\ \dot{y}^n\in H_h,\ D_m=D-m\tau^2A,\ m=\alpha,\beta,\gamma,\ \varphi_k=\int_0^1 f(t_n+\tau\xi)\vartheta_k(\xi)d\xi,\ k=1,2$, $y_t=(\hat{y}-y)/\tau,\ \dot{y}_t=(\hat{\dot{y}}-\dot{y})/\tau,\ y^{(0.5)}=(\hat{y}+y)/2,\quad \dot{y}^{(0.5)}=(\hat{\dot{y}}+\dot{y})/2,\ \xi=(t-t_n)/\tau$, $\vartheta_1(\xi)=1,\quad \vartheta_2(\xi)=s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi)+s_2\vartheta_2^{(2)}(\xi),\quad \vartheta_2^{(2)}(\xi)=\tau\left(\xi^3-3\xi^2/2+\xi/2\right)$, $\vartheta_2^{(1)}(\xi)=\tau\left(\xi-0.5\right),\ s_1=180\beta-40\alpha,\ s_2=1680\beta-280\alpha,\ \alpha,\beta,\gamma$ - ba’zi doimiy sonlar.

(5)-sxemaning parametrlari α,β,γ quyidagi to‘rtinchi tartibli approksimatsiya shartiga bo‘ysunadi:

$$\alpha+\gamma=\beta+1/6\,. \tag{6}$$

Agar (6) ga qo‘shimcha ravishda $\beta-6\alpha\gamma+1/40=0$ shart bajarilsa, u holda (5) sxema oltinchi tartibli aniqlikga ega bo‘ladi.

Umumlashgan yechimlar sinfida (5)-ayirmali sxemasining aniqligi haqidagi quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 1. Operatorlar $D^*=D>0$, $A^*=A>0$ va $AD=DA$ bo‘lsin. Bundan tashqari, sxemaning to‘rtinchi tartibli approksimatsiyaga ega bo‘lish sharti (6) o‘rinli bo‘lsin. U holda, agar

$$D-m\tau^2A\ge\varepsilon D,\ 0<\varepsilon<1,\ m=\max\{\alpha,\beta,\gamma\} \tag{7}$$

turg‘unlik sharti o‘rinli bo‘lsa, (1)-(3) masalani approksimatsiyalovchi (5) ayirmali sxemaning yechimi uchun

$$u(x,t)\in L_2([0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\in C([0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),\ \frac{\partial^4u}{\partial t^4}(x,t)\in C\left\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\right\}$$

shartlar bajarilganda, quyidagi

$$\|u(x,t)-y(x,t)\|_1+\left\|\int_0^s[u(x,t')-y(x,t')]dt'\right\|_1\le$$

$$\le M\left\{\tau^3\left(\max_t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t)\right\|_2+\sqrt{\int_0^t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2 dt'}\right)+h^k\left(\max_t\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\|_{k+1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\int_0^t\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t')\right\|_{k+1}^2 dt'}+\sqrt{\int_0^t\|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'}\right)\right\} \quad \forall t\in[0,T],\ M=M(C_1,C_2,T)>0$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

Shunga o‘xshash tadqiqotlar magnitlardagi spin to‘lqinlarining quyidagi

$$(\partial^2/\partial t^2+\omega_1^2)\Delta_3 u(x,t)+\omega_2^2\Delta_2 u(x,t)=f(x,t) \tag{8}$$

tenglamasi uchun (2), (3) boshlang‘ich-chegaraviy masala **ikkinchi paragrafda** olib borilgan, bu yerda $\Delta_2=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2$ - ikki o‘lchamli Laplas operatori, $\omega_1=\gamma(H_0+\beta M_0)$, $\omega_2=\gamma\sqrt{4\pi M_0(H_0+\beta M_0)}$, $\gamma=g|e|/(2mc)$, $g-$ ferromagnitning gidromagnit nisbati, $\beta=K/M_0^2$, $M_0=m_0 e_3$–«yengil o‘q» (e_3) tipidagi ferromagnetik, $K-const.$, $H_0=H_0 e_3$–tashqi maydon, c–yorug‘lik tezligi, m–vazn, e–elektron zaryadining absolyut qiymati.

Approksimatsiya tartibi va turg‘unlik shartlari olingan. Ular asosida ko‘rib chiqilayotgan ayirmali sxemaning yaqinlashuvi va aniqligi haqidagi quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 2. Faraz qilaylik, $D^*=D>0,\ A^*=A>0$ bo‘lsin va (6), (7) shartlar bajarilsin. U holda (5) ayirmali sxemaning yechimi (2), (3) boshlang‘ich va chegaraviy shartlariga ega (8) tenglamaning yechimiga yaqinlashadi va ushbu yechim uchun quyidagi aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi:

$$\|y(t)-u(t)\|_1\le M(|h|^\sigma+\tau^4),\ u(t),\ y(t)\in H_h,\ |h|^\sigma=h_1^\sigma+h_2^\sigma+h_3^\sigma.$$

Fazo bo‘yicha har bir chekli elementda uchinchi darajali polinom tanlansa h fazoviy qadam bo‘yicha uchinchi tartibli aniqlikga ega bo‘lamiz, ya’ni $\sigma=3$.

Uchinchi paragraf yengil tekislik tipidagi magnitlarda spin to‘lqinlarning

$$(\partial^2/\partial t^2+\omega_3^2)\Delta_3 u(x,t)+\omega_4^2 u_{x_2x_2}(x,t)+\omega_5^2 u_{x_3x_3}(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T \tag{9}$$

tenglamasi uchun (2), (3) boshlang‘ich-chegaraviy masala chekli elementlar usuli sxemasining aniqligini tadqiq qilishga bag‘ishlangan. Bu yerda $\omega_3=\gamma\sqrt{H_0(H_0+|\beta|M_0)}$, $\omega_4=\gamma\sqrt{4\pi(H_0+|\beta|M_0)M_0}$, $\omega_5=\gamma\sqrt{4\pi H_0 M_0}$, $u_{x_\alpha x_\alpha}=\partial^2 u/\partial x_\alpha^2,\ \ \alpha=2,3.$

(9), (2), (3) chegaraviy masalaning fazoviy o‘zgaruvchilari birinchi navbatda chekli elementlar usulida approksimatsiyalanadi, natijada olingan katta o‘lchamdagi oddiy differensial tenglamalar sistemasi esa quyidagi

$$\tilde{D}_\gamma \dot{w}_t+\tilde{A}w^{(0.5)}=\tilde{\varphi}_1,\ \tilde{D}_\alpha w_t-\tilde{D}_\beta \dot{w}^{(0.5)}=\tilde{\varphi}_2, \tag{10}$$

chekli elementlar usulining takomillashtirilgan sxemasi bilan approksimatsiyalanadi. Bu yerda $\tilde{\varphi}_1=D^{-1/2}\varphi_1$, $\tilde{\varphi}_2=D^{-1/2}\varphi_2$, $\tilde{D}_\omega=\tilde{D}-\omega\tau^2\tilde{A}$,

$\tilde{D} = E$, $\tilde{A} = D^{-1/2} A D^{-1/2}$, $w = D^{1/2} y$, $\dot{w} = D^{1/2} \dot{y}$, $\omega = \alpha, \beta, \gamma$, $\tilde{D} = \tilde{D}^* > 0$, $\tilde{A} = \tilde{A}^* > 0$ va $\tilde{D}\,\tilde{A} = \tilde{A}\tilde{D}$.

Quyidagi yaqinlashish teoremasi isbotlangan.

Teorema 3. Faraz qilaylik, $D^* = D > 0,\ A^* = A > 0$ bo‘lsin va (6), (7) shartlar bajarilsin. U holda (10) sxemaning $w(t)$ yechimi (2), (3) boshlang‘ich va chegaraviy shartlariga ega (9) tenglamaning yechimiga yaqinlashadi va quyidagi aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi:

$$\left\| u(t) - y(t) \right\|_1 \le M\left(|h|^\sigma + \tau^4 \right),\ |h|^\sigma = h_1^\sigma + h_2^\sigma + h_3^\sigma .$$

Fazo bo‘yicha har bir chekli elementda uchinchi darajali polinom tanlansa h fazoviy qadam bo‘yicha uchinchi tartibli aniqlikga ega bo‘lamiz, ya’ni $\sigma = 3$.

To‘rtinchi paragrafda ikki haroratli plazma tenglamasi uchun chekli elementlar usuli sxemalari o‘rganilgan, ya’ni past chastotali elektron magnit-akustik to‘lqinlarni tavsiflovchi tenglama

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2\Phi_e + \frac{u_{Ae}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\Phi_e - \frac{1}{r_{De}^2}\Phi_e \right) + \omega_{Be}^2 \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x_3^2} = \frac{u_{Ae}^2}{c^2} divF(x,t) \qquad (11)$$

va past chastotali ion magnit-akustik to‘lqinlarni tavsiflovchi tenglama

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2\Phi_i + \frac{u_{Ai}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\Phi_i - \frac{1}{r_{Di}^2}\Phi_i \right) + \omega_{Bi}^2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x_3^2} = \frac{u_{Ai}^2}{c^2} divF(x,t) \qquad (12)$$

tadqiq qilingan. Bu yerda $\Phi_e(x,t)$–elektronlarning, $\Phi_i(x,t)$–ionlarning elektr maydonlari, $r_{D_e}^2 = T_e^2 / (4\pi e^2 n_0)$ – elektron Debay radiusi kvadrati, $r_{D_i}^2 = T_i^2 / (4\pi e^2 n_0)$ – ionli Debay radiusi kvadrati, $u_{A_e} = B_0 / (4\pi n_0 m)$ – elektronlar va $u_{A_i} = B_0 / (4\pi n_0 M)$ – ionlar uchun Alfven tezliklari, $\omega_{B_e} = eB_0 / (mc)$, $\omega_{B_i} = ZeB_0 / (Mc)$ – elektron va ionlarning larmor chastotalari (m va M ularning massasi), c–vakuumdagi yorug‘lik tezligi, Z–ion va elektron zaryadlarining nisbati, B_0–tashqi doimiy magnit maydon, n_0 – bezovtalanmagan zarracha zichligi, e – elektron zaryadining mutlaq qiymati, T_e – elektron harorati, T_i – ion harorati.

(11), (12) tenglamalarni quyidagi umumiy ko‘rinishda yozamiz:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_3 u - \rho^2 u) + \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_2 u) + \theta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \qquad (13)$$

bu yerda, $\rho^2,\ \omega^2,\ \theta^2 - const > 0$, Debay radiusi yoki Alfven tezligiga bog‘liq, ω^2 – Langmyur chastotasi, $f(x,t)$ mos ravishda (11), (12) ning o‘ng tomonlari.

(13) tenglamani quyidagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan to‘liqtiramiz:

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0\ \ \forall t \in [0,t],\ u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x). \qquad (14)$$

(13), (14) masalani fazo o‘zgaruvchilari bo‘yicha chekli elementlar usuli asosida approksimatsiyalaymiz va olingan (4) kurinishidagi oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini (10) sxema bilan approksimatsiyalaymiz.

(13), (14) masalaning umumlashgan yechimga (10) ayirmali sxemaning yechimining yaqinlashuvi haqidagi quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 4. Faraz qilaylik, $D^* = D > 0,\ A^* = A > 0$ bo‘lsin va (6), (7) shartlar bajarilsin. U holda (13), (14) masalani approksimatsiyalovchi (10) sxema yechimi uchun $u(x,t),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in C\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\right\},\quad \dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in C\left\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\right\}$ shartlarda, quyidagi

$$\|u(x,t) - y(x,t)\|_1 \le M\left\{h^k\left(\max_t\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\|_{k+1} + \sqrt{\int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'}\right) + \right.$$

$$\left. + \tau^3\sqrt{\int_0^t \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2 dt'}\right\},\ \forall t \in [0,T],\ M = M(T,\rho,\theta,\omega_0) > 0$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

Fazo bo‘yicha har bir chekli elementda uchinchi darajali polinom tanlansa h fazoviy qadam va τ vaqt qadami bo‘yicha uchinchi tartibli aniqlikga ega bo‘lamiz.

Beshinchi paragrafda boshlang‘ich va chegaraviy shartlari bilan berilgan ikki haroratli plazma tenglamasi uchun sonli natijalar test misolida berildi.

“To‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun yuqori aniqlikdagi sxemalar” deb nomlangan dissertatsiyasining **ikkinchi bobi** to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini sonli yechish uchun chekli elementlar usuli asosida ko‘p parametrli ayirma sxemalarni qurishga va tadqiq qilishga bag‘ishlangan. Vaqt o‘zgaruvchisiga nisbatan maxsus diskretizatsiya asosida to‘rtinchi tartibli aniqlikga ega ayirmali sxemalarining yangi ko‘p parametrli oilalari qurilgan. Ayirmali sxemada parametrlarning mavjudligi ayirmali sxemaning turg‘unligi, aniqligi va tejamkorligini regulyarizatsiyalash imkonini beradi. Ayirmali sxemalarning yechimi uchun aprior baholar olingan va u asosida yaqinlashish teoremalari isbotlangan.

Birinchi paragrafda quyidagi Koshi masalasini ko‘rib chiqamiz:

$$D\ddot{\ddot{u}} + B\ddot{u} + Au = f,\ t_0 < t \le T, \tag{15}$$

$$u(t_0) = u_0,\ \dot{u}(t_0) = u_1,\ \ddot{u}(t_0) = u_2,\ \dddot{u}(t_0) = u_3,\ m = \overline{0,3}. \tag{16}$$

Bu yerda $u = u(t)$ izlanayotgan funksiya, D, B va A H dan H ga harakatlanuvchi chiziqli, t dan mustaqil doimiy operatorlar, $D^* = D > 0$,

$B^* = B \ge 0$, $A^* = A > 0$; $\forall t \ge 0$, $u,\ f = f(t) \in H$ –Gilbert fazosi, $\dot{u} = du/dt$, $\ddot{u} = d^2u/dt^2$, $\dddot{u} = d^3u/dt^3$.

(15) tenglamaning umumlashgan yechimini ixtiyoriy $\vartheta(t) \in C^2(t_н, t_к)$ funktsiya uchun

$$\int_{t_н}^{t_к} (D\ddot{u}\ddot{\vartheta} - B\dot{u}\dot{\vartheta} + Au\vartheta)dt + \left[D\dddot{u}\vartheta - D\ddot{u}\dot{\vartheta} + B\dot{u}\vartheta \right]\Big|_{t_н}^{t_к} = \int_{t_н}^{t_к} (f, \vartheta)dt$$

integral tenglikni qanoatlantiruvchi uzluksiz $u(t) \in C^3[0,T]$ funksiya sifatida aniqlaymiz, bu yerda $0 \le t_н \le t_к \le T$, $\dot{u} = du/dt$, $\dddot{u} = d^3u/dt^3$.

$[0,T]$ oraliqda teng o‘lchovli $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,...;\ \tau > 0\}$ to‘rini kiritamiz. (t_n, t_{n+1}) oraliqlarning har birida (15), (16) masalaning taxminiy yechimini

$$y(t) = \varphi_{00}^n(t)y^n + \varphi_{01}^n(t)y^{n+1} + \varphi_{10}^n(t)\dot{y}^n + \varphi_{11}^n(t)\dot{y}^{n+1} + \varphi_{20}^n(t)\ddot{y}^n + \varphi_{21}^n(t)\ddot{y}^{n+1}$$

beshinchi darajali ko‘phad ko‘rinishida izlaymiz. Bu yerda $y^n = y(t_n)$,

$$y^{n+1} = y(t_{n+1}),\ \dot{y}^n = dy(t_n)/dt,\ \dot{y}^{n+1} = dy(t_{n+1})/dt,\ \ddot{y}^n = d^2y(t_n)/dt^2,$$

$$\ddot{y}^{n+1} = d^2y(t_{n+1})/dt^2,\ \varphi_{00}^n(t) = -6\xi^5 + 15\xi^4 + 6\xi^5 - 10\xi^3 + 1,$$

$$\varphi_{01}^n(t) = 6\xi^5 - 15\xi^4 + 10\xi^3,\ \varphi_{10}^n(t) = \tau(-3\xi^5 + 8\xi^4 - 6\xi^3 + \xi),$$

$$\varphi_{11}^n(t) = \tau(-3\xi^5 + 7\xi^4 - 4\xi^3),\ \varphi_{21}^n(t) = \tau(\xi^5/2 - \xi^4 + \xi^3/2),$$

$$\varphi_{20}^n(t) = \tau^2(-\xi^5/2 + 3\xi^4/2 - 3\xi^3/2 + \xi^2/2),\ \ \xi = (t - t_n)/\tau.$$

Ushbu ko‘phad asosida turli xil yangi ayirmali sxemalar qurildi.

Ikkinchi paragrafda birinchi paragraf natijalariga ko‘ra ko‘p parametrli quyidagi ayirmali sxemalar qurildi:

$$\begin{aligned} &D_\eta \dot{y}_t - \eta\tau^2 Ay^{(0.5)} - D\ddot{y}^{(0.5)} = \varphi_1, \\ &D_\gamma y_t - D_\gamma \dot{y}^{(0.5)} + \eta\tau^2 D\ddot{y}_t = \varphi_2, \\ &D_\alpha \dot{y}_t - D_\beta \ddot{y}^{(0.5)} - \eta\tau^2 Ay^{(0.5)} = \varphi_3, \end{aligned} \tag{17}$$

bu yerda

$$D_m = D - m\tau^2 B,\ m = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \eta,\ \ddot{y}_t = (\hat{\ddot{y}} - \ddot{y})/\tau,\ \ddot{y}^{(0.5)} = (\hat{\ddot{y}} - \ddot{y})/2,$$

$$\varphi_1 = -\frac{\tau}{6}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)dt = -\frac{\tau^2}{6}\int_0^1 f(t_n + \tau\xi)d\xi,$$

$$\varphi_2 = -\frac{7\tau^2}{60}\int_0^1 f(t_n + \tau\xi)[s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi) + s_2\vartheta_2^{(5)}(\xi)]d\xi,$$

$$\varphi_3 = -10\int_0^1 f(t_n + \tau\xi)[s_3\vartheta_3^{(2)} + s_4\vartheta_3^{(4)}]d\xi,$$

$$s_1 = 3 - 120\gamma, \qquad s_2 = 14 - 840\gamma, \qquad s_3 = 140\alpha + 15, \qquad s_4 = 1400\alpha + 140,$$

$\vartheta_2^{(1)} = \tau\left(\xi - 1/2\right)$, $\quad \vartheta_2^{(5)} = \tau\left(3\xi^5 + 15\xi^4/2 - 5\xi^3 + \xi/2\right)$, $\quad \vartheta_3^{(2)} = \tau^2\xi(\xi-1)/2$,

$\vartheta_3^{(4)} = \tau^2\xi^2(\xi-1)^2/4$, α, β, γ, η - ba'zi doimiy sonlar.

(17)-sxema uchun boshlang'ish shartlar quyidagicha beriladi:

$$\dot{y}(0) = u_{0,1} + \frac{\tau}{2}\left(E - \frac{\tau^2}{12}D^{-1}B\right)u_{0,2} + \frac{\tau^2}{6}u_{0,3} + \frac{\tau^3}{24}D^{-1}[f(0) - Au_{0,0}],$$

$$\ddot{y}(0) = u_{0,2} + \tau u_{0,3} + \frac{\tau^2}{2}D^{-1}[f(0) - Bu_{0,2} - Au_{0,0}] + \tag{18}$$

$$+\frac{\tau^3}{4}D^{-1}[\dot{f}(0) - B\dot{u}_{0,2} - A\dot{u}_{0,0}].$$

Agarda

$$\eta = 1/12, \ \alpha - \beta = 1/12 \tag{19}$$

shartlar bajarilsa, u holda approksimatsiya xatoligi $\psi_1 = O(\tau^4)$, $\psi_2 = O(\tau^4)$, $\psi_3 = O(\tau^4)$ bo'lishi isbotlangan.

Uchinchi paragrafda (17), (18)-ayirmali sxemasining turg'unligini tadqiq qilish uchun dastlabki ma'lumotlardan foydalangan holda uning quyidagi kanonik shakli yoziladi:

$$\mathrm{B}Y_t + \mathrm{U}Y = \Phi,$$

bu yerda $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{B}} + 0.5\tau\mathrm{U}$,

$$\overline{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 & D_\beta D_\eta & 0 \\ \eta\tau^2 AD & 0 & AD_\gamma \\ 0 & \eta\tau^2 AD_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} -D_\beta D & 0 & -\eta\tau^2 D_\beta A \\ 0 & -AD_\gamma & 0 \\ -\eta\tau^2 AD_\beta & 0 & -\eta^2\tau^4 A^2 \end{pmatrix}.$$

$\overline{\mathrm{B}}$, U operatorlari H^3 dan H^3 ga harakatlanadigan operatorlar, $\Phi = (D_\beta\varphi_1, A\varphi_2, \eta\tau^2 A\varphi_3) \in H^3$, $H^3 = H \oplus H \oplus H$ (H fazosining to'g'ridan-to'g'ri yig'indisi), skalyar ko'paytma va norma quyidagicha aniqlanadi:

$$(U,V)_S = (SU,V) = \sum_{\alpha=1}^{3}(SU_\alpha, V_\alpha),$$

$$\|U\|_S^2 = (U,U)_S = \sum_{\alpha=1}^{3}\|u_\alpha\|_S^2, \ U,V \in H, \ U = (u_1,u_2,u_3), \ V = (\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3).$$

A.A. Samarskiy va A.V. Gulinning mashhur teoremasi asosida quyidagi teorema isbotlangan.

Теорема 5. Faraz qilaylik, D, B va A o'zaro o'rin almashuvchan operatorlar va

$$D_m > 0, \ m = \alpha, \beta, \gamma, \eta, \tag{20}$$

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}^* \geq -c_* E, \ c_* = const > 0 \tag{21}$$

$$\mathrm{B} \geq \varepsilon E + 0.5\tau U', \ U' = \mathrm{U} + c_1 E, \ \varepsilon = const > 0 \tag{22}$$

shartlari bajarilsin. U - doimiy operator va $c_1 = 2c_*$. U holda (17), (18) sxemaning yechimi uchun quyidagi aprior bahosi o‘rinli bo‘ladi:

$$\|Y(t_{n+1})\|_{U'}^2 \le e^{\theta_{n+1}} \left(\|Y(0)\|_{U'}^2 + \frac{1+t_{n+1}}{2\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} \tau \|\Phi_k\|^2 \right),\ \theta_{n+1} = 2c_* \frac{t_{n+1}+1}{\varepsilon}. \qquad (23)$$

(20)-shart sxema operatorlariga quyidagi cheklovni qo‘yadi:

$$D > m\tau^2 \mathrm{B},\ m = \max(\alpha, \beta, \gamma, \eta). \qquad (24)$$

(21)-shart o‘rinli bo‘ladi, chunki U operatori strukturasi bo‘yicha noaniq belgiga ega va (22)-dan $\overline{\mathrm{B}} \ge (\varepsilon + 0.5\tau c_1)E$ shartini olamiz, u (24)-shartining bajarilishidan kelib chiqadi.

5-teoremaga asoslanib, sxemaning to‘rtinchi tartib bilan yaqinlashishini isbotlaymiz.

Теорема 6. Faraz qilaylik, 2-teorema shartlari va (19) shartlari bajarilsin. U holda (23) baho asosida (17), (18) ayirmali sxemasining yechimi (15), (16)-masala yechimiga to‘rtinchi tartib bilan yaqinlashadi va uning yechimi uchun quyidagi aniqlik baholari o‘rinli bo‘ladi:

$$\left\| y^n - u(t_n) \right\|_{U'} \le M\tau^4,\ \left\| \dot{y}^n - \dot{u}(t_n) \right\|_{U'} \le M\tau^4,\ \left\| \ddot{y}^n - \ddot{u}(t_n) \right\|_{U'} \le M\tau^4.$$

Dissertatsiya ishining **“Yuqori tartibli Sobolev tipidagi tenglamalar uchun ayirma sxemalarining aniqlik baholari”** deb nomlangan **uchinchi bobida** oltinchi tartibli vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan Sobolev tipidagi tenglama uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar ko‘rib chiqilgan. Bunday masalalar kuchli dispersiyali muhitda to‘lqinlarning tarqalishi bilan bog‘liq bo‘lgan geofizika, okeanologiya, atmosfera fizikasi, magnitli tartiblangan tuzilmalar fizikasi va boshqa ko‘plab masalalarni yechishda paydo bo‘ladi. Bu tenglamalarda, birinchi bobda bo‘lgani kabi, birinchi navbatda fazoviy o‘zgaruvchilarni approksimatsiyalaymiz va vaqt o‘zgaruvchisi differensial shaklda saqlanadi. Natijada, to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini olamiz va ikkinchi bobda olingan to‘rtinchi tartibli aniqlikdagi chekli elementlar usulining ayirmali sxemasi bilan yechamiz. Aniqlik bahosini olish uchun A.A. Samarskiyning ayirmali sxemalar nazariyasining aprior baholarni olish usullari qo‘llaniladi. Aniqlikni tadqiq qilish silliq bo‘lmagan yechimlar sinflarida amalga oshiriladi.

Birinchi paragraf siqiladigan stratifikatsiyalangan aylanuvchi suyuqlik dinamikasining statsionar bo‘lmagan ushbu

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ \Delta_3 u - \left(\theta^2 + \frac{\varsigma^2}{c^2} \right) u \right\} + \omega_0^2 \Delta_2 u + \varsigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \varsigma^2 \theta^2 u + f(x,t), \qquad (25)$$

$$(x,t) \in Q_T = \Omega \cup \partial\Omega,\ \Omega = \left\{ x \,\middle|\, x = (x_1, x_2, x_3),\ 0 < x_\alpha < l,\ \alpha = \overline{1,3} \right\}$$

tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalariga aniqligi yUqari bo‘lgan ayirmali sxemalarni qurish va tadqiq qilish masalalaru ko‘riladi. Bu yerda $u(x,t)$ –

harakat tezligi, c–tovush tezligi, ω_0^2- Väisälä-Brent chastotasi, ς,θ - ba’zi doimiy sonlar. (25) tenglamasi ushbu

$$\left.\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}u(x,t)\right|_{t=0}=u_{0,\nu},\quad \nu=\overline{0,3},\ x\in\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma, \tag{26}$$

$$u(x,t)\big|_\Gamma=g(t),\ t\in(0,T] \tag{27}$$

boshlang‘ich va chegaraviy shartlari bilan berilgan bo‘lsin.

(15), (16) vektor sxemasining yechimining (25)-(27) masala yechimiga yaqinlashuvi yuzasidan quyidagi teorema isbotlangan.

Теорема 7. Faraz qilaylik, $D^*=D>0,\ B^*=B\geq 0,\ A^*=A>0$ bo‘lsin, (19)-approksimatsiya shartlari va

$$D-\mu\tau^2A\geq\varepsilon D,\ \ \forall\varepsilon\in(0,1),\ \ \mu=\max\{\alpha,\beta,\gamma,\eta\}$$

turg‘unlik sharti bajarilsin. U holda (25)-(27) masala yechimini approksimatsiyalovchi (17), (18) ayirmali sxema yechimi uchun quyidagi $u(x,t)\in C\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right\}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\in C\left\{[0,T];\ W_2^{k}(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right\}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t)\in C\left\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\right\}$ shartlarda

$$\|u(x,t)-u_h(x,t)\|_1+\|\dot u(x,t)-\dot u_h(x,t)\|_0+\sqrt{\int_0^t\|\dot u(x,t)-\dot u_h(x,t)\|_1^2dt}+$$

$$+\sqrt{\int_0^t\|\ddot u(x,t)-\ddot u_h(x,t)\|_0^2dt}\leq M\left\{h^k\left(\sqrt{\int_0^t\|u(x,t')\|_{k+1}^2dt'}+\sqrt{\int_0^t\|\dot u(x,t')\|_k^2dt'}\right)+\right.$$

$$\left.+\tau^3\sqrt{\int_0^t\left\|\frac{\partial^4u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2dt'}\right\},\ \ \forall t\in[0,T],\ \ M=M(T,\rho,\theta,\omega_0)>0$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

Ikkinchi paragrafda xuddi shunday natijalar magnitlangan plazmadagi ion-akustik to‘lqinlar tenglamasiga qo‘yilgan ushbu

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(\Delta_3u-r_D^{-2}u\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\omega_{B_i}^2+\omega_{p_i}^2)\Delta_3u-\omega_{B_i}^2r_D^{-2}u]+\omega_{p_i}^2\omega_{B_i}^2\frac{\partial^2u}{\partial x_3^2}=f(x,t), \tag{28}$$

$$(x,t)\in Q_T=\Omega\cup\partial\Omega,\ \Omega=\left\{x\,\middle|\,x=(x_1,x_2,x_3),\ 0<x_\alpha<l,\ \alpha=\overline{1,3}\right\},$$

$$\left.\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}u(x,t)\right|_{t=0}=u_{0,\nu},\quad \nu=\overline{0,3},\ \ x\in\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega, \tag{29}$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0,\ t\in(0,T] \tag{30}$$

boshlang‘ich-chegaraviy masala uchun olingan. Bu yerda $u=(x,t)$–harakat tezligi, $r_D^2 = T_e^2 \Big/ \left(4\pi e^2 n_0\right)$–Debay radiusi, $\omega_{B_i} = eB_0 / (Mc)$–ion gyrochastotasi, $\omega_{p_i}^2 = 4\pi e^2 n_0 / M$–Ionlar uchun Langmur chastotasi, M–massa, c–vakumdagi yorug‘lik tezligi, B_0–tashqi doimiy magnit maydon, n_0–bezovtalanmagan zarracha zichligi, e–elektron zaryadining absolyut qiymati, T_e–elektronlar harorati.

Quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 8. Faraz qilaylik, $D^* = D > 0,\ B^* = B \ge 0,\ A^* = A > 0$ bo‘lsin, (19)-approksimatsiya shartlari va

$$D - \mu\tau^2 A \ge \varepsilon D,\ \forall \varepsilon \in (0,1),\ \mu = \max\{\alpha, \beta, \gamma, \eta\}$$

turg‘unlik sharti bajarilsin. U holda, (28)-(30) masalani approksimatsiyalovchi (17), (18) sxemaning yechimi uchun $u(x,t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in C\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\right\}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in C\left\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\right\}$ shartlarda, quyidagi

$$\left\|\dot u(x,t) - \dot u_h(x,t)\right\|_1 + \left\|u(x,t) - u_h(x,t)\right\|_1 + \int_0^t \left\|\ddot u(x,t') - \ddot u_h(x,t')\right\|_1 dt' +$$
$$+\int_0^t \left\|\dot u(x,t') - \dot u_h(x,t')\right\|_1 dt' \le M\left\{h^k\left(\sqrt{\int_0^t \left\|u(x,t')\right\|_{k+1}^2 dt'} + \sqrt{\int_0^t \left\|\dot u(x,t')\right\|_{k+1}^2 dt'}\right) + \right.$$
$$\left. + \tau^3 \sqrt{\int_0^t \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2 dt'}\right\},\ \ \forall t \in [0,T],\ \ M = M(r_D, \omega) > 0$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

Uchinchi paragpaf boshlang‘ich va chegaraviy shartlari bilan berilgan siqiladigan stratifikatsiyalangan aylanuvchi suyuqlik dinamikasi tenglamasi uchun sonli natijalar test misolida olingan.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan ayrim yuqori tartibli Sobolev tipidagi tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarni qurish va tadqiq qilishga bag‘ishlangan.

“Sobolev tipidagi ba’zi bir tenglamalarni yechishning yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalari” mavzusidagi dissertatsiya bo‘yicha olib borilgan tadqiqot natiyjalarning asosiy xulosalari quyidagilardan iborat:

1. Magnitlanmagan plazmadagi ion-akustik to‘lqinlar, magnitlardagi spin to‘lqinlar, yengil tekislik tipidagi magnitlardagi spin to‘lqinlari, ikki haroratli plazma tenglamalari uchun ko‘p parametrli yuqori aniqlikdagi chekli elementlar usuli asosida yechildi va aniqlik teoremalari isbotlandi.

2. Chekli elementlar usuli asosida to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun to‘rtinchi tartibli aniqlikdagi yangi ko‘p parametrli ayirmali sxemalari qurildi va aniqlik teoremalari isbotlandi.

3. Siqiladigan stratifikatsiyalangan aylanuvchi suyuqlik dinamikasining tenglamasi va magnitlangan plazmadagi ion-akustik to‘lqinlar tenglamalari uchun qo’yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni sonli yechishda yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar qurildi hamda yechim baholari olindi va aniqlik teoremalari isbotlandi.

4. To‘rtinchi va oltinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning analitik yechimi va silliqligiga minimal talablarda ayirmali sxemalar orqali olingan sonli yechim o‘rtasidagi aniqlik baholari olindi.

5. Sonli modellashtirish algoritmlari ishlab chiqildi va boblarning nazariy xulosalarini tasdiqlaydigan ayrim test masalalari sonli yechildi.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

НУРУЛЛАЕВ ЖУСИПБАЙ АБДИУАЛИЕВИЧ

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

01.01.03-Вычислительная математика и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2024.1.PhD/FM998.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» по адресу (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Утебаев Даулетбай** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Худойберганов Мирзоали Уразалиевич доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Институт математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан**

Защита диссертации состоится «30» апрель 2024 года в 14^{00} часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №31). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «16» апрель 2024 года.
(протокол рассылки № 1 от «19» февраль 2024 года).

М.М.Арипов
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, посвящены исследованию нестационарных процессов механики сплошной среды. Особенно актуальными являются изучение начально-краевых задач для неклассических уравнений в частных производных высокого порядка из области теории движения внутренних волн, жидкостей и газов, распространения электромагнитных и ионно-звуковых волн в плазме. В последне время решения сложных нестационарных задач для уравнений высокого порядка (уравнения Соболевского типа), являются объектом исследования вычислительной математики и математического моделирования. Поэтому, одной из важных задач являются построение численных методов повышенной точности для этих уравнений при естественных требованиях к гладкости решения исходной дифференциальной задачи, а также получения их условий устойчивости и оценок сходимости.

В настоящие дни в мировых исследованиях особое внимание уделяются построению и исследованию численных методов повышенной точности для линейных и нелинейных уравнений математической физики, в том числе для неклассических нестационарных уравнений Соболевского типа. Эти уравнения не удовлетворяют условиям Коши-Ковалевской и решения нестационарных уравнений Соболевского типа в основном обладают дисперсионными свойствами, следовательно, трудно поддаются к аналитическим решениям. С этой точки зрения необходима разработка высокоточных методов численного решения начально-краевых задач для неклассических нестационарных уравнений Соболевского типа. Поэтому разработка устойчивых численных методов повышенной точности и их экономичных алгоритмов для решения начально-краевых задач для нестационарных уравнений Соболевского типа является целевым научным исследованием.

В нашей стране особое внимание уделяется направлениям фундаментальной науки, являющейся основой прикладных и инновационных исследовании. Актуальным являются создание численных методов для решения практических задач в таких областях, как механика сплошных сред, океанология и физика атмосферы. В настоящее время в данном направлении получены весомые результаты по проведению ряда научных исследовании, посвященных построению и исследованию разностных схем повышенной точности, а также разработке их экономичных алгоритмов. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» является одной из основных задач в деятельности Института математики имени В.И.Романовского АН РУз[1]. Для обеспечения выполнения постановления важно разработать и исследовать численные методы повышенной точности для нестационарных уравнений Соболевского типа, неразрешенных относительно старшей производной по времени.

Данная диссертационная работа в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных в Указах и Постановлениях Президента Республики Узбекистан №УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», № ПП-4708 от 7 мая 2020 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», № УП-5847 от 8 октября 2019 года «Об утверждении Концепции развития системы высшего образования Республики Узбекистан до 2030 года», № ПП-3682 от 27 апреля 2019 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов» и № УП-6198 от 1 апреля 2021 года «О совершенствовании системы государственного управления в сфере развития научной и инновационной деятельности», а также в других нормативно-правовых актах, принятых в данной сфере.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Фундаментальный вклад в развитие численных методов решения задач математической физики внесли исследования А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, Г.И. Марчука, Н.Н. Яненко, С.К. Годунова, Р. Рихтмайера, О.А. Ладыженской, Ю.И. Шокина, В.Л. Макарова, Р.Д. Лазарова, А.В. Гулина, Н.Н. Калиткина, М.Н. Москалькова, П.Н. Вабищевича, М.М. Арипова, Р.Д. Алоева и др. Изучение дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка началось с работ С.Л. Соболева. Они появляются при решении задач геофизики, океанологии, физики атмосферы, физики плазмы и магнитоупорядоченных структур, связанные с расспространением волн в средах с сильной дисперсией и многие другие. Аналитическим методам решения задач такого типа посвящена работы Р.А. Александряна, С.А. Гальперина, Р.Т. Денчева, Т.Д. Джураева, С.А. Габова, А.Г. Свешникова, М.О. Корпусова, Ю.Д. Плетнера, А.И. Кожанова, Г.А. Свиридюка, S.G. Rossby, M.I. Lighthill, P.I. Chen и другие, где рассмотрены проблемы глобальной и локальной разрешимости начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений в частных производных. Численными методами для решения таких задач занимались М.М. Москальков, Н.Н. Калиткин, А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, А.А. Замышляева, М.М. Арипов, Д. Утебаев и другие. Численные методы

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

повышенной точности для нестационарных уравнений высокого порядка с гладкими и негадкими решениями построены и исследованы в работах М.М. Москалькова, М.М. Арипова, Д. Утебаева. В их работах, в основном, получены оценки точности разностных схем повышенной аппроксимации на основе метода конечных разностей и метода конечных элементов. Аналогичные исследования проводились в работах А.А. Замышляева, где разработана алгоритм для численного решения, основанной на модифицированном методе Галеркина и методе Ритца.

Численные методы для уравнений, неразрешенных относительно производной по времени рассматривались в работах Н.Н Калиткина, А.Б. Альшина, Е.А. Альшиной, где нестационарные уравнения высокого порядка с помощью некоторой заменой сводятся к двум уравнениям, (одно содержит дифференцирование по пространственным переменным, а другое только по времени) и далее эти уравнения решаются методом конечных разностей на квазиравномерных сетках. При этом получается схемы второго порядка точности. Численным методам решения уравнений Соболевского типа, также посвящены работы V. Vucheva. N. Kolkovska, где построены и исследованы разностные схемы первого и второго порядков точности по времени и по пространственным переменным.

Как известно, при пространственной аппроксимации нестационарных уравнений, неразрешенных относительно производной по времени высокого порядка получается системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. В работах K.A. Hussain, F. Ismail на основе методов Рунге-Кутты построены и исследованы численные методы для общего уравнения в частных производных четвертого порядка, где пространственные переменные аппроксимируется методом конечных разностей. А в работах O.A. Taiwo, O.M. Ogunlaran, на основе тау-метода, а в работах J. Talwar, R. Mohanty, K.K. Singh, D. I. Singh, на основе метода конечных разностей исследованы решения обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Получены оценки точности второго порядка, кроме того, указаны способы получения более высокого порядка точности.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация.

Диссертационое исследование выполнено в рамках плана научно-исследовательской работы Национального университета им. М. Улугбека по теме "Алгоритмы и программное обеспечение решения задач прикладной математики".

Целью исследования является построение и исследование разностных схем повышенной точности для нестационарных уравнений Соболевского типа высокого порядка, неразрешенных относительно производной по времени, получения их условия устойчивости, оценки сходимости и точности.

Задачи исследования:

разработка многопараметрических разностных схем методом конечных элементов повышенной точности для численного решения уравнений

Соболевского типа четвертого порядка, неразрешенных относительно производной по времени;

разработка многопараметрических разностных схем метода конечных элементов высокого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка;

разработка многопараметрических разностных схем методом конечных элементов повышенной точности для численного решения уравнений Соболевского типа шестого порядка, неразрешенных относительно производной по времени;

получение оценок точности при минимальных требованиях к гладкости решения исходной дифференциальной задачи;

применение построенных новых многопараметрических разностных схем повышенной точности для численного моделирования некоторых начально-краевых задач для нестационарных уравнений Соболевского типа, неразрешенных относительно производной по времени.

Объект исследования. Объектом исследования является нестационарные начально-краевые задачи для уравнений Соболевского типа четвертого и шестого порядков, неразрешенных относительно производной по времени.

Предмет исследования. Предметом исследования является разработка численных методов высокого порядка точности начально-краевых задач для уравнений Соболевского типа, неразрешенных относительно производной по времени.

Методы исследований. В диссертации использованы методы вычислительной математики, численного моделирования, алгебры, функционального анализа, теория дифференциальных уравнений, а также технология алгоритмизации.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

на основе многопараметрических разностных схем метода конечных элементов повышенной точности решены уравнения ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме, спиновых волн в магнетиках, спиновых волн в легких плоских магнетиках, уравнения двухтемпературной плазмы, получены погрешности аппроксимации, условия устойчивости и оценки точности;

на основе метода конечных элементов построены новые многопараметрические разностные схемы четвертого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, получены погрешности аппроксимации, условия устойчивости и доказаны теоремы о точности;

для численного решения начально-краевых задач для уравнения динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости и уравнений ионно-звуковых волн в замагниченной плазме построены разностные схемы повышенной точности, получены условия устойчивости и оценки скорости сходимости;

приведены оценки точности разностных схем при минимальных требованиях к аналитическому решению и гладкости начально-краевых задач для уравнения в частных производных четвертого и шестого порядков.

Практические результаты исследования следующее:

на основе методом конечных элементов построены новые полуявные многопараметрические разностные схемы повышенной аппроксимации для численного решения некоторых уравнений Соболевского типа высокого порядка;

численно решены начально-краевые задачи для уравнений двухтемпературной плазмы и ионно-звуковых волн в замагниченной плазме.

Достоверность результатов исследования. Полученные в диссертации результаты обоснованы строгими доказательствами соответствующих теорем, а также подтверждением теоретических выводов на основе вычислительного эксперимента.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость полученных результатов в диссертации заключается в построении и исследовании новых многопараметрических разностных схем метода конечных элементов для решения абстрактной задачи Коши для системы уравнений четвертого порядка и обосновании решения конкретных прикладных задач.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что построенные многопараметрические разностные схемы метода конечных элементов, а также алгоритмы и программы позволяют проводить эффективные вычислительные эксперименты по нахождению численных решений начально-краевых задач для различных уравнений Соболевского типа четвертого и шестого порядков, неразрешенных относительно производной по времени.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по построению многопараметрических разностных схемы методом конечных элементов для уравнений Соболевского типа высокого порядка, неразрешенных относительно производной по времени реализованы в следующих научных проектах:

Численные методы для решения уравнений Соболевского типа высокого порядка неразрешенных относительно производной по времени были использованы в фундаментальном проекте ОТ-Ф2-77 «Совершенствование методов прогнозирования надежности полупроводниковых приборов на основе моделирования с учетом внутренних дефектов структуры» для получения новых информаций о процессах в полупроводниковых структурах с различными дефектами и определении их электрофизических и оптических свойств (Справка Каракалпакского государственного университета от 07.08.2023г., № 01-22-04/276). Применение научных результатов позволило определить причины дефектов физики полупроводников и обновить методы создания полупроводниковых приборов, обеспечивающих определенную стабильность;

Разностные схемы повышенной точности для уравнений Соболевского типа использованы в рамках проекта гранта АЛ392103042 «Моделирование эколого-метеорологических процессов в зонах опустынивания Южного Приаралья, приводящих к потеплению регионального климата» (2022-2023гг.) (Справка-подтверждение Каракалпакского научно-исследовательского института естественных наук от 08.08.2023 г. № 17.01/303) использована для построения численной модели конвективного подъема микрочастиц с нагретой поверхности. Применение научных результатов позволило численно разработать модель конвективного подъема микрочастиц с нагретой поверхности и модель молекулярного теплопереноса сферических микрочастиц, движущихся в конвективном потоке с газовой средой.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы докладывалась на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 7 международных и 2 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 18 научных работ, из них 9 в научных изданиях, входящих в перечень Высшей аттестационной комиссии Республики Узбекистан для публикации результатов докторских диссертаций, в том числе 4 опубликованы в зарубежных научных журналах.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 112 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики Узбекистан, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и указана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В **первой главе «Оценки точности разностных схем метода конечных элементов для уравнений соболевского типа четвертого порядка»** рассматриваются начально-краевые задачи для уравнения Соболевского типа четвертого порядка, неразрешенных относительно производной по времени. В этих уравнениях сначала аппроксимируются пространственные переменные, а временная переменная сохраняется в дифференциальной форме. В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка большой размерности, которая далее решается разностной схемой метода конечных элементов четвертого порядка точности Москалькова-Утебаева. Для получения оценки точности используется специальная методика получения априорных оценок, так как классический подход к исследованию сходимости разностных схем, основанной на формуле Тейлора, предъявляет высокие требования к гладкости искомого решения. Вводной части главы дается краткий обзор по уравнениям Соболевского типа четвертого порядка.

В **первом параграфе** приводятся исследования по точности схемы метода конечных элементов для уравнения ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_3 u - \theta u) + \Delta_3 u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{1}$$

с краевыми и начальными условиями

$$u(x,t) = \mu(x,t), \; x \in \Gamma = \partial\overline{\Omega}, \; t \in (0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \; x \in \overline{\Omega}. \tag{3}$$

Здесь $\Delta_3 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ - трехмерный оператор Лапласа, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Omega = \{0 < x_k < l_k, k = 1,2,3\}$, $Q_T = \{(x,t): x \in \Omega, \; t \in (0,T]\}$, $f(x,t)$- известная функция.

По всей диссертации предположим, что $\theta \notin \lambda(\Delta)$- спектр оператора Δ. Здесь θ- положительная постоянная.

Аппроксимируя пространственные переменные задачи (1)-(3) получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$D\ddot{u}_h(t) + Au_h(t) = f_h(t), \;\; u_h(0) = u_{0,h}, \;\; \dot{u}_h(0) = u_{1,h}, \tag{4}$$

где $\ddot{u} = d^2u/dt^2$, $\dot{u} = du/dt$. Операторы D, A действуют из H_h в H_h. Им соответствуют матрицы жесткости $\mathrm{D} = \left(a_1(\varphi_l, \varphi_m)\right)_{l,m=1}^M$ и $\mathrm{A} = \left(a_2(\varphi_l, \varphi_m)\right)_{l,m=1}^M$. Здесь, $u_{k,h} = P_h u_k(x), \; k = 0,1$, где P_h - оператор проектирования $P_h H = H_h$.

Задачу (4) аппроксимируем трехпараметрической разностной схемой метода конечных элементов (схемы М.М. Москалькова-Д. Утебаева)

$$D_\gamma \dot{y}_t + Ay^{(0.5)} = \varphi_1, \;\; D_\alpha y_t - D_\beta \dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2, \;\; y^0 = u_0, \; \dot{y}^0 = u_1. \tag{5}$$

Здесь

$$y = y^n = y(t_n), \;\; \hat{y} = y^{n+1}, \;\; \dot{y} = \dot{y}^n = dy(t_n)/dt, \; n = 0,1,..., \; y^n, \; \dot{y}^n \in H_h,$$

$$D_m = D - m\tau^2 A, \; m = \alpha, \beta, \gamma, \; \varphi_k = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi)\vartheta_k(\xi)d\xi, \;\; k = 1,2, \; y_t = (\hat{y} - y)/\tau,$$

$$\dot{y}_t = (\hat{\dot{y}} - \dot{y})/\tau, \; y^{(0.5)} = (\hat{y} + y)/2, \;\; \dot{y}^{(0.5)} = (\hat{\dot{y}} + \dot{y})/2, \; \xi = (t - t_n)/\tau, \;\; \vartheta_1(\xi) = 1,$$

$$\vartheta_2(\xi) = s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi) + s_2\vartheta_2^{(2)}(\xi), \; \vartheta_2^{(1)}(\xi) = \tau\left(\xi - 0.5\right),$$

$$\vartheta_2^{(2)}(\xi) = \tau\left(\xi^3 - 3\xi^2/2 + \xi/2\right), \; s_1 = 180\beta - 40\alpha, \;\; s_2 = 1680\beta - 280\alpha.$$

Параметры схемы (5) α, β, γ некоторые постоянные, которые подчиняются условию четвертого порядка аппроксимации

$$\alpha + \gamma = \beta + 1/6. \tag{6}$$

Если, кроме (6) будет выполнено условие $\beta - 6\alpha\gamma + 1/40 = 0$, то схема (4), (5) имеет шестой порядок точности.

Доказана следующая теорема о точности трехпараметрической разностной схемы (5) в классе обобщенных решении.

Теорема 1. Пусть операторы $D^* = D > 0,\ A^* = A > 0$. Кроме того, пусть выполнено условие четвертого порядка аппроксимации схемы (6) и условие устойчивости

$$D - m\tau^2 A \ge \varepsilon D,\ 0 < \varepsilon < 1,\ m = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}. \tag{7}$$

Тогда для решения схемы (4), (5) аппроксимирующего решения задачи (1)-(3) такого, что

$$u(x,t) \in L_2([0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in C([0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in C\left\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\right\},$$

верна следующая оценка точности

$$\left\| u(x,t) - y(x,t) \right\|_1 + \left\| \int_0^s [u(x,t') - y(x,t')]dt' \right\|_1 \le$$

$$\le M\left\{ \tau^3 \left(\max_t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \right\|_2 + \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t') \right\|_2^2 dt'} \right) + h^k \left(\max_t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right\|_{k+1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t') \right\|_{k+1}^2 dt'} + \sqrt{\int_0^t \left\| u(x,t') \right\|_{k+1}^2 dt'} \right) \right\}, \quad \forall t \in [0,T],\ M = M(C_1, C_2, T) > 0.$$

Аналогичные исследования проводиться во **втором параграфе** для начально-краевой задачи для уравнения спиновых волн в магнетиках

$$\left(\partial^2 / \partial t^2 + \omega_1^2\right)\Delta_3 u(x,t) + \omega_2^2 \Delta_2 u(x,t) = f(x,t) \tag{8}$$

с краевыми и начальными условиями (2), (3), где $\Delta_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ - двумерный оператор Лапласа, $\omega_1 = \gamma(H_0 + \beta M_0)$, $\omega_2 = \gamma\sqrt{4\pi M_0(H_0 + \beta M_0)}$, $\gamma = g|e|/(2mc)$, g – гидромагнитное отношение ферромагнетика, $\beta = K/M_0^2$, $M_0 = m_0 e_3$– ферромагнетик типа «легкая» ось $(e_3), K - const.$, $H_0 = H_0 e_3$– внешнее поле, c – скорость света, m–масса, e–абсолютная величина заряда электрона.

Получены порядок аппроксимации и условия устойчивости. На их основе доказаны следующая теоремы о сходимости и точности рассмотренной разностной схемы.

Теорема 2. Пусть операторы $D^* = D > 0,\ A^* = A > 0$. При выполнении условия (6), (7) решение схемы (5) сходится к решению задачи (8), (2), (3) и справедлива оценка точности:

$$\left\| y(t) - u(t) \right\|_1 \le M(|h|^\sigma + \tau^4),\ u(t),\ y(t) \in H_h,\ |h|^\sigma = h_1^\sigma + h_2^\sigma + h_3^\sigma.$$

При выборе на каждом конечном элементе по пространству многочлена третей степени имеем третий порядок точности по шагу h, т.е. $\sigma = 3$.

Третий параграф посвящен исследованию точности схемы метода конечных элементов для уравнения спиновых волн в магнетиках типа лёгкая плоскость

$$\left(\partial^2 / \partial t^2 + \omega_3^2\right)\Delta_3 u\left(x,t\right) + \omega_4^2 u_{x_2x_2}\left(x,t\right) + \omega_5^2 u_{x_3x_3}\left(x,t\right) = f\left(x,t\right),\ (x,t) \in Q_T \qquad (9)$$

с краевыми и начальными условиями (2), (3), где $\omega_3 = \gamma\sqrt{H_0\left(H_0 + |\beta| M_0\right)}$, $\omega_4 = \gamma\sqrt{4\pi\left(H_0 + |\beta| M_0\right) M_0}$, $\omega_5 = \gamma\sqrt{4\pi H_0 M_0}$, $\gamma = g|e|/(2mc)$, $u_{x_\alpha x_\alpha} = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2$, $\alpha = 2,3$.

Пространственные переменные задачи (9), (2), (3) сначала аппроксимируются методом конечных элементов, а полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, аналогичной (4) аппроксимируется преобразованной схемой метода конечных элементов

$$\tilde{D}_\gamma \dot{w}_t + \tilde{A} w^{(0.5)} = \tilde{\varphi}_1,\ \tilde{D}_\alpha w_t - \tilde{D}_\beta \dot{w}^{(0.5)} = \tilde{\varphi}_2, \qquad (10)$$

где $\tilde{\varphi}_1 = D^{-1/2}\varphi_1,\ \tilde{\varphi}_2 = D^{-1/2}\varphi_2$, $\tilde{D}_\omega = \tilde{D} - \omega\tau^2\tilde{A}$, $\tilde{D} = E,\ \tilde{A} = D^{-1/2} A D^{-1/2}$, $w = D^{1/2} y,\ \dot{w} = D^{1/2}\dot{y}$, $\omega = \alpha, \beta, \gamma$, $\tilde{D} = \tilde{D}^* > 0,\ \tilde{A} = \tilde{A}^* > 0$ и $\tilde{D}\ \tilde{A} = \tilde{A}\tilde{D}$.

Сформулирована следующая теорема о сходимости.

Теорема 3. Пусть операторы $D^* = D > 0,\ A^* = A > 0$. При выполнении условия (6), (7) решение схемы (10) $w(t)$ сходится к решению уравнения (9) с начальными и краевыми условиями (2), (3) и для этого решения справедлива оценка:

$$\left\|u(t) - w(t)\right\|_1 \le M\,(|h|^\sigma + \tau^4),\ |h|^\sigma = h_1^\sigma + h_2^\sigma + h_3^\sigma.$$

При выборе на каждом конечном элементе по пространству многочлена третьей степени имеем третий порядок точности по пространственным шагам h, т.е. $\sigma = 3$.

В **четвертом параграфе** исследованы схемы метода конечных элементов для уравнения двухтемпературной плазмы, т.е. уравнение описывающие низкочастотные электронные магнито-звуковые волны

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2\Phi_e + \frac{u_{Ae}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\Phi_e - \frac{1}{r_{De}^2}\Phi_e\right) + \omega_{Be}^2\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial x_3^2} = \frac{u_{Ae}^2}{c^2} divF(x,t) \qquad (11)$$

и уравнение описывающие низкочастотные ионные магнито-звуковые волны

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2\Phi_i + \frac{u_{Ai}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\Phi_i - \frac{1}{r_{Di}^2}\Phi_i\right) + \omega_{Bi}^2\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x_3^2} = \frac{u_{Ai}^2}{c^2} divF(x,t). \qquad (12)$$

Здесь $\Phi_e(x,t)$–электрические поля электронов, $\Phi_i(x,t)$–электрические поля ионов, $r_{De}^2 = T_e^2/(4\pi e^2 n_0)$ – квадрат электронного дебаевского радиуса, $r_{Di}^2 = T_i^2/(4\pi e^2 n_0)$ – квадрат ионного дебаевского радиуса, $u_{Ae} = B_0/(4\pi n_0 m)$ –

альфвеновская скорость для электронов, $u_{Ai} = B_0 /(4\pi n_0 M)$ – альфвеновская скорость для ионов, $\omega_{Be} = eB_0 /(mc),\ \ \omega_{Bi} = ZeB_0 /(Mc)$ –ларморовы частоты электронов и ионов (m и M их масса соответственно), c–скорость света в вакууме, Z – отношение зарядов иона и электрона, B_0–внешнее постоянное магнитное поле, n_0 – невозмущенная плотность частиц, e – абсолютная величина заряда электрона, T_e – температура электронов, T_i – температура ионов.

Уравнения (11), (12) записана в следующем общем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_3 u - \rho^2 u) + \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_2 u) + \theta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x,t),\ \ (x,t) \in Q_T, \qquad (13)$$

где $\rho^2,\ \omega^2,\ \theta^2 - const > 0$, зависящие от дебаевского радиуса или от альфвеновской скорости, ω^2 –частота Ленгмюра, $f(x,t)$ - правые части (11), (12) соответственно. Уравнение (13) дополним следующими начальными и краевыми условиями:

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0\ \ \forall t \in [0,t],\ u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x). \qquad (14)$$

Задача (13), (14) сначала аппроксимируются методом конечных элементов по пространственным переменным, и полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида аналогичной (4) аппроксимируется разностной схемой (10).

Доказана следующая теорема о сходимости разностной схемы (10) к обобщенному решению задачи (13), (14).

Теорема 4. Пусть $D^* = D > 0$, $A^* = A > 0$ и выполнены условия (6), (7). Тогда для решения схемы (10), аппроксимирующей решение задачи (13), (14) такого, что $u(x,t),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in C\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\},\ \dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in C\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\}$, верна оценка точности:

$$\|u(x,t) - y(x,t)\|_1 \le M\left\{ h^k \left(\max_t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right\|_{k+1} + \sqrt{\int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'} \right) + \right.$$
$$\left. + \tau^3 \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t') \right\|_2^2 dt'} \right\},\ \forall t \in [0,T],\ M = M(T,\rho,\theta,\omega_0) > 0.$$

При выборе на каждом конечном элементе по пространству многочлена степени $k = 3$ имеем третий порядок точности по обоим шагам h и τ.

В **пятом параграфе** приведены численные результаты на тестовом примере для уравнения двухтемпературной плазмы с соответствующими начальными и краевыми условиями.

Вторая глава диссертации «**Схемы повышенной точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого**

порядка» посвящена построению и исследованию многопараметрических разностных схем для решения абстрактной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка на основе метода конечных элементов. На основе специальной дискретизации по временной переменной построены новые многопараметрические семейства разностных схем четвертого порядка точности. Наличие параметров в разностной схеме позволяет произвести регуляризацию устойчивости, точности и экономичности разностной схемы. Получены априорные оценки решения разностных схем и доказаны соответствующие теоремы о сходимости.

В **первом параграфе** рассматривается следующая задача Коши

$$D\dddot{u} + B\ddot{u} + Au = f\ , \ t_0 < t \le \mathrm{T} \tag{15}$$

с начальными условиями

$$u(t_0) = u_0,\ \dot{u}(t_0) = u_1,\ \ddot{u}(t_0) = u_2,\ \dddot{u}(t_0) = u_3,\ m = \overline{0,3}, \tag{16}$$

где $u = u(t)$ искомая функция, D, B и A линейные постоянные, не зависящие от t, операторы из $H \to H$, $D^* = D > 0$, $B^* = B \ge 0$, $A^* = A > 0$; $\forall t \ge 0$, u, $f = f(t) \in H$ -гильбертово пространство, $\dot{u} = du/dt$, $\ddot{u} = d^2u/dt^2$, $\dddot{u} = d^3u/dt^3$.

Обобщенное решение уравнения (1) определим как непрерывную функцию $u(t) \in C^3[0,T]$, удовлетворяющую для произвольной функции $\vartheta(t) \in C^2(t_н, t_к)$ интегральному тождеству

$$\int_{t_y}^{t_r} (D\ddot{u}\ddot{\vartheta} - B\dot{u}\dot{\vartheta} + Au\vartheta)dt + \left[D\dddot{u}\,\vartheta - D\ddot{u}\dot{\vartheta} + B\dot{u}\vartheta\right]_{t_y}^{t_r} = \int_{t_y}^{t_r} (f, \vartheta)dt\,,$$

где $0 \le t_н \le t_к \le T$, $\dot{u} = du/dt$, $\dddot{u} = d^3u/dt^3$.

На $[0,T]$ введем равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,...;\ \tau > 0\}$. На каждом из интервалов (t_n, t_{n+1}) приближенное решение задачи (15), (16) будем искать в виде полинома пятой степени

$$y(t) = \varphi_{00}^n(t)y^n + \varphi_{01}^n(t)y^{n+1} + \varphi_{10}^n(t)\dot{y}^n + \varphi_{11}^n(t)\dot{y}^{n+1} + \varphi_{20}^n(t)\ddot{y}^n + \varphi_{21}^n(t)\ddot{y}^{n+1},$$

где $y^n = y(t_n)$, $y^{n+1} = y(t_{n+1})$, $\dot{y}^n = dy(t_n)/dt$, $\dot{y}^{n+1} = dy(t_{n+1})/dt$,

$$\ddot{y}^n = d^2y(t_n)/dt^2,\ \ \ddot{y}^{n+1} = d^2y(t_{n+1})/dt^2,\ \ \varphi_{00}^n(t) = -6\xi^5 + 15\xi^4 + 6\xi^5 - 10\xi^3 + 1,$$

$$\varphi_{01}^n(t) = 6\xi^5 - 15\xi^4 + 10\xi^3,\ \ \varphi_{10}^n(t) = \tau(-3\xi^5 + 8\xi^4 - 6\xi^3 + \xi),$$

$$\varphi_{11}^n(t) = \tau(-3\xi^5 + 7\xi^4 - 4\xi^3),\ \ \varphi_{21}^n(t) = \tau(\xi^5/2 - \xi^4 + \xi^3/2),$$

$$\varphi_{20}^n(t) = \tau^2(-\xi^5/2 + 3\xi^4/2 - 3\xi^3/2 + \xi^2/2),\ \ \xi = (t - t_n)/\tau\,.$$

На основе этого полинома построены различные разностные схемы для задачи (15), (16).

Во **втором параграфе** на основании результатов первого параграфа, построена следующая многопараметрическая разностная схема

$$
\begin{aligned}
&D_\eta \dot{y}_t - \eta\tau^2 A y^{(0.5)} - D\ddot{y}^{(0.5)} = \varphi_1, \\
&D_\gamma y_t - D_\gamma \dot{y}^{(0.5)} + \eta\tau^2 D\ddot{y}_t = \varphi_2, \\
&D_\alpha \dot{y}_t - D_\beta \ddot{y}^{(0.5)} - \eta\tau^2 A y^{(0.5)} = \varphi_3,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $D_m = D - m\tau^2 B$, $m = \alpha, \beta, \gamma, \eta$, $\ddot{y}_t = (\hat{\ddot{y}} - \ddot{y})/\tau$, $\ddot{y}^{(0.5)} = (\hat{\ddot{y}} - \ddot{y})/2$.

Здесь

$$
\varphi_1 = -\frac{\tau}{6}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)dt = -\frac{\tau^2}{6}\int_0^1 f(t_n+\tau\xi)d\xi,
$$

$$
\varphi_2 = -\frac{7\tau^2}{60}\int_0^1 f(t_n+\tau\xi)[s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi) + s_2\vartheta_2^{(5)}(\xi)]d\xi,
$$

$$
\varphi_3 = -10\int_0^1 f(t_n+\tau\xi)[s_3\vartheta_3^{(2)} + s_4\vartheta_3^{(4)}]d\xi,
$$

где $s_1 = 3 - 120\gamma$, $s_2 = 14 - 840\gamma$, $s_3 = 140\alpha + 15$, $s_4 = 1400\alpha + 140$, $\vartheta_2^{(1)} = \tau\left(\xi - 1/2\right)$, $\vartheta_2^{(5)} = \tau\left(3\xi^5 + 15\xi^4/2 - 5\xi^3 + \xi/2\right)$, $\vartheta_3^{(2)} = \tau^2\xi(\xi-1)/2$, $\vartheta_3^{(4)} = \tau^2\xi^2(\xi-1)^2/4$б $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ - некоторые постоянные.

Начальные условия для схемы (17) ставится следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&y(0) = u_{0,0}, \\
&\dot{y}(0) = u_{0,1} + \frac{\tau}{2}\left(E - \frac{\tau^2}{12}D^{-1}B\right)u_{0,2} + \frac{\tau^2}{6}u_{0,3} + \frac{\tau^3}{24}D^{-1}[f(0) - Au_{0,0}], \\
&\ddot{y}(0) = u_{0,2} + \tau u_{0,3} + \frac{\tau^2}{2}D^{-1}[f(0) - Bu_{0,2} - Au_{0,0}] + \\
&\quad + \frac{\tau^3}{4}D^{-1}[\dot{f}(0) - B\dot{u}_{0,2} - A\dot{u}_{0,0}].
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Доказан, что погрешности аппроксимации $\psi_1 = O(\tau^4)$, $\psi_2 = O(\tau^4)$, $\psi_3 = O(\tau^4)$, если выполнено условия

$$
\eta = 1/12,\ \alpha - \beta = 1/12. \tag{19}
$$

В **третьем параграфе** для исследования устойчивости разностной схемы (17) с начальными условиями (18), она записывается в канонической форме

$$
\mathrm{B}Y_t + \mathrm{U}Y = \Phi,
$$

где $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{B}} + 0.5\tau\,\mathrm{U}$,

$$
\overline{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 & D_\beta D_\eta & 0 \\ \eta\tau^2 AD & 0 & AD_\gamma \\ 0 & \eta\tau^2 AD_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad
\mathrm{U} = \begin{pmatrix} -D_\beta D & 0 & -\eta\tau^2 D_\beta A \\ 0 & -AD_\gamma & 0 \\ -\eta\tau^2 AD_\beta & 0 & -\eta^2\tau^4 A^2 \end{pmatrix}.
$$

Операторы $\overline{\mathrm{B}}, \mathrm{U}$ действует из H^3 в H^3, $\Phi = (D_\beta\varphi_1, A\varphi_2, \eta\tau^2 A\varphi_3) \in H^3$. Здесь $H^3 = H \oplus H \oplus H$ (прямая сумма пространств H) со скалярным произведением $(U,V)_S = (SU,V) = \sum_{\alpha=1}^{3}(SU_\alpha, V_\alpha)$ и нормой

$$\|U\|_S^2 = (U,U)_S = \sum_{\alpha=1}^{3}\|u_\alpha\|_S^2,\ U,V \in H,\ U = (u_1,u_2,u_3),\ V = (\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3).$$

На основании известной теоремы А.А. Самарского и А.В. Гулина доказана следующая теорема.

Теорема 5. Пусть операторы D, B и A взаимноперестановочны,

$$D_m > 0,\ m = \alpha,\beta,\gamma,\eta, \tag{20}$$

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}^* \geq -c_* E,\ c_* = const > 0, \tag{21}$$

U - постоянный оператор и выполнено условия

$$\mathrm{B} \geq \varepsilon E + 0.5\tau U',\ U' = \mathrm{U} + \mathrm{c}_1 E,\ \varepsilon = const > 0, \tag{22}$$

где $c_1 = 2c_*$. Тогда для решения схемы (17), (18) имеет место априорная оценка

$$\|Y(t_{n+1})\|_{U'}^2 \leq e^{\theta_{n+1}}\left(\|Y(0)\|_{U'}^2 + \frac{1+t_{n+1}}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{n}\tau\|\Phi_k\|^2\right),\ \theta_{n+1} = 2c_*\frac{t_{n+1}+1}{\varepsilon}. \tag{23}$$

Условия (20) накладывает ограничения на операторы схемы:

$$D > m\tau^2\mathrm{B},\ m = \max(\alpha, \beta, \gamma, \eta). \tag{24}$$

Условие (21) выполнено, так как оператор U по структуре знаконеопределенный, а из (22) получаем условие $\overline{\mathrm{B}} \geq (\varepsilon + 0.5\tau c_1)E$, которые имеют место при выполнении условия устойчивости (24).

На основе теоремы 5 доказана сходимость схемы с четвертым порядком.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5 и условия (19). Тогда на основе оценки (23) получаем, что схема (17), (18) сходится к решению задачи (15), (16) с четвертым порядком так, что для ее решения справедливы оценки точности:

$$\|y^n - u(t_n)\|_{U'} \leq M\tau^4,\ \|\dot{y}^n - \dot{u}(t_n)\|_{U'} \leq M\tau^4,\ \|\ddot{y}^n - \ddot{u}(t_n)\|_{U'} \leq M\tau^4.$$

В **третьей главе** диссертации **«Оценки точности разностных схем для уравнения Соболевского типа высокого порядка»** рассматриваются начально-краевые задачи для уравнения Соболевского типа шестого порядка, неразрешенных относительно производной по времени. Такие задачи возникают при решении задач геофизики, океанологии, физики атмосферы, физики магнитоупорядоченных структур, связанные с распространением волн в средах с сильной дисперсией и многие другие. В этих уравнениях, как в первой главе, сначала аппроксимируем пространственные переменные, а временная переменная сохраняется в дифференциальной форме. В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка большой размерности, которая далее решается разностной схемой метода конечных элементов четвертого порядка точности полученные во второй главе. Для получения оценки точности используется методы получения априорных оценок теории разностных схем А.А. Самарского. Исследования точности осуществляется в классах негладких решении.

В **первом параграфе** рассматриваются вопросы построения и исследования разностных схем повышенной точности краевых задач для нестационарного уравнения динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости**:**

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\Delta_3 u-\left(\theta^2+\frac{\varsigma^2}{c^2}\right)u\right\}+\omega_0^2\Delta_2 u+\varsigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\varsigma^2\theta^2 u+f(x,t),$$

(25)

$$(x,t)\in Q_T=\Omega\cup\partial\Omega,\ \Omega=\left\{x\,\middle|\,x=(x_1,x_2,x_3),\ 0<x_\alpha<l,\ \alpha=\overline{1,3}\right\},$$

где $u(x,t)$–скорость движения, c – скорость звука, ω_0^2–частота Вяйсяля-Брента, ς,θ–некоторые постоянные. Рассмотрим уравнение (25) с начальными и краевыми условиями:

$$\partial^\nu u(x,t)/\partial t^\nu\Big|_{t=0}=u_{0,\nu},\quad \nu=\overline{0,3},\ x\in\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma, \tag{26}$$

$$u(x,t)\big|_\Gamma=g(t),\ t\in(0,T]. \tag{27}$$

Доказана следующая теорема о сходимости решения векторной схемы (17), (18) к решению исходной задачи (25)-(27).

Теорема 7. Пусть $D^*=D>0,\ B^*=B\ge 0,\ A^*=A>0$. Кроме того, пусть выполнены условия аппроксимации (19) и устойчивости

$$D-\mu\tau^2 A\ge\varepsilon D,\ \ \forall\varepsilon\in(0,1),\ \ \mu=\max\{\alpha,\beta,\gamma,\eta\}.$$

Тогда для решения схемы (17), (18) аппроксимирующей решение задачи (25) - (27) такого, что $u(x,t)\in C\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right\}$,

$$\partial u(x,t)/\partial t\in C\left\{[0,T];\ W_2^k(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right\},\ \ \partial^4 u(x,t)/\partial t^4\in C\left\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\right\},$$

верна оценка точности:

$$\|u(x,t)-u_h(x,t)\|_1+\|\dot u(x,t)-\dot u_h(x,t)\|_0+\sqrt{\int_0^t\|\dot u(x,t)-\dot u_h(x,t)\|_1^2\,dt}+$$

$$+\sqrt{\int_0^t\|\ddot u(x,t)-\ddot u_h(x,t)\|_0^2\,dt}\le M\left\{h^k\left(\sqrt{\int_0^t\|u(x,t')\|_{k+1}^2\,dt'}+\sqrt{\int_0^t\|\dot u(x,t')\|_k^2\,dt'}\right)+\right.$$

$$\left.+\tau^3\sqrt{\int_0^t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2dt'}\right\},\ \ \forall t\in[0,T],\ \ M=M(T,\rho,\theta,\omega_0)>0.$$

Во **втором параграфе** аналогичные результаты получены для уравнения ионно-звуковых волн в замагниченной плазме

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(\Delta_3 u - r_D^{-2}u\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\omega_{B_i}^2 + \omega_{p_i}^2)\Delta_3 u - \omega_{B_i}^2 r_D^{-2}u] + \omega_{p_i}^2\omega_{B_i}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x,t), \qquad (28)$$

$$(x,t) \in Q_T = \Omega \cup \partial\Omega,\ \Omega = \left\{x \,\middle|\, x = (x_1, x_2, x_3),\ 0 < x_\alpha < l,\ \alpha = \overline{1,3}\right\}$$

с начальными и краевыми условиями

$$\partial^\nu u(x, t / \partial t^\nu\Big|_{t=0} = u_{0,\nu},\quad \nu = \overline{0,3},\ x \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \qquad (29)$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0,\ t \in (0,T]. \qquad (30)$$

Здесь $u = (x,t)$–скорость движения, $r_D^2 = T_e^2 \big/ \left(4\pi e^2 n_0\right)$–радиус Дебая, $\omega_{B_i} = eB_0 / (Mc)$–ионная гирочастота, $\omega_{p_i}^2 = 4\pi e^2 n_0 / M$ –частота Ленгмюра для ионов, M–масса, c–скорость света в вакууме, B_0–внешнее постоянное магнитное поле, n_0–невозмущенная плотность частиц, e–абсолютная величина заряда электрона, T_e–температура электронов.

Доказана следующая теорема.

Теорема 8. Пусть $D^* = D > 0,\ B^* = B \ge 0,\ A^* = A > 0$. Кроме того, пусть выполнены условия аппроксимации (19) и устойчивости

$$D - \mu\tau^2 A \ge \varepsilon D,\ \ \forall \varepsilon \in (0,1),\ \ \mu = \max\{\alpha, \beta, \gamma, \eta\}.$$

Тогда для решения схемы (17), (18) аппроксимирующей решение задачи (28)-(30) такого, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in C\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\right\}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in C\left\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\right\}$, верна оценка точности:

$$\left\|\dot{u}(x,t) - \dot{u}_h(x,t)\right\|_1 + \left\|u(x,t) - u_h(x,t)\right\|_1 + \int_0^t \left\|\ddot{u}(x,t') - \ddot{u}_h(x,t')\right\|_1 dt' +$$

$$+\int_0^t \left\|\dot{u}(x,t') - \dot{u}_h(x,t')\right\|_1 dt' \le M\left\{h^k\left(\sqrt{\int_0^t \left\|u(x,t')\right\|_{k+1}^2 dt'} + \sqrt{\int_0^t \left\|\dot{u}(x,t')\right\|_{k+1}^2 dt'}\right) +\right.$$

$$\left. + \tau^3\sqrt{\int_0^t \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2 dt'}\right\},\ \ \forall t \in [0,T],\ \ M = M(r_D, \omega) > 0.$$

Третий параграф посвящен численному моделированию нестационарного уравнения динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости. Приведены тестовые расчеты подтверждающее теоретические выводы результатов второй и третей главы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена построению и исследованию разностных схем повышенной точности для некоторых уравнений Соболевского типа высокого порядка неразрешенные относительно производной по времени.

1. На основе многопараметрических разностных схем метода конечных элементов повышенной точности решены уравнения ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме, спиновых волн в магнетиках, спиновых волн в легких плоских магнетиках, уравнения двухтемпературной плазмы, доказаны теоремы о точности;
2. На основе метода конечных элементов построены новые многопараметрические разностные схемы четвертого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, а также доказаны теоремы о точности;
3. При численном решении начально-краевых задач для уравнения динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости и уравнений ионно-звуковых волн в замагниченной плазме построены разностные схемы повышенной точности, получены априорные оценки решения и доказаны теоремы о точности;
4. Получены оценки точности разностных схем при минимальных требованиях к аналитическому решению и гладкости начально-краевых задач для уравнения в частных производных четвертого и шестого порядков;
5. Разработаны алгоритмы для численного моделирования, а также численно решены некоторые тестовые задачи, подтверждающие теоретические выводы глав.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NURULLAEV JUSIPBAY ABDIUALIEVISH

DIFFERENCE SCHEMES OF INCREASED ACCURACY FOR SOLVING SOME SOBOLEV TYPE EQUATIONS

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2024.1.PhD/FM998.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific adviser:	**Utebaev Dauletbay** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent
Official opponents:	**Shadimetov Kholmatvay Mahkambaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Khudoyberganov Mirzoali Urazalievich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent
Leading organization:	**Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan**

Defense will take place "30" april 2024 at 14-00 at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №31) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 227-12-24).

Abstract of dissertation sent out on "16" april 2024 year
(Mailing report №1 on "19" february 2024 year).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM ... MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON ...

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

R.D. Aloyev
Deputy Chairman of Scientific seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor.

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The purpose of the study is to construct and study difference schemes of increased accuracy for non-stationary high-order Sobolev type equations, unresolved with respect to the time derivative, obtaining their stability conditions, assessing convergence and accuracy.

The object of the study is nonstationary initial-boundary value problems for Sobolev type equations of the fourth and sixth orders, unresolved with respect to the time derivative.

The scientific novelty of the research work is as follows:

on the basis of multiparameter difference schemes of the finite element method of increased accuracy, the equations of ion-acoustic waves in non-magnetized plasma, spin waves in magnets, spin waves in light flat magnets, equations of two-temperature plasma were solved, accuracy theorems were proved;

based on the finite element method, new multiparameter difference schemes of the fourth order of accuracy were constructed for a system of ordinary differential equations of the fourth order, and accuracy theorems were proved;

when numerically solving initial boundary value problems for the equation of dynamics of a compressible stratified rotating fluid and the equations of ion-acoustic waves in a magnetized plasma, difference schemes of increased accuracy were constructed, a priori estimates of the solution were obtained, and accuracy theorems were proved;

estimates of the accuracy of difference schemes are obtained with minimal requirements for the analytical solution and smoothness of initial boundary value problems for partial differential equations of the fourth and sixth orders.

algorithms for numerical modeling have been developed, and some test problems have been solved numerically to confirm the theoretical conclusions of the chapters.

Implementation of the research results. The results obtained on the construction of multiparameter difference schemes using the finite element method for high-order Sobolev type equations, unresolved with respect to the time derivative, were implemented in the following scientific projects:

Numerical methods for solving high-order Sobolev type equations unresolved with respect to the time derivative were used in the fundamental project OT-F2-77 “Improving methods for predicting the reliability of semiconductor devices based on modeling taking into account internal structural defects” to obtain new information about processes in semiconductor structures with various defects and determination of their electrophysical and optical properties (Certificate of Karakalpak State University dated 08.07.2023, No. 01-22-04/276). The application of scientific results has made it possible to determine the causes of defects in semiconductor physics and to update methods for creating semiconductor devices that provide a certain stability;

Difference schemes of increased accuracy for Sobolev type equations were used within the framework of the grant project AL392103042 “Modeling of ecological and meteorological processes in desertification zones of the Southern

Aral Sea region, leading to warming of the regional climate” (2022-2023) (Certificate confirmation from the Karakalpak Research Institute of Natural Sciences from 08.08.2023 No. 17.01/303) was used to construct a numerical model of the convective rise of microparticles from a heated surface. The application of scientific results made it possible to numerically develop a model of the convective rise of microparticles from a heated surface and a model of molecular heat transfer of spherical microparticles moving in a convective flow with a gaseous medium.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and applications. The volume of the dissertation is 112 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Utebaev D, Nurullaev J.A. On the accuracy of the finite element method scheme for the equation of ion-sound waves in an unmagnetized plasma // Science and Education in Karakalpakstan, 2020, №2, Pp. 50-56. (01.00.00; № 11).

2. Aripov M.M., Utebaev D., Nurullaev J.A. Convergence of high-precision finite element method schemes for the two-temperature plasma equation // AIP Conference Proceedings, 09 February 2021, Vol. 2325, Pp. 020059-1-6. (№ **3. Scopus,** IF=0.40).

3. Utebaev D., Nurullaev J.A. On convergence of difference schemes for the equation of spin waves in magnetic of the easy-plane type // Science and Education in Karakalpakstan, 2021, №4/1(19), Pp. 58-64. (01.00.00; № 11).

4. Aripov M.M., Utebaev D., Nurullaev J.A. Difference schemes of high accuracy for equation of spin waves in magnets // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, Tashkent, 2021, Vol. 4: Iss. 2, Article 7. Pp. 195-203. (01.00.00; № 8).

5. Арипов М.М., Утебаев Д., Атаджанов Х.Л., Нуруллаев Ж.А. Разностные схемы для численного решения операторого дифференциального уранения четвертого порядка» // ДАН РУз., Сер. математика, технические науки, естествознание, 2022 г., № 3, стр. 11-16. (01.00.00; № 7).

6. Utebaev D., Nurullaev J.A. Accuracy estimates of the finite element metho d scheme for the dynamics equation of a compressible stratified rotating fluid // Bulletin of the Institute of Mathematics, Tashkent, 2022, No. 5(5), Pp. 69-81. (Ўзбекистон Республикаси ОАК Раёсатининг 2019 йил 28 мартдаги 263/7.1-сон қарори).

7. Aripov M.M., Utebaev D., Nurullaev J.A. On the convergence of difference schemes of high accuracy for the equation of ion-acoustic waves in a magnetized plasma // Bulletin of the Karaganda University, 2022, № 4(108), Pp. 4-19. (**№ 1, Web of Science,** IF=0.6).

8. Utebaev D., Atadjanov Kh.L., Nurullaev J.A. Finite element method schemes of higher accuracy for solving non-stationary fourth-order equations // Bulletin of KazNU. Mathematics, Mechanics and Computer Science, 2023, №2(118), Pp. 42-56. (**№ 1, Web of Science,** IF=0.1).

II бўлим (часть II; part II)

9. Aripov M.M., Utebaev D. Nurullaev J.A. On the convergence of high precision finite element method schemes for the two-temperature plasma equation // Fifth International Conference on Analysis and Applied Matematics ICAAM

2020, Near East University, 23-30 september, 2020, Girne (Kyrenia), Mersin 10, Turkey, pp. 60-61.

10. Арипов М.М., Утебаев Д., Нуруллаев Ж.А. Исследование разностных схем повышенной точности для уравнения спиновых волн в магнетиках // Международная научная конференция «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологии», г. Бухара, БГУ, 15-апрель, 2021, стр. 32-33.

11. Утебаев Д., Нуруллаев Ж.А. О точности разностных схем для одного уравнения высокого порядка составного типа // Институт Математики имени В.И. Романовского АН РУз Бухарское отделение института Математики, Тезисы докладов, Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа», г. Бухара, 04–05 ноябрь, 2021, стр. 336-337.

12. Утебаев Д., Атаджанов Х.Л., Нуруллаев Ж.А. Об одном методе численного решения оператороГо дифференциального уранения четвертого порядка // Заҳириддин Муҳаммад Бобур номидаги Андижон давлат университети Андижон машинасозлик институти, «фан, таълим ва техникани инновацион ривожлантириш масалалари», Халқаро илмий-амалий онлайн анжуман, Андижан, 12-апрель, 2022, 24-27 б.

13. Нуруллаев Ж.А. Численное решение уравнения динамики, сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости // Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети Математика факультети ҳамда ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти, «Математика, механика ва интеллектуал технологиялар» илмий-амалий конференцияси, Тошкент, 21-22 April, 2022, 84-86 б.

14. Утебаев Д., Нуруллаев Ж.А, Численное решение уравнения ионно-звуковых волн в замаг ниченной плазме // Вторая Узбекско-Малазийская международная конференция «Вычислительные модели и технологии (ВМТ2022)» Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент, 16-17 сентября 2022 г. стр. 69-70.

15. Utebaev D. Nurullaev J.A. On the convergence of difference shemes of high accuracy for the equation of ion-acoustic waves in a magnetized plasma // Тезисы докладов межд. конф. «Актуальные задачи математики, механики и информатики», г. Караганда, 8-9 сентября 2022 г., стр. 155-157.

16. Nurullaev Zh.Z. Numerical solution of the equation of ionacoustic waves in a magnetized plasma // Eurasian Journal of Mathematical Theory and Computer Sciences, 2023, Vol. 3, № 1, Pp. 7-12. (01.00.00; № 43, UIF=8.3).

17. Нуруллаев Ж.А. Численное моделирование распространения волн в магнитной газовой динамике // Тезисы докладов международной конференции студентов и молодых ученых «Фараби әлемі», КазНУ им. Аль Фараби, Казакстан, 6-8 апреля 2023 г., с. 126.

18. Utebaev B.D., Utebaev D., Nurullaev Zh.A. Numerical Methods for Sobolev-Type High Order Equations // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и

информационных технологий Аль-Хорезми 2023», г. Тошкент, 25-26 сентября 2023 г., стр. 150.

19. Утебаев Д., Нуруллаев Ж.А., Казимбетова М.М., Ярлашев Р.Ш. Өзгермели коэффициентли параболалық типтеги теңлемелерди жоқары анықлықтағы шекли айырмалар усылы менен шешиў. Ўзбекистон Республикаси Адлия Вазирлиги хузуридаги Интеллектуал мулк агентлиги ЭХМ учун дастурий таъминот яратиш Гувохнома DGU 24246. 24.03.2023.

20. Нуруллаев Ж.А., Утебаев Д., Атаджанов Х.Л. Икки ҳароратли плазма тенгламаларини юқори аниқликдаги усуллар ярдомида сонли ечиш дастури. Ўзбекистон Республикаси Адлия Вазирлиги хузуридаги Интеллектуал мулк агентлиги ЭХМ учун дастурий таъминот яратиш Гувохнома DGU 34274. 24.02.2024.

Автореферат «Qoraqalpog'istonda fan va ta'lim»журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларида матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босишга рухсат этилди:01.04.2024 йил
Бичими 60x84 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулда чоп этилди.
Шартли босма табоғи 3. Адади 100. Буюртма № 052

“Fan va ta’lim poligraf” MChJ босмахонасида чоп этилди.
Тошкент шаҳри, Дўрмон йўли кўчаси, 24-уй.