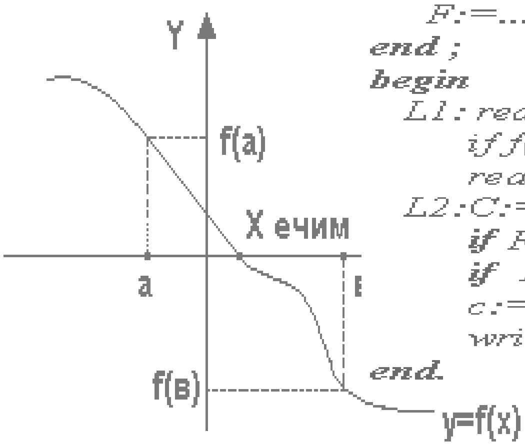
**Ўзбекистон Республикаси**
**Олий ва ырта махсус таълим вазирлиги**

Наманган мущандислик-педагогика институти

***«Информатика ва ахборотлар технологияси»***
**кафедраси**

«СОНЛИ УСУЛЛАР ВА АЛГОРИТМЛАР»
фанидан




```
function F(x : real) : real;
begin
   F:=.....
end ;
begin
  L1: readln('a, b=' , a, b);
      if f(a)*f(b)>0 then goto L1;
      readln('eps=',eps);
  L2:C:=(a+b)/2;
      if F(a)*F(c)<0 then b:=c else a:=c;
      if  Abs(b-a)>eps then goto L2;
      c:=(a+b)/2;
      writeln ('тенглама ечими= ',c)
end.
```

# *Маърузалар матни*

**Наманган-2006**

Ушбу муаммоли маърузалар матни “Информатика ва ахборотлар технологияси”, 5140900 касб таълими ҳамда махсус сиртқи йўналишида таълим олаётган талабалар учун мўлжалланган. Ушбу муаммоли маърузалар матни Давлат таълим стандартларига мос наъмунавий дастур ҳамда унга мос ишчи дастурлар асосида тузилган.

Муаммоли маърузалар матнидан, “Сонли усуллар ва алгоритмлар” фанини қрганувчи талабалар, магистрлар ва ўқитувчилар фойдаланишлари мумкин.

Тузувчилар: т.ф.н. доц. Ирисқулов С.
катта ўқитувчи Исманова К.

Тақризчилар: НамМПИ т.ф.н. П. Каримов
НамДУ «Амалий математика»
кафедрасининг мудири доц. А. Имомов

Қайта ишлаб чиқилган ва таҳрирланган ушбу муаммоли маърузалар матни «Иформатика ва АТ» кафедрасининг
_________________ №___сонли мажлисида кўриб чиқилган ва маъқулланган.

НамМПИ илмий-услубий кенгаши томонидан ижобий баҳоланиб, нашр этишга тавсия этилган. (Баённома № «__»_________________ йил)

## Сўз боши

Малумки, таълим-тарбия, илм-фан, касб-ҳунар жабҳалари билан боғлиқ давлат сиёсати ва унинг самарали амалий ижроси энг аввало, соҳани тубдан ислоҳ қилишнинг конститутциявий-ҳуқуқий асосларини аниқ белгилаб олишни тақозо этади. Мазкур қонуний талаб Ўзбекистон Республикасининг Конституциясида ҳамда унинг асосида қабул қилинган Ўзбекистон Республикасининг «Таълим тўғрисида»ги ва «Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури тўғрисида»ги қонунларида, тегишли меъёрий-ҳуқуқий ҳужжатларда ўзининг ҳуқуқий мақомига эга бўлди. Демак, галдаги энг асосий вазифа: ёш авлодни Ватан равнақи, юрт тинчлиги, халқ фаровонлиги каби олижаноб туйғулар руҳида тарбиялаш, юксак фазилатларга эга, эзгу ғоялар билан қуролланган комил инсонларни вояга етказиш, жаҳон андозаларига мос, кучли билимли, рақобатбардош кадрлар тайёрлашдир.

Талабалар дастурлаш тилларини ва йўналиш бўйича махсус фанларни ўрганиш натижасида дастурчи даражасига етишади. Лекин, улар олган назарий ва амалий билимларини амалий масалаларни ечишга қўллашда кўпгина қийинчиликларга дуч келишади. Чунки уларда типик, тақрибий масалаларни ечишда олий математика курсидан олган билимларгина мавжуд. Шунинг учун, ҳаётий масалаларнинг математик моделларини тушуна олишлари, уларни ечишнинг сонли-тақрибий, тақрибий-аналитик усулларини ўрганишлари учун “Сонли усуллар ва алгоритмлар” фанининг аҳамияти катта ҳисобланади.

Шу мақсадда ушбу муаммоли маърузалар матни “Информатика ва АТ” йўналишлари бўйича таълим олаётган талабалар учун мўлжалланган бўлиб, у Давлат таълим стандартларига мос наъмунавий дастур ҳамда унга мос ишчи дастурлар асосида тузилган. Маърузани ёзишда мавжуд адабиётлардан ва фанни ўқитишда тўпланган кўп йиллик тажрибаларни илмий таҳлилдан ўтказиш натижасида ҳосил бўлган хулосаларга асослангандир.

Маърузада асосан қуйидаги бўлимлар бўйича тақрибий ҳисоблаш усуллари берилган:

- чизиқсиз тенгламалар;
- чизиқли алгебраик тенгламалар системаси;
- аниқ интеграллар;
- биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар;
- иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар;
- математик-физика тенгламалари;

Ҳар бир маъруза учун ўқув модули бирликлари ва аниқлаштирилган ўқув мақсадлари кўрсатилган. Ҳар бир маъруза сўнгида ўз-ўзини текшириш учун назорат саволлари берилган. Ҳар бир маъруза сўнгида ёки маъруза орасида мавзуга тегишли, лекин жавоби аниқ кўрсатилмаган, талабани мустақил фикрлашга ундайдиган муаммоли савол ва топшириқлар берилган. Мавзуни ўрганиш давомида қўйилган муаммоларга тўғри жавоб топган талаба ўқитувчига ўз фикрини билдиради, натижада шу фандан қўшимча балл олиш имкониятига эга бўлади. Муаммога жавобни излаш жараёнида талаба шу фандан ва бошқа барча фанлардан олган билимларини эслашга, таққослашга ва албатта ўзи мустақил хулоса чиқаришга мажбур бўлади. Бу эса фанни яна ҳам қизиқарли бўлишига сабаб бўлиб, талабанинг эркин фикрлаш қобилиятини ўстиради.

Маъруза сўнгида якуний назорат учун бериладиган таянч сўз ва иборалар келтирилган. Ушбу китобча чоп этилгандан ташқари электрон маъруза матни шаклида институт электрон кутубхонасига топширилди. Ҳал қилиниши керак бўлган муаммоларни баён қилишда қуйидаги белгилашлардан фойдаланилди:

$\boxed{\text{мс}}$ - муаммоли савол;

| мт | - муаммоли топшириқ;
| мв | - муаммоли вазият;
| мм | - муаммоли масала.

Яна шуни алоҳида таъкидлаш керакки, маъруза машғулотларида олинган билимларни мустаҳкамлаш учун амалий машғулот дарсларида турли интерактив усуллардан фойдаланиш, билимларни текшириш учун назоратнинг илғор ва мақбул усулларидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун албатта, керакли услубий таъминотлар ишлаб чиқилган бўлиб, улардан фойдаланишни тавсия қиламиз. Бу фанни чуқур ва осонроқ ўзлаштирилишига сабаб бўлиши муқаррардир.

Маърузалар матни ҳақида билдирилган ҳар қандай таклиф ва мулоҳазаларни муаллифлар мамнуният билан қабул қиламиз. Бу ушбу соҳада олиб борилаётган изланишларга ижобий таъсир этади деб ўйлаймиз!

## 1-маъруза: "Сонли усуллар ва алгоритмлар" фанига кириш

Ўқув модули бирликлари:

1. Математик модел;
2. Ҳисоблаш тажрибасининг босқичлари;
3. Амалий дастурлар боғлами.

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзуни тўла ўзлаштирганларидан сўнг:

1. «Сонли усуллар ва алгоритмлар» фанининг мақсади;
2. Математик моделлаштиришнинг асосий тушунчалари;
3. Ҳисоблаш тажрибасининг босқичлари;
4. Фанни ўзлаштириш жараёнида бажариладиган амалий дастурлар боғлами ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Янги техника ва технологиянинг кескин ўсиб бориши, математика фанининг замонавий бўлимларини халқ хўжалиги масалаларини ечишга янада кўпроқ қўлланила бошлагани амалий масалаларни ечишга ихтисослаштирилган бакалаврлар ва магистрларни тайёрлашга бўлган талабни борган сари орттириб бормоқда.

Ҳозирги кунда тайёрланаётган бакалаврларнинг математик маълумоти олий математика фанида ўқитилаётган анъанавий бўлимлар билан чегараланиб қолмаслиги зарур. Айниқса "Информатика ва ахборотлар технологияси" йўналиши бўйича таълим олаётган талабалардан замонавий математиканинг зарур бўлимларини билишни, биринчи галда эса ҳисоблаш математикасининг усулларини мустаҳкам эгаллашни ва улардан амалий масалаларни ечишда фойдаланишни ҳамда ечилаётган масалани дастурини яратиб, зарур сонли ечимни олишга эриша олишлари талаб этилади.

Шуни яна таъкидлаб ўтиш лозимки, замонавий ҳисоблаш техникасини унумли ишлатиш тақрибий ва сонли анализ усулларидан оқилона фойдаланишсиз мумкин эмас. Шунинг учун, ривожланган чет эл мамлакатларида ва давлатимизда ҳисоблаш математикасига бўлган қизиқиш кескин ортиб бормоқда. ЭҲМ ларнинг охирги пайтларда ривожланиб бориши сонли-тақрибий усулларнинг амалга тадбиқига кенг истиқбол яратди.

Маълумки, ҳаётда учрайдиган барча жараёнларнинг математик моделларини тузиш мумкин. Бу моделлар ўрганилаётган жараённинг асосий хусусиятларини ўзида иложи борича тўларoқ, тўкисрoқ мужассам қилиши керак. Бу эса математик моделларнинг иложсиз мураккаблашувига сабаб бўлади. Бундай математик моделларни ишлатиш, улар асосида қаралаётган жараён кўрсаткичларининг хусусиятларини тасвирловчи ечим олиш ҳам ўз навбатида мураккаблашади. Демак, изланувчи олдида бир-бирига зид икки масала кўндаланг бўлади: математик моделлар етарли даражада мукаммал ва мураккаб бўлиши керак, лекин бундай моделларни ишлатиш қатор қийинчиликларни ҳам келтириб чиқаради.

Математик моделларни ташкил қилувчи алгебраик, чизиқсиз дифференциал, интеграл, интегро-дифференциал ва бошқа тенгламаларни ечиш усуллари етарли даражада такомиллашмаган. Математика курсларида келтирилаётган аниқ, аналитик усуллар фақат хусусий кўринишдаги, содда тенгламаларнинг ечимини топиш имконини беради, ҳолос. Сонли-тақрибий усуллар эса умумийрoқ, анча мураккаб тенгламаларнинг ечимларини топишга имкон беради. Натижада аналитик усулда ечилмаган тенгламаларни ЭҲМ ларда сонли-тақрибий усуллар билан ечиш имконияти яратилди.

"Информатика ва АТ" йўналиши бўйича таълим олаётган бакалаврлар амалий масалаларни ЭҲМда ечишлари учун иккита асосий йўналиш бўйича етарлича чуқур билимга эга бўлишлари керак. Биринчидан,улар ЭҲМ учун бирор замонавий алгоритмик тилда маълум алгоритм асосида дастур тузишни билишлари, иккинчидан амалий масалаларни ечишнинг сонли-тақрибий усуллари ҳақида ҳам етарлича билимга эга бўлишлари керак. Мазкур маъруза матни ҳам ана шу иккинчи йўналиш бўйича назарий ва амалий билимлар беришга мўлжаллаб ёзилган.

**Математик моделлаштиришнинг асосий тушунчалари.**

Ечиладиган масалаларни ўрганиш унинг математик моделини тузишдан бошланади, яъни унинг асосий ўзига хос хусусиятлари ажратилади ва улар ўртасида математик муносабат ўрнатилади. Математик модел тузилгач, яъни масала математик кўринишда ифодалангач, уни маълум математик усуллар билан таҳлил қилиш мумкин. Математик модел тузиш билан биз ўрта мактаб физика курсида танишганмиз. Бунда дастлаб ўрганилаётган физик ҳодисанинг моҳияти, белгилари, ишлатилаётган кўрсаткичлари, сўзлар ёрдамида батафсил ифода этилади. Кейин физик қонунлар асосида кераклиматематик тенгламалар келтирилиб чиқарилади. Бу тенгламалар ўрганилаётган физик жараён, ҳодисаларнинг математик моделидир.

Математик модел ҳеч қачон қаралаётган объектнинг хусусиятларини айнан, тўла ўзида мужассам қилмайди. У ҳар хил фараз ва чекланишлар асосида тузилгани учун тақрибий характерга эга демак, унинг асосида олинаётган натижалар ҳам тақрибий бўлади.

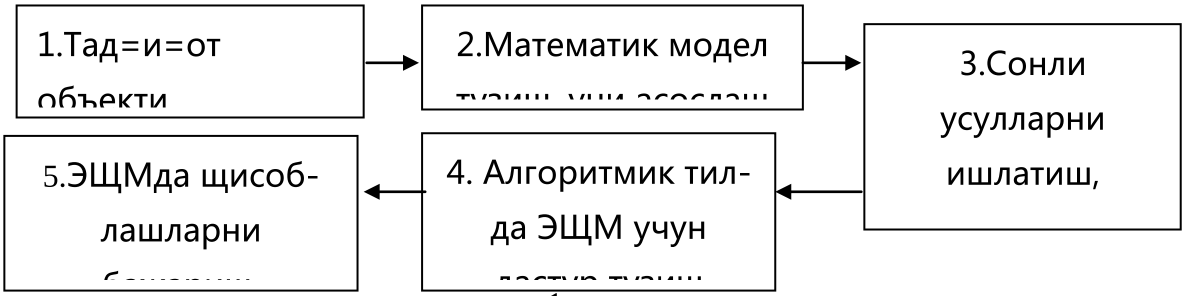
Моделнинг аниқлиги, натижаларнинг ишончлилик даражасини баҳолаш масаласи математик моделлаштиришнинг асосий масалаларидан биридир.

Математик модел ҳар хил воситалар ёрдамида берилиши мумкин. Бу воситалар функционал анализ элементларини ишлатиб дифференциал ва интеграл тенгламалар тузишдан то ҳисоблаш алгоритми ва ЭҲМ дастурларини ёзишгача бўлган босқичларни ўз ичига олади. Ҳар бир босқич якуний натижага ўзига хос таъсир кўрсатади ва улардаги йўл қўйиладиган хатоликлар олдинги босқичлардаги хатоликлар билан ҳам белгиланади.

? мс Амалий масалаларнинг математик моделларини сонли усуллар билан ҳисоблаш зурурияти қаердан келиб чиқади.

Объектнинг математик моделини тузиш, уни ЭҲМ да бажариладиган ҳисоблашлар асосида таҳлил қилиш "ҳисоблаш тажрибаси" дейилади.

"Ҳисоблаш тажрибасининг умумий схемаси 1-расмда кўрсатилган.




1-расм

Биринчи босқичда масаланинг аниқ қўйилиши, берилган ва изланувчи миқдорлар, объектнинг математик модел тузиш учун ишлатиш лозим бўлган бошқа хусусиятлари тасвирланади.

Иккинчи босқичда физик, механик, химиявий ва бошқа қонуниятлар асосида математик модел тузилади. У асосан алгебраик чизиқсиз, дифференциал, интеграл ва бошқа турдаги тенгламалардан иборат бўлади. Уларни тизимда ўрганилаётган жараёнга таъсир кўрсатувчи омилларнинг барчасини бир вақтнинг ўзида ҳисобга олиб бўлмайди, чунки математик модел жуда мураккаблашиб кетади. Шунинг учун, модел тузишда энг кучли таъсир этувчи асосий омиллargина ҳисобга олинади.

Учинчи босқичда масаланинг математик модели тузилгач, мос тенгламалар ечилиши ва керакли кўрсаткичлар аниқланиши лозим. Масалан, математик модел дифференциал тенглама билан тасвирланган бўлса, сонли усуллар ёрдамида у чекли сондаги нуқталарда аниқланган чекли-айирмали тенгламалар билан алмаштирилади.

Тўртинчи босқичда сонли усуллар ёрдамида аниқланган алгоритм асосида бирор - бир алгоритмик тилда ЭҲМ да ишлатиш учун дастур тузилади. Масалан, у умумий хусусиятга эга бўлиши керак, яъни математик моделда ифодаланган масала параметрларининг етарлича катта соҳада ўзгарувчи қийматларида дастур яхши натижа бериши керак.

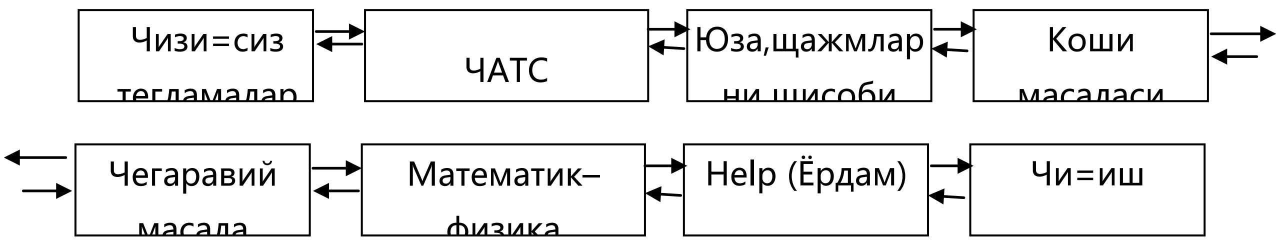
Охирги босқичда дастур ЭҲМга қўйилади ва олинган сонли натижалар чуқур таҳлил қилиниб баҳоланади.

Натижаларга қараб мутахассис таҳлил қилинаётган жараён тўғрисида хулосалар чиқаради, унинг амалга ошишига маълум мақсад асосида таъсир кўрсатади, бошқариш воситаларини ишлаб чиқади, тавсиялар беради. Кўплаб вариантлар асосида бажарилувчи ҳисоблаш тажрибалари ёрдамида лойиҳачи у ёки бу белгига кўра барча вариантлар ичидан энг маъқулини танлаши мумкин.

1990 йиллардан бошлаб замонавий ШЭҲМ ларнинг ишлаб чиқилиши, илмий ва ўқув жараёнларига кириб келиши маълум бир ютуқлардан ташқари баъзи ноқулайликларни ҳам юзага келтирди. Бу ноқулайлик шахсий компьютерлардан илмий, техник ва ижодий масалаларни ечишда фойдаланувчилар учун анча сезиларли бўлди. Бунга асосий сабаб шахсий компьютерларда юқорида эслатиб ўтилган катта ЭҲМлар учун яратилган тадбиқий масалаларни ечиш учун мўлжалланган дастурлар кутубхонасини мавжуд эмаслигидир. Шунинг учун ҳозирда ана шу камчиликни бартараф қилиш йўлида турли хил изланишлар олиб борилмоқда. Шулардан бири сифатида маълум бир синф масалаларини ечишга мўлжаланган амалий дастурлар боғламларини яратишни кўрсатиш мумкин. Бу соҳада НамМПИ нинг "Информатика ва ахборотлар технологияси" кафедрасининг профессор-ўқитувчилари, "Ахборот ва техник таъминот" бўлимининг муҳандис-дастурчилари ва "Информатика ва АТ" йўналиши бўйича таълим олаётган иқтидорли талабалар илмий ва хўжалик ҳисобидаги ишлар асосида изланишлар олиб боришмоқда.

Маълумки, бирор жараённи ҳисоб ишларини бажариб берувчи стандарт дастур ўз ичига бир неча модул-дастурни олиши мумкин. Бу модул - дастурлар аниқ бир масалани ечишга мўлжалланган бўлади. Унга бериладиган ва ундан олинадиган маълумотлар типлари, кўринишлари олдиндан аниқланиб қўйилади. Модул-дастур процедура ёки процедура-функция кўринишида аниқланилиб олиниб компиляция қилинади ва фойдаланувчи яратаётган умумий дастурнинг бош қисмида *unit* файлари рўйҳатига киритилиб қўйилади. (Биз дастурлаш тили сифатида Паскаль тилидан фойдаланганлигимиз учун барча кўрсатмалар шу тилга нисбатан айтилади). Шундай қилиб дастурчи ўзининг дастурлар кутубхонасига эга бўлади ва бу дастурлардан исталган масалани ечиш дастурида фойдаланиши мумкин.

АДБ ни меню принципида ишлашини ташкил этиш дастурдан фойдаланиш унумдорлигини кескин орттиради. Бу ҳолда асосий менюга ечиладиган масалалар синфи кўрсатилса (2-расм) меню ости менюсида эса мос равишда масалаларни ечиш усуллари танланади (3-расм).




2-расм

Ечиш усуллари менюсига зарур бўлган усул танланганда шу усулда мос компиляция қилинган файл ўз ишини давом эттиради. Бу файл стандарт ҳолатда модулли принципда тузилган ишчи дастурни ўз ичига олади. Файлни ишлаши учун зарур маълумотлар берилгач, масаланинг натижалари компьютер экранига, принтерга ёки кўрсатилган йўл бўйича дискка ёзилади.


3-расм

**Назорат саволлари**

1. Математик модел тушунчасини тушунтириб беринг. Бу сўзни яна қаерларда учратгансиз?
2. Ҳисоблаш тажрибаси қандай босқичлардан иборат?
3. Сонли усул нима? Унга қандай талаблар қўйилади?
4. Тақрибий сон нима?
5. Хатоликнинг манбаларини санаб беринг.

## 2-маъруза. Хатоликлар ва уларни бащолаш.

Ы=ув модули бирликлари:

1. Та=рибий сонлар;
2. Хатолик ва унинг турлари;
3. Хатоликлар устида амаллар;
4. Хатоликнинг манбалари;
5. Сонли усулларга =ыйиладиган талаблар.

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Та=рибий сонлар ва уларнинг келиб чи=иш манбалари;
2. Хатоликлар ва уларнинг турлари;
3. Хатоликларни =ышиш, айириш, кыпайтириш;
4. Бошлан\ич хатолик, яхлитлаш хатолиги, масаланинг хатоси, =олди= хатолиги;
5. Сонли усул, сонли усулларнинг я=инлашиш шартлари

ща=ида маълумотга эга быладилар.

### Та=рибий сонлар

ЭЩМ ларда сонлар =ыз\алмас ва сузувчи вергул шаклида тасвирланади. Ща=и=ий сонлар тыплами чексиздир, лекин ЭЩМ нинг сонлар тасвирланувчи =урилмасида чекли хоналарга эга былган сонлар ёзилиши мумкин. Шунинг учун ща=и=ий сонлар ЭЩМ да та=рибий тарзда тасвирланади.

Та=рибий сонлар устида амаллар бажарилганда хатоликни бащолаш катта ащамиятга эга. Хатолик икки хил былади: абсолют ва нисбий хато. Абсолют хато соннинг ани= ва та=рибий =ийматлари орасидаги фар=дан иборатдир, яъни агар *X*-бирор соннинг ани=, $\overline{X}$ эса унинг та=рибий =иймати былса, абсолют хато $\Delta X = |X - \overline{X}|$ былади.Нисбий хато соннинг абсолют хатосини унинг та=рибий =ийматига, нисбатига тенг, яъни $\delta_X = \Delta X / \overline{X}$. Сонларнинг ани= =иймати кып масалаларни ечишда номаълум былади. Шунинг учун пировард абсолют хато тушунчаси киритилади: у абсолют хатолар модулларининг ю=ори чегарасидир, яъни $\Delta \overline{X} \geq |X|$. Соннинг ани= =иймати =уйидаги орали=да былади:

$$\overline{X} - \Delta \overline{X} \leq X \leq \overline{X} + \Delta \overline{X}$$

Арифметик амаллар бажаришда абсолют ва нисбий хатоларнинг ызгаришини кыриб чи=айлик.

Йи\инди (айирма) хатолиги

Иккита $X = \overline{X} + \Delta X$, $y = \overline{y} + \Delta y$ сон берилган былса, уларнинг йи\индиси

$$X + y = \overline{X} + \overline{y} + \Delta X + \Delta y$$

былади. Йи\индининг абсолют хатолиги

$$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y$$

Худди шундай, айирманинг абсолют хатолиги

$$\Delta_{x-y} = \Delta_x - \Delta_y$$

былади.

Кыпайтма хатолиги.

Берилган сонларнинг кыпайтмаси =уйидагича топилади:

$$x \cdot y = (\overline{x} + \Delta x)(\overline{y} + \Delta y) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \Delta y + \overline{y} \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

Бу ифодада охирги кыпайтма бош=а щадларга нисбатан иккинчи даражали кичик ми=дордир.

Шунинг учун уни эътиборга олмаймиз. Демак, кыпайтманинг абсолют хатолиги =уйидагича былади:

$$\Delta_{xy} = \overline{x} \cdot \Delta y + \overline{y} \cdot \Delta x$$

Былинма хатолиги.

Нисбатнинг абсолют хатосини топиш учун айрим алмаштиришларни бажарамиз:

$$\frac{x}{y} = \frac{\overline{x} + \Delta x}{\overline{y} + \Delta y} = \frac{\overline{x} + \Delta x}{\overline{y}(1 + \frac{\Delta y}{\overline{y}})}$$

Нисбий хато $\frac{\Delta y}{\bar{y}} << 1$ эканлигидан фойдаланиб $(1+\frac{\Delta y}{\bar{y}})^{-1}$ ифодани =аторга ёямиз:

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x}+\Delta x}{y}\left[1-\frac{\Delta y}{\bar{y}}+(\frac{\Delta y}{\bar{y}})^2-...\right]$$

Бу ерда щам иккинчи ва ундан ю=ори даражали кичик ми=дорларни щисобга олмаган щолда

$$\frac{x}{y} \approx \frac{\bar{x}}{\bar{y}}+\frac{\Delta x}{\bar{y}}-\frac{\bar{x}}{\bar{y}^2}\Delta y$$

га эга быламиз. Демак,

$$\frac{\Delta x}{y} = \frac{\Delta x}{\bar{y}}-\frac{\bar{x}}{\bar{y}^2}\cdot\Delta y$$

Арифметик амалларни бажаришда нисбий хатолар (б) =уйидагича топилади:

$$\delta_{x+y} = \frac{\Delta(x+y)}{\bar{x}+\bar{y}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}\cdot\frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}}+\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}\cdot\frac{\Delta y}{\bar{y}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}\cdot\delta_x+\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}\cdot\delta_y;$$

$$\delta_{x-y} = \frac{\Delta x - y}{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}}\cdot\delta_x-\frac{\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}\cdot\delta_y;$$

$$\delta_{xy} = \frac{\Delta xy}{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\bar{x}\cdot\Delta y}{\bar{x}\cdot\bar{y}}+\frac{\overline{y\cdot}\Delta x}{\bar{x}\cdot\bar{y}} = \delta_x+\delta_y;$$

$$\delta_{\frac{x}{y}} = \frac{\Delta x/y}{\bar{x}/\bar{y}} = \left(\frac{\Delta x}{\bar{y}}-\frac{\Delta y}{\bar{y}^2}\bar{x}\right)\frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \delta_x-\delta_y \bullet$$

Ю=орида келтирилган формулалар арифметик амаллар бажаришда йыл =ыйиладиган абсолют ва нисбий хатоларни бащолаш имкониятини беради.

**Щисоблаш хатоликлари.**

Масалани ЭЩМ да ечиш жараёнида муайян хатоликларга йыл =ыйиш мумкин. +уйида улардан айримларини келтириб ытамиз.

1. Бартараф =илиш мумкин былмаган хатоликлар.

Бу хилдаги хатоликлар масалани ечишда тузилган математик моделда йыл =ыйилган тахминлар, фаразлар ва шунинг о=ибатида моделда пайдо былган айрим камчиликлар ва =усурлар билан ани=ланади. Масалан, математик модел унга кирувчи ызгарувчилар ва параметрларнинг ызгариш сощасининг маълум бир =исмида яхши натижалар бериб, бош=а бир =исмида эса яро=сиз ечим бериши мумкин. Шунинг учун математик моделнинг "ишлаш" сощасини топиш масала ечиш бос=ичларидаги щал =илиниши лозим былган асосий вазифалардан биридир.

Бартараф =илиш мумкин былмаган хатоликларга математик моделларда ишлатилувчи параметрларнинг дастлабки берилган =ийматларининг хатоликлари щам киради. Параметрларнинг бу =ийматларни щар хил физик, техник, кимёвий тажрибалар, мущандислик изланишлари асосида топилади. Айрим параметрлар эса дастлабки щисоб-китоблар ор=али асосланадики, бу бос=ичнинг ызидаё= уларга щисоблаш хатоликлари =ышилади. Тажрибалар ани=лигини ошириб бу хатоликларни камайтириш мумкин, лекин уларни батамом бартараф этиб былмайди. Щисоблашларда математик моделда =атнашувчи параметрларнинг дастлабки =ийматлари бир-бирига я=ин тартибдаги хатоликларга эга былишига эришиш зарур. Чунки маълум параметрларнинг жуда ю=ори тартибдаги ани=лик билан олиниши якуний натижаларни щам шундай ани=ликда олишга щамма ва=т имконият яратмайди.

2. Математик усулларнинг хатоликлари.

Математик моделдаги тенгламаларни щамма ва=т щам ани= усуллар билан ечиб былмайди. Фа=ат айрим хусусий щоллардагина бунинг имконияти мавжуд. Лекин олинган ечим кыпинча жуда мураккаб кыринишда былади, улар асосида топилган кырсаткичларнинг сон =ийматларини ЭЩМда щисоблаш ыз навбатида осон масала эмас. Бундай щолларда масала та=рибий усуллар ёрдамида ечилади. Табиийки, бунда ани= ечим эмас, балки та=рибий ечим щосил =илинади.

Та=рибий усулларнинг асосини сонли усуллар ташкил =илади. Сонли усулларнинг ани=лигини маълум даражада ошириш мумкин, лекин, бу усулнинг ишлашига кетадиган ва=т ми=дорини кескин кыпайтириб юбориши мумкин. Сонли усул ани=лигини ыта ошириш щамма ва=т щам натижаларнинг ани=лигини оширавермайди. Шунинг учун сонли усулларнинг ани=лигини математик моделга кирувчи параметрлар ани=лигидан бир-икки тартиб ю=ориро= олиш билан чекланиш мумкин.

**Сонли усулларга =ыйиладиган талаблар.**

Математик моделдаги тенгламаларни щар хил сонли усуллар билан ечиш мумкин. Лекин щамма усуллар щам керакли ани=ликдаги ечимни беравермайди. Айни=са масала щозирги замон ЭЩМларида ечилганда щисоблаш алгоритми турли, ызига хос шартларни бажариши керак. Сонли усулларга =ыйиладиган талаблар икки гурущга былинади. Биринчи гурущга сонли усуллар =ылланиши натижасида щосил =илинган дискрет(узу=-узу=)масаланинг математик моделдаги дастлабки масалага мос келиш шартлари киради.

Сонли усулларнинг я=инлашиши, дискрет масалаларда са=ланиш =онунларининг бажарилиши, тур\унлик, корректлик каби талаблар биринчи гурущга киради. Шулардан айримларини =араб ытамиз.

Математик моделдаги параметрларнинг дастлабки =ийматларидаги хатоликни бартараф этиш мумкин былмаган хатолик эканлигини ю=орида кырсатган эдик. Бу хатоликни масала ечимига кырсатадиган таъсир даражасини билиш катта ащамиятга эга. Сонли усулларнинг бундай сезувчанлигини (таъсирчанлигини) тур\унлик деган тушунча ёрдамида текшириш мумкин.

Агар =уйидаги шартлар бажарилса, масала коррект =ыйилган дейилади: 1)ечим мавжуд; 2)ягона; 3)тур\ун. Кырсатилган шартлардан бирортаси бажарилмаса, масала коррект =ыйилмаган дейилади. Бундай масалаларга сонли усулларни =ыллаш фойдасиздир, чунки бунда етарли даражадаги шартларни =аноатлантирувчи сифатли ечимни олиш имконияти йы=дир. Шуни щам айтиш керакки, айрим коррект =ыйилмаган масалаларни ечиш усуллари щам яратилган. Бу усуллар дастлабки =ыйилган масалани ечишга асослангандир. Ёрдамчи масалада =ышимча $\alpha$ параметр =атнашади. Шундай йыл билан дастлабки масала регулярлаштирилади. Агар $\alpha \to 0$ былса, ёрдамчи масаланинг ечими дастлабки масаланинг ечимига интилиши керак.

Ю=оридагига ыхшаш сонли усулларнинг корректлик тушунчаси киритилган. Агар масаладаги параметрларнинг барча =ийматларида сонли ечим мавжуд, ягона ва тур\ун былса, у коррект дейилади.

Сонли усуллар билан топилган ечим масаланинг ха=и=ий ечимига я=ин былиши керак. Буни сонли усулларнинг я=инлашиши тушунчаси ёрдамида тащлил =илишимиз мумкин. Дискретлашган масалалар мисолида я=инлашиш тушунчасини =уйидагича беришимиз мумкин. Агар дискретлаштирилган масаланинг ечими дискретлаштириш параметри нолга интилганда дастлабки узлуксиз масаланинг ечимига интилса, сонли усул я=инлашади дейилади.

Сонли усуллар ичида энг кып ишлатиладиганлари айирмали усуллардир. Бу усуллар ёрдамида узлуксиз математик моделлардан дискрет моделлар щосил =илинади. Бунинг учун масала =аралаётган соща дискрет ну=талар мажмуаси - тыр билан алмаштирилади, тенгламадаги, чегаравий ва бошлан\ич шартлардаги хоссалардан чекли айирмаларга ытилади. Натижада тырнинг тугун ну=таларида ани=ланган функцияларга нисбатан алгебраик тенгламалар системаси щосил =илинади. Маълумки, математик моделлар асосида ётувчи тенгламалар аксарият щолларда физика, механикадаги са=ланиш =онунлари асосида тузилади. Бу =онунлар математик моделдаги тенгламалар дискрет тенгламалар - чекли айирмали схемалар билан алмаштирилганда щам бажарилиши керак. Бундай чекли айирмали схемаларга консерватив схемалар дейилади. Консерватив схемалар тенгламалар ечимини физик ну=таи назардан ты\ри олиш имкониятини беради. Шунинг учун чекли айирмали схемаларнинг консервативлик шарти масалалар ечишда бош=а шартлар =атори текширилиши керак.

Сонли усулларга =ыйиладиган талабларнинг иккинчи гурущини дискрет моделни ЭЩМда ытказиш имкониятлари ташкил =илади. Сонли усуллар шундай алгоритмларга олиб келиши керакки, ЭЩМ нинг хотира =урилмаси улар учун етарли былиши керак ва щисоб-китоб ва=ти иложи борича кам былиши керак.

Сонли усулларга =ыйиладиган талабларнинг иккинчи гурущини дискрет моделни ЭЩМда ытказиш имкониятлари ташкил =илади. Сонли усуллар шундай алгоритмларга олиб келиши керакки, ЭЩМнинг хотира =урилмаси улар учун етарли былиши керак. Щисоблаш алгоритмлари етарли самарадорликка эга былиши керак. Алгоритмдаги арифметик ва манти=ий амаллар сони иложи борича кам былиб, у ЭЩМнинг хотира =урилмасида кам щажмни эгаллаши керак.

«Хаётда барча ылчов натижалари нисбийдир» деган фикрга сиз =андай =арайсиз? Фикрингизни изощланг.

**Назорат саволлари**

1. Хатоликнинг =андай турлари мавжуд?
2. Абсолют ва нисбий хатоликка таъриф беринг.
3. Хатоликнинг манбалари =аерда?
4. Сонли усул тушунчаси нима?
5. Нима учун сонли усуллар ишлатилади?
6. Сонли усулларга =андай талаблар =ыйилади?

## 3-маъруза: Чизи=сиз тенгламаларни сонли-та=рибий ечиш усуллари. Орали=ни тенг иккига былиш усули.

Ы=ув модули бирликлари:

1. Чизи=сиз тенглама;
2. Чизи=сиз тенгламани ечиш усуллари
3. Итерацион усуллар
4. Илдизнинг мавжудлик шарти;
5. Орали=ни тенг иккига былиш усули.

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

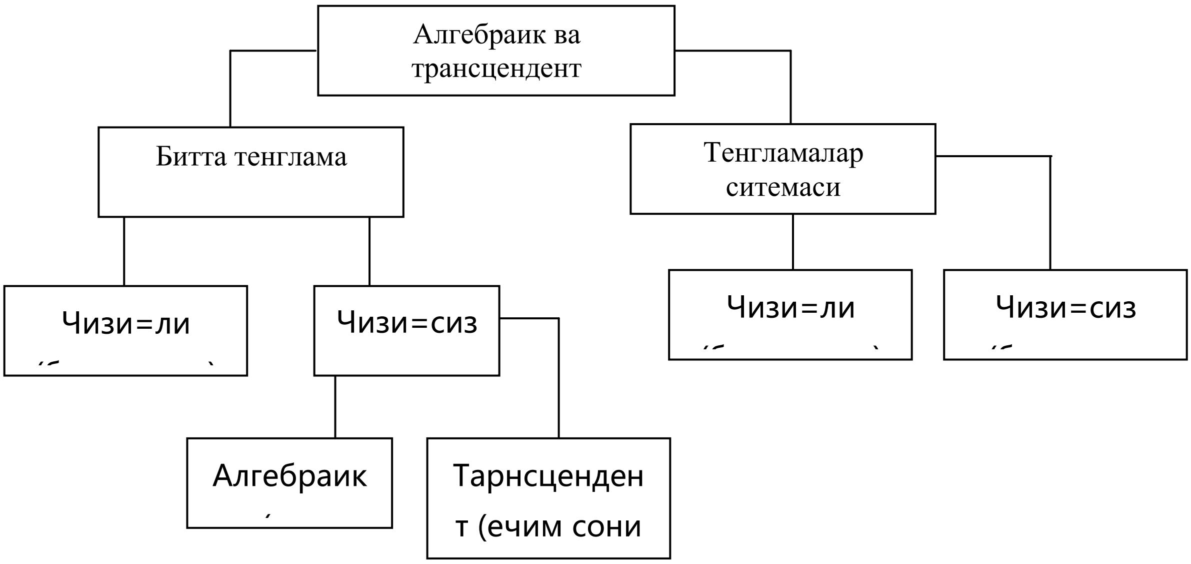
Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Чизи=ли ва чизи=сиз тенгламалар;
2. Чизи==сиз тенгламаларни ечишнинг ани= ва итерацион усуллари
3. Чизи=сиз тенглама илдизи ётган орали=ни ажратишнинг аналитик ва график усуллари;
4. Илдизнинг мавжудлик шартидан =андай фойдаланиш;

5. Орали=ни тенг иккиша былиш усулининг геометрик маъноси ва мощияти;
6. Усулнинг афзаллиги ва камчилиги

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Чизи=ли былмаган тенгламалар ва уларнинг системаларига кыпгина илмий изланишларда ва мущандислик - лойищалаш масалаларини ечишда дуч келамиз. Алгебраик масалалар классификацияси 4-расмда келтирилган.




4-расм

Чизи=сиз тенгламаларни умумий шаклда =уйидагича ёзамиз:

$$f(x)=0$$

Бунда f(x)-бирор узлуксиз функция.

Чизи=ли былмаган тенгламаларни 4-расмдагидай икки хилга былиш мумкин: алгебраик ва трансцендент. Алгебраик тенгламалар деб алгебраик (бутун, рационал, иррационал) функциялардан ташкил топган тенгламаларга айтилади. Агар тенгламада бош=а функциялар (тригонометрик, кырсаткичли, логарифмлик ва х.к) =атнашса, бундай тенгламага трансцендент тенглама дейилади.

Чизи=сиз тенгламаларни ечиш усуллари иккита гурущга былинади: ани= (ты\ри) ва итерацион (та=рибий) усуллар. Ани= усул ёрдамида тенгламанинг ечими формулалар ор=али ани=ланади. Масалан,квадрат тенгламанинг ечимини топишни шу усулга мисол сифатида кырсатиш мумкин:

$ax^2+вx+c=0$ -чизи=сиз тенгламани ечимлари:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Итерацион усуллар билан чизи=ли былмаган тенгламаларни ечиш бир неча бос=ичга былинади. Биринчидан, ечимлар сонини, уларнинг сонлар ы=ида та=симланишини бащолаш керак.

Илдизларни ажратишнинг умумий усули йы=. Бунинг учун маълум =адам билан ызгарувчи х ларда f(x) функцияниниг =ийматларини щисоблаб =уриш мумкин. Агар ёнма-ён иккита a ва b ну=таларда f(x)функция щар хил ишорали =ийматларни =абул =илса, яъни f(a). f(b)<0 былса, f(x) функция узлуксиз былганлиги учун [a,b] кесмада унинг щеч былмаганда битта илдизи былади.

Итерацион усулларда илгари кырилганидек ечимнинг дастлабки $x_0$ ихтиёрий я=инлашиши олинади ва у кетма-кет ани=лаштирилиб борилади. Натижада ечимнинг $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ кетма-кетлиги щосил =илинади. Агарда бу кетма-кетлик $n \to \infty$ былганда ани= х ечимга интилса, итерация жараёни я=инлашади дейилади.

Ечимнинг та=рибий =ийматини топиш учун график усулдан щам фойдаланиш мумкин. Бунда f(x) функциянинг ани=ланиш сощасида графиги чизилиб, унинг Ох ы=и билан кесишган ну=талари топилади. Бу ну=таларга мос келувчи х лар та=рибий ечим деб =абул =илинади. Айрим щолларда f(x)=0 тенгламани унга тенг кучли былган $f_1(x)=f_2(x)$ кыринишда тасвирланади. Кейин $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг графиклари алощида-алощида чизилиб, иккала графикнинг кесишиш ну=талари топилади. Бу ну=таларнинг абсциссалари илдизларнинг та=рибий =ийматлари деб =абул =илинади. Та=рибий илдиз ётган [a,b] кесмани ща=и=атда ты\ри олинганлигини аналитик йыл билан текшириб кыриш мумкин. Бунинг учун яна илдизнинг мавжудлик шарти f(a)f(b)<0 дан фойдаланамиз. Агар шарт бажарилса орали= ты\ри танланган былади.

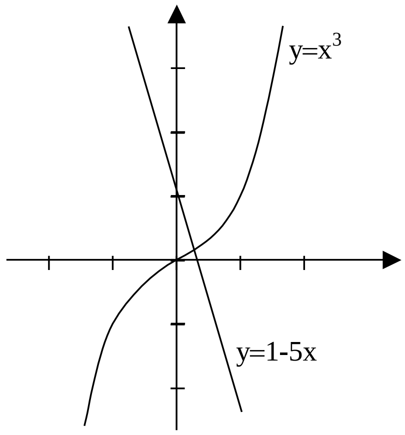
*Айтайлик, f(a)f(b)=0 шарт бажарилди. Сиз бу вазиятда =андай йыл тутасиз?*

М и с о л. Ушбу

$$f(x)=X^3+5X-1 \qquad (5.2)$$

тенгламанинг та=рибий илдизини $\varepsilon=0,01$ ани=ликда топинг.

Е ч и ш. Аввало илдизни ажратиб олишимиз керак. Бунинг учун $f_1(x)=X^3$ ва $f_2(x)=1-5X$ функцияларнинг графигини чизиб оламиз (5-расм). $x=0$ ва $x=1$ ну=таларда f(x) функция щар хил ишорали =ийматларига эга:




5-расм

$f(0)=-1<0, \ f(1)=5>0.$

Демак, илдиз [0;1] кесмада ётади.Орали= ани=лангач,турли усуллардан бирини ишлатиб, керакли ани=ликдаги ечимни олиш мумкин.

Итерацион усулларнинг айримларини =уйида =араймиз.

1. О р а л и = н и т е н г и к к и г а былиш (б и с е к ц и я) у с у л и

Бу усул итерацион усуллар ичида энг соддасидир. Уни ишлатиш учун махсус шартларнинг бажарилиши талаб =илинмайди. Фа=ат изланаётган илдиз ажратилган былиши керак яъни $x=c$ илдиз [а,в] кесмада ётган былсин. Кесманинг ыртаси $c_0=(a+в)/2$ да $f(c_0)$ни щисоблаймиз. Берилган [а,в] кесмани иккита тенг [a, $c_0$], [$c_0$,b] кесмаларга былиб, уларнинг четларида f(x) функциянинг ишораларини текширамиз. +айси кесманинг четки ну=таларида f(x) щар хил ишорали =ийматларни =абул =илса, $x=c$ илдиз ыша кесмада былади. У ёки бу кесмада шундай былиши ани=, чунки илдиз [а,в] кесмада ётади. Илдиз ётмаган [a, $c_0$] ёки [$c_0$,b] кесмани ташлаб юбориб, =олган кесмани яна иккига быламиз. Масалан $f(a).f(c_0)<0$ былса, $c_1=(a+c_0)/2$ деб олиб, $f(c_1)$ ни щисоблаймиз. Яна [a, $c_1$],[ $c_1$,$c_0$] кесмаларда f(x)нинг ишоралари текширилади ва щоказо. Шундай =илиб, щар бир итерациядан сынг кесма узунлиги икки баравар =ис=ариб боради.

Бу жараённи то кесма узунлиги ε дан кичик былмагунча давом эттирилади.Бунда ε - ечим ани=лиги. Охирги кесманинг ыртаси та=рибий ечим сифатида =абул =илинади.

Ю=орида =айд =илинган ижобий щислатлари билан бирга дихотомия - кесмани иккига былиш усулининг камчилиги -секин я=инлашишини щам айтиб ытиш лозим. Шунинг учун бу усул кетма-кет я=инлашишларнинг ю=ори тезлиги талаб =илинмаган щолларда ишлатилади.

мм *Чизи=сиз тенглама ечимининг мавжудлигини ани=лашда орали=ни каттаро= =илиб танланса, =андай «салбий о=ибатлар»га олиб келади.*

**Назорат саволлари**

1. +андай тенгламаларни чизи=сиз тенгламалар деб аталади?
2. Чизи=сиз тенглама илдизи ётган орали=ни =андай ажратилади?
3. Чизи=сиз тенглама илдизининг мавжудлик шартини кырсатинг.
4. Чизи=сиз тенгламани та=рибий щисоблаш усулларини санаб беринг.
5. Орали=ни тенг иккига былиш усулининг афзаллиги ва камчилиги нимада?

## 4-маъруза: Уринмалар ва ватарлар усули

Ы=ув модули бирликлари:

1. Дастлабки я=инлашиш;
2. Уринмалар усулининг ишчи формуласи;
3. Ватарлар усулининг ишчи формуласи;
4. Бирлашган усулинг мощияти.

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

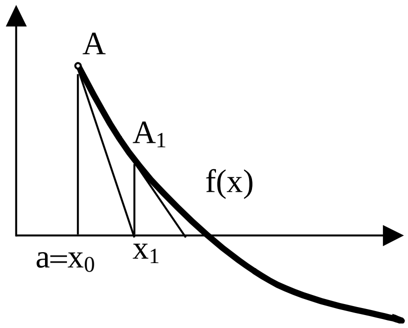
1. Уринмалар усулининг афзаллиги;
2. Уринмалар усули учун дастлабки я=инлашишни ани=лаш;

3. Уринмалар усулининг асосий ишчи формуласини келтириб чи=ариш;
4. Ватарлар усулининг уринмалар усулидан фар=и;
5. Уринмалар ва ватарлар усулини =андай =илиб биргаликда ишлатилиши

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Уринмалар усули

Орали=ни тенг иккига былиш усулидаги амаллар сонининг кыплиги уринмалар усулида деярли учрамайди. Агар дастлабки я=инлашиш ты\ри танланса, та=рибий ечим жуда тез топилади. Усулнинг мощияти =уйидагича:




$f(x)=0$ тенглама [a,b] орали=да битта та=рибий илдизга эга деб фараз =илайлик. Дастлабки я=инлашиш сифатида a ёки b ну=талардан бирини олишимиз мумкин ва шу на=тадан уринма ытказамиз. Айтайлик уринма А ну=тадан ытсин. Уринманинг х ы=и билан кесишган ну=таси $x_1$ га мос ну=тани $A_1$ деб олиб, энди $A_1$ ну=тадан уринма ытказамиз, ва щоказо. Уринманинг х ы=и билан кесишган ну=талари та=рибий илдиз х га етарли ани=ликкача я=инлашгунча жараён давом этади.

Демак, $x_0$ ни ты\ри танлаш жуда мущимдир. Шунинг учун дастлабки я=инлашиш $x_0$ ни танлаш масаласига алощида эътибор берамиз.

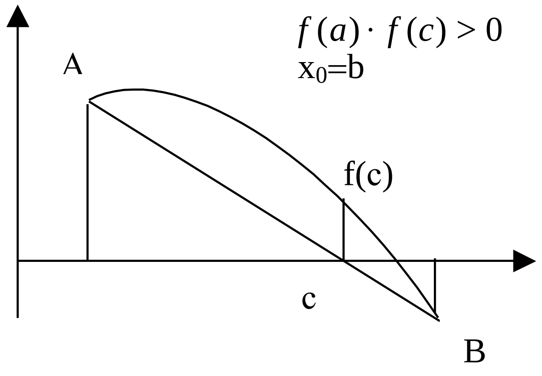
Бунинг учун (a,f(a)) ва (b,f(b)) ну=талардан ытувчи ватарни ох ы=и билан кесишиш ну=таси с нинг =ийматини ты\ри чизи= тенгламасидан ани=лаймиз.

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}. \qquad (5.3)$$

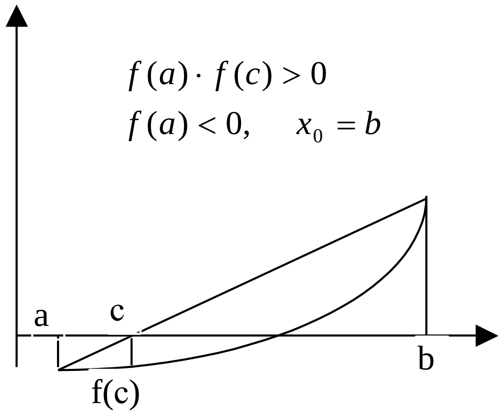
Ватарнинг Ох ы=и билан кесишиш ну=таси $c_0$ да $x=c_0$, $y=0$ былади.

$$c=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a)$$

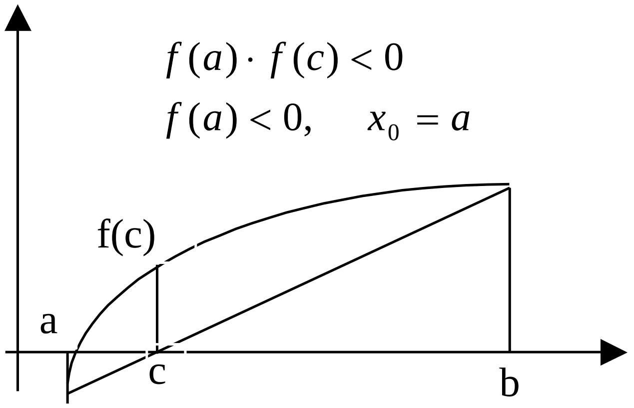
c маълум былгач, f(c) нинг =ийматини щисоблаш мумкин. Былиши мумкин былган барча щолларни кыриб чи=айлик:



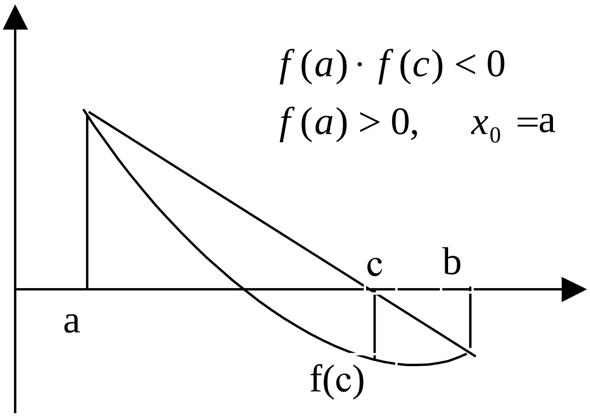

1)




2)




3)




4)

1) f(a)>0 ва f(a)f(c)>0 ,былса $x_0$=b

2) f(a)<0 ва f(a)f(c)>0 ,былса $x_0$=b

3) f(a)<0 ва f(a)f(c)<0 ,былса $x_0$=a

4) f(a)>0 ва f(a)f(c)<0 ,былса $x_0$=a

Шартларни умумлаштириб олиб, f(a)f(c) кыпайтманинг ишораси мусбат-манфийлигига =араб, а ёки в =ийматлардан бирини $x_0$ сифатида олиш мумкин. Энди уринма тенгламаси $y-f(x_0)=f`(x_0)(x-x_0)$ дан уринма х ы=и билан кесишгани учун y=0 деб оламиз.

$x-x_0=-f(x_0)/f'(x_0)$ бундан $x_n=x_{n-1}-f(x_0)/f'(x_0)$;

Хосил былган ишчи формула уринмалар усулининг асосий ишчи формуласи былиб, щисоблашлар $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ шарти бажарилгунча давом эттирилади.

Ватарлар усулининг мощияти =уйидагича: бу усулда щам илдиз ётган [а,в] кесма ани= деб щисоблаймиз. Илдизга я=инлашувчи $c_0$..., $c_n$,... кетмакетликни f(x) функциянинг ватарларини Ох ы=и билан кесишиш ну=талари ташкил =илади.

Шунинг учун (5.3) тенгламадан

$$c_0 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a) \qquad (5.4)$$

ни щосил =иламиз. Бу ну=тада $f(c_0)$ ни щисоблаймиз. Расмда кырсатилган щол учун $f(c_0)<0$. Демак, ечим $[a, c_0]$ кесмада былади. Иккини ватарни А ва $B_1$ ну=талардан ытказамиз. У Ох ы=ини $c_1$ ну=тада кесиб ытади. Бу жараённи давом эттириб керакли ани=ликдаги ечим топилади.Демак (5.4) формула ватарлар усулининг асосий ишчи формуласи экан.

### Ньютон (уринмалар) усули

Бу усулда биринчи навбатда $X_o$-дастлабки я=инлашишни танлаб олинади,яъни та=рибий илдиз ётган [а,в] кесма учларидан бирини Хо сифатида олиш мумкин.

### Бирлашган усул

Айрим щолларда (5.1) тенгламанинг илдизини тезро= топиш учун ватарлар ва уринмалар усуллари биргаликда ишлатилади.

Бу бирлашган усулни тушуниш учун 7- ва 8-расмларда кырсатилган щолларни яна бир бор =араймиз. Мисол учун 7-расмда тасвирланган $f'(x)<0$, $f''(x)>0$ щол ыринли былсин. Бош=а щоллар щам худди шундай тащлил =илиниши мумкин. А ва В ну=талардан ватар ытказиб, унинг Ох ы=и билан кесишган $c_0$ ну=тасини топамиз. Бу ну=та ватарлар усулида келтириб чи=арилган (5.4) формула билан топилади. Изланаётган ечим $(a, c_0)$ кесмада былади. Энди А ну=тадан уринма ытказамиз ва унинг Ох ы=и билан кесишган ну=таси $b_0$ ни топамиз. (5.6) формулага биноан:

$$b_0 = a - f(a)/f'(a).$$

Шундай =илиб, ечим ётган [a,b] кесма $[b_0, c_0]$ кесмагача =ис=артирилди. Худди шу йысинда ынг тарафдан ватарлар усули ва чап тарафдан уринмалар усули билан я=инлашиб $x=c$ нинг та=рибий =иймати топилади.

Ечимнинг =айси тарафидан =айси усул билан я=инлашиш кераклигини уринмалар усулидаги $f'(x)f''(x)>0$ шартнинг бажарилишига кыра ани=лаймиз.

Агар бу шарт [a,b] кесманинг ёки бу кесмани ыз ичига олувчи ихтиёрий кесманинг чап ёки ынг четларида бажарилса, шу тарафдан уринмалар усули, =олган тарафдан эса ватарлар усули ишлатилади.

**мв** *Уринмалар усулининг ишчи формуласида учрайдиган f`(x) функцияни дастурга =андай киритасиз?*

**Назорат саволлари**

1. Ватарлар усулига мос ишчи формулани кырсатинг.
2. Уринмалар усулининг бош=а усуллардан =андай афзаллик томони бор?
3. Уринмалар усулида дастлабки я=инлашиш =андай топилади?
4. Уринмалар усулига мос ишчи формулани =андай щосил =илинади?

## 5-маъруза: Оддий кетма-кетлик (итерация) усули

Ы=ув модули бирликлари:

1. Оддий кетма-кетлик усулининг мощияти;
2. Усулнинг я=инлашиш шартлари;
3. Геометрик маъноси.

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Оддий кетма-кетлик усулида дастлабки я=инлашишни =андай танлаш;
2. Усулда я=инлашиш жараёнининг =андай содир былиши;
3. Я=инлашувчи ва узо=лашувчи жараёнларнинг геометрик маъноси ща=ида маълумотга эга быладилар.

Бу усулда кетма-кет я=инлашишлар $f(x)=0$ тенглама

$$x=\varphi(x) \qquad (1)$$

кыринишга келтириб тузилади.

[a, b] кесмада ищтиерий $x_0$ ечимнинг бошлан\ич я=инлашишини ани=лаймиз. Буни (1) тенгламанинг ынг тарафига =ыйиб, чап тарафда ечимнинг биринчи я=инлашишини топамиз:

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Топилган я=инлашишни кетма-кет (1) нинг ынг тарафига =ыйиб бориб, чап тарафда янги я=инлашишлари топамиз:

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\ n=0,1,2,... \qquad (2)$$

Агар $x_0,x_1,...$ кетма-кетлик чекли лимитга эга былса, у (1) тенгламанинг ечими былади.

Итерация жараёни $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ шарт бажарилгунча давом эттирилади.

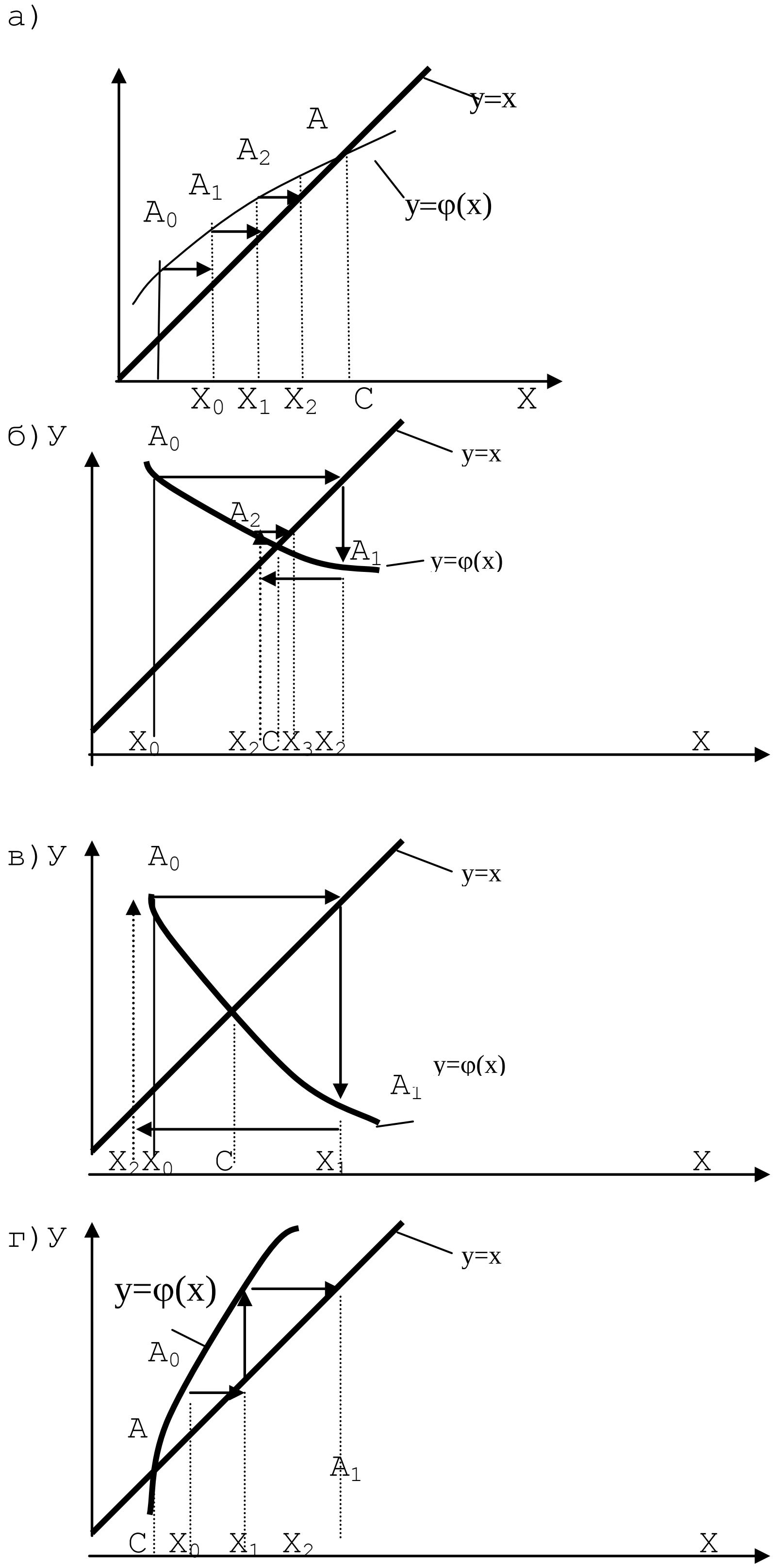
Итерация усулининг я=инлашиш масаласига тыхтаб ытамиз.
Юритиладиган мулощазалар 9-расмда ыз тасвирини топган. (1)
тенгламанинг ечими $y=x$ ва $y=\varphi(x)$ функциялар графикларининг кесишган ну=тасининг абциссасига тенг. Расмларда у $x=c$ ну=тага мос келади.

Итерация усулининг умумий алгоритмига биноан $x=x_0$ дастлабки я=инлашишни танлаб оламиз. Биринчи я=инлашиш
$x_1 = \varphi(x_0)$ былади. Бу геометрик ну=таи назардан $x\varphi$ ну=тага мос келувчи $A_0(x_0,\varphi(x_0))$ну=тадан Ох ы=ига параллел ты\ри чизи= ытказиб, унинг $y=x$ ты\ри чизи= билан кесишиш ну=тасининг абсциссасини топиш демакдир. Бу ну=тада $\varphi(x_1)$ ни щисоблаймиз. Бунинг натижасида $A_0(x_1,\varphi(x_1))$ ну=та топилади. Бу ну=тадан яна Ох ы=ига параллел ты\ри чизи= билан кесишган ну=тасининг абсциссаси, яъни $x_2=\varphi(x_1)$ ни топамиз ва щ. к. 40-а расмдан кыриниб турибдики, $A_0$, $A_1$,... ну=талар $A(c,\varphi(c))$ ну=тага я=инлашиб боради ва ыз навбатида $x_0,x_1,...$ кетма-кетлик $x=c$ лимитга интилади. Демак,$0<\varphi'(x)<1$ былганда итерация жараёни я=инлашар экан.

Энди $-1<\varphi'(x)<0$ былган щолни =араймиз (40-б-расм). Кетма-кет я=инлашишлар расмда стрелкалар ёрдамида я==ол кырсатилган. Бунда, фа=ат, олдинги щолдан фар=ли равишда $x_0$, $x_1$ ... я=инлашишлар $x=c$ ечимнинг щар хил тарафида ётади. Бу щолда щам я=инлашувчи итерация жараёнига эга былдик.

+олган $\varphi'(x)<-1$, $\varphi'(x)>1$ (40-в, г расмлар) щолларда итерация жараёни узо=лашувчи былади, $\varphi'(x)<-1$ былганда я=инлашишлар $x=c$ ечимнинг иккала тарафида узо=лашиб боради. $\varphi'(x)>1$ былганда эса улар ечимнинг бир тарафида узо=лашади.

Бу мулощазаларни якунлаб =уйидаги хулосага келамиз: итерация усули =аралаётган сощада $|\varphi'(x)|<1$ былганда я=инлашади ва $|\varphi'(x)|\geq 1$ былганда узо=лашади.




40 - расм

Яна (5.2) тенгламани =араймиз. Уни (5.7) га асосан

$$x=0.5+\exp(-0,5x) \qquad (5.9)$$

кыринишдан ёзиб оламиз.

Итерация усулининг я=инлашиш шартини [1;1,5] кесмада текшириб кырамиз. Тенгламанинг ынг тарафи – $\varphi(x)=0,5+\exp(-0,5x)$ функция $\varphi(1)\approx1,106$дан $\varphi(1,5)\approx0,972$гача монотон камайиб боради. Унинг $\varphi'(x)=-0,5\exp(-0,5)$ хосиласи щам монотон функция былиб,
$\varphi'(1)=-0,303$ дан $\varphi'(1,5)\approx-0,236$ гача ысади. Демак, =аралаётган [1;1,5] кесмада $|\varphi'(x)|<1$ шарт бажарилади. Шу сабабли (5.9) тенглама учун итерация усули я=инлашади. Ечимнинг дастлабки я=инлашиши сифатида $x_0=1,5$ни олиб итерациялар тузамиз:

$$x_1=0,5+\exp(-0,5.0,5)\approx0,9724$$
$$x_2=0,5+\exp(-0,5.0,9724)\approx1,115$$
$$x_3=0,5+\exp(-0,5.1,115)\approx1,073,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Итерацияларни давом эттириб 11-=адамда $\varepsilon=10^{-6}$ ани=ликда $x=1,082128$ та=рибий ечимини топамиз. $-1<\varphi'(x)<0$ былганлиги учун кетма-кет я=инлашишлар ечимнинг иккала тарафидан былади. Ю=орида келтирилган я=инлашишларга =араб бунга ишонч щосил =илишимиз мумкин.

мс *+айси усулни танлаганда чизи=сиз тенламанинг ечими ани=ро= чи=ади?*

**Назорат саволлари**

1. Кетма-кет я=инлашиш усулининг ызига хос хусусияти нимада?
2. Усулнинг асосий мощияти =андай?
3. Усулнинг я=инлашиш шарти =айси?
4. Усулга мос ишчи формулани =андай щосил =илинади?

**6-маъруза: Чизи=ли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг Гаусс усули.**

Ы=ув модули бирликлари:

1. Чизикли алгебраик тенгламаларни системаси (ЧАТС) нинг умумий кыриниши.
2. ЧАТС ни ечиш усуллари.
3. Гаусс усулининг умумий куриниши.

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. ЧАТС нинг турли хил кыринишлари
2. ЧАТС ни ечишнинг тугри ва итерацион усуллари
3. Детерминант хисобининг система ечимнинингмавжудлигига богли=лиги
4. Гаусс усулининг ишчи алгоритми , тугри ва тескари йылнинг мощияти
5. Усулнинг афзалликлари

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Чизи=ли алгебранинг сонли усулларига чизи=ли алгебраик тенгламалар системасини ечиш, матриканинг тескарисини топиш, детерминантлар щисоблаш каби сонли усуллар киради.

Чизи=ли алгебраик тенгламалар системасини ечиш усуллари сонли усуллар орасида мущим ырин тутади. Бунинг асосий сабаби хал= щыжалигининг жуда кып масалалари бундай системаларни ечиш билан бо\ли=дир.

Ушбу n-тартибли n та чизи=ли алгебраик тенгламалар системаси берилган былсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.5)$$

Бу ерда $a_{ij}(i,j=\overline{1,n})$ лар маълум сонлардан иборат былиб, номаълумларнинг к о э ф ф и ц и е н т л а р и дейилади, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - номаълумлар, $b_1$, $b_2, \ldots$, $b_n$- (2.5) система тенгламаларининг озод щадлари, улар щам маълум сонлардан иборат.

+уйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Бунда A-n та сатр ва n та устундан иборат квадрат матрица, $a_{ij}$ элементларнинг сони $n^2$ та, X B-n та элементлардан иборат вектор устунлар.

Матрицаларни бир-бирига кыпайтириш хоссасидан фойдаланиб, (2.6) белгилашларни щисобга олган щолда (2.5) системани матрица кыринишда ёзамиз:

$$AX=B. \qquad (2.7)$$

А матрица ~~тур~~ли кыринишларда былиши мумкин. Агар фа=ат $a_{ii}(i=\overline{1,n})$ элементлар нолдан фар=ли былиб, бош=а элементларнинг щаммаси нолга тенг былса, А матрица **диагонал матрица** дейилади, $a_{ij}=a_{ji}(i,j=\overline{1,n})$ былса, А **симметрик матрица** дейилади.

Масалан,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ -симетрик матрица;

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ -диагонал матрица.

Яна айрим махсус кыринишдаги матрицаларга мисоллар келтирамиз.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$- ю=ори учбурчак матрица; диагонал ва ундан ю=орида турган элементлар нолдан фар=ли, =олган элементлар эса нолга тенг;

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ - уч диагоналли матрица; диагональ ва унга параллел былган иккита =ышни йыналиш быйича элементлар нолдан фар=ли, бош=а элементлар нолга тенг.

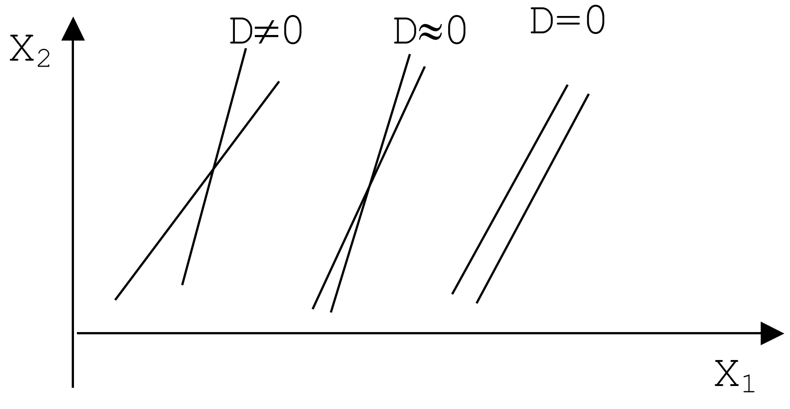
Чизи=ли алгебраик тенгламалар системасини ечиш деб (2.5) ёки (2.7) системалардан $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ номаълумларни топишга айтилади. Топилган $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ =ийматлар (2.5) ёки (2.7) системаларга =ыйилганда тенгламаларни айниятга айлантирса, улар системанинг **ечими** дейилади.

Системанинг ягона ечими мавжудлигининг зарурий ва етарли шарти А матрица детерминантининг нолдан фар=ли былишидир, яъни

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .................. \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.8)$$

Агар $D=0$ былса, системалар махсус системалар дейилади ва уларнинг ечими ёки мавжуд эмас, ёки чексиз кып былади (бундай системаларни айниган системалар деб аталади).

Таъкидланган щолларни иккинчи тартибли системалар мисолида геометрик тасвирлаш мумкин. Бунда системанинг щар бир тенгламаси текисликда ты\ри чизи=ларни ифодалайди. Ты\ри чизи=лар кесишиш ну=тасининг координаталари системанинг ечимидир. $D=0$ былганда ты\ри чизи=лар ёки устма-уст тушади ёки параллел былади(4-расм).




4-расм

D≈0 былган щол алощида эътиборга моликдир. Ты\ри чизи=лар бу щолда деярли параллел былади ва кесишиш ну=тасини топишда нотур\унликка эга быламиз, яъни (2.5) система коэффицентларининг озгина ызгариши (айни=са озод щадларнинг) кесишиш ну=тасининг у ёки бу тарафга силжиб кетишига олиб келади. Бундай системаларга ёмон шартланган системалар дейилади. Лекин D≈0 эканлигидан щамма ва=т щам системанинг ёмон шартланганлиги чи=авермайди, яъни D≈0 былиши системанинг шартланганлигининг зарурий шартидир. Етарли шарт эса бош=ачадир. У =уйидаги А матрица шартланганлиги ылчами деб аталувчи

$$\nu(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \qquad (2.9)$$

=иймат билан ани=ланади, бу ерда $A^{-1}$ тескари матрица. Бу параметрнинг =иймати билан (2.5) система ечимининг озод щадларга нисбатан тур\унлиги щам ани=ланади. Шартланганлик ылчами ν(A) =анча катта былса, (2.5) система шунча ёмон шартланган былади, аксинча (2.9) быйича топилган =ийматлар =анчалик кичик былса, система шунча яхши шартланган былади. (2.9) да ты\ри А ва тескари $A^{-1}$ матрицаларнинг нормаси [I]да келтирилган формулалар билан ани=ланиши мумкин. Лекин щамма нормаларда ν(A)≥1 былади. Одатда $\nu(A)=10^3 \% 10^4$ былса, система ёмон шартланган дейилади. (2.9) формуладан шартланганлик ылчамининг тескари $A^{-1}$ матрица нормасига бевосита бо\ли= эканлиги кыриниб турибди. Тескари матрица элементлари =анчалик катта былса, шартланганлик ылчами щам шунча катта былади.

Умуман D≠0 былганда щам (2.5) система ёмон шартланган былиши мумкин, ва аксинча, D≈0 былганда система яхши шартланган былган щоллар учрайди.

Чизи=ли алгебраик тенгламалар системасини ечиш усуллари иккита гурущга былинади: ты\ри (ани=) ва итерацион (та=рибий) усуллар.

Ты\ри усуллар ёрдамида системанинг ечими чекли сондаги ани= арифметик амаллар бажариш ор=али щисобланади. Бу усуллар кенг синфдаги системаларни ечиш имкониятига эга. Лекин, шу билан бирга, улар айрим камчиликлардан щам щоли эмас. Масалан, улар ЭЩМда ишлатилганда щотира =урилмасида система коэффицентлари ва озод щадларнинг барчаси са=ланиши керак. Система коэффицентлари матрицаси

А нинг элементлари сийрак былса, яъни 0 га тенг  элементлари щам былса, уларни хотира =урилмасига ёзиш кып жойни эгаллайди. Бундан таш=ари, усуллар асосида ётувчи алгоритмлар ани=  былишига =арамасдан ечим маълум даражада та=рибий топилади. Чунки ящлитлаш хатоликлари кетма-кет бажарилувчи щисоблаш бос=ичларида  доимо жамланиб боради. Айни=са ю=ори тартибли ва ёмон шартланган системалар учун бу бутунлай яро=сиз ечим олинишига сабаб  былиши  мумкин. Шунинг учун ты\ри усуллар яхши  шартланган, паст тартибли, элементлари сийрак былмаган матрицали системаларни ечишда ишлатилади.

Итерацион усуллар - бу кетма-кет  я=инлашиш усулларидир.  Бу усуллар ты\ри усулларга нисбатан мураккабро=. Лекин  кып  щолларда итерацион усулларни ишлатиш маъ=улро=дир. Чунки бу  усулларни ишлатганда ЭЩМ хотира =урилмасида система матрицасининг барча элементларини са=лашга щожат йы=. Ундан таш=ари хатоликлар щам итерацион усулларда жамланиб бормайди. Щар бир итерация  =адамида щисоб-китоб гыё янгидан бошлангандек давом этиб кетаверади.  Лекин итерацион усулларни щамма ва=т щам  ишлатавериш мумкин эмас.Бунинг учун маълум шартлар бажарилиши керак. Акс  щолда  итерация жараёни узо=лашувчи былиб, етарли ани=ликдаги ечимни олиш имконияти былмайди. Бу шартлар =уйиро=да, итерацион усуллар берилган параграфда келтирилган.

Ты\ри усулларга Крамер, Гаусс, бош элементлар,  квадрат  илдизлар ва бош=а усуллар киради.  Итерацион  усулларга  эса  оддий итерация, Зейдель, релаксация ва бош=а усуллар киради.

**мв** *Сизга бирорта ЧАТС берилган былса, уни ечиш учун =айси усулни танлаган былар эдингиз?*

Гаусс усули бизга таниш былган номаълумларни кетма-кет  йы=отиш усулининг умумий схемасидан иборатдир. Мулощазаларни  асоссиз мураккаблаштирмаслик учун ушбу тырт  номаълумли  тыртта  тенгламалар системасини кыриб чи=амиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases} \qquad (2.9)$$

Биринчи тенгламада $a_{11}\neq 0$ былсин. Агар бу шарт бажарилмаса, биринчи тенглама сифатида бош=а, $x_1$ олдидаги коэффиценти 0 га тенг былмаган тенгламани олишимиз мумкин. Бир ва=тнинг ызида барча $a_{ij}(i=\overline{1,4})$ коэффицентлар 0 - га тенг былиши мумкин эмас. Шу сабабли $a_{11}\neq 0$ шарти щамма ва=т бажарилувчи шартдир. (2.9) тенгламалар системасида биринчи тенгламани $a_{11}$ коэфицентга былиб,

$$x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15} \qquad (2.10)$$

бу ерда

$$b_{1j}=a_{1j}/a_{11}, \quad j>1$$

тенгламани щосил =иламиз.

Охирги (2.10) тенгламадан фойдаланиб (2.9) системадан $x_1$ номаълумни йы=отиш (чи=ариш) мумкин. Бунинг учун (2.10) тенгламани $a_{21}$га кыпайтириб (2.9) системанинг иккинчи тенгламасидан, $a_{31}$ га кыпайтириб учинчи тенгламасидан ва нищоят $a_{41}$ га кыпайтириб тыртинчи тенгламасидан айириш кифоя. Бу амалларни бажариш натижасида

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \qquad (2.11)$$

система эга быламиз. Бунда

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}-a_{i1}b_{1j} \quad (i,j\geq 2)$$

Энди (2.11) системанинг биринчи тенгламасини $a_{22}^{(1)}\neq =0$ коэффицентга быламиз:

$$x_2 = b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}, b_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, j>2. \qquad (2.12)$$

Ю=оридаги сингари бу ерда щам $a_{22}^{(1)}\neq 0$ шартни щамма ва=т таъминлашимиз мумкинлигини кырсатиш =ийин эмас.

Учинчи тартибли (2.11) системада худди x1 номаълум йы=отилгани каби, $x_2$ номаълумни йы=отамиз:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{2} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{2} \end{cases} \qquad (2.13)$$

Бу ерда $a_{ij}^{(2)}= a_{ij}^{(1)}- a_{j2}^{(1)}b_{3j}^{(1)}$ $(i,j\geq 3)$ коэффицентлар (2.12) тенгламани $a_{32}^{(1)}$,$a_{42}^{(1)}$ларга кыпайтириб, (2.11) системанинг иккинчи ва учинчи тенгламаларидан мос равишда айиришдан щосил былади.

Энди (2.13) системанинг биринчи тенгламасини $a_{33}^{(2)}\neq 0$ коэффициентга быламиз:

$$x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}, b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)} / a_{33}^{(2)}, j > 3. \quad (2.14)$$

Охирги тенгламадан фойдаланиб (2.13) системадан $x_3$ номаълумни йы=отамиз:

$$\begin{gathered} a_{44}^{3}x_4 = a_{45}^{3}, \\ a_{ij}^{3} = a_{ij}^{2} - a_{i3}^{2}b_{3j}^{3} (i, j \geq 4) \end{gathered} \quad (2.15)$$

$x_4$ номаълум (2.15) тенгламадан осонгина топилади:

$$x_4 = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} = b_{45}^{(3)}. \quad (2.16)$$

+олган номаълумлар эса (2.14), (2.12) ва (2.10) тенгламлардан топилади:

$$\begin{gathered} x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4, \\ x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{23}^{(1)}x_3 - x_{21}^{(1)}x_4, \\ x_1 = b_{15} - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4 \end{gathered}$$

$a_{11}$, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, $a_{44}^{(3)}$ коэффицентлар (2.9) системанинг етакчи элементлари дейилади. Ю=оридаги шартларга биноан уларнинг барчаси нолдан фар=ли былади.

Шундай =илиб, Гаусс усулининг асосий \ояси берилган (2.9) системадан коэффицентлари учбурчак матрицани ташкил =илувчи (2.10), (2.12), (2.14) ва (2.16) тенгламалардан иборат тенг кучли тенгламалар системасини щосил =илишдир. Мазкур усулнинг щисоблаш алгоритми икки бос=ичдан иборат. Биринчи бос=ич ты\ри юриш деб аталиб (2.10),(2.12),(2.14) ва(2.16) тенгламалардаги барча $b_{1j}(j>1)$ ва $b_{ij}^{(k)}(i=2,3,4;j>2,k=1,2,3)$ коэффицентларни щисоблашдан иборат. Иккинчи бос=ич эса тескари юриш деб аталиб, унда барча номаълумларнинг =ийматлари (яъни ечимлар) индекснинг камайиб бориш тартибида топилади.

Ю=орида келтирилган алгоритм быйича ищтиерий n-тартибли системаларни ечиш мумкин. Бунда алгоритмнинг умумий схемаси хеч =андай ызгаришсиз =олаверади.

Биз ю=орида тенгламалар былинувчи $a_{ij}$ коэффицентлар нолдан фар=ли былиши шартини =ыйиб, бунинг натижасида етакчи элементларни щамма ва=т нолдан фар=ли =илиб танлаш имконияти мавжудлигини таъкидлаган эдик. Бунга тенгламаларнинг ыринларини алмаштириб эришиш щам мумкинлиги эслатиб ытилган эди. Нолдан фар=ли коэффицентлар бир нечта былганда буни бир неча йыл билан амалга ошириш мумкин. Масалан (2.9) кыринишдаги тыртинчи тартибли системада $a_{11}=0$, $a_{i1}\neq 0$, $i=2,3,4$ былсин. Биринчи тенгламанинг ырнини иккинчи, учинчи ва тыртинчи тенгламаларнинг хощлаган бири билан алмаштириб $a_{11}\neq 0$ шартга эришамиз. Кыриниб турибдики, бундай имкониятлар ягона эмас.

Улардан фойдаланиб, нафа=ат етакчи элементларни нолдан фар=ли =илиб танлаш, балки яхлитлаш хатоликларини щам сезиларли даражада камайтиришга эришишимиз мумкин.

***мс*** *Чизи=ли тенгламалар системасини щар доим щам ечиш мумкин деб щисоблайсизми?*

**Назорат саволлари**

1. Чизи=ли алгебрик тенгламалар системасига тегишли назарий маълумотларни айтиб беринг.
2. ЧАТСнинг кыринишига =араб =андай турлари ажратилади.
3. ЧАТСни та=рибий щисоблаш усуллари =айсилар?
4. Гаусс усулининг мощияти нимадан иборат?
5. Усулнинг афзаллиги нимада?
6. Гаусс усули ёрдамида яна =андай щисоблашларни бажариш мумкин.

## 7-маъруза: Берилган матрицага тескари матрицани топиш ва чизи=ли былмаган тенгламалар системасини ечиш.

Ы=ув модули бирликлари:

1. Тескари матрица тушунчаси
2. Тескари матрицани Гаусс усули ёрдамида топиш

3. Чизиксиз тенгламалар системаси

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Берилган квадрат матрицага тескари матрицани топиш бирлик матрица
2. Гаусс усули ёрдамида тескари матрицани хисоблашнинг ишчи алгоритми
3. Чизи=сиз тенгламалар системасининг умумий кыриниши
4. Итерация, кетма-кет я=инлашиш усулининг мощияти
5. Итерация жараёнинг якинлашиш шартлари

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Бизга =уйидаги n тартибли, квадрат матрица берилган былсин,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Агар $A^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$

матрица мавжуд былиб,$A*A^{-1}=$ E шарт бажарилса (бу ерда Е-бирлик матрица),у щолда $A^{-1}$ матрица А матрицага тескари матрица дейилади.

бу ерда $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Олий алгебра курсида биз тескари матрицани системанинг сатр ва устунлари устида турли арифметик амаллар бажариш ёрдамида топишни ырганганмиз. Лекин бу жуда кып =ылда щисоблашларни бажаришга олиб келади. Гаусс усулини =исм дастур сифатида =араб уни бир неча марта =ыллаш ёрдамида тескари матрицани осонгина топиш мумкин.

Агар А матрицани щар бир устунини вектор деб олиб,=уйидаги кыпайтмалар тузсак,

$$A^*\begin{pmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\\ \vdots\\ \gamma_{n1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix};\quad A^*\begin{pmatrix}\gamma_{12}\\ \gamma_{22}\\ \vdots\\ \gamma_{n2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\ldots\ldots\ldots\ \mathbf{A^*}\begin{pmatrix}\gamma_{1n}\\ \gamma_{2n}\\ \vdots\\ \gamma_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

кыринишга келади**.**

Маълумки,ЧАТС(чизи=ли алгебраик тенгламалар ситемаси)ни векторга кыпайтирсак, вектор щосил былади,уни система щолида ёзсак,1-тенгликдан

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_{11}+a_{12}\gamma_{21}+...+a_{1n}\gamma_{n1}=1\\ a_{21}\gamma_{11}+a_{22}\gamma_{21}+...+a_{2n}\gamma_{n1}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\gamma_{11}+a_{n2}\gamma_{21}+...+a_{nn}\gamma_{n1}=0 \end{cases}$$

щосил былади.

$\gamma_{11}$, $\gamma_{21}$, $\ldots\gamma_{n1}$ **лар номаълум коэффициентлар** былиб,уларни Гаусс усули ёрдамида ечиб , топамиз. Демак, ю=оридаги n та ифодага Гаусс усулини n марта =ыллаймиз. Щар сафар топилган ечимларни 1 та системага йи\сак, щосил былган системага мос матрица берилган матрицага тескари матриcанинг айнан ызидир.

Кыпчилик =урилиш масалалари чизи=ли былмаган тенгламалар системасига келтирилади. Бундай системаларни

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,...,x_n)=0\\ f_2(x_1,x_2,...,x_n)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n(x_1,x_2,...,x_n)=0 \end{cases}\qquad (5.10)$$

шаклда ёзишимиз мумкин. Бунда f1, f2,..., fn-маълум функциялар.

(5.10) системани матрица формасида ёзамиз. Бунинг учун

$$\left\{ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}, f=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ .\\ .\\ .\\ f_n\end{pmatrix}\right.$$

вектор-устунлари киритамиз. Бу белгилашлардан фойдаланиб (5.10) тенгламани

$$f(x)=0 \qquad (5.11)$$

кыринишда ёзамиз.

(5.10), (5.11) системаларни ечиш усуларидан айримларини =араб ытамиз.

1. И т е р а ц и я   у с у л и

(5.10) системани

$$\begin{aligned} x_1&=\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n),\\ x_2&=\varphi_2(x_1,x_2,...,x_n), \qquad (5.12)\\ &..................\\ x_n&=\varphi_n(x_1,x_2,...,x_n) \end{aligned}$$

кыринишда ёзиб оламиз.

Чизи=ли былмаган битта тенгламани ечишда ишлатилган итерация усулига ыхшаш. Бу ерда щам ихтиёрий $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ векторни олиб (5.12) системанинг ынг тарафига =ыйиб, чап тарафда ечимнинг биринчи я=инлашишини щосил =иламиз. Бу жараённи такрорлаб янги я=инлашишларни тузамиз. Масалан, $x^{(R)}=(x_1^{(R)},x_2^{(R)},...,x_n^{(R)})$ Я=инлашиш топилган былса, $x^{(k+1)}$ я=инлашиш

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)}&=\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n),\\ x_2^{(k+1)}&=\varphi_2(x_1,x_2,...,x_n),\\ &......................\\ x_n^{(k+1)}&=\varphi_n(x_1,x_2,...,x_n) \end{aligned}$$

каби топилади.

Итерация жараёни

$$\max_{1\le i\le n} |x_i^{(R+1)}-x_i^R|<\varepsilon$$

шарт бажарилгунча давом эттирилади. Бу ерда щам илгаридаги каби ε-ечим ани=лиги.

Чизи=ли былмаган тенгламалар системасини ечишда чизи=ли алгебраик тенгламалар системасини ечишда ишлатилган Зейдель усулидан щам фойдаланиш мумкин.

Зейдел усулининг мощиятини тушунтиринг. Кетма-кет я=инлашиш усулидан фар=ини кырсатинг.

Бунда (5.13) я=инлашишлар =уйидаги кыринишда былади:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)}&=\varphi_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)}),\\ x_2^{(k+1)}&=\varphi_2(x_1^{(k+1)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)}),\\ &........................................ \end{aligned}$$

$$x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}), k=0,1,...$$

Итерация усулининг я=инлашиш шартларини иккинчи тартибли система учун келтирамиз.

Т е о р е м а. Иккинчи тартибли (5.12) системанинг ягона ечими$\{a<x_1<b, c<x_2<d\}$ ты\ри тыртбурчакда жойлашган былсин. У щолда агар бу ты\ри тыртбурчакда =уйидаги

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right| \le p_1; \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right| \le q_1; \qquad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right| \le p_2; \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| \le q_2;$$

$$p_1+p_2 \le M<1, q_1+q_2 \le N<1 \qquad (5.15)$$

тенгсизликлар бажарилса, итерация жараёни я=инлашади ва нолинчи я=инлашиш сифатида ты\ри тыртбурчакнинг ихтиёрий ну=тасини олиш мумкин.

мт *Итерацион жараённинг я=инлашиш шартини тушунтириб беринг.*

**Назорат саволлари**

1. Берилган матрицага тескари матрица =ачон мавжуд былади?
2. Тескари матрицани Гаусс усули ёрдамида =андай топилади?
3. Тескари матрицани щисоблашнинг яна =андай усуллари бор?
4. Чизи=сиз тенгламалар системаси =андай кыринишда былади?
5. Чизи=сиз тенгламалар системасини ечишнинг =андай усулларини биласиз?
6. Кетма-кет я=инлашиш усулининг мощиятини тушунтириб беринг.

## 8-маъруза: Ани= интегралларни та=рибий щисоблашнинг ты\ри тыртбурчаклар усули

Ы=ув модули бирликлари:

1. Ани= интегралнинг геометрик маъноси
2. Ани= интегралнинг та=рибий хисоблаш усуллари
3. Тугри тыртбурчаклар усулининг ишчи формулалари

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Ани= интегралнинг эгри чизикли трапеция юзи билпн богли=лиги
2. Ньютон-Лейбниц усули
3. Ани= интегрални такрибий хисоблаш зарурияти ва такрибий хисоблаш усуллари
4. Ты\ри тыртбурчаклар усулиниг мощияти, ишчи алгоритми, чап ва ынг ты\ри тыртбурчаклар формулалари

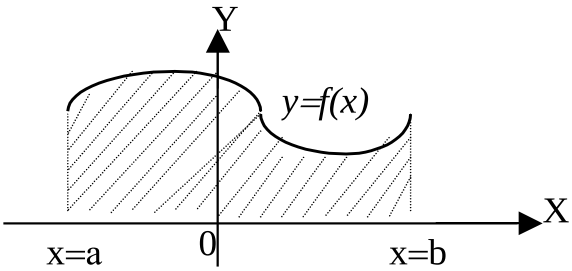
ща=ида маълумотга эга быладилар.

Маълумки, берилган функциянинг щосиласини топиш амали дифференциаллаш деб аталиб, унинг учун бошлан\ич функцияни топишдан иборат тескари амал интеграллаш деб аталади (латинча-untegrare-тиклаш деган маънони билдиради). Амалда кыпгина функцияларнинг бошлан\ич функцияларини формулалар билан щисоблаш имкони щамма ва=т щам былавермайди. Шунинг учун бу функцияларнинг ани= интегралларини баъзан та=рибий усуллар билан щисоблаш зарурияти ту\илади.

Ани= интегралларни та=рибий щисоблаш эгри чизи=ли трапециянинг юзи ща=идаги масаланинг геометрик ечими билан узвий бо\ли=дир. +уйидан ох ы=даги [а,в] кесма билан, ю=оридан мусбат =иймат =абул =иладиган у=f(x) узлуксиз функциянинг графиги билан, ён томонлардан х=a ва х=в ты\ри чизи=ларнинг кесмалари билан чегараланган фигурани эгри чизи=ли трапеция дейилади. [а,в] кесмани эса эгри чизи=ли трапециянинг асослари дейилади. Эгри чизи=ли трапециянинг юзини

$$S = \int_a^b f(x),$$

бунда F(x)-берилган f(x) функциянинг бошлан\ич функцияси. Ю=орида таъкидланганидек бошлан\ич функцияни интеграллаш =оидалари ва формулалар ёрдамида щисоблаш имкони былмаганда уни интеграл йи\индилар ёрдамида та=рибан щисобланади.




Aíè= èíòåãðàëíè щèñîáëàø ó÷óí èíòåãðàë îñòè ôóíêöèÿñèíèíã áîшëàí\è÷ ôóíêöèÿñèíè òîïèø âà Íüþòîí-Ëåéáíèö ôîðìóëàñèäàí ôîéäàëàíèø çàðóð:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Aíè= èíòåãðàëíè ãåîìåòðèê ìàúíîñè ю=оридаги øòðèõëàíãàí ñîщàíèíã þçàñèíè òîïèø äåìàêäèð.

Îäàòäà èíòåãðàë îñòèäàãè ôóíêöèÿíèíã áîøëàí\è÷ ôóíêöèÿñèíè òîïèø ìàòåìàòèê æèщàòäàí àí÷à =èéèí÷èëèê òó\äèðàäè, àéðèì ôóíêöèÿëàð ó÷óí ýñà áîøëàí\è÷ ôóíêöèÿíè òîïèøíèíã ìóòëà=î èëîæè éы=. Øóíèíã ó÷óí, êåðàê áыëãàí àíè=ëèêäà ани= èíòåãðàëëàðíè щèñîáëàø àëãîðèòìëàðèíèíã èøëàá ÷è=èëèøè âà äàñòóðëàðèíèíã ÿðàòèëèøè àêòóàë ìàñàëàëàðäàí щèñîáëàíàäè.

Àíè= èíòåãðàëларíè òà=ðèáèé щèñîáëàø ó÷óí àìàëäà =óéèäàãè óñóëëàðäàí êåíã ôîéäàëàíèëàäè:

1. ×àï âà ыíã òы\ðè òыðòáóð÷àêëàð;
2. Òðàïåöèÿ;
3. Ïàðàáîëàëàð (Ñèìïñîí).

**Ты\ри тыртбурчаклар усули**

Интеграл тарихан эгри чизи=лар билан чегараланган фигураларнинг юзини, хусусан эгри чизи=ли трапециянинг юзини щисоблаш муносабати билан келиб чи==ан. Трапециянинг асоси былган [a;b] кесмани $x_1$, $x_2$, ..., $x_{n-1}$ ну=талар билан n та кесмаларга быламиз. У щолда былиниш орали\и узунлиги $h=(b-a)/n$ формула билан ифодаланади. $x_0=a$ десак, $x_i=x_{i-1}+h$ ну=таларни белгилаб оламиз, бунда $i=1,2,3,\ldots n$. $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_n$ ну=талардан чегаравий эгри чизи= билан кесишгунга =адар вертикал параллел ты\ри чизи=лар ыткaзамиз ва кесишиш ну=таларининг ординаталарини =уйидагича $y(x_1)$, $y(x_2)$, ..., $y(x_i)$, ... каби белгилаймиз. Щар бир орали=даги ординатаси узунлиги $y(x_i)$ га тенг ты\ри тыртбурчакнинг юзаларини топамиз.

$$S_i = h \cdot y(x_i)$$

n та ты\ри тыртбурчакнинг юзини =ышамиз:

$$S = h \cdot (y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + \ldots + y(x_n))$$

Юзаларни щисоблашда k=1,2,…n деб олсак, вертикал ты\ри чизи=ларга нисбатан ынг томондаги ты\ри тыртбурчаклар олингани учун ынг ты\ри тыртбурчаклар усулининг формуласи келиб чи=ади:

$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h\left[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a + n \cdot h)\right] = h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a+kh)$$

i=1,2,…,n-1 деб олсак, вертикал ты\ри чизи=ларга нисбатан чап томондаги ты\ри тыртбурчаклар олингани учун чап ты\ри тыртбурчаклар усулининг фрмуласи келиб чи=ади.

$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h[f(a+h) + \ldots + f(a+(i-1)h)] = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh);$$

***мс*** *Ани= интегрални та=рибий щисоблаш усулининг ани=лиги усулнинг турига бо\ли=ми?*

**Назорат саволлари**

1. Ани= интегралнинг геометрик маъноси =андай?
2. Ани= интегрални нима учун та=рибий щисобланади?
3. Ани= интегрални та=рибий щисоблаш усуллари =айсилар?
4. Тыгри тыртбурчаклар усулига мос ишчи формулаларни =андай щосил =илинади ?

## 9-маъруза: Ани= интегралларни та=рибий щисоблашнинг трапеция ва Симпсон (параболалар) усули

Ы=ув модули бирликлари:

1. Трапеция усулининг мощияти
2. Усулнинг ишчи формуласи
3. Симпсон усулиниг мощияти
4. Симпсон усулиниг ишчи  формуласи

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Трапеция усулининг мощияти
2. Трапеция усулига тегишли асосий ишчи формулани =андай хосил =илиниши
3. Симпсон усулиниг мощияти
4. Усулга мос ишчи формуланинг =андай хосил =илиниши
5. Такрибий хисобдаги хатоликни камайтириш йыллари

ща=ида маълумотга эга быладилар.

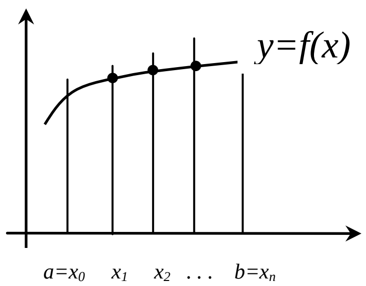
**Трапеция усули**

Бу усулда щам ты\ри тыртбурчаклар усулидаги каби *[a,b]* кесмани $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ ну=талар билан n та тенг былакка быламиз. Щар бир тугун ну=талар орасидаги масофа $h=(b-a)/n$;

[a,b] кесмани былувчи ну=талардан чегаравий эгри чизи= билан кесишгунга =адар перпендикуляр ытказамиз. Эгри чизи= мос ну=таларинng ординаталарининг $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), \dots, y_{n-1}=f(x_{n-1}), y_n=f(x_n)$;

Перпендикулярларнинг $y=f(x)$ чизи= билан кесишган =ышни ну=таларини ватарлар билан бирлаштирамиз ва щосил =илинган щар бир ты\ри чизи=ли трапецияларнинг юзини топамиз:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h; \quad \dots \quad \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h;$$




Барча n та трапеция юзини =ышамиз

$$S = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + \frac{y_n}{2}\right]$$

Демак. Эгри чизи=ли трапециянинг юзи та=рибан =уйидагига тенг

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right)$$

ёки $y_0=f(a)$, $y_n=f(b)$, $x_i=a+ih$ десак, трапеция усулининг фомуласи

$$S = \int_a^b f(x)dx = h \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{\mathbf{2}} + \sum_{k=\mathbf{1}}^{n-\mathbf{1}} f(a + kh)\right]$$

былади.

МВ *Агар ани= интегрални щисоблаш натижасида манфий =ийматли натижа чи=са, =андай йыл тутасиз?*

Ани= интегралларни та=рибий щисоблашнинг барча усулларида n былинишлар сонини орттириш туфайли хатолик ми=дорини камайтириш мумкин, чунки былинишлар натижасида щосил былган юза =анчалик кичик былса, формула ор=али топаётган фигуранинг юзи эгри чизи=ли трапециянинг юзига шунчалик я=ин былади.

**Ñèìïñîí (параболалар) óñóëè**

Àíè= èíòåãðàëíè Ñèìïñîí óñóëèäà щèñîáëàø, îðàëè=íè áыëèø (áыëèíèøëàð ñîíè æóôò áыëèøè êåðàê) íàòèæàñèäà õîñèë =èëèíãàí þçàëàðíè þ=îðèäàí ïàðàáîëàëàð áèëàí ÷åãàðàëàíãàí äåá ôàðàç =èëèíàäè âà áóíäàé þçàíè щисобëàø àíè= èíòåãðàëíè áîøëàí\è÷ ôóíêöèÿñèíè òîïèø щисобèãà àìàëãà îøèðèëàäè.

мс *Ани= интегрални та=рибий щисоблашда керакли усулни танлаш интеграл ости функциясига бо\ли=ми?*

[а,в] кесма узунлигини h=(b-a)/2n былган 2n та жуфт былакка $x_1$, $x_2$,..., $x_{2n-1}$ ну=талар ор=али ажратамиз.

[$x_0$, $x_2$],[ $x_2$, $x_4$],...,[ $x_{2n-2}$, $x_{2n}$] кесмалар хосил былади. $x_0$=a, $x_{2n}$=b былади.Бу кесмаларнинг ырталари мос равишда $x_1$ ,$x_3$ ,...,$x_{2n-1}$ ну=талар былади.У щолда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

интеграл йи\индига ажратамиз.

Щар бир [$x_{2i}$, $x_{2i+2}$] (i=0 дан n-1 гача) кесмаларда ($x_{2i}$, $Y_{2i}$), ( $x_{2i+1}$, $Y_{2i+1}$),( $x_{2i+2}$, $Y_{2i+2}$) ну=талар ор=али щамма ва=т парабола ытказиш мумкин,шу билан бирга бундай парабола [$x_{2i}$,$y_{2i+2}$] кесмада фа=ат битта былади. Ёрдамчи парабола билан чегараланган эгри чизи=ли трапеция юзи та=рибан берилган эгри чизи=ли трапециянинг юзига тенг

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (Ax^2 + Bx + C)dx$$

Параболага тегишли щар учта ну=та учун ю=оридаги тенгламани ёзамиз:

$$
\begin{cases}
ax_{2i}^2 + bx_{2i} + c = y_{2i} \\
ax_{2i+1} + bx_{2i+1} + c = y_{2i+1} \\
ax_{2i+2} + bx_{2i+2} + c = y_{2i+2}
\end{cases}
$$

Щосил былган a,b,c номаълумли учта тенгламалар системасини ечиб, a,b,c ларнинг =ийматини интеграл ифодага =ыйиб, щисоблаймиз. Щар бир кесмалар учун уларнинг =ийматини =ышиб, параболалар усулига мос формулани щосил =иламиз.

Уñóëíèíã èø÷è  ôîðìóëàñè  =óéèäàãè êырèíèøäà ëçèëàäè:

$$
S = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[ f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a + (2i-1)h) + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a + 2ih) \right];
$$

бу ерда   h=(b-a)/2n .

**мт** *Ани= интегралнинг барча амалий тадби=ларини санаб беринг.*

**Назорат саволлари**

1. Трапеция усулига мос ишчи формулани щосил =илиш учун юзага тегишли =айси формуладан фойдаланилган?
2. Симпсон усулида нима учун былинишлар сонини жуфт сонда былиши талаб =илинади?
3. Симпсон усулига мос ишчи формулани щосил =илишда керак быладиган тенгламалар системасини =андай йыл билан ечган маъ=ул?
4. Ани= интегрални щисоблашда та=рибий щисобнинг ани=лигини ошириш учун нима =илиш керак?

## 10-маъруза: Энг кичик квадратлар усули.

Ы=ув модули бирликлари:

1. Интерполяция тушунчаси
2. Энг кичик квадратлар усулиниг мощияти

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Функцияни интерполяциялаш масаласининг амалий тадбиклари
2. Энг кичик квадратлар усулиниг мощияти асосий ишчи формулаларини =андай хосил =илиниши

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Амалий масалаларда учрайдиган масалаларнинг кыриниши кыпинча мураккаб былиб, уларнинг аналитик ифодасини топиш мумкин эмас. Бундай щолларда берилган мураккаб функцияни ырганиш =улайро= былган соддаро= функция былган алмаштириш ма=садга мувофи=дир.

Интерполяция деганда эркли ызгарувчи ми=дор билан функциянинг дискрет ну=таларидаги мос =ийматлари орасида муносабати маълум былган щолда функционал бо\ланишнинг та=рибий ёки ани= аналитик ифодасини тузиш тушунилади.

Кыпинча турмушда кузатишлар ва тажрибалар ор=али эмпирик формулаларни келтириб чи=ариш мумкин.

Масалан, щароратнинг кытарилиши ёки аксинча пасайишини, симоб устунининг кытарилиши ёки пасайишига =араб билиш мумкин. Демак, щарорат билан симоб устини ыртасидаги чизи=ли бо\ланиш борлигини тажриба ор=али билиш мумкин.

Бундай масалаларни ечишда энг кичик квадратлар усулидан фойдаланамиз.

Энг кичик квадратлар усули биринчи марта 1874 йилда Гаусс томонидан ишлаб чи=илган былиб, айрим адабиётларда бу усул Гаусс усули деб аталади.

Энди энг кичик квадратлар усулининг мощияти билан танишиб чи=имиз.

Айтайлик, x эркли ызгарувчининг n та =иймати берилган былсин. $X_1$, $X_2$, $X_3$, ..., $X_n$ унга мос функция =ийматлари $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$, ... , $Y_n$ былсин.

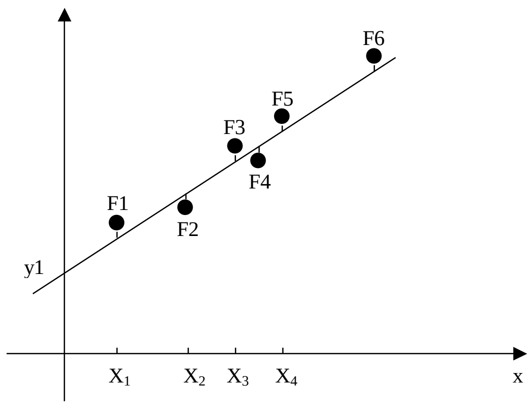
Демак, функция жадвал кыринишда берилган.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | $X_1$ | $X_2$ | … | $X_n$ |
| Y | $Y_1$ | $Y_2$ | … | $Y_n$ |

$F_1$ $(X_1,Y_1)$

$F_2$ $(X_2,Y_2)$

Бу =ийматларга мос ну=таларни координата текислигида тасвирлайлик.




Демак, биз ана шу тажриба ну=талардан жуда кам фар= =иладиган y=ax+b функцияни кыришимиз керак.

Математик модел чизи=ли былади.

Чизмада ясалган ты\ри чизи= билан бир ну=та орасидаги масофалар айирмасининг квадратларининг йи\индисининг хатолари минимум былсин:

$$Z(a;b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2 \qquad \min z=?$$

Ушбу шарт бажарилиши учун, ноъмалум коэффицентлардан олинган хусусий хосилалар нолга тенг былиши керак, яъни $\frac{\partial z}{\partial a}=0;\qquad \frac{\partial z}{\partial b}=0;$

$$\frac{\partial z}{\partial a}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))\cdot(-x_i)=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))\cdot(-1)=0$$

$$\begin{cases}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+a\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}+b\sum_{i=1}^{n}x_i=0\\ -\sum_{i=1}^{n}y_i+a\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}+b\sum_{i=1}^{n}\quad=0\end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{n}=n \quad деб \quad олиб$$

$$\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases} \qquad (1)$$

(1) системани а ва в га нисбатан олиб, номаълум коэффицентларни топамиз, ва натижада чизи=ли *y=ax+в* функцияни ифодасини щосил =иламиз. Энди щар =андай аргументнинг =ийматида функциянинг =ийматини щисоблаш мумкин былади.

? **мс** *Функцияларни интерполяциялаш масаласидан =андай амалий жараёнларда фойдаланилади?*

? **мс** *Нима учун айнан «энг кичик квадратлар» усули дейилади?*

### Назорат саволлари

1. Функцияларни интерполяциялаш =андай амалга оширилади?
2. Энг кичик квадратлар усулининг асосий мощияти?
3. Энг кичик квадратлар усулида щосил =илинган тенгламалар системасини =айси усулда ечган маъ=ул?

## 11-маъруза: Оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг Эйлер ва Рунге-Кутта усуллари

Ы=ув модули бирликлари:

1. Диференциал тенгламаларнинг турли синфлари
2. Диференциал тенгламаларни ечиш усуллари
3. Эйлер усули .Усулнинг геометрик маъноси
4. Рунге-Кутте усулининг ишчи формулалари

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Оддий ва хусусий хосилали диференциал тенгламаларнинг хусусиятлари
2. Диференциал тенгламаларнинг ечими тушунчаси
3. Умумий ва хусусий ечим, =ышимча шартлар
4. Ани= ва та=рибий хисоблаш усулари
5. Эйлер усулининг асосий ишчи формуласи
6. Усулнинг геометрик маъноси
7. Рунге-Кутта усулиниг мощияти, усулнинг афзаллиги

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Маълумки, кыпинча амалий масалаларни ечишда, дастлаб унинг математик модели  физик, механик, кимёвий ва бош=а =онуниятлар асосида тузилади. Математик модел асосан алгебраик, дифференциал, интеграл ва бош=а тенгламалардан иборат былади. *Оддий дифференциал* тенгламалар эса жуда кып мущандислик масалаларини ечишда учрайди. Демак, дифференциал тенгламаларнинг маълум шартларни =аноатлантирувчи ечимларини топиш катта ащамиятга эга.

**?** *мс* *+андай амалий масалаларнинг математик моделлари биринчи тартибли дифференциал тенгламалари ор=али ифодаланади?*

Дифференциал тенгламалар иккита асосий синфга былинади: *оддий дифференциал* тенгламалар ва *хусусий щосилали дифференциал* тенгламалар.

Хусусий щосилали дифференциал тенламаларга кейинро= батафсил тыхталамиз.

Оддий дифференциал тенгламаларда фа=ат бир ызгарувчига бо\ли= функция ва унинг щосилалари =атнашади, яъни

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

(1) тенгламада =атнашувчи щосилаларнинг энг ю=ори тартиби дифференциал тенгламаларнинг *тартиби* дейилади. Агар тенглама изланувчи функция ва унинг щосилаларига нисбатан чизи=ли былса, унга *чизи=ли дифференциал* тенглама дейилади.

Дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб, уни айниятга айлантирувчи $x$ ва *n* та $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ ызгармасларга бо\ли= ихтиёрий функцияга айтилади. Масалан (1) тенгламанинг умумий ечими $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ кыринишдаги функциялардан иборат . Агар $c_1, c_2, ..., c_n$ ызгармасларга муайян =ийматлар берилса, умумий ечимдан хусусий ечим щосил =илинади. Хусусий ечимни топиш учун $c_1, c_2, ..., c_n$ ызгармасларнинг мос =ийматларини ани=лаш лозим. Бунинг учун эса ечимни =аноатлантирувчи =ышимча шартларга эга былишимиз керак. Агар дифференциал тенглама *n*-тартибли былса, ягона хусусий ечимни топиш учун худди шунча =ышимча шартлар керак. Хусусан, *1*-тартибли тенглама ($F(x, y, y') = 0$) нинг умумий ечими $y = \varphi(x, c)$ даги *c* ызгармасни топиш учун *1* та =ышимча шартнинг берилиши кифоя.

+ышимча шартлар берилишига кыра дифференциал тенгламалар учун 2 хил масала =ыйилади:

1) *Коши масаласи*

2) *Чегаравий масала.*

Агар =ышимча шартлар битта $x = x_0$ ну=тада берилса, дифференциал тенгламани ечиш учун =ыйилган масала *Коши масаласи* дейилади. Коши масаласидаги =ышимча шартлар *бошлан\ич шартлар*, $x = x_0$ ну=та эса *бошлан\ич ну=та* деб аталади. Оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг чизма, аналитик, та=рибий ва сонли ечиш усуллари мавжуд.

*Аналитик усуллар*да дифференциал тенгламанинг ечимлари ани= формулалар ор=али ани=ланади.

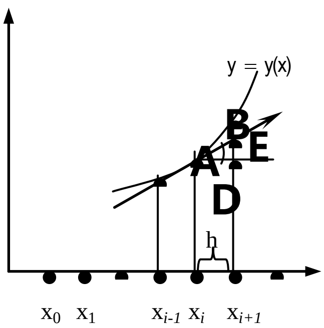
*Та=рибий усуллар*да дифференциал тенглама ва =ышимча шартлар у ёки бу даражада соддалаштирилиб, масала осонро= масалага келтирилади.

*Сонли усуллар*да эса ечим аналитик шаклда эмас, балки сонлар жадвали кыринишида олинади. Албатта бунда дифференциал тенгламалар олдин дискрет тенгламалар билан алмаштириб олинади. Натижада сонли усуллар воситасида олинган ечим щам та=рибий былади.

Умуман олганда, оддий дифференциал тенгламаларнинг ечимларини аналитик усул ёрдамида топиш имкони жуда кам былганлиги учун, амалда кыпинча уларни сонли усуллар ёрдамида та=рибий щисобланади.

+уйида шундай усуллардан Эйлер ва Рунге-Кутта усулларини кыриб чи=амиз.

**Эйлер усули**




Бизга =уйидаги биринчи тартибли дифференциал тенглама(Коши масаласи)ни

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

$[a,b]$ орали=даги $y_0 = y(x_0)$ бошлан\ич шартни =аноатлантирувчи ечимини топиш лозим былсин.

Коши масаласини Эйлер усули ёрдамида ечиш учун, дастлаб дифференциал тенгламанинг ечими =идириладиган $[a,b]$ кесмани $x_1, x_2, ..., x_n$ тугун ну=талар билан былакларга быламиз. Тугун ну=таларнинг координаталари $x_{i+1} = a + (i+1)h \quad (i = \overline{o, n-1})$ формула ор=али ани=ланади. Щар бир тугунда $y(x_i)$ ечимнинг =ийматларини чекли айирмалар ёрдамида та=рибий $y_i$ =ийматлар билан алмаштирилади.

Маълумки, $y = f(x)$ функциянинг $x = x_0$ ну=та атрофидаги Тейлор =аторига ёйилмасини =уйидагича ёзиш мумкин:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 \cdot y'(x_i) + \ldots$$

Ушбу чексиз =аторнинг бошидаги иккита щад билан чегараланиб, биринчи тартибли щосила =атнашган щадни ани=лаш натижасида =уйидаги чекли айирмали формулани щосил =иламиз:

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \quad (3)$$

Ушбу алмаштиришнинг геометрик маъноси =уйидагича:

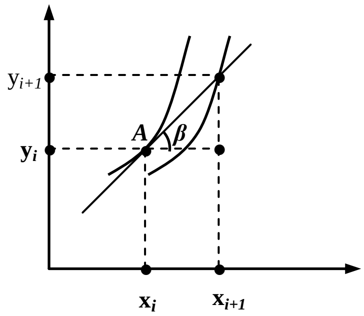
Хосиланинг геометрик маъносига кыра

$$y'(x_i) = tg\beta = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{h}$$

(3) дан

$$y'(x_i) \approx \frac{\overbrace{y_{i+1} - y_i}^{BD}}{h} = \frac{BD}{h} = \frac{ED}{h} + \frac{BE}{h} = y'(x_i) + \frac{BE}{h}$$

Демак, чекли айирмалар формуласи щосиланинг асл =ийматидан $BE/h$ га фар= =илади, яъни *BE* =анча кичик былса, чекли айирма $y'$ щосилага шунча я=ин былади. Расмдан $h \to 0$да $BE \to 0$ эканини кыриш мумкин. (2) ва (3) дан $y'_i = f(x_i, y_i)$ эканини щисобга олиб, =уйидагини щосил =иламиз:




$$y'_{i+1} \approx y_{i+1} + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (4)$$

Щосил =илинган (4) формула Эйлер усулининг асосий ишчи формуласи былиб, унинг ёрдамида тугун ну=таларга мос былган дифференциал тенгламанинг $y_i$ хусусий ечимларини топиш мумкин. Ю=оридаги формуладан кыриниб турибдики, $y_{i+1}$ ечимни топиш учун $y_i$ ечимнигина билиш кифоя. Демак, Эйлер усули бир =адамли усуллар жумласига киради.

Эйлер усулининг *геометрик маъноси* =уйидагича:

А ну=та $x = x_i$ ну=тага мос келувчи ечим былсин. Бу ну=тадан интеграл чизи==а ытказилган уринма $x_{i+1}$ ну=тада бош=а интеграл чизи\ида $y_{i+1}$ ечимни ани=лайди.

Уринманинг о\малиги $\beta \cdot y_i' = f(x_i, y_i)$ щосила билан ани=ланади. Демак, Эйлер усулидаги йыл =ыйилган асосий хатолик ечимни бир интеграл чизи\идан бош=асига ытказиб юбориши билан характерланади.

**Рунге-Кутта усули**.

Бир =адамли ошкор усулларнинг бош=а бир неча хиллари щам мажуд былиб, уларнинг ичида амалда энг кып ишдлатиладигани Рунге-Кутта усули щисобланади. Усул шартига кыра щар бир янги $x_{i+1}$ тугун ну=тадаги $y_{i+1}$ ечимни топиш учун $f(x,y)$ функцияни 4 марта щар хил аргументлар учун щисоблаш керак. Бу жищатдан Рунге-Кутта усули щисоблаш учун нисбатан кып ва=т талаб =илади. Лекин Эйлер усулидан кыра ани=лиги ю=ори былганлиги учун, ундан амалда кенг фойдаланилади.

Усулнинг ишчи формуласи =уйидагича ёзилади:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad i = 0,1,...$$

бу ерда $k_0 = f(x_i, y_i)$;

$$k_1 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_0);$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1);$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_2);$$

Демак, формулалардан кыриниб турибдики, Эйлер усули биринчи тартибли Рунге-Кутта усулига мос келади.

***МТ*** *Эйлер усулининг геометрик маъносини тушунтириб беринг.*

**Назорат саволлари**

1. +андай тенгламаларни дифференциал тенгламалар деб атаймиз?
2. Оддий дифференциал тенгламаларга таъриф беринг?
3. Умумий ечим нима?
4. Хусусий ечим нима?
5. Дифференциал тенгламаларни та=рибий ечиш зарурияти =аердан келиб чи=ади?
6. Дифференциал тенгламалар ни та=рибий ечишнинг =андай усулларини биласиз?
7. Эйлер усулининг ишчи алгоритми?
8. Ейлер усулининг =андай камчилиги ва афзаллиги бор?

9. Рунге-Кутта усулининг ишчи алгоритми?
10. Рунге-Кутта усулининг =андай камчилиги ва афзаллиги бор?

## 12-маъруза: Чегаравий масалаларни ечишнинг чекли-айирмалар усули.

Ы=ув модули бирликлари:

1. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама
2. Чегаравий масаланинг =ыйилиши
3. Чегаравий масалани ечиш усуллари
4. Чекли-айирмалар усулининг ишчи алгоритми

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

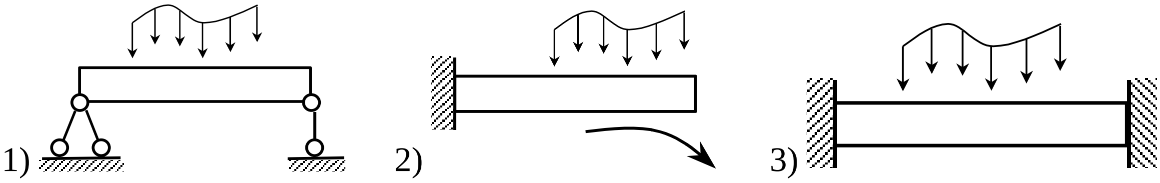
Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар ор=али ифодаланувчи амалий жараёнлар
2. Чегаравий масаланинг =ыйилиши
3. Чегаравий масалани ечишнинг аналитик, сонли-та=рибий ва та=рибий-аналитик усуллари
4. Чекли-айирмали формулалар
5. Уч диагоналли тенгламалар системаси
6. Щайдаш усулига мос ты\ри ва тескари йылнинг мощияти

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Бугунги кунда иншоотлар =уриш лойищаларининг муттасил мураккаблашиб бориши, янги конструктив ечимларнинг лойищалардан ырин олиши, сейсмик актив жойларда бинолар мустащкамлигига =ыйиладиган талабларнинг ортиши лойища кырсаткичларини чу=ур асослаш заруриятини келтириб чи=аради. Бундай =урилиш масалалари билан бир =аторда сув таъминоти ва канализация, исси=лик таъминоти, коммунал щыжалиги ва бош=а бир =атор муаммоларни щал =илиш учун тегишли амалий масалаларни ечиш керак былади.

Ю=оридаги турли соҳаларга тегишли масалаларни ечишда асосан =уйидаги конструкциялардан фойдаланилади.



Ани=ро= =илиб айтадиган былсак:

1) Икки четидан шарнирли маҳкамланган, эластик тысиннинг ю=оридан берилувчи куч таъсирида эгилиши

(бунда четки a,b ну=талар учун u(a)=0, u(b)=0 шартлар =ыйилади.)

2) Бир учидан маҳкамланган эластик тысиннинг таш=аридан берилувчи куч таъсирида эгилиши (бунда эса четки a,b ну=талар учун u(a)=0, u′ (b)=0 шартлар =ыйилади.)

3) Икки учи маҳкамланган тысиннинг ю=оридан берилувчи куч таъсирида эгилиши (бунда u(a)=0, u(b)=0 шартлар =ыйилади.)

Бу конструкцияларнинг эгилиш ва си=илиш ҳолатларига чидамлилигини текшириш ва улардан амалий иншоотларни =уришда фойдаланиш учун уларнинг математик моделларини =уриш лозим былади. Мазкур масалаларнинг математик модели кыпро= =уйидаги кыринишдаги иккинчи тартибли, ызгарувчан коэффициентли оддий дифференциал тенгламалар ор=али ифодаланади, яъни:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad (1)$$

дифференциал тенгламанинг ечимларига [a, b] орали=нинг четки a ва b ну=таларида

$$\begin{aligned} m_0 y(a) + m_1 y'(a) &= m_2 \\ g_0 y(b) + g_1 y'(b) &= g_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

чегаравий шартлар берилган былсин, (1) тенглама ва (2) чегаравий шартларни =аноатлантирувчи $y = y(x)$ функция дифференциал тенгламанинг хусусий ечими дейилади.

(1) да берилган p(x), q(x), $f(x)$ коэффициент функцияларнинг [a, b] орали=да узлуксизлиги талаб =илинади. $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2$ чегаравий шарт белгилари былган ызгармас сонлар щисобланади.

Бу ызгармасларга турли =ийматлар берилиши ор=али зарур былган чегаравий шартни щосил =илишимиз мумкин.

+ыйилган чегаравий масаланинг тур\ун ечимини олиш учун бу ызгармаслар =уйидаги шартларни =аноатлантириши лозим:

$$|m_0| + |m_1| \neq 0; \qquad |g_0| + |g_1| \neq 0$$

Айрим пайтларда ечилиши лозим былган масалаларнинг математик моделлари тыртинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар ор=али щам ифодаланиши мумкин.

Амалда кыпинча тыртинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг =уйидаги кыриниши учрайди:

$$y^{IV}(x) = k \cdot f(x)$$

бу ерда k =иймати ани= берилувчи коэффициент щисобланади. Бу дифференциал тенглама учун =уйидаги белгилашларни киритиб, уни иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системасига келтириш мумкин.

$y(x)$ номаълум функцияни $y_1(x)$ функция ор=али белгилаб олиб, =уйидаги алмаштиришлар =иламиз, яъни:

$$\begin{cases} y_1''(x) = y_2(x) \\ y_2''(x) = f(x) \end{cases}$$

Шундай =илиб, тыртинчи тартибли дифференциал тенламанинг ырнига иккита иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини щосил =иламиз. Шунинг учун биз асосан иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг чегаравий шартларни =аноатлантирувчи хусусий ечимларини топишни ырганамиз.

Аввал таъкидлаб ытганимиздек, иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларда хусусий ечимни ажратиб олиш учун иккита =ышимча шарт, яъни чегаравий шартлар берилган былиши лозим. Бундан буён =улайлик учун иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни ечиш масаласини чегаравий масала деб юритамиз.

Чегаравий масалаларни ечиш усулларини =уйидаги гурущларга былиш мумкин:

1. аналитик усуллар
2. сонли-та=рибий усуллар
3. та=рибий-аналитик усуллар.

1. Аналитик усуллар билан олий математика курсида танишганмиз. Унда чизи=ли, бир жинсли былмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бу тенгламанинг хусусий ечими ва мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими йи\индисидан иборатдир. Чизи=ли бир жинсли тенгламаларнинг умумий ечимини топиш учун эса унинг хусусий ечимлари фундаментал системасини топиш керак былади. Хусусий ечимларни дифференциал тенгламаларга мос характеристик тенгламалар ёрдамида топилади. Ю=оридаги барча бажариладиган амаллар дифференциал тенгламанинг кыриниши жуда содда былгандагина бирор бир натижа бериши мумкин.

Демак, аналитик усуллар билан барча иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни ечиш имкони деярли йы=.

2. Сонли-та=рибий усуллар.

Сонли-та=рибий усулларда ечим сонлар ёки сонлар жадвали кыринишида олинади.

Албатта, бунда дифференциал тенгламалар олдин дискрет тенгламалар билан алмаштириб олинади. Сонли усулларнинг имкониятлари бош=а та=рибий усулларга =араганда анча кенгдир. Сонли усуллар икки гурущга былинади:

1) Чегаравий масалаларни Коши масаласига келтирувчи усуллар;
2) Чекли айирмалар усули.

Сонли усуллар ичида энг кып ишлатиладигани чекли айирмали усуллардир.

3. Та=рибий-аналитик усуллар.

Бу усулда дифференциал тенглама ва =ышимча шартлар у ёки бу даражада соддалаштирилиб, масала осонро= масалага келтирилади. Та=рибий-аналитик усулларга Галёркин усули, энг кичик квадратлар усули, коллокация усули, Ритц ва бош=алар киради. Амалда энг кып ишлатиладиган амаллардан бири бу Галёркин усулидир.

**Чекли айирмалар усули**

Демак, бизга =уйидаги

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x) \qquad (1)$$

иккинчи тартибли, ызгарувчан коэффицентли оддий дифференциал тенгламанинг $x\in[a,b]$ орали=нинг четки ну=таларида =ыйилган

$$\begin{cases} m_0 y(a)+m_1 y'(a)=m_2 \\ g_0 y(b)+g_1 y'(b)=g_2 \end{cases} \qquad (2)$$

чегаравий шартларни =аноатлантирувчи ечимини топиш лозим былсин.

Бу ерда p(x), q(x), $f(x)$лар [a, b] орали=да узлуксиз функциялар синфига киради. $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2$- ызгармаслар, яъни чегаравий шарт белгилари.

Ю=оридаги масалани сонли-та=рибий усул щисобланмиш чекли айирмалар усули билан ечиш учун ечим =идириладиган [a,b] орали=да =уйидаги тырни киритамиз, яъни орали=ни координаталари $x_i=a+h$ формула билан ани=ланувчи тугун ну=талар билан былакларга быламиз, бу ерда $h=\frac{b-a}{n}$, $n$-тугун ну=талар сони.

$x_i$ ну=талар учун ю=оридаги (1) тенглама ыринли былгани учун, уни шу ну=таларда ёзиб оламиз:

$$y''(x_i)+p(x_i)y'(x_i)+q(x_i)y(x_i)=f(x_i)$$

+улайлик учун, бу тенгламани =уйидаги кыринишда ёзиб оламиз:

$$y''_i+p_i y'_i+q_i y_i=f_i \qquad (3)$$

Маълумки, изланувчи функциянинг $x_i$ ну=та атрофидаги Тейлор =аторига ёйилмасини =уйидагича ифодалаш мумкин:

$$y_{i+1}=y_i+hy'_i+\frac{h^2}{2!}y''_i+\ldots \qquad (4)$$

ёки

$$y_{i-1}=y_i-hy'_i+\frac{h^2}{2!}y''_i+\ldots \qquad (4')$$

(4) ва (4′) =атордаги икки ва ундан ю=ори тартибли щосилалар =атнашган щадларни ташлаб юборсак, изланувчи функциянинг $x_i$ ну=тадаги щосилалари учун =уйидаги та=рибий щисоблаш формулалари щосил былади.

(4) формуладан $y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$ (5)

(4′ ) формуладан $y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ (6)

формулалар келиб чи=ади.

(5)-формула ынг чекли айирмали формула, (6)-формула чап чекли айирмали формула дейилади.

Бу формулалар O(h) ми=дорли хатоликлар билан бащоланади.

Энди (4) ва (4′ ) Тейлор =аторидаги учинчи ва ундан ю=ори тартибли щосилалар =атнашган щадларни ташлаб юбориб, щосил былган та=рибий тенгликларни айириш щисобига биринчи тартибли щосилани та=рибий щисоблашнинг марказий чекли айирмали формуласини щосил =иламиз:

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h^2} \qquad (7)$$

бу алмаштиришнинг хатолик даражаси O($h^2$) ми=дор билан белгиланади.

Агар ю=оридаги (4) ва (4′ ) формуладаги 2 тартибли щосила =атнашган щадни щам =ышиб олиб, щосил былган тенгликларни щадлаб =ышсак,

$$y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \qquad (8)$$

дан иборат изланувчи функциянинг $x_i$ ну=талари учун иккинчи тартибли щосиласини та=рибий щисоблаш формуласи келиб чи=ади. Бу алмаштиришнинг хатолиги щам O($h^2$) ми=дор билан бащоланади.

(1) дифференциал тенгламадаги $y', y''$ щосилалар ырнига щосил =илинган чекли аймрмали формулаларни =ыямиз ва (1) дифференциал тенглама ырнига щосилалар =атнашмаган ва $y_i$ номаълумлардан иборат тенгламаларни щосил =иламиз.

(7) ва (8) та=рибий катталикларни (1) дифференциал тенгламага =ыямиз:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i .$$

Щосил былган тенгламани щар иккала томонини $h^2$ га кыпайтирамиз ва мос щадларни группалаймиз:

$$y_{i+1}(1 + \frac{p_i h}{2}) - y_i(2 + h^2 q_i) + y_{i-1}(1 - \frac{p_i h}{2}) = f_i h^2$$ былади.

+уйидагича белгилашлар киритиш натижасида:

$$A_i = 1 + \frac{h}{2} p_i \qquad C_i = 1 - \frac{h}{2} p_i \qquad (9)$$
$$B_i = 2 - h^2 q_i \qquad D_i = h^2 f_i$$

=уйидаги тенгламалар системасини щосил =иламиз:

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = D_i \qquad (10)$$

Бу ерда $i = \overline{1, n-1}$ гача ызгаргани учун $i$ га мос =ийматларни бериб, =уйидаги тенгламалар системасини щосил =иламиз:

$$A_1 y_2 - B_1 y_1 + C_1 y_0 = D_1$$
$$A_2 y_3 - B_2 y_2 + C_2 y_1 = D_2$$
$$A_3 y_4 - B_3 y_3 + C_3 y_2 = D_3 \qquad (11)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} = D_n$$

Щосил былган система $y_0, y_1, ..., y_n$ лардан иборат $(n+1)$та номаълумли, $(n-1)$та тенгламадан иборат уч диагоналли чизи=ли тенгламалар системасидан иборат.

Уч диагоналли былишига сабаб, системадаги щар бир тенгламада фа=ат 3 тадан номаълум =атнашган щадлар мавжуд былиб, системада уларнинг жойлашган ырни асосий диагонал, уни пасти ва ю=орисидаги диагоналларга мос келади

Маълумки, тенгламалар системасининг ягона ечимини ани=лаш учун тенгламалар ва номаълумлар сони тенг былиши керак. Шунинг учун иккита тенгламани чегаравий шарт щисобига тылдириб оламиз. $x_0$ ва $x_n$ орали=нинг четки ну=талари учун (2) шартларни =уйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} m_0 y_0 + m_1 y_0' = m_2 \\ g_0 y_n + g_1 y_n' = g_2 \end{cases}$$

$y_0', y_n'$-ларни мос равишда (5) ва (6) чекли айирмалар формулалар билан алмаштирамиз, яъни $y(x)$ни $x = x_0$ ёки $x = a$ ну=тадаги щосиласи учун ынг чекли айирма формуласини, $x = x_n$ ёки $x = b$ ну=тадаги щосиласи учун чап чекли айирма формуласини =ыямиз:

$$\begin{cases} m_0 y_0 + m_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = m_2 \\ g_0 y_n + g_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = g_2 \end{cases}$$

Щосил былган тенгламаларни h га кыпайтириб, ыхшаш щадларни йи\амиз.

$$\begin{cases} (hm_0 - m_1) y_0 + m_1 y_1 = hm_2 \\ (hg_0 + g_1) y_n - g_1 y_{n-1} = hg_2 \end{cases} \qquad (12)$$

+уйидагича белгилашларни киритиб ,

$$A_0 = hm_0 - m_1 \qquad B_0 = m_1$$
$$C_0 = hm_2 \qquad A_n = hg_0 + g_1$$
$$B_n = -g_1 \qquad C_n = hg_2$$

Щосил =илинган тенгламаларни (10) тенгламалар системасига “улаймиз” ва натижада $(n+1)$та номаълумли, $(n+1)$та тенгламадан иборат $y_0, y_1, \ldots, y_n$ номаълумларга нисбатан ёзилган =уйидаги чизи=ли алгебраик тенгламалар системасига эга быламиз:

$$\begin{cases} A_0 y_0 + B_0 y_1 = C_0 \\ A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = D_i \qquad (i = 1, \overline{n-1}) \\ A_n y_n + B_n y_{n-1} = C_n \end{cases} \quad (13)$$

Маълумки, =идирилаётган та=рибий ечимнинг ани=лик даражасини ошириш учун [a,b] орали=да киритилган $x_i = a + ih$ тырнинг $h$ =адамини кичрайтириш лозим. Бу ми=дорни кичрайтириш учун эса ыз навбатида тугун ну=талар $x_i$нинг сонини кескин ошишига олиб келади. Шундай =илиб, =ыйилган масалани зарур ани=ликда ечиш учун щосил =илинган (13) системанинг тартиби минг, айрим щолларда эса ын мингдан щам орти= былиши мумкин.

Ю=орида эслатганимиздек, системанинг щар бир тенгламасида фа=ат учтадангина номаълум =атнашган щадлар мавжуд. +олган номаълумларнинг коэффицентлари 0 га тенг. Агарда биз бундай системани анъанавий усуллар(Гаусс, Крамер, тескари матрица каби) ёрдамида ечмо=чи былсак, ноллар устида маъносиз былган хажмдаги амалларни бажаришимизга ты\ри келади.

Шунинг учун, бундай махсус системаларни ечишнинг махсус усуллари ишлаб чи=илган. Бу усулларнинг энг соддаси, дастурлашга =улайи, хатолар йи\илмасини щосил =илмайдигани “щайдаш” усули щисобланади.

+уйида  “Хайдаш ”  усулининг =ис=ача мощияти билан танишиб чи=амиз.

Махсус, диагоналли системаларни ечишга мылжалланган “Хайдаш” усули икки бос=ичдан иборат:

- номаълум коэффицентларни ани=лаш (ты\ри бос=ичи)
- системанинг ечимларини ани=лаш (тескари) бос=ичи.

1-бос=ичда (13) системанинг номаълум ечимини =уйидаги кыринишда =идирамиз:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (14)$$

бу ерда $\alpha_{i+1}$ ва $\beta_{i+1}$ номаълум щайдаш коэффицентлари.

Номаълум $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ коэффицентларни топиш учун (14) тенгликни $x = x_i$ ва $x = x_{i-1}$ ну=талардаги кыринишини (13) формуладаги иккинчи тенгламага кетма-кет =ыйиб,

$$A_i y_{i+1} - B_i(\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + C_i(\alpha_i(\alpha_{i+1} y_{y+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i) = D_i$$

ёки

$$(A_i - B_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_i\alpha_{i+1}) y_{i+1} + (-B_i\beta_{i+1} + C_i\alpha_i\beta_{i+1} + C_i\beta_i - D_i) = 0$$

ни щосил =иламиз.

Бу чизи=ли ифода айнан 0 га тенг былиши учун, барча коэффицентлар 0 былиши кераклигини щисобга олиб, =уйидаги тенгламаларни щосил =иламиз:

$$A_i - B_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_i\alpha_{i+1} = 0$$
$$-B_i\beta_{i+1} + C_i\alpha_i\beta_{i+1} + C_i\beta_i - D_i = 0$$

Щосил =илинган тенгликлардан $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ номаълум коэффицентларни топиш унчалик =ийин эмас.

$$\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i\alpha_i}; \qquad \beta_{i+1} = \frac{c_i\beta_i - D_i}{B_i - C_i\alpha_i}; \qquad i = \overline{1, n-1} \qquad (15)$$

Мазкур реккурент формуладаги барча $\alpha_{i+1}$ ва $\beta_{i+1}$ ларни ани=лаш учун ёки бош=ача айтганда реккурент формулани “юриши” учун даствлабки $\alpha_1$ ва $\beta_1$ =ийматларни топишимиз керак. Бу =ийматларни топишимиз учун $x = a$ ну=тадаги чегаравий шартдан щосил =илинган (13) формуладаги биринчи тенгламадан фойдаланмиз.

$A_0 y_0 + B_0 y_1 = C_0$ тенгламани щар иккала томонини $A_0$ га былиб, $y_0$ ни топамиз:

$$y_0 = -\frac{B_0}{A_0} y_1 + \frac{C_0}{A_0};$$

Келтириб чи=арилган формулани (14) формуланинг $i=0$ даги =ийматида щосил =илинган $y_0 = \alpha_1, y_1 + \beta_1$ билан солиштириш натижасида

$$\alpha_1 = -\frac{B_0}{A_0}; \quad \beta_1 = \frac{C_0}{A_0}$$ эканлиги келиб чи=ади.

Эслатиб ытамиз, $A_0, B_0, C_0$ ларнинг =иймати олдинро= ани=ланган эди.

$\alpha_1, \beta_1$ лар маълум былгач, барча кейинги $\alpha_i, \beta_i$ лар (15) реккурент формуладан топилади. Бу жараён "щайдаш" усулининг ты\ри бос=ичини ташкил этади.

2-бос=ичда $\alpha_i, \beta_i$ номаълум коэффицентларнинг барча =ийматлари топилгач (14) реккурент формула ёрдамида =идирилаётган ечим $y_i$ ларни топиш мумкин, бу ерда щам реккурент формуланинг ишлаши учун дастлабки =иймат сифатида $y_n$ ни ани=лаш лозим. Бу ишни бажариш учун $x = b$ ну=тадаги чегаравий шартдан щосил =илинган (13) системанинг учинчи тенгламаси

$$A_n y_n + B_n y_{n-1} = C_n$$

ва (14) формуланинг $i = n-1$ ну=тадаги кыринишидан $y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n$ фойдаланамиз, яъни уларни система деб =араб, бу системадан $y_n$ ни ани=лаймиз.

$$y_n = \frac{C_n - B_n\beta_n}{A_n + B_n\alpha_n}$$

+идирилаётган $y_n$ щисоблангач, $y_i = \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1}$ реккурент формуласи ёрдамида ($i = \overline{n-1, 0}$) барча =олган ечимлар топилади.

Бу жараён $i$ га нисбатан тескари тартибда былгани учун, уни щайдашнинг тескари бос=ичи деб атаймиз.

**мс** *Нима учун «щайдаш» усули деб номланади?*

Демак, олдимизга =ыйилган масалани, яъни берилган масалани ызгарувчан коэффицентли, иккинчи тартибли, оддий дифференциал тенгламани чекли айирмали формулалар ёрдамида сонли-та=рибий усулда ечиш учун ишчи алгоритм щосил =илдик.

?мм *Чекли айирмалар усулида щосил =илинган тенгламалар системасини нима учун айнан «щайдаш усули»да ечиш ма=садга мувофи= дейилади. Тушунтириб беринг.*

**Назорат саволлари**

1. Иккинчи тартибли, оддий дифференциал тенгламаларга таъриф беринг?
2. Иккинчи тартибли, оддий дифференциал тенгламалар учун =андай =ышимча шартлар =ыйилади?
3. Чегаравий масалаларнинг ечиш усулларини кандай гурухларга  былиш мумкин?
4. Аналитик усулларга =андай усуллар киради?
5. Сонли-та=рибий  усулларга =андай усуллар киради?
6. Сонли-та=рибий усулларнинг ызига хос хусусиятларини айтинг?
7. Чекли-айирмалар усулининг асосий мощияти нимадан иборат?

## 13-маъруза: Чегаравий масалаларни ечишнинг Галёркин усули.

Ы=ув модули бирликлари:

1. Ызаро ортогонал функцияларни танлаш;
2. Тафовут функцияси;
3. Галёркин усулининг мощияти.

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Та=рибий аналитик усулларнинг ызига хос щусусиятлари;
2. Галёркин усулининг асосий мощияти;
3. Ызаро ортогонал функцияларни танлаш;
4. Тафовут функцияни минималлаштириш шарти.

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Ю=орида таъкидлаб ытганимиздек. Галёркин усули та=рибий-аналитик усуллар гурущига киради. Мазкур усуллар гурущи таркибига кирувчи барча усулларда берилган дифференциал тенгламанинг ечими та=рибий ани=ланган формулалар ёрдамида топилади ва албатта, ечим щам аналитик кыринишда ифодаланади. Айни=са, кыпгина физика ва механика масалаларининг ечимини аналитик кыринишда =идириш лозимлиги, та=рибий аналитик усулларни ырганишга катта эщтиёж ту\диради.

Деярли барча та=рибий-аналитик усулларнинг алгоритмлари бир-бирига ыхшаш былгани учун =уйида Галёркин усулини ырганиш билан чекланамиз.

Бизга яна аввалги мавзудаги каби, =уйидаги чегаравий масала берилган былсин, яъни:

$$y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+q(x)\cdot y(x)=f(x) \qquad (1)$$

тенглама ва

$$\begin{cases} m_0 y(a)+m_1 y'(a)=m_2 \\ g_0 y(b)+g_1 y'(b)=g_2 \end{cases} \qquad (2)$$

чегаравий шартни =аноатлантирувчи ечимни топиш керак.

Олий математика курсидан маълумки, ихтиёрий узлуксиз функцияни чексиз =атор кыринишида ифодалаш мумкин.

$$y(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty}c_i u_i(x)$$

*Галёркин* усулида ушбу =атордаги “*n*” та чекли щад билан чегараланиб, чегаравий масаланинг ечимини =уйидаги кыринишда =идириш таклиф этилади.

$$y(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i u_i(x) \qquad (3)$$

Бу ерда шуни эслатиб ытиш лозимки, усулнинг йыл =ыйилган ягона ва асосий хатолиги чексиз щадли =аторни чекли щадли =аторга алмаштиришдан иборатдир. +атордаги щадлар сонини =анча кып олсак, шунчалик олинган натижалар ишончли ва ани= ечимга я=ин былади. Лекин, иккинчи томондан, =атордан кыпро= щад олишга интилиш =ылда бажариладиган амаллар сонини кескин орттириб юборади. Бу эса йыл =ыйилиши мумкин былган хатолик эщтимолини кескин орттиради. Шунинг учун амалдаги щисоб ишларида $n \le 10$ шартидан келиб чи=илади.

Энди эътиборимизни яна ечимни =идиришга =аратсак, формуладаги $c_1, c_2, \ldots c_n$ -лар =ийматлари номаълум былган ызгармаслар щисобланади.

$u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ лар эса щисоб ишларини бажарувчи томонидан танлаб олинадиган [*a, b*] кесмада икки марта узлуксиз дифференцалланувчи, чизи=ли бо\ли= былмаган функциялар щисобланади, яъни улар базис системасини ташкил =илиб, ызаро ортогоналлик шартини =аноатланириши керак. Функцияларни ортогоналлик шарти =уйидагича ани=ланади.

$$\int_a^b u_n(x) \cdot u_m(x) \cdot dx = \begin{cases} o & агар\_\_ n \neq m \\ \lambda & агар\_\_ n = m \end{cases}$$ былса

бу ерда $\lambda$ -ортогоналлик коэффициенти.

Базис функцияларни танлашда =уйидаги шартларни щисобга олсак, (3) формула билан ани=ланувчи масаланинг ечими $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ызгармасларнинг ихтиёрий танланган щадида щам чегаравий масаланинг (2) чегаравий шартларини =аноатлантиради.

Базис функцияларни танлаш =уйидагича амалга оширилади.

Аввал =уйидаги операторларни муомалага киритайлик:

$$L[y(x)] \equiv y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x),$$
$$L_a[y(x)] = m_0 y(x) + m_1 y'(x)$$
$$L_b[y(x)] = g_0 y(x) + g_1 y'(x)$$

1) $u_0(x)$ функция - берилган чегаравий шартни =аноатлантирувчи функция былиши лозим, яъни:

$$\begin{cases} m_0 u_0(a) + m_1 u_0^{/}(a) = m_2 \\ g_0 u_0(b) + g_1 u_0^{/}(b) = g_2 \end{cases}$$

ёки бош=ача =илиб айтганда $$L_a[u_0(a)] = m_2$$ $$L_b[u_0(b)] = g_2.$$

2) $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ функциялари эса берилган чегаравий шартнинг 1-жинсли щолатини =аноатлантирувчи функциялар былиши лозим,

яъни:

$$\begin{cases} m_0 u_i(a) + m_1 u_i^{/}(a) = 0 \\ g_0 u_i(b) + g_1 u_i^{/}(b) = 0 \end{cases}, \qquad i = \overline{1,n} \qquad \text{ёки} \qquad \begin{matrix} L_a[u_i(a)] = 0 \\ L_b[u_i(b)] = 0 \end{matrix}$$

Базис функцияларни танлаш йылларини =уйидаги мисолда кыриб чи=айлик:

Берилган чегаравий масаланинг чегаравий шартлари =уйидагича берилган былсин:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$u_0(x)$ ни шундай танлаймизки, $u_0(0) = 1, \quad u_0(1) = 0$, яъни берилган чегаравий шартни =аноатлантириши керак.

$u_0(x) = 1 - x$

Худди шунга ыхшаш, бош=а базис функциялар $u_k(x)$ лар эса бир жинсли чегаравий шартларни =аноатлантириш ва чизи=ли бо\ли=сиз былиши керак.

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 \\ u_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u_1(x) = x(1 - x)$$

$$\begin{cases} u_2(0) = 0 \\ u_2(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u_2(x) = x^2(1 - x)$$

**мт** *Чегаравий шартлар y(0)=1 ва y'(π/2)=-1 былган щол учун базис функцияларни муста=ил танланг.*

Ю=орида соддалик учун $n = 2$ деб щисобланди. Биз $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$ базис функцияларни танлашни ыргандик, энди чегаравий масаланинг ечими фа=ат $c_1$ ва $c_2$ номаълум коэффицентларга бо\ли= былиб =олди. $c_1$ ва $c_2$ ызгармасларни эса Галёркин таклиф этган усул билан ани=лашни ташкил =иламиз. Бунинг учун, дастлаб (3) тенгламани (1) дифференциал тенгламага =ыйиб, =уйидаги тафовут функциясини щосил =иламиз:

$$R(x, c_1, c_2) = L[u_0(x)] + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot L[u_k(x)] - f(x) \quad (4)$$

Бу функция чегаравий масала ечимининг ани= ечимдан фар=ини характерловчи ми=дор былиб, у $c_1$, $c_2$ ызгармасларга чизи=ли бо\ли=дир.

Агар тавофут функцияси айнан 0 га тенг былса, та=рибий ечим масаланинг ечими билан устма-уст тушади, лекин тафовутни щамма ва=т щам 0 га айлантириб былавермайди. $c_1$ ва $c_2$ номаълум коэффицентларни тафовут функцияни *min* га эриш-тириш шартидан ани=лаймиз, яъни $min\{R(x, c_1, c_2)\}$ .

Тафовут функцияни минималлаштириш шарти Галёркин усулида =уйидагича ифодаланади.

$$\begin{cases} \int_a^b R(x,c_1,c_2)\cdot u_1(x)\cdot dx = 0 \\ \int_a^b R(x,c_1,c_2)\cdot u_2(x)\cdot dx = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Яъни тафовут функцияни $u_i(x)$, $(i=\overline{1,n})$ базис функцияларга ортогоналлик шартидан фойдаланамиз.

(4) формуладаги *R* –тафовут функциясини (5) системага =ыямиз.

$$\begin{cases} \int_a^b (L[u_0]+c_1\cdot L[u_1]+c_2\cdot L[u_2]-f(x))\cdot u_1(x)\cdot dx = 0 \\ \int_a^b (L[u_0]+c_1\cdot L[u_1]+c_2\cdot L[u_2]-f(x))\cdot u_2(x)\cdot dx = 0 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} \int_a^b L[u_0]\cdot u_1(x)\cdot dx + c_1\cdot\int_a^b L[u_1]\cdot u_1(x)\cdot dx + c_2\cdot\int_a^b L[u_2]\cdot u_1(x)\cdot dx - \\ -\int_a^b f(x)\cdot u_1(x)\cdot dx = 0 \\ \int_a^b L[u_0]\cdot u_2(x)\cdot dx + c_1\cdot\int_a^b L[u_1]\cdot u_2(x)\cdot dx + c_2\cdot\int_a^b L[u_2]\cdot u_2(x)\cdot dx - \\ -\int_a^b f(x)\cdot u_2(x)\cdot dx = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

(6) система учун =уйидагича белгилашлар киритсак

$$m_{11} = \int_a^b L[u_1]\cdot u_1(x)\cdot dx; \qquad m_{12} = \int_a^b L[u_2]\cdot u_1(x)\cdot dx;$$

$$m_{21} = \int_a^b L[u_1]\cdot u_2(x)\cdot dx; \qquad m_{22} = \int_a^b L[u_2]\cdot u_2(x)\cdot dx;$$

$$b_1 = \int_a^b (f(x)-L[u_0])\cdot u_1(x)\cdot dx$$

$$b_2 = \int_a^b (f(x)-L[u_0])\cdot u_2(x)\cdot dx$$

Натижада: $$\begin{cases} m_{11}c_1 + m_{12}c_2 = b_1 \\ m_{21}c_1 + m_{22}c_2 = b_2 \end{cases} \qquad (7)$$

$c_1$ ва $c_2$ номаълумларга нисбатан чизи=ли алгебраик тенгламалар системаси щосил былади. Системанинг коэффицентларини эса ($m_{ij}$) интегралларни щисоблаш ёрдамида топилади. $c_1, c_2$ номаълумларни ЧАТСни ечишнинг бирор усули ёрдамида (одатда Гаусс усулидан фойдаланилади) топамиз. $c_1, c_2$ларни топгач, $y_n(x)$ та=рибий аналитик ечимни

$$y(x) = u_0(x) + c_1 \cdot u_1(x) + c_2 \cdot u_2(x)$$

кыринишида ёза оламиз.

n=3 былган щол учун тафовут функциясини ва унга мос тенгламалар системасини щосил =илинг.

Ю=орида кыриб, ырганиб чи=илган назарий амалларни =уйидаги чегаравий масала устида бажаришни ташкил =илайлик,

Чегаравий масаланинг дифференциал тенгламаси =уйидагича кыринишда берилган былсин:

$$y'' - 2y' + x^3 \cdot y = 12x^2 - 8x^3 + x^7$$

Дифференциал тенгламанинг ечимига =ыйилган чегаравий шартларга эса

$$\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{array}.$$

Ю=орида таъкидлаганимиздек, Галёркин усули билан ишлашдан олдин берилган масаланинг чегаравий шартларни =аноатлантирадиган базис функцияларни танлаб олишимиз лозим:

1) $u_0(x)$ ни берилган чегаравий шарт, яъни $u_0(0) = 0$ ва $u_0(1) = 1$ шартни =аноатлантирадиган =илиб, =уйидагича танлаб оламиз: $u_0(x) = x$.

2) $u_1(x)$ ва $u_2(x)$ ларни эса берилган чегаравий шартга мос бир жинсли шартларни, яъни $u_1(0) = 0,\ u_1(1) = 0$ ва $u_2(0) = 0,\ u_2(1) = 0$ шартни =аноатлантирадиган ва ызаро чизи=ли бо\ли=сиз =илиб, =уйидагича танлаб оламиз:

$$u_1(x) = x(x-1) = x^2 - x;$$
$$u_2(x) = x^2(x-1) = x^3 - x^2.$$

Ишчи формулаларда фойдаланиладиган =уйидаги операторларни щисоблашни ташкил =илайлик.

$$L[u_1] \equiv 2 - 2(2x-1) + x^3(x^2 - x) = 2 - 4x + 2 + x^5 - x^4 =$$
$$= x^5 - x^4 - 4x + 4$$

$$L[u_2] \equiv 6x-2-2(3x^2-2x)+x^3(x^3-x^2)=$$
$$=6x-2-6x^2+4x+x^6-x^5=x^6-x^5-6x^2+10x-2;$$
$$L[u_0] \equiv x''-2x'+x^3x=0-2+x^4=x^2-2$$

Энди =уйидаги тенгламалар системасининг коэффицентлари ва озод щадларини щисоблашни ташкил этайлик.

$$\begin{cases} m_{11}c_1+m_{12}c_2=b_1 \\ m_{21}c_1+m_{22}c_2=b_2 \end{cases} \qquad (7')$$

$$m_{11}=\int_0^1 L[u_1]\cdot u_1(x)dx=\int_0^1(x^5-x^4-4x+4)\cdot(x^2-x)dx;$$
$$m_{12}=\int_0^1 L[u_2]\cdot u_1(x)dx=\int_0^1(x^6-x^5-6x^2+10x-2)\cdot(x^2-x)dx;$$

$$m_{21}=\int_0^1 L[u_1]\cdot u_2(x)\cdot dx=\int_0^1(x^5-x^4-4x+4)\cdot(x^3-x^2)\cdot dx;$$

$$m_{22}=\int_0^1(x^6-x^5-6x^2+10x-2)\cdot(x^3-x^2)\cdot dx;\; b_1=\int_0^1(12x^2-8x^3+x^7-x^2+2)\cdot(x^2-x)dx;$$
$$b_2=\int_0^1(12x^2-8x^3+x^7-x^2+2)\cdot(x^3-x^2)dx;$$

Барча коэффицентлар маълум былгач, (7′) чизикли алгебраик тенгламалар системасини $c_1$ ва $c_2$ номаълумларга нисбатан ечишни Гаусс усули билан ташкил =иламиз. Щосил =илинган натижаларни, яъни $c_1$ ва $c_2$ ларнинг =ийматларини $y=u_0(x)+c_1\cdot u_1(x)+c_2\cdot u_2(x)$ формулага =ыйиб, берилган чегаравий масаланинг та=рибий-аналитик ечимини щосил =иламиз.

**мс** *Галёркин усулида ечим аналитик кыринишда =идирилади, у щолда ечимнинг хатолиги =аердан келиб чи=ади?*

### Назорат саволлари

1. Та=рибий-аналитик усулларга =андай усуллар киради?
2. Та=рибий-аналитик усулларнинг ызига хос хусусиятларини айтинг?

3. Галёркин усулининг асосий мощияти нимадан иборат
4. Галёркин усулидаги хатолик манбаи нимадан иборат?
5. Галёркин усулининг ишчи алгоритми?
6. Галёркин усулида хатоликни камайтириш имкониятлари борми?
7. Галёркин усулида ортогонал функциялар =андай танланади?

## 14-маъруза: Хусусий щосилали дифференциал тенгламалар ва уларнинг типлари.

Ы=ув модули бирликлари:

1. Хусусий хосилали дифференциал тенгламалар;
2. Хусусий хосилали дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Хусусий хосилали дифференциал тенгламага келтирилувчи амалий жараёнлар;
2. Хусусий хосилали дифференциал тенгламанинг умумий кыриниши;
3. Хусуий хосилали дифференциал тенгламани типларга ажратиш;
4. Хусусий хосилали дифференциал тенгламаларни ечишнинг ани= ва та=рибий усуллари

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Олий математика курсидан маълумки, агар дифференциал тенгламадаги номаълум функция икки ва ундан орти= аргументларга бо\ли= былса, бундай дифференциал тенгламаларни хусусий щосилали дифференциал тенгламалар деб аталади. Демак, бундай тенгламаларда функциянинг эркли аргументи быйича хусусий щосилалари =атнашади. Амалда хусусий щосилали дифференциал тенгламалар жуда кып физик жараёнларни тащлил =илишда ишлатилади.

Масалан: Турар жой бинолари ва корхоналар =уришда, кып =аватли биноларнинг исси=лик режимини са=лаш ма=садида ечиладиган \овак тыси=ларнинг исси=лик ыtказувчанлик масаласи (бунда жисм сиртига ыtказиладиган исси=лик таъсири ва=т быйича жуда тез ызгариши ва жисм щар хил материаллар аралашмасидан иборат былиши мумкин), ингичка торлар, щар хил материаллардан ишланган таё=лар ва бош=а хилдаги конструкцияларнинг кындаланг ва быйлама тебранишлари жараёнлари, нефть ва газ конларидаги ишлаб чи=аришни ташкиллаштириш ва бош=аришни автоматлаштириш ма=садида =аралаётган =атлам параметрларини ани=лик кырсаткичини янада яхшилаш, =увурлардаги =овуш=о= сую=ликларнинг ностационар щаракати жараёнлари. Бу жараёнларнинг барчаси учун яратилган математик моделлар – хусусий щосилали дифференциал тенгламалар ор=али ифодаланади. Демак, бундай тенгламаларни ечиш алгоритмларини билиш, уларни ечишни ташкил этувчи амалий дастур таъминотларини яратиш масаласи давримизнинг \оят мущим масалаларидан бири щисобланади.

Оддий дифференциал тенгламалар каби хусусий щосилали дифференциал тенгламалар щам чексиз кып ечимларга эга. Улар умумий ечимлар дейилиб, хусусий ечимлар умумий ечимлардан маълум шартлар асосида ажратилади. Бу =ышимча шартлар тенглама =аралаётган сощанинг одатда чегарасида берилади. Агар =ышимча шартлар соща чегарасида берилса, бундай масалага чегаравий масала дейилади. Агар чегаравий шартлар берилмасдан фа=ат бошлан\ич шарт берилса, бундай масалага хусусий щосилали дифференциал тенглама учун Коши масаласи дейилади. Бунда масала чексиз сощада =аралади. Масалада щам бошлан\ич, щам чегаравий шартлар =атнашса, бундай масалага аралаш масала дейилади.

Хусусий щосилали дифференциал тенгламаларни умумий щолда =уйидагича ёзиш мумкин(=улайлик учун фа=ат хусусий щолни, яъни иккинчи тартибли щосилаларга нисбатан чизи=ли тенгламаларнигина =араймиз):

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \qquad (1)$$

Бунда $x, y$-эркли ызгарувчилар, $u(x, y)$-=идирилаётган функция, индексдаги $x, y$лар $u$ функциянинг $x$ ва $y$ быйича щосилаларини англатади. $a, b, c, d, e, f, g$- -коэффицентлар умуман $x, y$ ва $u$ га бо\ли= функциялар былиши мумкин. Агар улар ызгармас сонлардан иборат былса, ызгармас коэффицентли, $x$ ва

$y$ га бо\ли= функциялар былса ызгарувчи коэффицентли ва нищоят, $x, y$ ва $u$ га бо\ли= функциялар былса, квазичизи=ли дейилади.

(1) тенгламанинг типи $D = b^2 - ac$ дискриминантнинг ишораси билан ани=ланади. Агар $D > 0$ былса, тенглама гиперболик типга, $D = 0$ былса, тенглама параболик типга, $D < 0$ былса, тенглама эллиптик типга тегишли былади. Тенгламанинг типини ани=лаш жуда мущим ащамиятга эга, чунки бир хил типдаги щар хил тенгламалар жуда кып умумий хусусиятларга эга былади. Масалан: бир жинсли ингичка стержен $x$ абцисса быйича щар бир t ва=т моментида =уйидаги исси=лик тар=алувчанлик тенгламасини =аноатлантиради. Энди бу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \text{г}}{\partial x^2} = F(x, t)$$

тенгламанинг =айси типга тегишли эканини ани=лаш мумкин. $A = -a^2, B = 0, C = 0$ былгани учун $D = b^2 - ac = 0$, демак бундай тенгламалар параболик типга тегишли былади.

Хусусий щосилали дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари худди оддий дифференциал тенгламалардаги каби, бир неча гурущга былинади:

1. Ани= усуллар;
2. Та=рибий-аналитик усуллар;
3. Сонли-та=рибий усуллар;

Ани= усуллар билан асосан чизи=ли, хусусий щосилали тенгламалар содда кыринишдаги чегаравий ва бошлан\ич шартлар билан берилганда яхши натижалар олиш мумкин. Бу гурущга ызгарувчиларни ажратиш тар=алувчи тыл=инлар, манба функциялари, Лаплас алмаштиришлари ва бош=а усуллар киради. Та=рибий- аналитик усуллар билан умумий кыринишдаги тенгламаларни ечиш имконияти деярли йы=, фа=ат айрим хусусий щоллардагина бирор бир натижа чи=иши мумкин.

**мс** *Нима учун хусусий хосилали дифференциал тенгламаларни типларга ажратамиз?*

## Назорат саволлари

1. +андай тенгламалар математик-физика тенгламалари деб аталади?

2. Математик-физика тенгламаларини та=рибий щисоблаш зарурияти =аердан келиб чи=ади?
3. Математик-физика тенгламаларини =андай типларга ажратилади?

## 15-маъруза: Гиперболик типдаги тенгламалар

Ы=ув модули бирликлари:

1. Гиперболик типдаги тенгламалар
2. Гиперболик типдаги тенгламаларни ечишнинг тыр усули
3. Ошкор ва ошкормас схемалар

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Гиперболик типдаги тенгламалар билан ифодаланадиган амалий жараёнлар;
2. +ышимча шартларнинг =андай берилиши;
3. Тыр соща тушунчаси, ички ва тугун ну=талар;
4. Ошкор ва ошкормас схемаларга мос шаблонлар;
5. Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкор схемалар ёрдамида ечиш алгоритми;
6. Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемалар ёрдамида ечиш алгоритми

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Ю=орида таъкидлаб ытканимиздек, амалда учрайдиган барча жараёнлар ызларининг хусусиятларини ифодаловчи математик моделларга эгадирлар. Масаланинг мощиятига =араб, бу моделларни ифодаловчи математик тенгламалар турли кыринишда, жумладан, мураккаб жараёнларнинг математик моделлари математик-физика тенгламалари ор=али ифодаланади.

Агар тебранувчан характердаги жараёнлар, ани=ро= =илиб айтадиган былсак, турли хил ингичка торлар, щар хил матреиаллардан ишланган таё=лар ва бош=а хилдаги конструкцияларнинг кындаланг ва быйлама тебранишлари жараёнлари ырганилаётган былса, бундай масалаларнинг математик моделлари гиперболик типдаги тенгламаларга келтирилади.

Тебранишлар эса сыниб борувчи ёки аксинча былиши мумкин. Хусусий щолда гиперболик типдаги тенгламаларни =уйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (2)$$

Бунда $u(x,t)$-изланувчи функция, $t$-ва=т, $x$-чизи=ли координата, $a^2$-ызгармас коэффициент. (2)-кыринишдаги тенгламалар учун одатда иккита бошлан\ич ва иккита чегаравий шарт берилади. +аралаётган соща $[a,b]$ кесмадан иборат былса, $u(x,t)$ функция =уйидаги бошлан\ич шартларни:

$$u(x,0) = f_1(x) \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x)$$

ва =уйидагича чегаравий шартларни:

$$u(a,t) = \varphi_1(t) \qquad u(b,t) = \varphi_2(t)$$

=аноатлантириши керак.

Умуман барча тип тенгламалар учун чегаравий шартлар =уйидаги кыринишларда былиши мумкин:

1) Дирихле масаласи: $u(x,y)|_{\Gamma} = \gamma^{(0)}$

2) Нейман масаласи: $\frac{\partial u(x,y)}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma} = \gamma^{(1)}$

3) Аралаш масала: $\alpha u(x,y) + \beta \frac{\partial u(x,y)}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma} = \gamma^{(2)}$

Бу ерда $u(x,y)$-изланаётган функция;

$\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$-=ийматлари маълум функциялар;

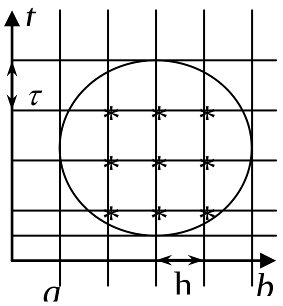
$\Gamma$-ечим =идирилаётган соща чегараси;

$\vec{n}$-сощага ытказилган нормал бирлик вектор;

$\alpha, \beta$-чегаравий шарт белгилари.

(2) кыринишдаги хусусий щосилали дифференциал тенгламаларни ечиш учун сонли усуллар ичида энг кенг тар=алган усул чекли айирмалар усулидан фойдаланамиз. Тенгламада =атнашувчи функция иккита аргументга бо\ли= былгани учун, унинг ани=ланиш сощаси текисликда былади. Бу сощани $G$-деб, унинг чегарасини эса $\Gamma$-деб белгилайлик. Чекли айирмалар усулида дастлаб $G$-соща чизи=лар ёрдамида былакларга былинади. Былиниш ну=талари тугун, улардан ташкил топган тыпламга эса тыр деб аталади.

$G$ -соҳанинг ичида ётган ну=талар тугун ну=талар, $\Gamma$-чегарада




ётган ну=таларга чегаравий ну=талар деймиз.

Тыр сощани =уйидагича ташкил этамиз: $[a,b]$ кесмани $x_i = a + ih\,(i = 0,1,2,...,n)$ тугун ну=талар ёрдамида $t$-быйича эса $[0,T]$ орали=ни $t_j = j\cdot\tau$ былакларга быламиз ва текис тыр щосил =иламиз.

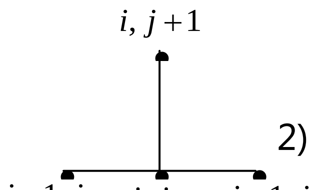
Бу ерда $h = \dfrac{b-a}{n}$, $\tau = \dfrac{T}{m}$ га тенг. Демак, бу ерда $h$ ва $\tau - x$ ва $t$ быйича =адамлардан иборат.

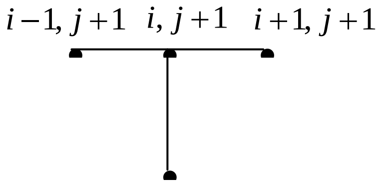
$G$ сощада ётган $(x_i, t_i)$ тугун ну=талар учун (2) тенгламани =уйидаги кыринишда ёзиб оламиз.

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_i)}{\partial t_j^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x_i^2} + f(x_i,t_j) \quad (2')$$

Тыр сощада тыр функцияси деб аталувчи функцияларни =араймиз. Улар $G$ сощада ани=ланган функциялар ырнида =аралувчи дискрет функциялардан иборат былади, яъни оддий дифференциал тенгламалардаги каби хусусий щосилали чекли айирмалар билан алмаштирилади. Щосилаларни алмаштиришда чекли айирмалардан ишлатилувчи тугун ну=талар мажмуасига шаблон дейилади. Бир хил щосилалар учун бир неча хил шаблон асосида чекли айирмалар тузиш мумкин. Шундай =илиб, дифференциал тенглама берилган бошлан\ич ва чегаравий шартларда чекли айирмали масалага келтирлади.

Биз щосил =илган тыр сощадаги щар бир тугун ну=таларда $u(x,t)$ ечимнинг =ийматлари $u(x_i,t_j)$дан иборат былади. (2′ ) тенгламани аппроксимация =илиш учун $(x_{i-1},t_j)$; $(x_i,t_j)$, $(x_{i+1},t_j)$; $(x_i,t_{j+1})$ ну=талардан ташкил топган шаблонни ишлатамиз. Бу шаблонда (2′ ) тенгламадаги хусусий щосилаларни =уйидаги схемалар ёрдамида чекли айирмалар билан алмаштирамиз.

1) 


2) 

1-схемадан кыриниб турибдики, $j+1$ =атламдаги ечим $j$ =атламдаги ечимлар ор=али ани=, ошкор шаклда ифодаланади. Шунинг учун бундай схемаларга ошкор схемалар дейилади. Ошкор схемаларда олдинги =атламдаги хатоликлар йи\индиси кейинги =атламга ытганлиги учун, бир неча =атламдан сынг хатоликлар мажмуаси щосил былади ва кутилган натижа чи=маслиги мумкин. Шунинг учун амалда ошкор схемалардан камро= фойдаланган маъ=ул.

**мс** *Хусусий щосилали дифференциал тенгламаларни ечишда ошкор схемали алмаштиришлар бажариш хатоликлар йи\индисини щосил =илади, у щолда нима учун ошкор схемалардан фойдаланилади?*

2-схемада эса щар бир =атламнинг учта ну=тадаги номаълум ечимлари, ызидан олдинги яъни щар бир кейинги =атламдаги ечимларни олдинги =атламдаги 1 та ечим ор=али ифодаланади, яъни щар бир кейинги =атламдаги ечимларни одинги =атламдаги ечимлар ор=али бевосита бирданига ошкор щолда ифодалаб былмайди. Бундай схемаларга ошкормас схемалар дейилади. Ошкормас схемада щар бир =атламдаги щисоблаш хатоликлари бош=а =атламга узатилмайди. Шунинг учун, бундай схемаларда щосил былган щисоблаш формулалари бирмунча мураккаб былса щам, лекин хатолик кам былади. Демак, амалда ошкормас схемалардан фойдаланган маъ=улро=. (2′ ) тенгламадаги $\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t_j^2}; \frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x_i^2}$ ифодалар ырнига (=уйидаги барча алмаштиришлардан =улайлик учун $u_{i,j}$ каби ёзувлар ырнида $u_i^j$ ёзувлардан фойдаланамиз)

$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t_j^2} \approx \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2}$ ва $\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x_i^2} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + 2u_{i-1}^j}{h^2}$ чекли айирмали формулаларни =ыйиб, (2′ ) тенгламаларга мос =уйидаги чекли-айирмали тенгламаларни щосил =иламиз.

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + 2u_{i-1}^j}{h^2} + f(x_i,t_j) \qquad (3)$$

(3) тенгламани $u_i^{j+1}$ га нисбатан ечиб,

$$u_i^{j+1} = 2u_i^{j-1} + \frac{\tau^2 a^2}{h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) \ (4)$$

ишчи формулани щосил =иламиз. Бу ерда $j=\overline{1,m-1}$, $i=\overline{1,n-1}$.

Щосил былган (4) формула ошкор схема асосида щосил =илинган былиб, берилган хусусий щосилали дифференциал тенгламанинг та=рибий ечимини щисоблайди. Ю=орида таъкидланганидек, ошкор схемаларда щосил =илинган та=рибий ечим муайян хатоликлар мажмуасини ызида са=лайди. Йыл =ыйилиши мумкин былган хатоликни бирмунча камайтириш ма=садида, ошкормас схемали алмаштиришлар ёрдамида берилган хусусий щосилали дифференциал тенгламани =андай ечиш мумкинлигини кыриб чи=амиз. Бунинг учун $(x_i, t_j)$ тугун ну=талар учун

$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x_i^2} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}$ чекли-айирмали формулани (2′ ) формулага =ыядиган былсак,

$$\frac{u_{i0}^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + f(x_i, t_j) \quad (5)$$

формула щосил былади.

(5) формула учун керакли алмаштиришларни бажариб,

$$\frac{\tau^2}{h^2} a^2 u_{i+1}^{j+1} - (2\frac{a^2\tau^2}{h^2} - 1)u_i^{j+1} + \frac{a^2\tau^2}{h^2} u_{i-1}^{j+1} = -f_{ij}\tau^2 - 2u_i^j + u_i^{j-1} \qquad (6)$$

ва =уйидаги белгилашларни киритиб,

$$A_i = \frac{\tau^2}{h^2} a^2, B_i = \frac{2\tau^2 a^2}{h^2} - 1, C_i = \frac{a^2\tau^2}{h^2} \text{ ва } F_i = -f_{ij}\tau^2 - 2u_i^j + u_i^{j-1};$$

(бу ерда -щар бир $j$ ну=та учун $(j = 1,2,3,..., m-1)$ ) =уйидаги уч диогоналли тенгламалар системасини щосил =иламиз:

$$A_i \cdot u_{i+1}^{j+1} - B_i \cdot u_i^{j+1} + C_i \cdot u_{i-1}^{j+1} = f_i \qquad (7) \qquad (i = 1,2,..., n-1)$$

Щосил былган тенгламалар системаси $j$ нинг щар бир =ийматида $n-1$ та тенглама ва $n+1$ та номаълумлардан иборат. Етишмаётган 2 та тенгламани чегаравий шартлардан оламиз. Натижада $n+1$ та номаълумли $n+1$ та тенгламадан иборат уч диагоналли тенгламалар системаси щосил былади. “Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни щайдаш усули билан ечиш” мавзусида таъкидлаб ытилганидек, ю=оридаги кыринишдаги тенгламалар системасини щайдаш усули билан ечиш учун номаълум ечимни $u_i^{j+1} = \alpha_{i+1} u_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}$ (8) кыринишда =идирамиз. Бунда $\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{B_i} - C_i \cdot \alpha_i$; $\beta_{i+1} = \frac{A_i - \beta_i - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_i}$ формулалар ёрдамида топилади. $(i = 1,2,..., n-1)$.

Берилган чегаравий шартлардан биринчисини, яъни $x = a$ ну=тадаги $u(a,t) = \varphi_1(t)$ шартни ва (8) формулани та==ослаб, $\alpha_1 = 0, \beta_1 = \varphi_1(t)$ номаълум коэффицентларнинг бошлан\ич =ийматлари щосил =илинади. Натижада, $\alpha_{i+1}$, $\beta_{i+1}$ коэффицентлар барчаси кетма-кет щисобланади.

Иккинчи чегаравий шартдан, яъни $u(b,t)=\varphi_2(t)$ дан $u_n^j=\varphi_2(t)$ тенгликни щосил =иламиз. Сынгра,

$$u_i=\alpha_{i+1}\cdot u_{i+1}^j+\beta_{i+1} \quad (9) \qquad (i=n-1,...,0)$$

формула ёрдамида =олган барча тенгламанинг =идирилаётган ечимлари, номаълум $u_i^j$ лар щисобланади.

### Назорат саволлари

1. Ошкор ва ошкормас схемаларнинг асосий мощияти нимадан иборат?
2. +андай жараёнлар гиперболик типдаги тенгламалар ор=али ифодаланади?
3. Гиперболик типдаги тенгламаларнинг умумий кыриниши =андай?
4. Гиперболик типдаги тенгламалар учун =андай =ышимча шартлар берилади?
5. Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкор схемали алмаштиришлар ёрдамида ечиш учун керак быладиган ишчи формулалар щосил =илинг.
6. Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар ёрдамида ечиш учун керак быладиган ишчи формулалар щосил =илинг.

## 16-маъруза: Параболик типдаги тенгламалар.

Ы=ув модули бирликлари:

1. Параболик типдаги тенгламалар
2. Параболик типдаги тенгламаларни ечишнинг тыр усули
3. Ошкор ва ошкормас схемалар

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Параболик типдаги тенгламалар билан ифодаланадиган амалий жараёнлар;
2. Параболик типдаги тенгламаларни ечишнинг тyр усули, усулнинг мощияти;
3. Ошкор ва ошкормас схемаларнинг ишчи алгоритми ща=ида маълумотга эга быладилар.

Агар текширилаётган жараёнда ва=т быйича щаракат ызгармас былса, бундай жараёнларнинг математик модели параболик типдаги тенгламалар ор=али ифодаланади. Бундай жараёнларга =увурлардаги =овуш=о= сую=ликларнинг ностационар щаракати жараёнлари, \овак тыси=ларнинг исси=лик ытказувчанлик масалалари, диффузия жараёнли ва бош=алар киради.

Параболик типдаги тенгламаларни хусусий щолда =уйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (1)$$

бу ерда $u(x,t)-$изланаётган функция, $f(x,t)-$масаланинг физик мощиятидан келиб чи=иб танланувчи манба функция, $a^2-$ызгармас коэффициент.

Демак, ю=оридаги барча жараёнларда ва=т быйича щаракат тезлиги ызгармас былиб, тезланиш 0 га тенг. (1) тенгламани

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (2)$$

бошлан\ич шартларни ва $[a,b]$ орали=нинг четларида

$$u(a,t) = \varphi_1(t) \text{ ва } u(b,t) = \varphi_2(t) \qquad (3)$$

чегаравий шартларни =аноатлантирувчи ечимини топиш керак. Берилган чегаравий шартлар, биз ю=орида келтирган чегаравий шарт турларига кыра, Дирихле масаласига мос келади. Худди гиперболик типдаги каби, параболик типдаги тенгламаларни щам тyр усулида ечиш мумкин. Бунинг учун, дастлаб, $x$ ва $t$ ы=лар быйича тyр киритамиз.

$$x_i = a + i \cdot h; \qquad h = \frac{b-a}{n};$$

$$t_j = j \cdot \tau; \qquad \tau = \frac{T}{m};$$

бу ерда- $n-[a,b]$ орали=ни былишлар сони;

$h - x$ нинг ызгариш =адами;

$T -$ =аралаётган ва=т орали\и;

$m -$ ва=т былаклари сони;

$\tau -$ ва=т быйича ызгариш =адами.

Тыр сощасидаги щар бир $u(x_i, t_j)$ ну=та (1) тенгламани =аноатлантиргани учун уни =уйидаги кыринишда ёзиб оламиз.

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t_j} = a^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t_j} + f(x_i, t_j) \qquad (4)$$

(4) тенгламадаги $\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t_j}$ ва $\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x_i^2}$ хусусий щосилалар ырнига (=улайлик учун $u(x_i, t_j) = u_i^j$, $f(x_i, t_j) = f_{ij}$ деб белгилаб оламиз) $\frac{\partial u_i^j}{\partial t_j} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}$; $\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x_i^2} \approx \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$ чекли айирмали формулаларни =ыйиб, =уйидаги интеграллаш сощасининг тугун ну=таларида ёзилган

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + f_{ij}$$

тенгламани щосил =иламиз. Уни $u_i^{j+1}$га нисбатан ечиб,

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\tau \cdot a^2}{h^2}[u_{i+1}^j - u_i^j + u_{i-1}^j] + \tau \cdot f_{ij} \qquad (5)$$

ишчи формулани щосил =иламиз.

(5) формуладан кыриниб турибдики, щар бир $j+1$ =атламдаги ечимлар $j$ =атламлар ор=али топилади ва демак, у ошкор схемали алмаштириш щисобланади. Маълумки, бундай схемали алмаштиришлар натижасида барча олдинги =атламларда йыл =ыйилган хатоликлар йи\индиси щосил былади. Бунинг натижасида, ва=т факторини ошиб бориши билан олинаётган та=рибий ечимларнинг ишончлилик даражаси кескин камайиб боради. Шунинг учун топиладиган ечимнинг ани=лилигини ошириш ма=садида ошкормас чекли айирмали схемаларни ишлатиш ма=садга мувофи=дир. Шунинг учун (4) формуладаги $\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x_i^2}$ хусусий щосила ырнига $\partial^2 u_i^j \approx \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2}$ чекли айирмали формулани =ыйиб, $\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a^2 \cdot \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + f_{ij}$ тенгламани щосил =иламиз.

Керакли алмаштиришлар бажарсак, у =уйидаги кыринишга келади:

$$\frac{a^2 \cdot \tau}{h^2} \cdot u_{i-1}^{j+1} - (2\frac{a^2 \cdot \tau}{h^2} - 1) \cdot u_i^{j+1} + \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2} \cdot u_{i+1}^{j+1} = -\tau \cdot f_{ij} - u_i^j \qquad (6)$$

(6) тенгламада

$$A_i = \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2}; \quad B_i = \frac{2 \cdot a^2 \cdot \tau}{h^2} - 1; \quad C_i = \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2}; \quad F_i = -\tau \cdot f_{ij} - u_i^j;$$

белгилашлар киритиб,

$$A_i \cdot u_{i-1}^{j+1} - B_i \cdot u_i^{j+1} + C_i \cdot u_{i+1}^{j+1} = F_i \qquad (7)$$

тенгламалар системасини щосил =иламиз.

Щосил былган (7)-тенгламалар системаси $j$ нинг щар бир =ийматида $n-1$ та тенглама ва $n+1$ та номаълумлардан иборат. Етишмаётган 2 та тенгламани чегаравий шартлардан оламиз. Натижада $n+1$ та номаълумли $n+1$ та тенгламадан иборат уч диогоналли тенгламалар системаси щосил былади. Бундай системани “щайдаш” усули билан ечиш ма=садга мувофи= былиб, бу жараён гиперболик тенгламалар учун тыла кырсатилди. Ю=оридаги (7) системани шу тарзда ечиб, барча =идирилаётган ечимлар ани=ланади.

***мс*** *Математик моделлари параболик типдаги тенгламалар билан ифодаланувчи жараёнларни санаб беринг.*

**Назорат саволлари**

1. Параболик типдаги тенгламаларни умумий кыринишда =андай ифодаланади?
2. Параболик типдаги тенгламаларни ошкор схемали алмаштиришлар ёрдамида ечиш учун керак быладиган ишчи формулаларни щосил =илинг.
3. Параболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар ёрдамида ечиш учун керак быладиган ишчи формулаларни щосил =илинг.

## 17-маъруза: Эллиптик типдаги тенгламалар

Ы=ув модули бирликлари:

1. Эллиптик типдаги тенгламалар
2. Эллиптик типдаги тенгламаларни ечишнинг тыр усули

Ани=лаштирилган ы=ув ма=садлари.

Талабалар ушбу мавзуни тыла ызлаштирганларидан сынг:

1. Эллиптик типдаги тенгламалар билан ифодаланадиган амалий жараёнлар;
2. Эллиптик типдаги тенгламаларни ечишнинг тыр усули, усулнинг мощияти;
3. Зейдел усулининг мощияти

ща=ида маълумотга эга быладилар.

Маълумки, =аралаётган масалада ва=т фактори кучсиз роль ыйнаса, яъни жараённинг математик моделида ва=тни ифодаловчи параметрлар =атнашмаса, бундай жараёнларни стационар жараёнлар деб аталади. Стационар жараёнларга =урилиш механикасини зыри=иш ва эгилиш масалаларини киритиш мумкин. Стационар жараёнларнинг математик моделлари эллиптик типдаги =ыйидаги тенгламалар ор=али ифодаланиши мумкин(икки ылчовли фазода):

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y)$$

(1) тенгламани Пуассон тенгламаси щам аталади. Тенгламанинг чап томонида турган ми=дорни

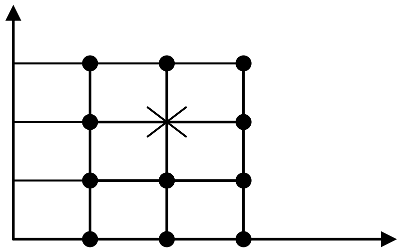
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Лаплас оператори ор=али ифодаланиб, ёзилган =уйидаги щоли $\Delta u(x,y) = 0$ ёки $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ (2)

Лаплас тенгламаси деб аталади.

Икки ылчамли (1) ва (2) тенгламаларни ечимини икки ылчамли G сощада ани=ланган деб фараз =иламиз. Соща чегараси Г ёпи= чизи= билан чегараланган деб щисоблаймиз.

Соддалик учун интеграллаш орали\ини ты\ри тыртбурчак деб оламиз.



Ю=орида таъкидлаганимиздек Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласи берилган тыртбурчак соща учун =уйидагича былади:

$u(x,y)_{x=a}=f_1(y)$ $u(x,y)_{y=c}=f_3(x)$

$u(x,y)_{x=b}=f_2(y)$ $u(x,y)_{y=d}=f_4(x)$ (3)

Бу ерда $f_1(y)$, $f_2(y)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ лар интеграллаш сощасининг чегаралардаги берилган функциялари, дастлаб =аралаётган х ва у ты\ри чизи=лар быйича $x_i= a+ih$, $y_i= c+j\tau$ тугун ну=талар ёрдамида тыр киритамиз. Чизмада чегаравий ну=талар «•» белгиси билан ички ну=талар эса «×» белгиси билан белгиланган. Ю=орида $h= (b-a)/n$, $\tau=(d-c)/m$ былиб n,m – мос равишда $ox,oy$ ы=лар быйича тугун ну=талар учун =уйидаги тенгламалар ыринли былади:

(4) даги иккинчи тартибли щусусий щосилалар ырнига керакли чекли айирмали формулаларни =ыямиз ва =уйидаги :

$$\frac{u_{i+1}^{j}-2u_i^j+u_{i-1}^{j}}{h^2}+\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\tau^2}=f(x_i,y_j)(4')$$

чекли айирмали тенгламаларни щосил =иламиз.

Соддалик учун (физик маъносига кыра мумкин) $h=\tau$

$$\frac{\partial^2 U(x_i,y_j)}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 U(x_i,y_j)}{\partial y_j^2}=f(x_i,y_j)(4)$$

деб олайлик.

У щолда (4') тенгламани ечиб,

$$u_i^j=\frac{1}{4}(u_{i+1}^{i}+u_{i-1}^{j}+u_i^{j+1}+u_i^{j-1}-h^2f(x_i,y_j)\qquad(5)$$

n-1 та тенгламадан n+1 номаълумдан иборат чизи=ли алгебраик тенгламалар системасини щосил =иламиз. Етишмаган тенгламалар ырнига (3) чегаравий шартлардан фойдаланамиз.

Тенгламаларнинг кыринишини тащлил =илиб, уни та=рибий-итерацион усуллар гурущига кирувчи Зейдель усули билан ечиш =улай эканлигини кырамиз.

Зейдель усули ща=ида =ис=ача назарий маълумотлар.

Зейдель усули 1874 йилда тани=ли немис математиги Ф. Зейдель томонидан ишлаб чи=илган былиб, уни итерация усулининг такомиллашган кыриниши деб =абул =илиш мумкин. Шунинг учун бу усулни кыпинча итерация усули деб щам юритилади.

Усулнинг мощиятига кыра номаълум $u_i^j$ ечимларни топиш учун

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k+1)} - h^2 f_i^{\,j}\right] \quad (10)$$

итерацион формулалардан фойдаланилади. Бунда =авслар ичига ёзилган ю=ори индекс я=инлашиш номерини билдиради. Я=инлашишлар сони ортиб борганда, яъни k етарлича катта былганда, $u_{i,j}^{(k)}$ ечимлар $u_{i,j}$ ани= ечимларга интилади.

Итерацияларни max $\left|u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k+1)}\right|$<е, i=1..n-1, j=1..m-1,

шарти бажарилгунча давом эттириш мумкин. Бунда е ихтиёрий, олдиндан танлаб олинадиган кичик сон- ечим ани=лиги.

Ю=оридаги (10) формулани фойдаланишга =улай кыринишда ёзиб олайлик.

$$u_i^j = \frac{1}{4}\left[u_{i-1}^j + v_{i+1}^j + v_i^{j+1} + u_i^{j-1} - h^2 f_i^{\,j}\right]$$

Бу ерда $v_i^j$ лар усулнинг мощиятига кыра аввалги я=инлашишдаги =ийматларни олади.

Дастлабки я=инлашиш сифатида ихтиёрий сонларни олишимиз мумкин. Масалан, тырнинг барча тугун ну=таларида $u_{i,j}=0$ дейишимиз мумкин. Шундан сынг барча я=инлашишлар топилади ва ечимнинг ани=лигини щар сафар текшириб турилади.

**мт** *Эллиптик типдаги тенгламаларни ечишда ишлатиладиган Зейдель усулининг мощиятини тушунтириб беринг.*

## Назорат саволлари

1. +андай жараёнлар эллиптик типдаги тенгламалар ор=али ифодаланади?
2. Эллиптик типдаги тенгламалар умумий щолда =андай кыринишда былади?
3. Эллиптик типдаги тенгламалар учун =андай =ышимча шартлар берилади?

4. Эллиптик типдаги тенгламаларни тыр усулида ечишнинг мощиятини тушунтириб беринг.

### Фойдаланилган адабиётлар рыйщати.


*Асосий адабиётлар*

1. Н. С. Бахвалов и др. «Численные методы». М.Наука 1987
2. В. П. Демидович и др. «Основы вычислительной математики» М.Наука 1987
3. Березин И. С. и др. «Методы вычислений» М.Наука 1996
4. Бойзо=ов А, +аюмов Ш, «Щисоблаш математикаси асослари», Ы=ув =ылланма. Тошкент 2000.
5. Исроилов М. «Щисоблаш усуллари» Тошкент. Ызбекистон. 2003.

*+ышимча адабиётлар*

6. Б.Х. Хыжаёров «+урилиш масалаларини сонли ечиш усуллари» Тошкент 1995.
7. Сидди=ов А. «Сонли усуллар ва программалаштириш» Ы=ув =ылланма. Тошкент 2001.

*Интернет сащифалари*

8. www.exponenta.ru
9. www.techno.edu.ru
10. www.toehelp.ru
11. www.math.msu.su
12. www.colibri.ru
13. www.books.atrunet.ru

Мундарижа