**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

MATEMATIKA INSTITUTI

KAXXOROV AZIZBEK ESANOVICH

BIOLOGIK VA IQTISODIY JARAYONLARNI MODELLASHTIRISHDA VA ULARNING TURG‘UNLIGINI O‘RGANISHDA KECHIKISHLI VOLTERRA TENGLAMALARI

**01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2024

UDK: 517.925.4

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

KAXXOROV AZIZBEK ESANOVICH

BIOLOGIK VA IQTISODIY JARAYONLARNI MODELLASHTIRISHDA VA ULARNING TURG‘UNLIGINI O‘RGANISHDA KECHIKISHLI VOLTERRA TENGLAMALARI

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy Attestatsiya komissiyasida №B2023.4.PhD/FM670 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (http://kengash.mathinst.uz) va “ZiyonNet” Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Xusanov Jumma Xusanovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Mamadaliyev No‘monjon Olimjonovich fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	**Ulyanovsk davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil “07” may soat 17:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (99871) 207-91-40, website: www.mathinst.uz, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (182-raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil “19” aprel kuni tarqatildi.
(2024 yil “19” apreldagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A. Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., akademik

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A.A. Azamov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Volterra tenglamalarini o‘rganish va ularning amaliy masalalarni yechishda qo‘llash differentsial tenglamalar nazariyasi va uning fan va texnikaning turli sohalarida qo‘llanilishida muhim o‘rin tutadi. Asosan, V. Volterraning bir asr oldin ishlarida biologik jamoalarning matematik nazariyasi, jumladan, yashash uchun kurashda ularning raqobatini modellashtirish va tegishli differentsial va integro-differentsial tenglamalarni sifatli tahlil qilish to‘liq asoslab berilgan. O‘sha vaqtdan beri differentsial tenglamalar bo‘limida bir qator ishlarda “Volterra sistemalar nazariyasi va qo‘llanilishi” mavzusi bo‘yicha katta hajmdagi tadqiqotlar va ko‘plab monografiyalar, darsliklar, ilmiy va ommabop maqolalarda taqdim etilgan. Bu biologiya, ekologiya, tibbiyot, iqtisod, ijtimoiy tadqiqotlar, tarix va radiofizikadagi turli jarayonlar Volterra turidagi tenglamalar asosida modellashtirishga keltirilishi bilan izohlanadi.

Volterra turidagi va shunga o‘xshash matematik modellarga atrof-muhit ifloslanish modeli, sinfiy kurash modeli, qadimgi ovchilar-yig‘uvchilar jamiyati modeli, harbiy harakatlar modeli, yuqumli virusli kasallik modeli, epidemiyalarning tarqalish modeli, shu jumladan kompyuterlarning virus dasturlarini yuqtirishi va viruslarning axborot tarmoqlarida tarqalishi, miyaning kognitiv va (yoki) hissiy rejimlarining o‘zaro ta’siri modeli kabilar keltiriladi. Ko‘pgina modellarni qurish va tahlil qilishning asosiy vositasi bichiziqli tipdagi avtonom differentsial tenglamalar bo‘lgan va bugungi kunga qadar bo‘lib kelmoqda. Biroq, bir qator zamonaviy amaliy masalalarda jarayonlarni modellashtirishda murakkabroq vaqtga bog‘liq kechikuvchili avtonom bo‘lmagan va bir nechta muvozanat holatiga ega bo‘lgan tenglamalarni tahlil qilish zarurati tug‘iladi. Bu masalalarni yechish maqsadli ilmiy tadqiqotlarning asosiy yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi.

Mamlakatimizda so‘ngi yillarda ilmiy va amaliy tatbig‘iga ega bo‘lgan fundamental va aniq fanlarga alohida e’tibor qaratildi. Uning muhim bo‘limlaridan biri differentsial tenglamalar hisoblanadi. Amaldagi qonun xujjatlarda “matematik analiz, differentsial tenglamalar nazariyasi, matematik fizika, matematik modellashtirish, algebra va turg‘unlikning matematik nazariyasi” bo‘yicha ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish muhim ahamiyatga ega ekanligi ta’kidlangan[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda turg‘unlik nazariyasi tadbiq etiladigan differentsial tenglamalar sifat nazariyasi bo’yicha ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4387-son qarori

Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387-son Qarori va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarori hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot O‘zbekiston Respublikasida fan va texnologiyalarni rivojlantirishning IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘raganilganlik darajasi. V.Volterraning ishlari oddiy differentsial va integro-differentsial tenglamalar yordamida biologik jamoalarda populyatsiyalar o‘rtasidagi munosabatlarni matematik modellashtirishga asos solgan. Ushbu ishlar ko‘plab tadqiqotlarda yanada rivojlantirilishi matematik biologiya va biofizikaning yaratilishiga olib keldi. Populyatsiya dinamikasining asosiy modellari mikrobiologiya, epidemiologiya va murakkab biologik tizimlari uchun asos bo‘ldi.

Oddiy differentsial tenglamalar asosida biologik tizimlarni modellashtirish va tahlil qilish bo‘yicha juda ko‘p ishlar orasida R.M. Mey, J.D. Murry, A.D. Bazikin, Yu.A. Pix, G. Yu.Riznichenkolarning ishlari ajralib turadi. Biologik populyatsiyalar dinamikasini tahlil qilish differentsial farq tenglamalar (G.E. Xatchinson, J.M. Smit, Yu.S.Kolesov) asosida modellarni qurish zaruratini keltirib chiqardi. Uzluksiz va qat’iy kechikuvchili differentsial tenglamalar nazariyasida Volterra tenglamalarini qo‘llash bo‘yicha fundamental natijalar S. Serovayskiy, O.L. Edelstein-Keshet, F.A. Rihanning monografiyalarida keltirilgan. F.A. Rihanning monografiyasida matematik biologiyada keyingi tadqiqotlar uchun muhim vosita bo‘lgan funksional-differentsial tenglamalarni yechishning sonli usullarini keltirib o‘tilgan.

Volterra modeli iqtisodiyotda ham keng qo‘llaniladi. Iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tavsiflash uchun “yirtqich-o‘lja” modelinig qo‘llanilishi kelajakda muvozanat darajalarini aniqlash va boshqaruv koeffitsientlarini nazorat qilish orqali tizimni bir dinamik muvozanatdan ikkinchisiga o‘tkazish imkonini beradi. Ushbu model inqirozni boshqarishda, populistik va spekulyativ iqtisodiyotni o‘rganishda va innovatsion modellashtirishda qo‘llaniladi. Bir qator ishlar iqtisodiy-ekologik model asosida shahar infratuzilmasini rivojlantirishga bag‘ishlangan. Ushbu sohadagi ko‘plab tadqiqotlar orasida biz T. Puu, V.M. Glushkov, V.V. Poddubniylarning isharini ajratib ko‘rsatishimiz mumkin.

Dissertatsiya tadqiqotining disertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog’liqligi. Dissertatsiya ishi O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Matematika institutining “Tibbiy, biologik va fizik jarayonlarning matematik modellarini ishlab chiqish, tadqiqot, monitoring va prognozlashning matematik usullarini qurish” ilmiy yo‘nalishi bo‘yicha ilmiy tadqiqot rejasiga muvofiq amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi biologiya va iqtisod masalalarini modellashtirishda kechikuvchili Volterra modellarini rivojlantirish va ularni turg‘unligini sifatli tahlil qilish uchun Lyapunov funksionallar usullarini ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

biologiya va iqtisod masalalarida ma’lum bo‘lgan Volterra modellarini tahlil qilish va yangi matematik Volterra modellarini qurish, bunda modellashtirilgan jarayonning kechikuvchili, nochiziqli va statsionar bo‘lmaganligi hisobga olinadi;

modellashtiriladigan biologik, iqtisodiy va boshqa shunga o‘xshash jarayonlarning turg‘unligi va chegaraviy xususiyatlarini o‘rganish uchun Lyapunov funksionallarini qurish metodologiyasini asoslash;

Volterra turidagi tenglamalar yechimlarining muvozanat holati va chegaraviy xossalari uchun turg‘unlik shartlarini chiqarish;

kechikuvchili chiziqli bo‘lmagan nostatsionar tenglamalar bilan modellashtirilgan biologik tizimlar va jarayonlarning turg‘unligi va boshqaruvi bo‘yicha bir qator masalalarni yechish.

Tadqiqot obyekti biologik va iqtisodiy masalalarini matematik modellashtirishda Volterra turidagi nochiziqli, o‘zgaruvchan kechikishli tenglamalardan iborat.

Tadqiqot predmeti nochiziqli va avtonom bo‘lmagan funksional-differentsial tenglamalarga asoslangan matematik modellashtirish va mos modellarning turg‘unligini o‘rganishdan iborat.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiyada kechikuvchili tenglamalarga asoslangan matematik modellashtirish usullari, funksional-differentsial tenglamalarning sifat analizi va ularning turg‘unligi, matematik va funksional analizning tegishli bo‘limlari qo‘llaniladi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Lyapunov funksionallari usulini rivojlantirish doirasida kechikuvchi turidagi avtonom bo‘lmagan funksional-differentsial tenglamalarning turg‘unligini tekshirishda Lyapunov funksionallarini qo‘llashda modifikatsiyalangan teoremalar isbotlangan;

o‘zgaruvchan kechikishli Volterra turidagi vektor tenglamaning statsionar yechimining turg‘unligi, mumkin bo‘lgan yechimlar tuzilmalarini tahlil qilish asosida parametrga bog‘liq trivial yechimning asimptotik turg‘unlik va noturg‘unlik shartlari, hamda bir nechta koordinatalari nolga teng chegaraviy statsionar yechimning noturg‘unlik shartlari aniqlangan;

o‘zgaruvchan kechikuvchili bir va ko‘p o‘lchovli nochiziqli avtonom bo‘lmagan tenglama yechimlarining turg‘unlikka tekshirilgan hamda bunday ko‘rinishdagi tenglamalar Volterra turidagi tenglamalar bilan modellashtiriladigan jarayonlarning turg‘unlik masalasiga olib kelish mumkinligi isbotlangan;

o‘zgaruvchan kechikishli Volterra turidagi skalyar tenglama yechimining statsionar holatlarining turg‘unligi uchun yetarli shartlar topilib, misol tariqasida Xatchinson tipidagi nochiziqli tenglamaning turg‘unlik masalasi yechilgan.

Tadqiqotning amaliy natijasi. Biologik va iqtisodiy jarayonlarning turg‘unligi va boshqaruv masalalari yechimlarining sifat xususiyatlarini o‘rganish yangi metodologiya asosida asoslab berilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik tasdiqlarning qat’iyligi va differentsial tenglamalarning turg‘unlik nazariyasidagi ma’lum usul va natijalarni qo‘llanganligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, chekli kechikishli, chiziqli va avtonom bo‘lmagan funksional-differentsial tenglamalarning turg‘unligini o’rganishda Lyapunov funksionallari usulini yanada rivojlantirish uchun ishlatilishi mumkin.

Tadqiqodning amaliy ahamiyati Volterra turidagi matematik modellarning turg‘unligi va boshqarish masalalarini yechish uchun ishlab chiqilgan metodologiya Volterra turidagi va murakkab tenglamalar bilan modellashtirilgan tizimlar va jarayonlarning boshqaruv strukturasini qurishda samarali foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarini joriy qilinishi. Biologik va iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda va ularning turg’unligini o’rganishda kechikishli Volterra tenglamalari bo’yicha olingan natijalar asosida:

Lyapunov funksionallari yordamida funksional-differentsial tenglamalar yechimlarining turg‘unligidan AAAA-A19-119072290002-9 raqamli “Kamchatkaning tabiiy ofatlari-zilzilalar va vulqon otilishi” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida kechikuvchi turdagi differensial tenglamalar modellari yechimlarining limit to‘plamini lokalizatsiya qilish masalalarida foydalanilgan (Vitus Bering nomidagi Kamchatka davlat universitetining 2023 yil 13-noyabrdagi №52-13-sonli ma’lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijaning qo‘llanishi kechikuvchili Volterra turidagi differensial tenglamalar yechimlarining turg‘unlik masalalarni samarali yechish algoritmini ishlab chiqish imkonini bergan;

kechikuvchili Volterra differentsial tenglamalarini sifatli tahlil qilish va ularning turg‘unligini tekshirishdagi Lyapunov funksionallaridan VF205.40 raqamli “Ilmiy tadqiqotlar uchun axborot tizimlarining bilim bazalari bilan ishlash vositalarini yaratish va ulardan foydalanish usullarini ishlab chiqish” mavzudagi xorijiy grant loyihasida yopishqoq-egiluvchan tebranma kasr dinamikasi uchun sifatli tahlil qilishning yangi usullari amalga oshirishda foydalanilgan (V.M. Glushkov nomidagi Kibernetika institutining 2024 yil 15-yanvardagi №1-M-sonli ma’lumotnomasi, Ukraina). Ilmiy natijaning qo‘llanishi umumlashgan Dubovskiy modeli bo‘yicha iqtisodiy inqirozlarning limit davrlarining sifat xususiyatlari va modellashtirilgan kechikuvchi turdagi differentsial tenglamalarning yechimlari topish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 8 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo’yicha 17 ta ilmiy ishlar chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan, 2 tasi xorijiy va 4 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yhatidan tashlik topgan. Dissertatsiyaning hajmi 115 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

"**Biologik va iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda kechikuvchili Volterra tenglamalari**" deb nomlangan birinchi bobning dastlabki ikki paragrafida tadqiqot ob'yekti biologik turlar va tirik tizimlarning o'zaro birgalikda mavjudligini va iqtisodiy jarayonlarning matematik modellarini modellashtirish va tahlil qilish bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan. Matematik modellashtirishning ushbu sohadagi keyingi tadqiqotlari ko'p jihatdan kechikuvchili turdagi chiziqli bo'lmagan funksional-differentsial tenglamalardan foydalanish bilan bog'liq. Uchinchi paragrafda dissertatsiyada foydalanilgan bunday tenglamalarning turg'unligiga oid asosiy tushunchalar keltirilgan.

Differentsial va integro-differentsial tenglamalarga asoslangan biologik jamoalarning matematik nazariyasining asosini italyan matematigi Vito Volterra yaratgan. Bir asr oldin uning ishlari nashr etilgan bo'lib, ham amaliy, ham nazariy ekologiyaning rivojlanishida uning g'oyalari naqadar teran va to'g'riligini tasdiqlab berdi.

Ikki biologik turning o'zaro mavjudligining amalda kuzatilgan ekologik jarayonlari asosida V. Volterra ikkita differensial tenglama ko'rinishida ularning o'zaro ta'sirining matematik modelini keltirib chiqardi.

Bunday jarayonning quyidagi modeli umumiy qabul qilingan:

$$\dot{N}_1 = (a_1 + b_{11}N_1 + b_{12}N_2)N_1, \qquad \dot{N}_2 = (a_2 + b_{21}N_1 + b_{22}N_2)N_2, \tag{1}$$

bu yerda N_1 va N_2 - turlar soni, a_1 va a_2 – har birining alohida-alohida ko'payishi yoki kamayishi koeffitsientlari, sistemaning o'ng tomonidagi $b_{12}N_1N_2$ va $b_{21}N_1N_2$ tashkil etuvchilar turlararo o'zaro ta'sirga mos keladi, shuning uchun b_{12} va b_{21} belgilar ikki turdagi individlar o'rtasidagi o'zaro ta'siriga bog'liq, $b_{12} < 0$ va $b_{21} < 0$ raqobatda, $b_{12} > 0$ va $b_{21} > 0$ simbiozda, $b_{12}b_{21} < 0$ "yirtqich va o'lja" tizimida. $b_{11}N_1^2$ va $b_{22}N_2^2$ hadlar turlar ichidagi raqobatni ifodalaydi, shuning uchun $b_{11}, b_{22} < 0$.

Undan tashqari V. Volterra modellarda mos funksiyalarning $N_1, N_2, ..., N_n$ bo'yicha chiziqli bo'lgan (klassik Volterra modellar) n turlarning o'zaro ta'sirlarini umumiyroq modellarini o'rgangan. Matematik jihatdan ular turlararo o'zaro ta'siri quyidagi shakliga ega

$$\dot{N}_i = \left(a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} N_j \right) N_i, \quad i = 1, 2, ..., \tag{2}$$

bu yerda a_i - boshqa turlar mavjud bo'lmaganda i-populatsiyaning tabiiy o'sishi yoki o'lim koeffitsienti; b_{ij} $(i \neq j)$-koeffitsientlar, shuningdek, j-turning i-ga ta'sir intensivligini aks ettiradi; $b_{ii} \le 0$ koeffitsientlar tur ichidagi raqobatning intensivligini ifodalaydi.

(2) tenglamalar klassik Volterra modeli hisoblanadi. Keyinchalik, ya'ni hozirgi vaqtda chiziqli bo'lmagan turning biologik o'zaro ta'sirlashuv modeli klassik modelni umumlashtirish sifatida o'rganilmoqda

$$\dot{N}_i = \left(a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(N_j) \right) d_i(N_i), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

bu yerda $d_i(N_i) \in C^1$, $i = 1, 2, ..., n$-funksiyalar va $f_i(N_i) \in C^2$, $i = 1, 2, ..., n$-funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi

$$N_i \ge 0 \text{ da } f_i(0) = 0, \; \dot{f}_i(N_i) > 0,$$
$$N_i > 0, i = 1, 2, ..., n \text{ da } d_i(0) = 0, d_i(N_i) > 0.$$

(1) - (3) tenglamalar bilan aniqlangan modellarda ko'payish va o'lim jarayonlari bir vaqtning o'zida sodir bo'lishi va populyatsiya tashqi sharoitlarning har qanday o'zgarishiga darhol reaktsiyaga kirishishi qabul qilinadi. Biroq, haqiqiy bio va ekotizimlarda ma'lum sabablarga ko'ra yuzaga keladigan individlarni tartibga solishda ayrim kechikish sodir bo'ladi: urug'langan tuxumdan har qanday katta yoshli individning rivojlanishi; har yili emas, faqat yilning ma'lum vaqtlarida ko'payish; ko'payish va o'limning turli intensivligi turli yosh guruhlarida farq qiladi.

Tashqi salbiy jarayonlar erta yosh bosqichlariga eng kuchli ta'sir qiladi va ularning intensivligi kattalar soniga bog'liq, shuning uchun oldingi avlod individlari tabiiy o'sish tezligiga salbiy ta'sir ko'rsatadi.

$h_j > 0$, $\left(j = 1, 2, ..., n \right)$ kechikuvchilikni hisobga olgan holda, ya'ni har bir turning boshqalar bilan o'zaro munosabatdagi ishtirokiga bog'liq bo'lib, shuningdek, tur ichidagi raqobat n turlarning o'zaro mavjudligi quyidagi ko'rinishni qabul qiladi:

$$\dot{N}_i(t) = \left(a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j\left(N_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} f_j\left(N_j(t - h_j)\right) \right) d_j\left(N_j(t)\right), \left(i = 1, 2, ..., n \right). \tag{4}$$

Ekologik jarayonlar va tirik tizimlarni matematik modellashtirish bo'yicha zamonaviy tadqiqotlar (4) tenglamalarda vaqtga bog'liq bo'lgan a_i, b_{ij}, g_{ij} koeffitsientlar va h_j kechikishni qabul qilish orqali ularni to'g'ri tavsiflash zaruriyatiga olib keladi.

Iqtisodiy tizim va jarayonlarni modellashtirishda kechikuvchi differentsial tenglamalardan ham foydalaniladi. Bugungi kungacha jahon adabiyotida kechikuvchi faktorini (iqtisodiy atama bo'yicha vaqt kechikishi) hisobga olgan holda iqtisodiy jarayonlarni tavsiflashda ko'plab yondashuvlar mavjud. Xususan, so'nggi o'n yilliklarda iqtisodiyotda, shuningdek, fan va texnikaning boshqa sohalarida "yirtqich-o'lja" turidagi kechikuvchi biologik tizim matematik modellashtirish uchun keng qo'llanildi, bu iqtisodiy jarayonlardagi dinamikani tavsiflash imkonini beradi, ya'ni firmalar raqobatidagi muvozanat darajalarini topish, iqtisodiy tizimlarning turli parametrlarining xatti-harakatlarini prognoz qilish va rejalashtirish. Lotka-Volterra matematik modeli ko‘pincha iqtisodiy tizimlar dinamikasini tasvirlash uchun ishlatiladi. Vaqtning kechikuvini hisobga olgan holda tizimlarning matematik modellarining murakkabligi va chiziqli bo‘lmaganligi turli xil zamonaviy raqamli modellashtirish paketlaridan foydalanish zaruratiga olib keladi.

Xususan, ko‘plab raqobatdosh tovarlarga ega bozorning rivojlanishini tavsiflovchi kechikuvchili Valras-Marshall dinamik modeli (4) tenglamalar bilan mos keladigan modifikatsiyalangan Valras tenglamalari bilan tavsiflanadi

$$\frac{dP_i(t)}{dt}\cdot\frac{1}{P_i(t)}=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\left(Q_j^{(1)}\left(P_j(t)\right)-Q_j^{(2)}\left(P_j(t-h_j)\right)\right),\ i=1,2,...,N,$$

bu yerda $P_i(t)$ – tovarning bozor narxi, $Q_j^{(1)}$ va $Q_j^{(2)}$ – bozordagi talab va taklif hajmi, h_j – tovarlarni yetkazib berish yoki boshqa omillar tufayli kechikishlar yoki vaqtdagi kechikishlar, g_{ij} – j-mahsulotga ortiqcha talabning i-mahsulot narxining o‘zgarishiga ta’sirini ifodalovchi doimiylar.

Biologik va iqtisodiy jarayonlarni matematik modellashtirish uchun zarur vosita kechikuvchi differentsial tenglamalardir. Birinchi bobning uchinchi paragrafida kechikuvchi turdagi funksional-differentsial tenglamalarning asosiy tushunchalari berilgan: tenglamaning ta’rifi; yechimning mavjudligi, uning yagonaligi, uzluksizligi va boshlang‘ich shartlarga bog‘liqligi. Yechimlarning chegaralanganligi turg‘unligiga ta’riflar berilgan va turg‘unlik masalalarini o‘rganishda Lyapunov funksionallari usulining asosiy qoidalari va teoremalari keltirilgan.

Dissertatsiyaning “**O‘zgaruvchan kechikishli Volterra vektor tenglamasining turg‘unligi**” deb nomlanuvchi ikkinchi bobida (4) turdagi Volterra tenglamalari yechimlarining chegara xossalari masalasi modellashtirilgan jarayonning kechikishlari vaqtga bog‘liq deb faraz qilinadi. Masalaning qo‘yilish yangiligi: biologik turlarning o‘zaro ta’sirida kechikishlarning vaqtga bog‘liqligi haqida; ularning juftlik o‘zaro ta’sirining chiziqli bo‘lmagan funksiyalarining umumiyroq tasviri bo‘yicha farazlardan iborat.

Chiziqli bo‘lmagan tahlil uchun birinchi paragrafda o‘rganilayotgan tenglamaning yechimlarining chegara xossalari qismida bir nechta mashhur teoremalarning modifikatsiyasi kechikuvchi turidagi funksional-differentsial tenglamalarning tadqiqotida Lyapunov funksionallari usulida isbotlanadi.

Ikkinchi va uchinchi paragraflarda o‘zgaruvchan kechikishli Volterra vektor tenglamasining statsionar yechimlarining lokal bo’lmagan turg‘unligini o‘rganish natijalari keltirilgan.

Aytaylik R^n – normasi $|x|$ bo’lgan x vektorlarning haqiqiy chiziqli vektorlar fazosi, $|x|^2=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$, $R_+^n=\left\{x\in R^n : x_k\geq 0\ \ \forall k\in Z,\ 1\leq k\leq n\right\}$ $\operatorname{int}R_+^n=\left\{x\in R^n : x_k>0\ \ \forall k\in Z,\ 1\leq k\leq n\right\}$, $\partial R_+^n=R_+^n\setminus\operatorname{int}R_+^n$, $h_0>0-$ qandaydir son, $C-$normasi $\|\varphi\|=\max\left(\left|\varphi(s)\right|,\ -h_0\leq s\leq 0\right)$ bo‘lgan $\varphi:[-h_0,0]\to R^n$ uzluksiz funksiyalarning banax fazosi, $C_+ = \{\varphi \in C : \varphi : [-h_0, 0] \to R_+^n\}$, $\operatorname{int} C_+ = \{\varphi \in C_+ :$ $\varphi_k(0) \neq 0\ \forall k \in Z,\ 1 \le k \le n\}$, $\partial C_+ = C_+ \setminus \operatorname{int} C_+$ bo‘lsin.

$x : [\alpha - h_0, \beta) \to R_+^n$ $(\alpha, \beta \in R^+,\ \alpha < \beta)$ uzluksiz funksiya uchun $x_t \in C_+$ funksiyani $x_t(s) = x(t+s)$ $(-h_0 \le s \le 0)$ tenglik orqali aniqlaymiz. $\dot{x}(t)$ ga o‘ng tomon hosilasi tushuniladi.

Quyida kechikishli Volterra turidagi vektor tenglama ko‘riladi

$$\dot{x}(t) = D(x(t))\left(A + BF(x(t)) + GF(x(t - h(t)))\right), \qquad (5)$$

bu yerda $D(x)$, $F(x)$ va $h(t)$ funksiyalar, undan tashqari A vektor va B va G matritsalar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) $D(x) = diag(d_1(x_1), d_2(x_2), ..., d_n(x_n))$, $d_k \in C(R^+ \to R^+)$, $d_k(x_k) = 0 \Leftrightarrow$, $\Leftrightarrow x_k = 0$ $k = 1, 2, ..., n$;

2) $F(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), ..., f_n(x_n))^T$ (bu yerda va keyinchalik $(\bullet)^T$ – transponirlash amali), $f_k \in C(R^+ \to R^+)$, $f_k(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$, $k = 1, 2, ..., n$;

3) $A = \{a_k\}$, $A \in R^n, B = \{b_{jk}\}$, $B \in R^{n\times n}$, $G = \{g_{jk}\}$, $G \in R^{n\times n}$;

4) $h = (h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t))^T$, $h_k \in C^1(R^+ \to [0, h_0])$, $h_k(t)$ – x_k, $\mu_0 \le \dot{h}_k(t) \le 1 - \mu_1$ $(\mu_1 > 0)$, $k = 1, 2, ..., n$ nisbiy o‘sish tezligida kechikish mavjudligini hisobga oladigan funksiyalar.

(5) model tenglamasining komponentlari va parametrlari quyidagi ma’nolarni anglatadi:

x_k – ekologik tizimdagi k-populyatsiya soni yoki k-korxonaning mahsulotlari hajmi;

a_k и $d_k(x_k)$ – x_k miqdoriga qarab raqobatning yo‘qligida x_k nisbiy o‘sish tezligining tarkibiy qismlari;

$f_k(x_k)$– umumiy resurslar uchun raqobatda populyatsiyalar yoki firmalarning o‘zaro birgalikda ta’sirlashuvidagi nisbiy o‘sish funksiyalari;

$h_k(t)$ – x_k nisbiy o‘sish tezligida kechikish mavjudligini hisobga oluvchi funksiyalar;

B va G – populyatsyalarning o‘zaro ta’sir yoki raqobat matritsalari.

Faraz qilaylik $f_k(x_k)$ va $d_k(x_k)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ funksiyalar $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E(m)$, vektorlar uchun Lipshits shartini qanoatlantirsin

$$\left|f_k(x_k^{(2)}) - f_k(x_k^{(1)})\right| \le L_0(m)\left|x_k^{(2)} - x_k^{(1)}\right|, \quad \left|d_k(x_k^{(2)}) - d_k(x_k^{(1)})\right| \le L_0(m)\left|x_k^{(2)} - x_k^{(1)}\right| \ (6)$$

bu yerda $E(m) = \{x \in R_+^n : |x| \le m,\ m = const > 0\}$.

Bundan har bir $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times C_+$ boshlang‘ich nuqta uchun biror bir $[\alpha - h(\alpha), \beta)$ $(\beta > \alpha)$ oraliqda aniqlangan (5) tenglamaning $x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi $x(t, \alpha, \varphi)$ yechimi mavjud, yagona va (α, φ) ga bog‘liq uzluksizdir.

(5) sistema R_+^n sohada quyidagicha muvozanat holatlariga ega:

1. Trivial

$$x(t,\alpha,\varphi)=0,\ t\ge\alpha-h; \tag{7}$$

2. $\operatorname{int}R_+^n$ sohada trivial bo‘lmagan

$$x(t,\alpha,\varphi)=x_0^{(l)},\ t\ge\alpha-h,\ l=1,2,...,N. \tag{8}$$

muvozanat holati. Bu muvozanat holati quyidagicha

$$\left(B+G\right)y+A=0 \tag{9}$$

chiziqli tenglamalar sistemasi $\operatorname{int}R_+^n$ sohada $y=y_0$ yagona yechimga ega, undan tashqari

$$F(x)=y_0 \tag{10}$$

funksional vektor tenglama $E(m)\cap\operatorname{int}R_+^n$ chegaralangan sohada chekli

$$x=x_0^{(l)};\ l=1,2,...,N;\ N=N(m) \tag{11}$$

yechimga ega degan faraz asosida aniqlanadi.

3. Undan tashqari, $d_k(0)=0\ (k=1,2,...,n)$ tenglik o‘rinli ekanligidan (5) tenglama, ∂R_+^n sohada, bitta yoki bir qancha koordinatalari nolga teng bo‘lgan muvozanat holatiga ega.

(7) muvozanat holatining trivialligidan bevosita tahlil asosida quyidagi ikkita teorema isbotlangan.

1-teorema. $a_k<0\ \forall k=1,2,...,n$ shartga ko‘ra (7) trivial muvozanat holati asimptotik turg’un.

2-teorema. Agar shunday $a_k>0$ mavjud bo‘lsa, u holda (7) trivial muvozanat holati turg‘un emas.

(8) trivial bo‘lmagan holat turg‘unligining yetarli shartlarini o‘rganishda $y=x-x_0^{(l)}$ ko‘rinishdagi ayirma va quyidagi mos funksiyalar kiritiladi:

$$\psi(s)=\varphi(s)-x_0^{(l)},\ f_k^{(l)}(y_k)=f_k\left(x_{k0}^{(l)}+y_k\right)-f_k\left(x_{k0}^{(l)}\right),$$

$$F^{(l)}(y)=\left(f_1^{(l)}(y_1),f_2^{(l)}(y_2),...,f_n^{(l)}(y_n)\right)^T,$$

$$D^{(l)}(y)=diag\left(d_1^{(l)}\left(x_{10}^{(l)}+y_1\right),d_2^{(l)}\left(x_{20}^{(l)}+y_2\right),...,d_n^{(l)}\left(x_{n0}^{(l)}+y_n\right)\right),$$

$$s_k(y_k)=\int_0^{y_k}\frac{f_k^{(l)}(\tau)d\tau}{d_k(\tau)},\ k=1,2,...,n,\ S(y)=\left(s_1(y_1),s_2(y_2),...,s_n(y_n)\right).$$

$d_k(x_k)$ funksiyaga nisbatan (6) shartdan

$$y_k\to-x_{k0}^{(l)},\ \forall k=1,2,...,n \text{ da } s_k(y_k)\to\infty \tag{12}$$

kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, erkli o‘sish ko‘rsatkichlari a_k, $d_k(x_k)$ va turlararo va tur ichidagi o‘zaro tasirlarining tashkil etuvchilari matritsalari

$$A=\left\{a_k\right\},\ A\in R^n,\ B=\left\{b_{jk}\right\},\ B\in R^{n\times n},\ G=\left\{g_{jk}\right\},\ G\in R^{n\times n}$$

va $h=\left(h_1\left(t\right),h_2\left(t\right),...,h_n\left(t\right)\right)^T$ kechikishlar shunday bo‘sinki, bunda $p_1,p_2,...,p_n>0$ doimiylar va $q_1(\tau),q_2(\tau),...,q_n(\tau)$, $q_k\in C\left(\left[-h_0,0\right]\to R^+\right)$ funksiyalar bilan aniqlangan quyidagi matritsalar

$$Q^{(0)}=diag\left(q_1(0),q_2(0),...,q_n(0)\right),$$

$$Q^{(1)}=diag\left(q_1\left(-h_1(t)\right)\left(1-\frac{dh_1(t)}{dt}\right),...,q_n\left(-h_n(t)\right)\left(1-\frac{dh_n(t)}{dt}\right)\right)$$

$$Q^{(2)}=PA+A^TP+Q^{(0)}+q_0^{-1}PBB^TP$$

$$y^TQ^{(1)}(t)y\geq q_0\,\|\,y\,\|^2,\ (q_0>0),\ y^TQ^{(2)}y\leq 0\ \ \forall(t,y)\in R^+\times R^n, \qquad (13)$$

baholanishlarni qanoatlantirsin.

Quyida keyingi teoremalar isbotlanadi.

3-teorema. Faraz qilaylik:

1) qandaydir $\delta>0$ da $s_k(y_k)$ $(k=1,2,...,n-1)$ funksiyalar uchun $s_k(y_k)>0\ \ \forall y_k\in\left\{0<|\,y_k\,|<\delta\right\}$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin;

2) (13) tengsizliklar bajarilsin.

U holda (8) muvozanat holati tekis turg‘un bo‘ladi.

4-teorema. 3-Teoremaning 1-sharti bajarilganida va (13) tengsizliklardan ikkinchisi

$$y^TQ^{(2)}y\leq -q_0\,\|\,y\,\|^2 \qquad (14)$$

ko‘rinishida kuchaytirilsa, (8) muvozanat holati tekis asimptotik turg‘un bo‘ladi.

5-teorema. Agar 4-Teoremaning birinchi shartining o‘rniga farz qilaylik, $y_k=0$ ning ixtiyoriy yetarli kichik atrofida manfiy qiymatlarni qabul qiluvchi kamida bitta $s_k(y_k)$ funksiya mavjud bo‘lsa, u holda (8) muvozanat holati noturg‘un bo‘ladi.

Agar $s_k(y_k)$ funksiyaga nisbatan farazimizni quyidagi ko’rinishda

$$x_k\to\infty\ \ \forall k=1,2,...,n \text{ da } \ s_k(y_k)\to\infty \qquad (15)$$

to‘ldirsak va (12) munosabatlarni hisobga olsak, u holda quyidagi natijalar o‘rinli bo‘ladi.

6-teorema. 4-Teorema shartlarini yuqorida ko‘rsatilgan faraz va $\operatorname{int}R_+^n$ sohada (8) muvozanat holatining yagonalik sharti bilan to‘ldiramiz.

U holda bu muvozanat holati global tekis asimptotik turg‘un bo‘ladi.

7-теорема . Aytaylik:

1) (13) tengsizliklardan birinchisi hamda (14) tengsizlik o‘rinli bo‘lsin;

2) (15) shart bajarilsin.

U holda $x\left(t,\alpha,\varphi\right)$, $\varphi\in C_+$ yechimning har biri $t\to\infty$ da (8) muvozanat holatlarining biriga cheksiz yaqinlashadi. Ya’ni, $\exists x=x_0^{(l)}\in\operatorname{int}R_+^n$ bunda $t\to\infty$ da $x\left(t,\alpha,\varphi\right)\to x_0^{(l)}$.

Endi $\left(x_1,x_2,...,x_m\right)$ $\left(1\leq m<n\right)$ o‘zgaruvchilarining birinchi m tasi nol bo‘lmagan, qolgan $\left(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n\right)$ o‘zgaruvchilarning p $\left(p=n-m\right)$ tasi nolga

teng bo‘lgan muvozanat holatini ko‘rib chiqamiz. Bu holatni o‘rganib chiqish uchun o‘zgaruvchilarni qayta aniqlaymiz.

Quyidagi:

$$y \in R_+^m,\ z \in R_+^p,\ \psi : \left[-h_0, 0\right] \to R_+^m,\ \theta : \left[-h_0, 0\right] \to R_+^p,$$

$$y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T = (x_1, x_2, ..., x_m)^T,$$

$$z = (z_1, z_2, ..., z_p)^T = (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)^T,$$

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m)^T = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)^T,\ \psi \in C_+^{(m)},$$

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_p)^T = (\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, ..., \varphi_n)^T,\ \theta \in C_+^{(p)},$$

funksiyalarni va ularga mos:

$$\left|y\right|^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2,\ \left|z\right|^2 = z_1^2 + z_2^2 + ... + z_p^2,$$

$$\| \psi \| = \sup\left(\left|\psi(s)\right|, -h_0 \le s \le 0\right),\quad \| \theta \| = \sup\left(\left|\theta(s)\right|, -h_0 \le s \le 0\right),$$

normalarni, undan tashqari:

$$A^{(1)} = \left(a_1, a_2, ..., a_m\right)^T,\quad A^{(2)} = \left(a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_n\right)^T,$$

vektorlarni,

$$B^{(11)} = \left\{b_{jk}^{(11)}\right\} = \left\{b_{jk};\ j,k = 1,2,...,m\right\},$$

$$B^{(12)} = \left\{b_{jk}^{(12)}\right\} = \left\{b_{jk};\ j = 1,2,...,m,\ k = m+1, m+2,...,n\right\},$$

$$B^{(21)} = \left\{b_{jk}^{(21)}\right\} = \left\{b_{jk};\ j = m+1, m+2,...,n,\ k = 1,2,...,m\right\},$$

$$B^{(22)} = \left\{b_{jk}^{(22)}\right\} = \left\{b_{jk};\ j,k = m+1, m+2,...,n\right\},$$

$$G^{(11)} = \left\{g_{jk}^{(11)}\right\} = \left\{g_{jk};\ j,k = 1,2,...,m\right\},$$

$$G^{(12)} = \left\{g_{jk}^{(12)}\right\} = \left\{g_{jk};\ j = 1,2,...,m,\ k = m+1, m+2,...,n\right\},$$

$$G^{(21)} = \left\{g_{jk}^{(21)}\right\} = \left\{g_{jk};\ j = m+1, m+2,...,n,\ k = 1,2,...,m\right\},$$

$$G^{(22)} = \left\{g_{jk}^{(22)}\right\} = \left\{g_{jk};\ j,k = m+1, m+2,...,n\right\},$$

matritsalarni,

$$f_k^{(1)} = f_k,\ d_k^{(1)} = d_k \quad (k = 1,2,...,m),$$

$$f_k^{(2)} = f_{m+k},\ d_k^{(2)} = d_{m+k} \quad (k = 1,2,..., p),$$

$$F^{(1)} = F^{(1)}(y) = \left(f_1^{(1)}(y_1), f_2^{(1)}(y_2),..., f_m^{(1)}(y_m)\right)^T,$$

$$F^{(2)} = F^{(2)}(z) = \left(f_1^{(2)}(z_1), f_2^{(2)}(z_2),..., f_p^{(2)}(z_p)\right)^T,$$

$$D^{(1)} = D^{(1)}(y) = diag\left(d_1^{(1)}(y_1), d_2^{(1)}(y_2),..., d_m^{(1)}(y_m)\right),$$

$$D^{(2)} = D^{(2)}(z) = diag\left(d_1^{(2)}(z_1), d_2^{(2)}(z_2),..., d_p^{(2)}(z_p)\right),$$

vektor va matritsali funksiyalarni kiritamiz.

Faraz qilaylik

$$\left(B^{(11)} + G^{(11)}\right)F^{(1)} + A^{(1)} = 0 \tag{16}$$

chiziqli tenglamalar sistemasi $\operatorname{int} R_+^m = \left\{ y \in R_+^m : y_1 > 0, y_2 > 0, ..., y_m > 0 \right\}$ sohada yagona $F^{(1)} = F_0^{(1)}$ yechimga ega.

Bu holda

$$F^{(1)}(y) = F_0^{(1)}$$

funksional tenglama chegaralangan $E^{(1)}(\mu) \cap \operatorname{int} R_+^m$, $E^{(1)}(\mu) = \left\{ y \in R^m : |y| \le \mu \right\}$ sohada

$$y = y_0^{(l)} : l = 1, 2, ..., N_1;\ N_1 = N_1(\mu)$$

chekli sondagi yechimlarga ega.

Bunga ko‘ra, (5) tenglama quyidagi ko‘rinishdagi

$$y = y(t, \alpha, \psi, 0) \equiv y_0^{(l)},\ \ z = z(t, \alpha, \theta, 0) \equiv 0. \tag{17}$$

muvozanat holatiga ega bo‘ladi.

Yuqoridagi muvozanat holatining turg‘unligi masalasini o‘rganamiz. $x = x_0 = \left(y_0^{(1)}, 0 \right)$ berilgan muvozanat holati bo‘lsin.

Quyidagi ayirmalarini, vektor va funksiyalarning kiritamiz

$$y^{(1)} = y - y_0,\ \ \psi^{(1)}(s) = \psi(s) - y_0,$$

$$F^{(11)}\left(y^{(1)}\right) = F^{(1)}\left(y^{(1)} + y_0^{(1)}\right) - F^{(1)}\left(y_0^{(1)}\right),\ \ D^{(11)}\left(y^{(1)}\right) = D^{(1)}\left(y^{(1)} + y_0^{(1)}\right),$$

$$u_k^{(1)}(y_k) = u_k\left(y_{0k}^{(1)} + y_k\right)\ \ (k = 1, 2, ..., m),$$

$$U^{(1)}(y) = \left(u_1^{(1)}(y_1), u_2^{(1)}(y_2), ..., u_m^{(1)}(y_m)\right)^T.$$

$$A^{(21)} = A^{(2)} + B^{(21)} F^{(1)}\left(y_0^{(1)}\right) + G^{(1)} F^{(1)}\left(y_0^{(1)}\right)$$

Quyidagi teorema to‘g‘ridan-to‘g‘ri tahlil asosida isbotlanadi.

8-teorema. $A^{(21)}$ vektorning komponentlaridan biri $a_p^{(21)} > 0$ tengsizlikni qanoatlantirsin, bu holda o‘zaro ta’sir koeffitsientlari $b_{jp}^{(12)} = 0,\ g_{jp}^{(12)} = 0\ (j = 1, 2, ..., m)$ bo‘lsin. U holda (5) tenglamaning $\left(y^{(1)}, 0\right)$ muvozanat holati noturg‘un bo‘ladi.

$y^{(1)} = 0,\ z = 0$ holatning turg‘unlik masalasi Lyapunov funksionalini qurish yordamida yechiladi. Quyidagi matritsalar kiritildi:

$$\begin{gathered} S^{(1)} = diag(s_1, s_2, ..., s_m),\ \ S^{(2)} = diag(s_{m+1}, s_{m+2}, ..., s_n),\ \ S = diag\left(s_1, s_2, ..., s_n\right), \\ D^{(21)} = (d_{m+1}, d_{m+2}, ..., d_n)^T, \qquad \varphi^{(1)} = \left(\psi^{(1)}, \theta\right). \end{gathered} \tag{18}$$

Faraz qilaylik

$$\left(x - x_0^{(1)}\right)^T \left(Q^{(1)}(t) - \frac{1}{2}\left(\left(G^{(2)}\right)^T S^{(2)} G^{(2)}\right)\right)\left(x - x_0^{(1)}\right) \ge q_0 \| x - x_0^{(1)} \|^2, \tag{19}$$

$$G^{(2)} = \left(G^{(21)}, G^{(22)}\right),\ q_0 > 0,$$

kvadratik tengsizlik o‘rinli va $\Gamma_0 = \left\{ x \in R_+^n : \left| y - y_0^{(1)} \right| \le \delta,\ |z| \le \delta;\ \delta > 0 \right\}$ sohada quyidagi baho

$$W(y,z)=\frac{1}{2}\left(F\left(x-x_0^{(1)}\right)\right)^T\left(SB+B^TS+Q^{(0)}+q_0^{-1}SGG^TS\right)\cdot$$
$$\cdot F\left(x-x_0^{(1)}\right)+\left(D^{(21)}(z)-F^{(2)}(z)\right)^T S^{(2)}B^{(2)}F\left(x-x_0^{(1)}\right)+D^{(21)}(z)S^{(2)}A^{(21)}+ \qquad (20)$$
$$+\left(D^{(2)}(z)-F^{(2)}(z)\right)^T S^{(2)}\left(D^{(2)}(z)-F^{(2)}(z)\right)\le 0$$

o‘rinli bo‘lsin.

Quyidagi teoremalar isbotlangan.

9-teorema. Faraz qilaylik,

1) $u_k(x_k)>0\ \ \forall x_k\in\left\{0<\left|x-x_{k0}^{(1)}\right|\le\delta\right\}$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan $\Gamma_0=\left\{x\in R_+^n:\left|y-y_0^{(1)}\right|\le\delta,\ |z|\le\delta,\ \delta>0\right\}$ soha mavjud bo‘lsin.

2) (20) tengsizlik bajarilsin.

U holda (5) tenglamaning $\left(y^{(1)},0\right)$ muvozanat holati tekis turg‘un.

$W(y,z)$ funksiyaga uchun quyidagi

$$W(y,z)\le -a_1(|y-y_0|+z),\ \ a_1\in K \qquad (21)$$

ko‘rinishdagi (20) shartning kuchaytirilishi uning tekis asimptotik turg‘unligini ta’minlaydi.

10-teorema. Faraz qilaylik,

1) (20) va (21) tengsizliklar o‘rinli bo‘ladigan $\Gamma_0=\left\{x\in R_+^n:\left|y^{(1)}-y_0^{(1)}\right|\le\delta,\ |z|\le\delta,\ \delta>0\right\}$ soha mavjud bo‘lsin;

2) ixtiyoriy $x_k=x_{k0}^{(1)}$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofida manfiy qiymatlarni qabul qiluvchi $u_k=u_k(x_k)$ $(1\le k\le m)$ funksiya mavjud bo‘lsin;

3) $s_k^{(0)}$ $(m+1\le k\le n)$ doimiylardan biri manfiy, ya’ni $s_k^{(0)}<0$ bo‘lsin.

U holda (5) sistemaning $\left(y^{(1)},0\right)$ muvozanat holati noturg‘un bo‘ladi.

“**Kechikuvchili Lotka-Volterra modelining turg‘unligi**” deb nomlanuvchi uchinchi bobida chiziqli bo‘lmagan funksional-differensial tenglamalarning turg‘unlik masalalari o‘rganilgan. Ilgari u chiziqli turdagi tenglamalar uchun to‘liq o‘rganilgan. Biologik, infeksiyali va boshqa jarayonlardagi modellashtirishlar umumiyroq tenglama yechimlarining sifat xossalarini aniqlash zaruriyatiga olib keldi.

Birinchi paragrafda o‘zgaruvchan kechikishli chiziqli bo’lmagan skalyar tenglama muvozanat holatlarining turg‘unlik masalasi ko‘rib chiqiladi:

$$\dot{x}(t)=d\left(x(t)\right)\left(a+bf\left(x(t)\right)+gq\left(x\left(t-h(t)\right)\right)\right), \qquad (22)$$

bu yerda $a,b,g-$doimiylar, $d,f,q\in C\left(R^+\to R^+\right)$ funksiyalar $d(0)=f(0)=q(0)=0$, $x\ne 0$ da $d\ne 0$; $h\in C\left(R^+\to[0,h_0]\right)$, $h_0=const>0$. Undan tashqari d,f,q funksiyalar $\forall x_1,x_2\in E(\mu)$, sonlar uchun Lipshits shartini qanoatlantiradi

$$\left|d(x_2)-d(x_1)\right|\le l_0(\mu)\left|x_2-x_1\right|,\ \left|f(x_2)-f(x_1)\right|\le l_0\left|x_2-x_1\right|,$$
$$\left|q(x_2)-q(x_1)\right|\le l_0(\mu)\left|x_2-x_1\right|,$$
bu yerda $E(\mu)=\left\{x\in R^{+}:0\le x\le \mu>0\right\}$.

(22) tenglama quyidagicha
$$x(t,\alpha,0)\equiv 0\ \ \forall t\ge \alpha-h_0. \tag{23}$$
trivial muvozanat holatiga ega.

Qolgan $x(t,\alpha,x_0)\equiv x_0$ muvozanat holatlari
$$bf(x_0)+gq(x_0)+a=0. \tag{24}$$
tenglik bilan aniqlanadi.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida ko‘rsatilganidek (23) trivial muvozanat holatining turg‘unligi a qiymatining ishorasiga bog‘liq.

$y(t)=x(t)-x_0$ ayirma kiritamiz.

Tenglamaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:
$$\dot{y}(t)=d_1\left(y(t)\right)\left(bf_1\left(y(t)\right)+gq_1\left(y\left(t-h(t)\right)\right)\right), \tag{25}$$
bu yerda $d_1(y)=d(x_0+y)$, $f_1(y)=f(x_0+y)-f(x_0)$, $q_1(y)=q(x_0+y)-q(x_0)$.

$q_1\in C^1\left([-x_0,+\infty]\to R\right)$ funksiya uchun quyidagi baholarni kiritamiz:
$$\left|\frac{dq_1(y)}{dy}\right|\le m=const>0,\ d(y)\le d_0=const>0\ \ \forall y\in\Gamma=\left\{-H_1\le y\le H_2\right\}, \tag{26}$$
bu yerda H_1, H_2 – doimiylar, $0<H_1\le x_0$, $H_2>0$.

Quyidagi teoremalar isbotlangan.

11-teorema. (22) tenglamaning tashkil etuvchilari quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $f_1(y)y>0\ \left(\forall y:0<|y|\le H_0,\ H_0=\min(H_1,H_2)\right)$;

2) $\left(b+|gb|md_0h_0+g^2md_0h_0\right)f_1^2(y)+gf_1(y)q_1(y)+h_0g^2md_0q_1^2(y)\le$
$\le-\varepsilon_0f_1^2(y)\ \ \forall y\in\left\{|y|\le H_0\right\},\ (\varepsilon_0>0)$.

U holda (22) tenglamaning (24) muvozanat holati tekis asimptotik turg‘un bo‘ladi.

12-teorema. Faraz qilaylik:

1) $f_1(y)y<0\ \ \forall y\in M^{+}=\left\{y:0<y\le H_0\right\}$ yoki $\forall y\in M^{-}=\left\{y:-H_0\le y<0\right\}$;

2) 12-Teoremaning 2-sharti barcha $y\in M^{+}$ lar uchun (yoki mos ravishda barcha $y\in M^{-}$) bajarilsin.

U holda (24) muvozanat noturg‘un bo‘ladi.

Muayyan masala sifatida chiziqli bo‘lmagan Xatchinson tenglamasining turg‘unlik masalasi o‘rganiladi.

Ikkinchi paragrafda o‘zgaruvchan kechikishli chiziqli va avtonom bo‘lmagan skalyar tenglamaning turg‘unligi o‘rganildi:

$$\dot{x}(t)=a(t,x_t)g\left(x(t)\right)+b(t,x_t)q\left(t,x\left(t-h(t)\right)\right), \tag{26}$$

bu yerda $t\in R^+$; $a,b\in C\left(R^+\times C\to R\right)$; $h\in C\left(R^+\to[0,h_0]\right)$; $g\in C\left(R^+\to R\right)$ va $q\in C\left(R^+\times R\to R\right)$ funksiyalar $g(0)=0,\ q(t,0)\equiv 0$ shartlarni bajaruvchi funksiyalardir.

Dastlab, (26) tenglamaning turg‘unlik masalasi o‘ng tomonining chegaralanganligi farazisiz quyidagi shartlarga ko‘ra o‘rganildi:

$$\begin{gathered}\left|q(t,x)\right|\le\mu(t,H_1)\left|g(x)\right|,\ \left|g(x)\right|\le L(H_1)|x|\\ \forall(t,x)\in R^+\times\left\{|x|\le H_1=const>0\right\},\end{gathered} \tag{27}$$

$$h\in C^1\left(R^+\to[0,h_0]\right),\ \dot{h}(t)=\frac{dh(t)}{dt}\le 1-h_1,\ h_1=const>0. \tag{28}$$

Quyidagi teoremalar isbotlandi.

13-теорема. Quyidagi:

1) $g(x)x>0,\ \ \forall x\in\left\{0<|x|\le H_0<H_1\right\}$;

2) $\left|b(t,\varphi)\right|\mu(t,H_1)\le a_0 l(\varphi)\left(1-\dot{h}(t)\right)^{\frac{1}{2}},\ l(\varphi)\ge 0,$

$A(t,\varphi)=2a(t,\varphi)+a_0l^2(\varphi)\le -a_0-\varepsilon_0\ \ (a_0>0,\ \varepsilon_0>0)\ \ \forall(t,\varphi)\in R^+\times\left\{\varphi\in C:\|\varphi\|\le H_1\right\}$

shartlar bajarilsin.

U holda (26) tenglamaning $x=0$ yechimi tekis asimptotik turg‘un.

14-теорема. Quyidagi:

1) $g(x)x<0,\ \ \forall x\in D=\left\{x\in R:-H_1\le -H_0\le x<0\right\}$;

2) 13-Teoremaning 2- sharti bajarilsin.

U holda (26) tenglama $x=0$ yechimi noturg‘un bo‘ladi.

(2.1) tenglamaning o’ng tomonining chegaralangan holdagi turg‘unlik masalasi o‘rganilgan

$$\begin{gathered}\left|a(t,\varphi)\right|\le a_0=const,\ \left|b(t,\varphi)\right|\le b_0=const\\ \forall(t,\varphi)\in R^+\times\left\{\varphi\in C:|\varphi|\le H_1=const>0\right\}.\end{gathered} \tag{29}$$

Quyidagi teoremalar isbotlangan.

15-teorema. Quyidagi:

1) $g(x)x>0,\ \forall x\in\left\{x\in R:0<|x|\le H_0<H_1\right\}$;

2) $B(t,\varphi)=a(t,\varphi)+\mu_1(t)b(t,\varphi)+Mb_0h_0\left(a_0+\mu_2b_0\right)\le-\varepsilon_0<0$

$\forall(t,\varphi)\in R^+\times\left\{\varphi\in C:|\varphi|\le H_1\right\}$ shartlar bajarilsin.

U holda (26) tenglamaning $x=0$ yechimi tekis asimptotik turg‘un.

16-teorema. Faraz qilaylik;

1) 14-Teoremaning 1-sharti, hamda quyidagi

2) $A(t,\varphi)=a(t,\varphi)+b(t,\varphi)+Mb_0h_0\left(a_0+b_0\right)\le-\varepsilon_0<0$ shartlar bajarilsin.

U holda (26) tenglamaning $x=0$ noturg‘un bo‘ladi.

Uchinchi paragrafda o‘zgaruvchan kechikishli ko‘p o‘lchovli avtonom bo‘lmagan vektor tenglamasi uchun uchinchi bobning ikkinchi paragrafidagi natijalar rivojlantirilgan.

Xulosa

Dissertatsiyaning asosiy natijalari quyidagilardan iborat.

1. Lyapunov funksionallari usulini rivojlantirish doirasida kechikishli turdagi avtonom bo‘lmagan funksional-differentsial tenglamalarning turg‘unligini o‘rganishda Lyapunov funksionallarini qo‘llashda ba’zi mashhur natijalar rivojlantirilgan va modifikatsiyalangan teoremalar isbotlangan. Keltirilgan masalalarni o‘rganish uchun dissertatsiya ishida teoremalar isbotlangan.

2. O‘zgaruvchan kechikishli Volterra turidagi vektor tenglamaning statsionar yechimining turg‘unligi o’rganilgan. Mumkin bo’lgan yechimlar tuzilmalarini tahlil qilish asosida parametrga bog‘liq trivial yechimning asimptotik turg‘unlik va noturg‘unlik shartlari, shuningdek, bir yoki bir nechta koordinatalari nolga aylanuvchi chegaraviy statsionar yechimning noturg‘unlik shartlari ham aniqlandi.

3. Bir o‘lchovli (skalyar) va o‘zgaruvchan kechikuvchili ko‘po‘lchovli nochiziqli va avtonom bo‘lmagan tenglama yechimlarining turg‘unlik va global limit holi masalasi o‘rganilgan. Bunday ko‘rinishdagi tenglamalar turiga Volterra turidagi tenglamalar bilan modellashtiriladigan jarayonning turg‘unlik masalasiga olib kelinadi.

4. Kechikish funksiyasining differentsiallanuvchiligini hisobga olmagan holda o‘zgaruvchan kechikishli Volterra turidagi skalyar tenglama yechimining statsionar holatlarning turg‘unligi uchun yetarli shartlar olindi. Misol sifatida ilgari o‘rganilmagan o‘zgaruvchan kechikishli Xatchinson turidagi nochiziqli tenglamaning turg‘unlik masalasi yechildi.

5. Bir o‘lchovli (skalyar) va ko‘p o‘lchovli o‘zgaruvchan kechikishli nochiziqli va avtonom bo‘lmagan tenglamalarning yechim turg‘unligi va global limit holati masalasi o‘rganilgan. Bunday ko‘rinishdagi tenglamalar turiga Volterra turidagi tenglamalar bilan modellashtiriladigan jarayonning turg‘unlik masalasiga olib kelinadi.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КАХХОРОВ АЗИЗБЕК ЭСАНОВИЧ

УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В МОДЕЛИРОВАНИИ БИОЛОГИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2024

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за № B2023.4.PhD/FM670.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И. Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный рководитель:	**Хусанов Джумма Хусанович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
	Мамадалиев Нумонжон Олимжонович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Ульяновский государственный университет**

Защита диссертации состоится «07» мая 2024 года в 17:00 часов на заседании Научного совета Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазрский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)207-91-40, e-mail: kengash@mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 182). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазрский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «19» апреля 2024 года.

(протокол рассылки № 2 от «19» апреля 2024 года).

У.А. Розиков

Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К. Адашев

Научный секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.А. Азамов

Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Исследование уравнений Вольтерра и их применение в решении прикладных задач занимает значительное место в теории дифференциальных уравнений и ее приложениях в различных областях науки и техники. По существу, в трудах В. Вольтерра более века назад наиболее полно была обоснована математическая теория биологических сообществ, включающая в себя моделирование их конкуренции в борьбе за выживание и качественный анализ соответствующих дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. С тех пор разделу дифференциальных уравнений, излагаемому в ряде работ как "Теория и приложения систем Вольтерра", посвящено огромное количество исследований, представленных в многочисленных монографиях, учебниках, научных и популярных статьях. Это объясняется тем, что к моделированию на основе уравнений типа Вольтерра приводятся различные процессы в биологии, экологии, медицине, экономике, социальных исследованиях, истории, радиофизике. К математическим моделям типа.

К математическим моделям типа Вольтерра и сходных с ними сводятся модели взаимодействия загрязнения с окружающей средой, модель классовой борьбы, модель общества охотников-собирателей древней эпохи, модель военных действий, модель инфекционного вирусного заболевания, модель распространения эпидемий, в том числе, заражение компьютеров вирусными программами и распространение вирусов в информационных сетях, модель взаимодействия когнитивных и (или) эмоциональных мод мозга. Основным инструментом построения и анализа многих моделей являлись и до настоящего времени являются автономные дифференциальные уравнения билинейного типа. Однако, при моделировании процессов в ряде современных прикладных задач возникает необходимость анализа более сложных уравнений, в том числе, неавтономных, с зависящим от времени запаздыванием, допускающих существование множества положений равновесия. Решение этих проблем является одним из главных направлений целевых научных исследований.

Развитию фундаментальной и прикладной математики, одним из важных разделов которой являются дифференциальные уравнения, в нашей стране уделяется огромное внимание. Научные исследования по качественной теории дифференциальных уравнений, включающих в себя уравнения типа Вольтерра, и их приложениям имеют широкое применение в экологии, биологии, эпидемиологии, экономике, защите информационных систем и в других областях науки и техники. Такие исследования, проводимые как отечественными, так и зарубежными учеными, рассматриваются в качестве основной задачи фундаментальных исследований.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан

№ УП-4947 от 7 февраля 2017 года "О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан", в постановлениях № ПП4387 от 9 июля 2019 года "О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан" и № ПП4708 от 7 мая 2020 года "О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики" и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.[1]

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологии в Республике Узбекистан IV "Математика, механика и информатика".

Степень изученности проблемы. Работы В. Вольтерра положили начало математическому моделированию отношений между популяциями в биологических сообществах на основе обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие этих работ в многочисленных исследованиях привело к созданию математической биологии и биофизики. Базовые модели популяционной динамики явились основой моделей микробиологии, эпидемиологии, сложных биологических систем.

Из огромного количества работ по моделированию и анализу биологических систем на основе обыкновенных дифференциальных уравнений выделяются работы R. M. May, J. D. Murry, А. Д. Базыкина, Ю. А. Пыха, Г. Ю. Ризниченко. Анализ динамики биологических популяций привел к необходимости построения моделей на основе дифференциально-разностных уравнений (G. E. Hutchinson, J. M. Smith, Ю. С. Колесов). Фундаментальные результаты по применению уравнений Вольтерра, теории дифференциальных уравнений с непрерывным и сосредоточенным запаздыванием изложены в монографиях S. Serovajsky, O. L. Edelstein-Keshet, F. A. Rihan. В монографии F. A. Rihan изложены численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений, представляющих важный инструмент дальнейших исследований в математической биологии.

Широкое применение модели Вольтерра получили также в экономике. Использование модели "хищник-жертва" для описания развития экономических систем позволяет определить в перспективе равновесные уровни и переводить систему из одного динамического равновесия в другое, манипулируя управляющими коэффициентами. Эта модель применима в антикризисном управлении, при изучении популистских и спекулятивных экономик, при инновационном моделировании. Целый ряд работ посвящен

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

разработке на основе экономико-экологической модели развития городской инфраструктуры. Из многочисленных исследований в этой области можно выделить работы Т. Puu, В. М. Глушкова, В. В. Поддубного.

Связь темы диссертации с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по научному направлению «Разработка и развитие математических моделей медико-биологических и физических процессов, построение математических методов исследования, мониторинга и прогнозирования» Института математики АН РУз.

Целью исследования является расширение моделей Вольтерра с запаздыванием в моделировании задач биологии и экономики и развитие метода функционалов Ляпунова для их качественного анализа.

Задачи исследования состоят в следующем:

анализ известных и построение новых математических моделей Вольтерра в задачах биологии и экономики с учетом запаздывания, существенной нелинейности и не стационарности моделируемого процесса;

обоснование методики построения функционалов Ляпунова для исследования устойчивости и предельных свойств моделируемых биологических, экономических, а также других сходных процессов;

вывод условий устойчивости положений равновесия и предельного поведения решений уравнений типа Вольтерра;

решение ряда задач об устойчивости и управлении биологических систем и процессов, моделируемых нелинейными нестационарными уравнениями с запаздыванием.

Объектом исследования являются нелинейные уравнения с переменным запаздыванием типа Вольтерра в математическом моделировании биологических и экономических задач.

Предметом исследования является математическое моделирование на основе нелинейных и неавтономных функционально-дифференциальных уравнений и исследование устойчивости соответствующих моделей.

Методы исследования. В диссертации используются методы математического моделирования на основе уравнений с запаздыванием, качественного анализа функционально-дифференциальных уравнений и их устойчивости, соответствующих разделов математического и функционального анализа.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

в рамках развития метода функционалов Ляпунова доказаны модифицированные теоремы с использованием функционалов Ляпунова при проверке устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа;

устойчивость стационарного решения векторного уравнения с переменным запаздыванием типа Вольтерра, асимптотическая устойчивость и условия неустойчивости тривиального решения в зависимости от параметра, основанные на анализе структур возможных решений, а также определены условия неустойчивости граничного стационарного решения с несколькими координатами, равными ноль;

проверены на устойчивость решения одно- и многомерных нелинейных неавтономных уравнений с переменным запаздыванием и доказано, что уравнения такого вида могут привести к задаче устойчивости процессов, моделируемых уравнениями типа Вольтерра;

найдены достаточные условия устойчивости стационарных положений решения скалярного уравнения типа Вольтерра с переменным запаздыванием и в качестве примера решена задача устойчивости нелинейного уравнения типа Хатчинсона.

Практические результаты исследования. Обоснованы решения задач об устойчивости и управлении биологическими и экономическими процессами на основе новой методики исследования их качественных свойств.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и использованием известных методов и результатов качественной теории функционально-дифференциальных уравнений и теории устойчивости.

Научное и практическое значение результатов исследования.

Полученные в диссертации теоретические результаты представляют собой развитие по применению метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости нелинейных неавтономных функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием.

Разработанная методика решения задач об устойчивости и управлении математическими моделями типа Вольтерра может иметь эффективное применение в построении структуры управления систем и процессов, моделируемых уравнениями типа Вольтерра и сложными уравнениями.

Внедрение результатов исследования. На основе результатов, полученных с помощью уравнений Вольтерра с запаздыванием при моделировании биологических и экономических процессов и исследовании их устойчивости:

устойчивость решений функционально-дифференциальных уравнений с использованием функционалов Ляпунова использовалась в задачах локализации предельного множества решений моделей дифференциальных уравнений запаздывающего типа в зарубежном грантовом проекте «Природные катастрофы Камчатки – землетрясения и извержения вулканов» под номером АААА- А19-119072290002-9 (справка № 52-13 от 13 ноября 2023 года Камчатского государственного университета им. Витуса Беринга, Российская Федерация). Применение научного результата позволило разработать алгоритм эффективного решения задач устойчивости решений дифференциальных уравнений запаздывающего типа Вольтерра;

качественный анализ дифференциальных уравнений Вольтерра с запаздыванием и функционалов Ляпунова при проверке их устойчивости в зарубежном грантовом проекте № ВФ205.40 «Разработка средств работы с базами знаний информационных систем для научных исследований» при реализации использованы новые методы анализа (справка № 1-М от 15 января 2024 года Института кибернетики имени В. М. Глушкова, Украина). Применение научного результата позволило найти качественные особенности предельных циклов экономических кризисов по обобщенной модели Дубовского и решений модельных дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации изложено в научных докладах на 8 международных и 3-х республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, из них 6 статей опубликованы в журналах, которые входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD), в том числе 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Объем диссертации 115 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первых двух параграфах первой главы, названной «**Уравнения Вольтерра с запаздыванием в моделировании биологических и экономических процессов**» объектом исследования являются моделирование и анализ взаимного сосуществования биологических видов и живых систем, материалы по моделированию и анализу математических моделей экономических процессов. Дальнейшие исследования в этой области математического моделирования в немалой степени связаны с применением нелинейных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа. В третьем параграфе излагаются используемые в диссертационной работе основные положения по устойчивости таких уравнений.

Основы математической теории биологических сообществ на основе дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений были заложены итальянским математиком Вито Вольтерра. Развитие как экспериментальной, так и теоретической экологии за прошедший век после выхода его работ, подтвердили глубину и правильность его идей.

На базе реально наблюдаемых экологического процесса взаимного существования двух биологических видов В Вольтерра вывел математическую модель их взаимодействия в виде двух дифференциальных уравнений.

Общепринятой считается следующая модель такого процесса

$$\dot{N}_1 = (a_1 + b_{11}N_1 + b_{12}N_2)N_1, \qquad \dot{N}_2 = (a_2 + b_{21}N_1 + b_{22}N_2)N_2, \tag{1}$$

где N_1 и N_2 есть численности видов, a_1 и a_2 – коэффициенты прироста или убывания каждого в изоляции, составляющие $b_{12}N_1N_2$ и $b_{21}N_1N_2$ в правой части системы соответствуют межвидовому взаимодействию, поэтому знаки b_{12} и b_{21} зависят от взаимодействия между особями двух видов, $b_{12} < 0$ и $b_{21} < 0$ при конкуренции, $b_{12} > 0$ и $b_{21} > 0$ при симбиозе, $b_{12}b_{21} < 0$ у системы «*хищник и жертва*». Члены $b_{11}N_1^2$ и $b_{22}N_2^2$ отражают факт внутривидовой конкуренции, поэтому $b_{11}, b_{22} < 0$.

В. Вольтерра изучал также более общие модели взаимодействия n видов, функции приспособленности (в классических (вольтерровских) моделях являются линейными по $N_1, N_2, ..., N_n$. Математически они имеют следующую форму межвидового взаимодействия

$$\dot{N}_i = \left(a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} N_j \right) N_i, \quad i = 1, 2, ..., \tag{2}$$

где a_i – коэффициент естественного прироста или смертности i-ой популяции при отсутствии остальных видов; коэффициенты b_{ij} $(i \neq j)$ отражают и интенсивность влияния j-го вида на i-ый; коэффициенты $b_{ii} \leq 0$, выражают интенсивность внутривидовой конкуренции.

Уравнения (2) принято считать классическая моделью Вольтерра. В дальнейшем, а в настоящее время интенсивно, как обобщение классической модели изучается нелинейная модель биологического взаимодействия вида

$$\dot{N}_i = \left(a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(N_j) \right) d_i(N_i), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

где функции $d_i(N_i) \in C^1, i = 1, 2, ..., n,$ а функции $f_i(N_i) \in C^2, i = 1, 2, ..., n$, удовлетворяют условиям

$$f_i(0) = 0, \ \dot{f}_i(N_i) > 0 \text{ при } N_i \geq 0,$$
$$d_i(0) = 0, d_i(N_i) > 0 \text{ при } N_i > 0, i = 1, 2, ..., n.$$

В моделях, определяемых уравнениями (1) – (3) было принято, что что процессы размножения и гибели происходят одновременно и популяция мгновенно реагирует на любое изменение внешних условий. Однако в реальных био- и экосистемах возникает некоторое запаздывание в регуляции численности, которое бывает вызвано определенными причинами: развитием любой взрослой особи из оплодотворенного яйца; размножением лишь в определенное время года и не ежегодно; различной интенсивностью размножения и гибелью различна в разных возрастных группах. Внешние негативные процессы в наиболее сильной степени воздействуют на ранние возрастные стадии, а их интенсивность зависит от численности взрослых особей, тем самым отрицательное влияние на коэффициент естественного прироста оказывают особи предыдущего поколения.

Модельные уравнения (3) взаимного существования n видов с учетом запаздывания $h_j > 0,\ \left(j = 1,2,...,n\right)$, зависящего от участия каждого вида во взаимодействии с другими, а также внутривидовой конкуренции, принимает следующую форму

$$\dot{N}_i(t) = \left(a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j\left(N_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} f_j\left(N_j(t-h_j)\right)\right) d_j\left(N_j(t)\right),\ \left(i = 1,2,...,n\right) \quad (4)$$

Современные исследования по математическому моделированию экологических процессов и живых систем приводит к необходимости для адекватного их описания полагать в уравнениях (4) коэффициенты a_i, b_{ij}, g_{ij} и запаздывания h_j, зависящими от времени.

Дифференциальные уравнения с запаздыванием применяются и при моделировании экономических систем и процессов. К настоящему времени в мировой литературе представлено множество подходов к описанию экономических процессов с учетом фактора запаздывания (временного лага согласно экономическому термину). В частности, в последние десятилетия в экономике, как и в других областях науки и техники для математического моделирования широко применяется биологическая система с запаздыванием типа «хищник-жертва», которая позволяет описать динамику экономических процессов, найти равновесные уровни в конкуренции фирм, провести прогнозирование и планирование поведения различных параметров экономических систем. Для иллюстрации динамики экономических систем часто применяется математическая модель Лотки-Вольтерра. Сложность и нелинейность математических моделей систем с учетом временного лага приводит к необходимости применения различных современных пакетов численного моделирования.

В частности, динамическая модель Вальраса-Маршала с запаздыванием, описывающая развитие рынка со многими конкурирующими товарами, описывается модифицированными уравнениями Вальраса, по форме совпадающими с уравнениями (4)

$$\frac{dP_i(t)}{dt} \cdot \frac{1}{P_i(t)} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\left(Q_j^{(1)}\left(P_j(t)\right) - Q_j^{(2)}\left(P_j(t-h_j)\right)\right),\ i = 1,2,...,N,$$

где $P_i(t)$ – рыночная цена товара, $Q_j^{(1)}$ и $Q_j^{(2)}$ – объемы спроса и предложения на рынке, h_j – запаздывания или временные лаги, вызванные доставкой товара или иными факторами, g_{ij} – постоянные, характеризующие влияние избытка спроса на j – й товар на изменение цены i – го товара.

Необходимым инструментом математического моделирования биологических и экономических процессов являются дифференциальные уравнения с запаздыванием. В третьем параграфе первой главы излагаются основные понятия функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа: определение уравнения; существование решения, его единственность, продолжаемость и непрерывная зависимость от начальных условий. Даются определения устойчивости ограниченности решений, приводятся основные положения и теоремы метода функционалов Ляпунова в исследовании задач об устойчивости.

Во второй главе диссертации «**Устойчивость векторного уравнения Вольтерра с переменным запаздыванием**» рассматривается задача о предельных свойствах решений уравнений Вольтерра типа (4) в предположении, что запаздывания моделируемого процесса зависят явно от времени. Новизна постановки задачи состоит в предположениях: о зависимости запаздываний во взаимодействии биологических видов от времени; о более общем представлении нелинейных функциях их парного взаимодействия.

Для нелинейного анализа исследуемого уравнения в части предельных свойств их решений в первом параграфе доказываются модификации нескольких известных теорем метода функционалов Ляпунова в исследовании функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

Во втором и третьем параграфах излагаются результаты по исследованию нелокальной устойчивости стационарных решений векторного уравнения Вольтерра с переменным запаздыванием.

Пусть R^n – линейное вещественное пространство векторов x с нормой $|x|$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$, $R_+^n = \{x \in R^n : x_k \geq 0 \ \forall k \in Z, \ 1 \leq k \leq n\}$ $\operatorname{int} R_+^n = \{x \in R^n : x_k > 0 \ \forall k \in Z, \ 1 \leq k \leq n\}$, $\partial R_+^n = R_+^n \setminus \operatorname{int} R_+^n$, $h_0 > 0 -$некоторое число, $C -$банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h_0, 0] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \max\left(|\varphi(s)|, \ -h_0 \leq s \leq 0\right)$, $C_+ = \{\varphi \in C : \varphi : [-h_0, 0] \to R_+^n\}$, $\operatorname{int} C_+ = \{\varphi \in C_+ : \varphi_k(0) \neq 0 \ \forall k \in Z, \ 1 \leq k \leq n\}$, $\partial C_+ = C_+ \setminus \operatorname{int} C_+$.

Для непрерывной функции $x : [\alpha - h_0, \beta) \to R_+^n \ (\alpha, \beta \in R^+, \ \alpha < \beta)$ функцию $x_t \in C_+$ определим равенством $x_t(s) = x(t+s) \ (-h_0 \leq s \leq 0)$. Под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассматривается следующее векторное уравнение типа Лотки-Вольтерра с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = D(x(t))\left(A + BF(x(t)) + GF(x(t - h(t)))\right), \tag{5}$$

где функции $D(x)$, $F(x)$ и $h(t)$, а также постоянные вектор A и матрицы B и G удовлетворяют условиям:

1) $D(x) = diag(d_1(x_1), d_2(x_2), ..., d_n(x_n))$, $d_k \in C(R^+ \to R^+)$, $d_k(x_k) = 0 \Leftrightarrow$, $\Leftrightarrow x_k = 0 \ k = 1, 2, ..., n$;

2) $F(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), ..., f_n(x_n))^T$ (здесь и далее $(\bullet)^T$ – операция транспонирования), $f_k \in C(R^+ \to R^+)$, $f_k(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$, $k = 1, 2, ..., n$;

3) $A = \{a_k\}$, $A \in R^n, B = \{b_{jk}\}$, $B \in R^{n \times n}$, $G = \{g_{jk}\}$, $G \in R^{n \times n}$;

4) $h=\left(h_1(t),h_2(t),...,h_n(t)\right)^T$, $h_k\in C^1\left(R^+\to\left[0,h_0\right]\right)$, $h_k(t)$ – функции, учитывающие наличие запаздывания в относительной скорости прироста x_k, $\mu_0\le\dot{h}_k(t)\le 1-\mu_1$ $(\mu_1>0)$, $k=1,2,...,n$.

Компоненты и параметры модельного уравнения (5) имеют следующий смысл:

x_k – численность k-й популяции в экологической системе или объем одноименной продукции k-й фирмы;

a_k и $d_k(x_k)$ – составляющие скорости относительного прироста x_k в отсутствие конкуренции в зависимости от количества x_k;

$f_k(x_k)$ – функции относительного прироста при взаимном сосуществовании популяций или фирм при конкуренции за общие ресурсы;

$h_k(t)$ – функции, учитывающие наличие запаздывания в относительной скорости прироста x_k;

B и G – матрицы взаимодействия популяций или конкуренции.

Будем полагать, что функции $f_k(x_k)$ и $d_k(x_k)$ $(k=1,2,...,n)$ удовлетворяют условию Липшица

$$\left|f_k(x_k^{(2)})-f_k(x_k^{(1)})\right|\le L_0(m)\left|x_k^{(2)}-x_k^{(1)}\right|,\quad \left|d_k(x_k^{(2)})-d_k(x_k^{(1)})\right|\le L_0(m)\left|x_k^{(2)}-x_k^{(1)}\right| \quad (6)$$

$\forall x^{(1)},x^{(2)}\in E(m),\ E(m)=\left\{x\in R_+^n:|x|\le m,\ m=const>0\right\}$.

Отсюда для каждой начальной точки $(\alpha,\varphi)\in R^+\times C_+$ решение уравнения (5) $x(t,\alpha,\varphi)$, $x_\alpha(\alpha,\varphi)=\varphi$ существует, является единственным, непрерывно зависящим от (α,φ), определенным на некотором интервале $\left[\alpha-h(\alpha),\beta\right)$ $(\beta>\alpha)$.

Система (5) имеет в области R_+^n следующие положения равновесия:

1. Тривиальное

$$x(t,\alpha,\varphi)=0,\ t\ge\alpha-h; \quad (7)$$

2. Нетривиальные в области $\operatorname{int}R_+^n$

$$x(t,\alpha,\varphi)=x_0^{(l)},\ t\ge\alpha-h,\ l=1,2,...,N \quad (8)$$

в предположении, что система линейных уравнений

$$\left(B+G\right)y+A=0 \quad (9)$$

имеет в области $\operatorname{int}R_+^n$ единственное решение $y=y_0$, при этом функциональное векторное уравнение

$$F(x)=y_0 \quad (10)$$

имеет в ограниченной области $E(m)\cap\operatorname{int}R_+^n$ конечное число решений

$$x=x_0^{(l)};\ l=1,2,...,N;\ N=N(m). \quad (11)$$

3. Кроме того, уравнение (5) может иметь в области ∂R_+^n в силу условия $d_k(0)=0$ $(k=1,2,...,n)$ положение равновесия, в котором одна или несколько координат равны нулю.

Относительно тривиального положения равновесия (7) на основе непосредственного анализа доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. При условии $a_k < 0 \ \forall k = 1,2,...,n$ тривиальное положение равновесия (7) асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Если существует какое-либо a_k, такое, что $a_k > 0$, то тривиальное положение равновесия (7) неустойчиво.

Для исследования достаточных условий устойчивости нетривиального положения равновесия (8) вводятся возмущения $y = x - x_0^{(l)}$
и следующие соответствующие функции

$$\psi(s) = \varphi(s) - x_0^{(l)}, \ f_k^{(l)}(y_k) = f_k\left(x_{k0}^{(l)} + y_k\right) - f_k\left(x_{k0}^{(l)}\right),$$

$$F^{(l)}(y) = \left(f_1^{(l)}(y_1), f_2^{(l)}(y_2),..., f_n^{(l)}(y_n)\right)^T,$$

$$D^{(l)}(y) = diag\left(d_1^{(l)}\left(x_{10}^{(l)} + y_1\right), d_2^{(l)}\left(x_{20}^{(l)} + y_2\right),..., d_n^{(l)}\left(x_{n0}^{(l)} + y_n\right)\right),$$

$$s_k(y_k) = \int\limits_0^{y_k} \frac{f_k^{(l)}(\tau)d\tau}{d_k(\tau)}, \ k = 1,2,...,n, \ S(y) = \left(s_1(y_1), s_2(y_2),..., s_n(y_n)\right).$$

Из условий (6) относительно функций $d_k(x_k)$ следует, что

$$s_k(y_k) \to \infty \text{ при } y_k \to -x_{k0}^{(l)}, \ \forall k = 1,2,...,n. \qquad (12)$$

Предполагается, что составляющие независимого прироста a_k и $d_k(x_k)$ $(k = 1,2,...,n)$ матрицы межвидового и внутривидового взаимодействия

$$A = \left\{a_k\right\}, \ A \in R^n, \ B = \left\{b_{jk}\right\}, \ B \in R^{n\times n}, \ G = \left\{g_{jk}\right\}, \ G \in R^{n\times n}$$

и запаздывания $h = \left(h_1(t), h_2(t),..., h_n(t)\right)^T$ таковы, что найдутся постоянные $p_1, p_2,..., p_n > 0$ и функции $q_1(\tau), q_2(\tau),..., q_n(\tau)$, $q_k \in C\left(\left[-h_0, 0\right] \to R^+\right)$ определяемые которыми матрицы

$$Q^{(0)} = diag\left(q_1(0), q_2(0),..., q_n(0)\right),$$

$$Q^{(1)} = diag\left(q_1\left(-h_1(t)\right)\left(1 - \frac{dh_1(t)}{dt}\right),..., q_n\left(-h_n(t)\right)\left(1 - \frac{dh_n(t)}{dt}\right)\right)$$

$$Q^{(2)} = PA + A^T P + Q^{(0)} + q_0^{-1} PBB^T P$$

удовлетворяют оценкам

$$y^T Q^{(1)}(t) y \ge q_0 \| y \|^2, \ (q_0 > 0), \ y^T Q^{(2)} y \le 0 \ \forall (t, y) \in R^+ \times R^n. \qquad (13)$$

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. Предположим, что:

1) функции $s_k(y_k)$ $(k = 1,2,...,n-1)$ при некотором $\delta > 0$ имеют оценки $s_k(y_k) > 0 \ \forall y_k \in \left\{0 < | y_k | < \delta\right\}$;

2) выполняются неравенства (13).

Тогда положение равновесия (8) равномерно устойчиво.

Теорема 4. При выполнении условия 1 Теоремы 3 и усилении второго неравенства (13) в виде

$$y^T Q^{(2)} y \le -q_0 \| y \|^2 \tag{14}$$

положение равновесия (8) является равномерно асимптотически устойчивым.

Теорема 5. Если вместо условия 1 Теоремы 4 предположить, что существует хотя бы одна функция $s_k(y_k)$, принимающая в любой достаточно малой окрестности $y_k = 0$ отрицательные значения, то положение равновесия (8) является неустойчивым.

Если дополнить предположения относительно функций $s_k(y_k)$ следующим образом

$$s_k(y_k) \to \infty \text{ при } x_k \to \infty \ \forall k = 1, 2, ..., n \tag{15}$$

и учесть соотношения (12) тогда имеют место следующие результаты.

Теорема 6. Дополним условия Теоремы 4 указанным предположением и условием единственности положения равновесия (8) в области $\operatorname{int} R_+^n$. Тогда это положение равновесия глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 7. Допустим, что:

1) имеют место первое из неравенств (13), а также неравенство (14);

2) выполнено условие (15).

Тогда каждое решение $x(t, \alpha, \varphi)$, $\varphi \in C_+$ неограниченно приближается к одному из положений равновесия (8) при $t \to \infty$. А именно, $\exists x = x_0^{(l)} \in \operatorname{int} R_+^n$, такое, что $x(t, \alpha, \varphi) \to x_0^{(l)}$ при $t \to \infty$

Рассмотрим случай равновесия, в котором первые m переменных $(x_1, x_2, ..., x_m)$ $(1 \le m < n)$ ненулевые, а остальные p $(p = n - m)$ переменных $(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$ равны нулю. Чтобы изучить этот случай, переопределим переменные.

Введем переменные: $y \in R_+^m$, $z \in R_+^p$, $\psi : [-h_0, 0] \to R_+^m$, $\theta : [-h_0, 0] \to R_+^p$,

$$y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T = (x_1, x_2, ..., x_m)^T,$$

$$z = (z_1, z_2, ..., z_p)^T = (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)^T,$$

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m)^T = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)^T, \ \psi \in C_+^{(m)},$$

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_p)^T = (\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, ..., \varphi_n)^T, \ \theta \in C_+^{(p)},$$

и соответственно нормы:

$$|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2, \ |z|^2 = z_1^2 + z_2^2 + ... + z_p^2,$$

$$\| \psi \| = \sup\left(|\psi(s)|, -h_0 \le s \le 0\right), \quad \| \theta \| = \sup\left(|\theta(s)|, -h_0 \le s \le 0\right),$$

а также векторы:

$$A^{(1)} = (a_1, a_2, ..., a_m)^T, \quad A^{(2)} = (a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_n)^T,$$

матрицы:

$$B^{(11)} = \left\{ b_{jk}^{(11)} \right\} = \left\{ b_{jk};\ j, k = 1, 2, ..., m \right\},$$

$$B^{(12)} = \left\{ b_{jk}^{(12)} \right\} = \left\{ b_{jk};\ j = 1, 2, ..., m,\ k = m+1, m+2, ..., n \right\},$$

$$B^{(21)}=\left\{b_{jk}^{(21)}\right\}=\left\{b_{jk};\ j=m+1,m+2,...,n,\ k=1,2,...,m\right\},$$
$$B^{(22)}=\left\{b_{jk}^{(22)}\right\}=\left\{b_{jk};\ j,k=m+1,m+2,...,n\right\},$$
$$G^{(11)}=\left\{g_{jk}^{(11)}\right\}=\left\{g_{jk};\ j,k=1,2,...,m\right\},$$
$$G^{(12)}=\left\{g_{jk}^{(12)}\right\}=\left\{g_{jk};\ j=1,2,...,m,\ k=m+1,m+2,...,n\right\},$$
$$G^{(21)}=\left\{g_{jk}^{(21)}\right\}=\left\{g_{jk};\ j=m+1,m+2,...,n,\ k=1,2,...,m\right\},$$
$$G^{(22)}=\left\{g_{jk}^{(22)}\right\}=\left\{g_{jk};\ j,k=m+1,m+2,...,n\right\},$$
и векторные и матричные функции:
$$f_k^{(1)}=f_k,\ d_k^{(1)}=d_k\ \ (k=1,2,...,m),\quad f_k^{(2)}=f_{m+k},\ d_k^{(2)}=d_{m+k}\ \ (k=1,2,...,p),$$
$$F^{(1)}=F^{(1)}(y)=\left(f_1^{(1)}(y_1),f_2^{(1)}(y_2),...,f_m^{(1)}(y_m)\right)^T,$$
$$F^{(2)}=F^{(2)}(z)=\left(f_1^{(2)}(z_1),f_2^{(2)}(z_2),...,f_p^{(2)}(z_p)\right)^T,$$
$$D^{(1)}=D^{(1)}(y)=diag\left(d_1^{(1)}(y_1),d_2^{(1)}(y_2),...,d_m^{(1)}(y_m)\right),$$
$$D^{(2)}=D^{(2)}(z)=diag\left(d_1^{(2)}(z_1),d_2^{(2)}(z_2),...,d_p^{(2)}(z_p)\right).$$
Предположим, что система линейных уравнений
$$\left(B^{(11)}+G^{(11)}\right)F^{(1)}+A^{(1)}=0 \tag{16}$$
имеет единственное решение $F^{(1)}=F_0^{(1)}$ в области $\operatorname{int}R_+^m=\left\{y\in R_+^m: y_1>0,y_2>0,...,y_m>0\right\}$. В этом случае функциональное уравнение $F^{(1)}(y)=F_0^{(1)}$ имеет конечное число решений
$$y=y_0^{(l)}:l=1,2,...,N_1;\ N_1=N_1(\mu)$$
в ограниченной области $E^{(1)}(\mu)\cap\operatorname{int}R_+^m$, $E^{(1)}(\mu)=\left\{y\in R^m:|y|\le\mu\right\}$.

Соответственно, уравнение (5) имеет положения равновесия вида
$$y=y(t,\alpha,\psi,0)\equiv y_0^{(l)},\ \ z=z(t,\alpha,\theta,0)\equiv 0. \tag{17}$$
Исследуем задачу об устойчивости какого-либо такого положения равновесия.

Пусть $x=x_0=\left(y_0^{(1)},0\right)$ – заданное положение равновесия.

Введем следующие возмущения, функции и вектор
$$y^{(1)}=y-y_0,\ \ \psi^{(1)}(s)=\psi(s)-y_0,$$
$$F^{(11)}\left(y^{(1)}\right)=F^{(1)}\left(y^{(1)}+y_0^{(1)}\right),\ \ D^{(11)}\left(y^{(1)}\right)=D^{(1)}\left(y^{(1)}+y_0^{(1)}\right),$$
$$u_k^{(1)}(y_k)=u_k\left(y_{0k}^{(1)}+y_k\right)\ \ (k=1,2,...,m),$$
$$U^{(1)}(y)=\left(u_1^{(1)}(y_1),u_2^{(1)}(y_2),...,u_m^{(1)}(y_m)\right)^T.$$
$$A^{(21)}=A^{(2)}+B^{(21)}F^{(1)}\left(y_0^{(1)}\right)+G^{(1)}F^{(1)}\left(y_0^{(1)}\right)$$
Непосредственным анализом доказана следующая теорема.

Теорема 8. Предположим, что какая-либо компонента вектора $A^{(21)}$

удовлетворяет неравенству $a_p^{(21)} > 0$, при этом коэффициенты взаимодействия таковы, что $b_{jp}^{(12)} = 0,\ g_{jp}^{(12)} = 0\ (j = 1, 2, ..., m)$. Тогда решение $\left(y_0^{(1)}, 0\right)$ системы (5) неустойчиво.

Задача об устойчивости положения $y^{(1)} = 0,\ z = 0$ решалась построением функционала Ляпунова. Были введены следующие вектора

$$\begin{gathered} S^{(1)} = diag(s_1, s_2, ..., s_m),\ S^{(2)} = diag(s_{m+1}, s_{m+2}, ..., s_n),\ S = diag\left(s_1, s_2, ..., s_n\right), \\ D^{(21)} = (d_{m+1}, d_{m+2}, ..., d_n)^T, \qquad \varphi^{(1)} = \left(\psi^{(1)}, \theta\right) \end{gathered} \tag{18}$$

Предположим, что имеет место квадратичное неравенство

$$\left(x - x_0^{(1)}\right)^T \left(Q^{(1)}(t) - \frac{1}{2}\left(G^{(2)}\right)^T S^{(2)} G^{(2)} \right)\left(x - x_0^{(1)}\right) \geq q_0 \| x - x_0^{(1)} \|^2, \tag{19}$$

$$G^{(2)} = \left(G^{(21)}, G^{(22)}\right),\ q_0 > 0,$$

в области $\Gamma_0 = \left\{x \in R_+^n : \left|y - y_0^{(1)}\right| \leq \delta,\ \left|z\right| \leq \delta;\ \delta > 0\right\}$ имеет место следующая оценка

$$\begin{gathered} W(y,z) = \frac{1}{2}\left(F\left(x - x_0^{(1)}\right)\right)^T \left(SB + B^T S + Q^{(0)} + q_0^{-1} SGG^T S\right) \cdot \\ \cdot F\left(x - x_0^{(1)}\right) + \left(D^{(21)}(z) - F^{(2)}(z)\right)^T S^{(2)} B^{(2)} F\left(x - x_0^{(1)}\right) + D^{(21)}(z) S^{(2)} A^{(21)} + \\ + \left(D^{(2)}(z) - F^{(2)}(z)\right)^T S^{(2)} \left(D^{(2)}(z) - F^{(2)}(z)\right) \leq 0 \end{gathered} \tag{20}$$

Были доказаны следующие теоремы.

Теорема 9. Предположим, что существуют: область $\Gamma_0 = \left\{x \in R_+^n : \left|y - y_0^{(1)}\right| \leq \delta,\ \left|z\right| \leq \delta,\ \delta > 0\right\}$, в которой выполнены неравенства $u_k(x_k) > 0\ \forall x_k \in \left\{0 < \left|x - x_{k0}^{(1)}\right| \leq \delta\right\}$. Тогда положение равновесия $\left(y^{(1)}, 0\right)$ уравнения (5) равномерно устойчиво. При усилении условия на функцию $W(y,z)$ в виде

$$W(y,z) \leq -a_1(\left|y - y_0\right| + z),\ a_1 \in K \tag{21}$$

оно равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 10. Предположим, что существуют:

1) область $\Gamma_0 = \left\{x \in R_+^n : \left|y^{(1)} - y_0^{(1)}\right| \leq \delta,\ \left|z\right| \leq \delta,\ \delta > 0\right\}$, в которой имеют место неравенства (20) и (21);

2) существует функция $u_k = u_k(x_k)\ (1 \leq k \leq m)$, принимающая отрицательные значения в любой достаточно малой окрестности точки $x_k = x_{k0}^{(1)}$;

3) одна из постоянных $s_k^{(0)}$ отрицательная, где $(m + 1 \leq k \leq n)$, т.е. $s_k^{(0)} < 0$.

Тогда положение равновесия $\left(y^{(1)}, 0\right)$ системы (5) неустойчиво.

В третьей главе « **Устойчивость модели Лотки-Вольтерра с**

запаздыванием» исследована задача устойчивости нелинейного скалярного функционально-дифференциального уравнения. Ранее она наиболее полно она изучена для уравнений линейного типа. Современные исследования по моделированию биологических, инфекционных и других процессов приводят к необходимости определения качественных свойств решений более общих уравнений.

В первом параграфе рассматривается задача об устойчивости скалярного нелинейного уравнения с переменным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = d\left(x(t)\right)\left(a + bf\left(x(t)\right) + gq\left(x\left(t - h(t)\right)\right)\right), \qquad (22)$$

где a,b,g – постоянные, функции $d, f, q \in C\left(R^{+} \to R^{+}\right)$, $d(0) = f(0) = q(0) = 0$, $d \neq 0$ при $x \neq 0$; $h \in C\left(R^{+} \to [0,h_0]\right)$, $h_0 = const > 0$. При этом функции d, f, q удовлетворяют условию Липшица

$$\left|d(x_2) - d(x_1)\right| \le l_0(\mu)\left|x_2 - x_1\right|,\ \left|f(x_2) - f(x_1)\right| \le l_0\left|x_2 - x_1\right|,$$

$$\left|q(x_2) - q(x_1)\right| \le l_0(\mu)\left|x_2 - x_1\right|,\ \forall x_1, x_2 \in E(\mu),$$

$$E(\mu) = \left\{x \in R^{+} : 0 \le x \le \mu > 0\right\}.$$

Уравнение (1.1) заведомо имеет тривиальное положение равновесия

$$x(t,\alpha,0) \equiv 0 \quad \forall t \ge \alpha - h_0. \qquad (23)$$

Иные положения равновесия $x(t,\alpha,x_0) \equiv x_0$ определяются равенством

$$bf(x_0) + gq(x_0) + a = 0. \qquad (24)$$

Устойчивость тривиального положения равновесия (23) зависит от знака значения a ,как это было установлено во втором параграфе второй главы.

Введем возмущение $y(t) = x(t) - x_0$.

Уравнение возмущенного движения имеет вид:

$$\dot{y}(t) = d_1\left(y(t)\right)\left(bf_1\left(y(t)\right) + gq_1\left(y\left(t - h(t)\right)\right)\right), \qquad (25)$$

где $d_1(y) = d(x_0 + y)$, $f_1(y) = f(x_0 + y) - f(x_0)$, $q_1(y) = q(x_0 + y) - q(x_0)$.

Функция $q_1 \in C^1\left([-x_0, +\infty] \to R\right)$ и для нее введем оценки

$$\left|\frac{dq_1(y)}{dy}\right| \le m = const > 0,\ d(y) \le d_0 = const > 0 \ \ \forall y \in \Gamma = \left\{-H_1 \le y \le H_2\right\}, \qquad (26)$$

где H_1, H_2 – постоянные, $0 < H_1 \le x_0$, $H_2 > 0$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 11. Предположим, что составляющие уравнения (22) удовлетворяют условиям:

1) $f_1(y)y > 0 \ \left(\forall y : 0 < |y| \le H_0,\ H_0 = \min(H_1, H_2)\right)$;

2) $\left(b + |gb| m d_0 h_0 + g^2 m d_0 h_0\right) f_1^2(y) + g f_1(y) q_1(y) + h_0 g^2 m d_0 q_1^2(y) \le$
$\le -\varepsilon_0 f_1^2(y) \ \ \forall y \in \left\{|y| \le H_0\right\},\ (\varepsilon_0 > 0)$.

Тогда положение равновесия (24) уравнения (22) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 12. Предположим, что:

1) $f_1(y)y<0\ \ \forall y\in M^+=\{y:0<y\le H_0\}$ или $\forall y\in M^-=\{y:-H_0\le y<0\}$;

2) условие 2 Теоремы 11 выполняется для $y\in M^+$ (или, соответственно, для $y\in M^-$).

Тогда положение равновесия (24) неустойчиво.

В качестве конкретной задачи исследована задача об устойчивости нелинейного уравнения Хатчинсона.

Во втором параграфе исследована задача об устойчивости нелинейного неавтономного скалярного уравнения с переменным запаздыванием

$$\dot{x}(t)=a(t,x_t)g\big(x(t)\big)+b(t,x_t)q\big(t,x\big(t-h(t)\big)\big), \tag{27}$$

где $t\in R^+$; $a,b\in C\big(R^+\times C\to R\big)$; $h\in C\big(R^+\to[0,h_0]\big)$; функции $g\in C\big(R^+\to R\big)$ и $q\in C\big(R^+\times R\to R\big)$ таковы, что выполняются условия:

$$g(0)=0,\ \ q(t,0)\equiv 0.$$

Сначала изучена задача об устойчивости без предположения ограниченности правой части уравнения (27) при условиях

$$\begin{gathered}|q(t,x)|\le\mu(t,H_1)|g(x)|,\ \ |g(x)|\le L(H_1)|x|\\ \forall(t,x)\in R^+\times\{|x|\le H_1=const>0\},\end{gathered} \tag{28}$$

$$h\in C^1\big(R^+\to[0,h_0]\big),\ \ \dot{h}(t)=\frac{dh(t)}{dt}\le 1-h_1,\ \ h_1=const>0. \tag{29}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 13. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $g(x)x>0,\ \ \forall x\in\{0<|x|\le H_0<H_1\}$;

2) $|b(t,\varphi)|\mu(t,H_1)\le a_0 l(\varphi)\big(1-\dot{h}(t)\big)^{\frac{1}{2}},\ \ l(\varphi)\ge 0,$

$A(t,\varphi)=2a(t,\varphi)+a_0l^2(\varphi)\le -a_0-\varepsilon_0\ \ (a_0>0,\ \varepsilon_0>0)\ \ \forall(t,\varphi)\in R^+\times\{\varphi\in C:\|\varphi\|\le H_1\}.$

Тогда решение $x=0$ уравнения (27) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 14. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $g(x)x<0,\ \ \forall x\in D=\{x\in R:-H_1\le -H_0\le x<0\}$;

2) выполнено условие 2 Теоремы 14.

Тогда решение $x=0$ уравнения (27) неустойчиво.

Далее исследована задача об устойчивости, когда правая часть уравнения (2.1) ограничена

$$\begin{gathered}|a(t,\varphi)|\le a_0=const,\ \ |b(t,\varphi)|\le b_0=const\\ \forall(t,\varphi)\in R^+\times\{\varphi\in C:|\varphi|\le H_1=const>0\}.\end{gathered} \tag{30}$$

Доказаны следующие теоремы

Теорема 15. Предположим, что выполнены условия:

1) $g(x)x > 0,\ \forall x \in \{x \in R : 0 < |x| \le H_0 < H_1\}$;

2) $B(t,\varphi) = a(t,\varphi) + \mu_1(t)b(t,\varphi) + Mb_0h_0(a_0 + \mu_2 b_0) \le -\varepsilon_0 < 0$

$\forall (t,\varphi) \in R^+ \times \{\varphi \in C : |\varphi| \le H_1\}$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (27) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 16. Предположим, что выполнены условие 1 Теоремы 16, а также следующее условие

2) $A(t,\varphi) = a(t,\varphi) + b(t,\varphi) + Mb_0h_0(a_0 + b_0) \le -\varepsilon_0 < 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (27) неустойчиво.

В третьем параграфе получено развитие результатов § 3.2 для многомерного неавтономного векторного уравнения с переменным запаздыванием.

Заключение.

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. В рамках развития метода функционалов Ляпунова доказаны теоремы по модификации и развитию некоторых известных результатов по применению функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

2. Исследована устойчивость стационарных решений векторного уравнения типа Вольтерра с переменным запаздыванием. На основе анализа структуры возможных решений определены в зависимости от параметра условия асимптотической устойчивости и неустойчивости тривиального решения, а также условия неустойчивости граничного стационарного решения – решения, в котором одна или несколько координат обращаются в нуль.

3. Изучена проблема устойчивости и глобального предельного поведения решений нелинейного неавтономного одномерного (скалярного) и многомерного уравнения с переменным запаздыванием. К такому типу уравнений сводится задача об устойчивости неустановившегося процесса, моделируемого уравнениями типа Вольтерра.

4. Получены достаточные условия устойчивости стационарных положений, предельного поведения решения скалярного уравнения типа Вольтерра с переменным запаздыванием без предположения дифференцируемости такого изменения. В качестве решена ранее не исследованная задача об устойчивости нелинейного уравнения типа Хатчинсона с переменным запаздыванием.

5. Изучена проблема устойчивости и глобального предельного поведения решений нелинейного неавтономного одномерного (скалярного) и многомерного уравнения с переменным запаздыванием. К такому типу уравнений сводится задача об устойчивости неустановившегося процесса, моделируемого уравнениями типа Вольтерра.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

KAKHKHOROV AZIZBEK ESANOVICH

VOLTERRA EQUATIONS WITH DELAY IN MODELING BIOLOGICAL AND ECONOMIC PROCESSES AND STUDYING THEIR STABILITY

01.01.02 – "Differential equations and Mathematical physics"

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (Doctor of Philosophy) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2023.4.PhD/FM670.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Xusanov Djumma Xusanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Mamadaliyev Numonjon Olimjonovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Ulyanovsk State University**

Defense will take place “07” May 2024 at 17:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy (is registered № 182). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on “19” April 2024 year
(Mailing report № 2 on “19” April 2024 year)

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

J.K. Adashev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., senior researcher

A.A. Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The purpose of the study is to expand Volterra models with delay in modeling problems of biology and economics and to develop the method of Lyapunov functionals for their qualitative analysis.

The object of the study is nonlinear equations with variable delay of the Volterra type in mathematical modeling of biological and economic problems.

The scientific novelty of the study is as follows:

within the framework of the development of the method of Lyapunov functionals, modified theorems were proven using Lyapunov functionals when checking the stability of non-autonomous functional differential equations of retarded type;

stability of a stationary solution of a vector equation with variable delay of the Volterra type, asymptotic stability and instability conditions for a trivial solution depending on a parameter, based on an analysis of the structures of possible solutions, and conditions for the instability of a boundary stationary solution with several zero coordinates are determined;

solutions of one- and multidimensional nonlinear nonautonomous equations with variable delay were tested for stability and it was proven that equations of this type can lead to the problem of stability of processes modeled by Volterra-type equations;

sufficient conditions for the stability of stationary states of the solution of a scalar equation of Volterra type with variable delay are found and, as an example, the problem of stability of a nonlinear equation of Hutchinson type is solved.

Implementation of research results. Based on the results obtained using delayed Volterra equations in modeling biological and economic processes and studying their stability:

the stability of solutions to functional differential equations using Lyapunov functionals was used in problems of localizing the limit set of solutions to models of differential equations of retarded type in the foreign grant project “Natural disasters of Kamchatka - earthquakes and volcanic eruptions” under number AAAA-A19-119072290002-9 (certificate No. 52- 13 of November 13, 2023, Kamchatka State University named after Vitus Bering, Russian Federation). The application of the scientific result made it possible to develop an algorithm for effectively solving problems of stability of solutions to differential equations of retarded Volterra type;

qualitative analysis of Volterra differential equations with delay and Lyapunov functionals when checking their stability in foreign grant project No. VF205.40 “Development of tools for working with knowledge bases of information systems for scientific research”, new methods of analysis were used during implementation (certificate No. 1-M dated January 15 2024 Institute of Cybernetics named after V. M. Glushkov, Ukraine). The application of the scientific result made it possible to find qualitative features of limit cycles of economic crises using the generalized Dubovsky model and solutions to model differential equations of retarded type.

Approbation of the research results. The main content of the dissertation is presented in scientific reports at 8 international and 3 republican scientific and practical conferences.

Publication of the research results. 17 scientific works were published on the topic of the dissertation, of which 6 articles were published in journals that are included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of dissertations for the degree of Doctor of Philosophy (PhD), including 2 articles published in foreign countries magazines, 4 in republican scientific publications.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a bibliography. The volume of the dissertation is 115 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO’YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo’lim (часть I, part I)

1. Хусанов Д.Х., Каххаров А.Э. Устойчивость одной модели Лотки-Вольтерра // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2021. №6. С. 16–19. (01.00.00, № 7).

2. Каххаров А. Э. Управление нелинейной системой Лотки-Вольтерра с запаздыванием // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2022. № 5. С. 7–9. (01.00.00, № 7).

3. Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э. Устойчивость модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 175–184. (3. Scopus. IF=0,2).

4. Khusanov J. Kh., Kakhkhorov A. E. Stability of the nonlinear Lotka-Volterra equation with variable delay // Uzbek Mathematical Journal. 2023, Volume 67, Issue 1, pp. 63–71. (01.00.00, № 6).

5. Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э. Устойчивость одного класса нелинейных неавтономных систем с запаздыванием // Бюллетень Института Математики. 2023, № 1. С. 64–69. (01.00.00, № 17).

6. Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э. On the stability of a nonlinear nonautonomous scalar equation with variable delay // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т.25 № 4. С.299–312. (3. Scopus. IF=0,2).

II bo’lim (часть II, part II)

7. Buranov J., Yusupova Z., Kakhkhorov A. Investigation of stability of dynamic systems with switching // The international scientific conference “Conference modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Kwarizmi 2021”. Fergana, November 15–17, 2021. P. 117.

8. Khusanov Jumanazar, Berdiyarov Azamat, Kakhkhorov Azizbek. Stability of the nonlinear Lotka-Volterra equation with variable delay // Международной научно-практической конференции “Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий” Бухоро 11–12 мая 2022 г. С. 256–257.

9. Khusanov J.Kh., Kakhkhorov A. E. On the stability of some Lotka and Volterra models // The international scientific conference of “Contemporary mathematics and its application” Tashkent, November 19–21, 2021. P.145.

10. Ахмедов Ф. К., Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э. Об устойчивости положения равновесия реологического маятника // Международная научно-практическая конференция “Разматулинские чтения”. Ташкент, 26–27 мая 2023 г. С. 256–257.

11. Бердияров А. Ш., Каххаров А. Э. Построение периодических решений квазилинейных уравнений при резонансе в критическом случае //

Республиканской научной конференции “Сарымсаковские чтения” Ташкент. 16–18 сентября 2021 г. С. 81–82.

12. Соатов У. А., Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э. Устойчивость нелинейной модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием // International conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”. Samarkand, September 23–24, 2022 С. 196–198.

13. Хусанов Д. Х., Буранов Ж. И., Каххаров А. Э. Равномерная асимптотическая устойчивость // Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Современные методы математической физики и их приложения” Тошкент, 17–18 ноября 2020 г. С. 163–164.

14. Хусанов Д. Х., Буранов Ж. И., Каххаров А. Э. Об устойчивости по части переменных решений дифференциальных уравнений различного типа // Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари. Республика илмий анжумани. Тошкент, 1–2 июнь 2021 йил. С. 300–302.

15. Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э. Устойчивость нелинейной модели Лотки-Вольтерра с переменным запаздыванием // XVI Международной конференции “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” Москва, 1–3 июня 2022 г. 2022. С. 497–500.

16. Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э. Устойчивость модели Лотки-Вольтерра // Республиканской научной конференции “Операторные Алгебры, Неассоциативные Структуры И Смежные Проблемы”. Ташкент, 14–15 сентября 2022. С. 236–238.

17. Хусанов Д. Х., Фармонова М. Д., Каххаров А. Э. Устойчивость нелинейного скалярного уравнения с переменным запаздыванием // XV Международной конференции “Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики”. Махачкала, 13–15 сентября 2023. С. 128–131.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida 2024 yil 1-aprelda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. “Times New Roman” garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 28/24.

Guvohnoma № 851684.
“Tipograff” MChJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.